

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

Control fraccional para un péndulo invertido

TRABAJO RECEPCIONAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

PRESENTA
EDER SERGIO MARTÍNEZ ALONSO

Director del trabajo recepcional
Dr. Marcos Ángel González Olvera

México, D.F. agosto de 2016.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

*A quienes me dieron la vida... a mis padres, **Concepción Alonso Hernández y Sergio Martínez Juárez**, por todo el amor y cariño que me proporcionan día con día, por la dedicación y el esfuerzo que han realizado durante toda una vida para que yo sea quien soy en la actualidad.
Los quiero y los amo mucho.*

Agradecimientos

A mi familia que se ha preocupado por mí durante este tiempo, sobre todo, estaré profundamente agradecido a mi papá y a mi mamá por su gran apoyo, por el cariño y enseñanzas que me han brindado. Gracias por todo.

A mis hermanas Maricarmen e Irleam, que desde que tengo memoria las he admirado. Son mis mejores amigas y siempre me han protegido como si fueran mi segunda madre, jamás podré dejar de quererlas como lo hago, ni de darles las gracias por el apoyo incondicional que me brindan. Las quiero inmensamente.

A mi director de tesis, Dr. Marcos Ángel González Olvera, por brindarme su confianza y su paciencia, así como por guiarme durante el desarrollo de este trabajo para alcanzar los objetivos trazados.

A la Dra. Rosa Margarita Álvarez González, por los conocimientos impartidos y por brindarme toda la ayuda durante el tiempo de formación académica, además de sus valiosos consejos y observaciones realizados a este trabajo.

A todos mis compañeros de estudio que compartieron este viaje conmigo, en especial a mis amigos de mil batallas Karina Limón, Alejandro, Karlita M, Israel, Don Mario y Rafita que son las personas que han estado más cerca de mí en estos años de universidad impidiendo que me sienta solo, apoyándome y regañándome cuando era necesario, y haciéndome pasar momentos inolvidables.

A la Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación (SECITI), por el apoyo otorgado mediante el proyecto denominado “Implantación de observadores y controladores adaptables e identificación de sistemas físicos”, con número de convenio UACM-PI2014-65.

Eder Sergio

Agradecimientos

Finalmente un especial agradecimiento a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), por el apoyo otorgado para la impresión y empastado de esta tesis a través del convenio UACM-CSE-ITR/88/2016.

Índice general

Índice de figuras	ix
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivo	3
1.3. Justificación	3
1.4. Planteamiento del problema	5
1.5. Estructura de la tesis	6
2. Conceptos básicos	7
2.1. Modelo de sistemas mediante Euler-Lagrange	8
2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	11
2.3. Linealización	15
3. Péndulo invertido sobre carro	19
3.1. Descripción del sistema	20
3.2. Modelo del péndulo invertido sobre carro	25
3.3. Modelo del motor de corriente directa (CD)	29
3.4. Puntos de equilibrio	32
3.5. Linealización del péndulo invertido sobre carro	34
3.5.1. Estabilidad	36
3.5.2. Controlabilidad	37
3.5.3. Observabilidad	38
4. Levantamiento del péndulo invertido (Swing Up)	41
5. Control Fraccional	47
5.1. Cálculo fraccional: definiciones básicas	48
5.1.1. Integral y derivada fraccional de Riemann-Liouville	49
5.1.1.1. Función Gamma	51
5.1.2. Derivada fraccional de Caputo	52

ÍNDICE GENERAL

5.1.3.	Derivada de Grünwald-Létnikov	53
5.2.	Acciones básicas de control	54
5.3.	Aplicación del cálculo fraccional al control de sistemas	58
5.3.1.	Estabilidad en modelos de orden fraccional	61
5.3.2.	Control fraccional PI	63
5.3.2.1.	Diseño de control	63
5.3.2.2.	Estabilidad en lazo cerrado	70
5.3.2.3.	Control del sistema	70
5.3.3.	Control fraccional PID	73
5.3.3.1.	Diseño de control	74
5.3.3.2.	Estabilidad en lazo cerrado	79
5.3.3.3.	Control del sistema	79
5.3.4.	Control fraccional I-PD	82
5.3.4.1.	Diseño de control	86
5.3.4.2.	Estabilidad en lazo cerrado	89
5.3.4.3.	Control del sistema	89
6.	Conclusiones	93
6.1.	Trabajo a futuro	95
A.	Ecuaciones de Euler-Lagrange	97
B.	Toolbox para Simulink	99
	Bibliografía	101

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de coordenadas y grados de libertad en un péndulo invertido.	9
3.1. Segway es un vehículo de transporte ligero de dos llantas, en el cual, el usuario debe inclinarse hacia la dirección que desee tomar.	20
3.2. Péndulo invertido sobre carro	21
3.3. Resultado de la medición de posición y velocidad para el carro. . .	24
3.4. Resultado de la medición de posición y velocidad para el péndulo.	24
3.5. Diagrama del péndulo invertido sobre carro	26
3.6. Circuito eléctrico del motor de CD.	30
3.7. Puntos de equilibrio del péndulo invertido.	34
4.1. Diagrama de cuerpo libre del péndulo.	42
4.2. Resultados de la implantación del control <i>Swing Up</i>	45
4.3. Resultados del control <i>Swing Up</i>	46
5.1. Efectos de la acción integral sobre una señal de tren de pulsos según el orden de integración.	55
5.2. Efectos de la acción integral sobre una señal rampa según el orden de integración.	56
5.3. Efectos de la acción derivativa sobre una señal trapezoidal según el orden derivativo.	57
5.4. Efectos de la acción derivativa sobre una señal rampa según el orden de derivación.	57
5.5. Diagrama de bloque de un controlador PID.	59
5.6. Diagrama de bloque de un controlador $PI^\alpha D^\lambda$	61
5.7. Regiones de estabilidad para: (a) $\alpha = 1$, (b) $0 < \alpha < 1$, (c) $1 \leq \alpha < 2$	62
5.8. Diagrama de control realimentado FOPI.	64
5.9. Resultados de la simulación del controlador FOPI.	71
5.10. Resultado de la simulación del controlador fraccional PI variando el orden fraccional.	72
5.11. Implantación del controlador fraccional PI.	73

ÍNDICE DE FIGURAS

5.12. Diagrama de bloques del control FOPID	75
5.13. Resultados de la simulación del controlador FOPID.	80
5.14. Resultado de la simulación del controlador FOPID, variando el orden fraccional.	81
5.15. Implantación del controlador FOPID.	82
5.16. Respuesta a un escalón en la variable de referencia para diferen- tes factores de peso. Función de transferencia del proceso $P(s) =$ $1/(s + 1)^3$	83
5.17. Diagrama de bloques de un controlador I-PD.	84
5.18. Diagrama de bloques de un controlador fraccional I-PD.	86
5.19. Resultado de la simulación del controlador FO I-PD.	90
5.20. Resultado de la simulación variando el parámetro fraccional. . . .	90
5.21. Resultados experimentales de la implantación del controlador FO I-PD.	91

Introducción

La temática de este proyecto se centra en el ámbito de la robótica, la automática y el control, seleccionando un sistema físico clásico, en el cual se trata de resolver la problemática de estabilización mediante estrategias de control implementadas sobre una plataforma física.

Esta tesis propone el uso no sólo de un control clásico sobre el sistema, sino de una combinación de diferentes herramientas que permitan la estabilización de un péndulo, en particular se concentra en introducir el cálculo fraccional al área de control mediante controladores tipo PID, a fin de unir las mejoras de ambas disciplinas.

1.1. Motivación

Desde muchas décadas atrás hasta la actualidad, el desarrollo de técnicas de control para sistemas mecánicos es uno de los campos de investigación más atractivos en la ingeniería, esto debido a que su desarrollo ha permitido crear máquinas automáticas con un fuerte impacto en diferentes áreas. No obstante, las soluciones a problemas existentes no se han agotado ni problemas nuevos han dejado de surgir, por ello la necesidad de desarrollar nuevas técnicas de control sigue siendo

1. INTRODUCCIÓN

una tarea vigente.

En esta tesis se aplica la teoría de control a sistemas mecánicos subactuados, caracterizados fundamentalmente por tener menos entradas de control que grados de libertad. Específicamente, se trabajó con un péndulo invertido sobre carro desarrollado por *Quanser*, el cual se encuentra dentro de una subclase de sistemas subactuados como lo es el péndulo con disco inercial, el péndulo esférico invertido y el péndulo con masa radialmente móvil.

El péndulo invertido sobre carro es un sistema que constituye un caso concreto de sistema físico en el que se ponen de manifiesto importantes problemas, lo que ha hecho de él un banco de pruebas para sistemas de control. El interés en el estudio de este tipo de sistema radica en que su modelo matemático presenta una formulación basada en ecuaciones diferenciales no lineales. El modelo resultante, es atractivo para el diseño de controladores debido a que es un sistema con bastante información para el diseñador, y sus ecuaciones tienen similitud con las ecuaciones de sistemas físicos reales. Por tanto, su estudio sirve como una primera aproximación a los problemas que plantean sistemas de mayor complejidad.

Es importante comentar que estos sistemas tienen un rango de controlabilidad restringido a una pequeña vecindad alrededor del punto de equilibrio inestable [*Sira-Ramírez et al.*], además, la mayoría de estos sistemas pierden la controlabilidad en ciertas regiones del espacio de trabajo y no son robustos en presencia de fuerzas externas. Lo anterior motiva la necesidad de desarrollar nuevas técnicas de control aplicadas a sistemas subactuados, en especial a los sistemas tipo péndulo invertido, que son uno de los problemas clásicos de sistemas subactuados, ya que el péndulo no recibe directamente ninguna señal de control debido a que toda

la acción es aplicada al carro, convirtiéndose en un modelo de referencia para evaluar una amplia gama de métodos de control.

1.2. Objetivo

Esta tesis tiene como objetivo analizar, diseñar e implementar controladores fraccionales para un sistema mecánico subactuado con punto de equilibrio inestable. Para lo cual se emplearan controladores lineales tipo PID anexándoles los fundamentos del cálculo fraccional, implementando dichos controladores en una plataforma física, particularmente, a un péndulo invertido. De esta manera se pretende observar ventajas y desventajas que ofrecen estas técnicas de control.

1.3. Justificación

De forma general, se puede afirmar que la teoría de control de sistemas tiene su propósito en idear un algoritmo matemático que le confiera a la planta a controlar ciertas características para que el conjunto, planta-controlador, se comporte de una determinada manera según los parámetros de diseño.

El control del péndulo invertido presenta una enorme variedad de problemas que han hecho de él uno de los sistemas concretos para el ensayo de leyes de control más analizados en estos últimos tiempos. Básicamente, se presentan dos problemas: el problema de la estabilidad local en torno a la posición de equilibrio y el problema de levantar el péndulo desde su posición de reposo hasta la posición en la que se mantiene en la vertical superior. Este último problema se le conoce, por su denominación inglesa, como *Swing Up* (balanceo).

1. INTRODUCCIÓN

El primer problema, el de la estabilización local, puede resolverse satisfactoriamente mediante la linealización en torno a la posición de equilibrio. Existen numerosas leyes de control que permiten resolver el problema de estabilización, dando resultados satisfactorios, pero en los últimos años, controladores fraccionales han tenido gran auge, resultando atractivos ya que permiten la derivación e integración de una función usando cualquier orden: racional, real o imaginario.

En la actualidad podemos encontrar numerosos casos de estudio donde el uso de controladores fraccionales permiten ampliar las posibles acciones de control, de tal forma que el diseñador dispone de un abanico más amplio de posibilidades donde elegir para su diseño. Así pues, muchas metodologías de control han sido generalizadas usando el cálculo fraccional, sirviendo éste como base para definir las ecuaciones dinámicas que rigen el comportamiento de los controladores.

Por lo tanto, el objetivo fundamental de esta tesis es el de implementar diferentes controladores fraccionales a un sistema linealizado, es decir, se tomará una aproximación del modelo no lineal del péndulo invertido sobre carro para obtener el controlador fraccional. De esta manera, se extenderá la metodología del cálculo fraccional en el área de control y así generalizar su formulación, de tal forma que se unifiquen las ventajas de ambas disciplinas.

Por otro lado, en el problema del *Swing Up* es necesario considerar todo el espacio de estados, de modo que el problema no puede abordarse con una perspectiva local. Este problema es por su propia naturaleza no lineal y se desenvuelve en una amplia región del espacio, por tanto, no admite una reducción local y hay que abordarlo con toda la problemática inherente a su globalidad y a su no linealidad. El objetivo de implementar un control capaz de resolver el problema de Swing

Up, es meramente ilustrativo, ya que no se realizarán grandes aportaciones a este tipo de control.

1.4. Planteamiento del problema

En los modelos de los sistemas es necesario tener conocimiento de las posiciones y velocidades. Sin embargo, en el sistema físico utilizado para este trabajo solo es posible medir posiciones, de manera que se tendrá que aplicar una solución para poder obtener las velocidades necesarias a partir de las posiciones ya medidas, esto con el propósito de no incorporar sensores de velocidad.

Además, en este trabajo se aborda el problema de estabilización del sistema péndulo invertido, el cual consiste en estabilizar el sistema alrededor de uno de sus puntos de equilibrio. Para resolver el problema, se establece una metodología a seguir como se muestra a continuación:

1. Estudio y obtención del modelo matemático del sistema mecánico.
2. Análisis de las características dinámicas del modelo obtenido.
3. Diseño de los algoritmos de controladores fraccionales.
4. Simulación de los algoritmos de controladores fraccionales.
5. Evaluaciones experimentales de las estrategias de control tomando como referencia los resultados de las simulaciones.

Una de las restricciones físicas que presenta el prototipo y que debe de ser considerada en el diseño de los controladores, radica en la posición del carro, la cual hace que el carro no pueda desplazarse a más de ± 30 cm.

1.5. Estructura de la tesis

Este trabajo consta de 6 capítulos. En este primer capítulo, se ofrece una exposición de los motivos y objetivos del trabajo.

En el capítulo 2, se presentan formalmente los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo. En este capítulo se dan definiciones importantes para la comprensión del texto subsiguiente. El capítulo 3 se describe al sistema de estudio y se lleva a cabo el modelado del péndulo invertido y el modelo del actuador, así como observaciones necesarias para el diseño de los controladores.

Ya que estos controladores sólo operan en regiones cercanas al punto de equilibrio, es necesario realizar una maniobra de control que permita llegar a zonas cercanas al punto de equilibrio, por lo que, en el capítulo 4, se muestra esta maniobra denominada *Swing Up*.

El capítulo 5 muestra, de manera general, los antecedentes históricos del cálculo fraccional. Además, se dan los criterios para desarrollar los controladores fraccionales a fin de estabilizar el péndulo en su punto de equilibrio inestable.

Finalmente, en el capítulo 6 se analizan los resultados experimentales y simulaciones de capítulos anteriores, se muestran conclusiones del trabajo de investigación y se exponen algunas posibles líneas de investigación posteriores a esta tesis.

Conceptos básicos

El primer paso para el diseño de un controlador capaz de mantener estable al péndulo invertido, es encontrar un modelo del sistema, es decir, una representación de las características y propiedades del mismo. Se pretende obtener un modelo matemático que refleje el comportamiento del sistema para su simulación y experimentación, es decir, un conjunto de ecuaciones matemáticas que relacionen una serie de variables con las características físicas del sistema.

Una de las claves a la hora de implementar un control eficiente de cualquier sistema, es partir de un modelo que refleje fielmente el comportamiento del sistema real. Sin embargo, elaborar un modelo exacto es muy complicado y la mayoría de las veces imposible. Por tanto, se busca establecer un equilibrio entre las complicaciones que conlleva elaborar el modelo, con las ventajas que proporciona dicho modelo a la hora de su estudio.

Es por ello que en este capítulo, se presentan las herramientas matemáticas necesarias para obtener el modelo matemático de sistemas, en particular se pretende obtener el modelo de un péndulo invertido sobre carro. Además, se presenta una forma de linealizar modelos no lineales, es decir, se obtiene una aproximación lineal de un sistema no lineal, ya que, para el sistema de estudio resulta ser un

2. CONCEPTOS BÁSICOS

sistema no lineal.

Finalmente, se define la estabilidad de los sistemas, ya que es una característica muy importante a la hora de diseñar controladores, además de presentar métodos de analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales mediante el estudio del comportamiento de los estados del sistema modelado.

2.1. Modelo de sistemas mediante Euler-Lagrange

El modelo matemático de un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones que representan su dinámica, de forma que sea posible su análisis y diseño. La estructura de un modelo matemático no es único para un sistema determinado, sino que pueden existir diversos modelos para éste. Así, un modelo puede ser más conveniente que otro dependiendo el fin que tenga. Existen diversas formas de obtener el modelo matemático de un péndulo invertido sobre carro pero en esta tesis se determinará el modelado mediante el método de Euler-Lagrange.

El procedimiento de Euler-Lagrange, [[Kelly and Santibáñez, Tarenzio](#)], es un método alternativo al de Newton-Euler, el cual se basa en el balance de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. El principio del modelado mediante Euler-Lagrange está en obtener las ecuaciones de energía del sistema, y mediante derivadas parciales, describir el comportamiento de aquél en un arreglo de matrices, las cuales se relacionan con las diferentes coordenadas del sistema.

Un planteamiento básico al realizar el modelado de sistemas, es la descripción de los sistemas mediante coordenadas generalizadas, denominadas como un conjunto cualquiera de parámetros $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, que permiten especificar, de manera

única, la configuración de un sistema de i grados de libertad¹, generalmente se consideran distancias, ángulos o cantidades que las relacionen.

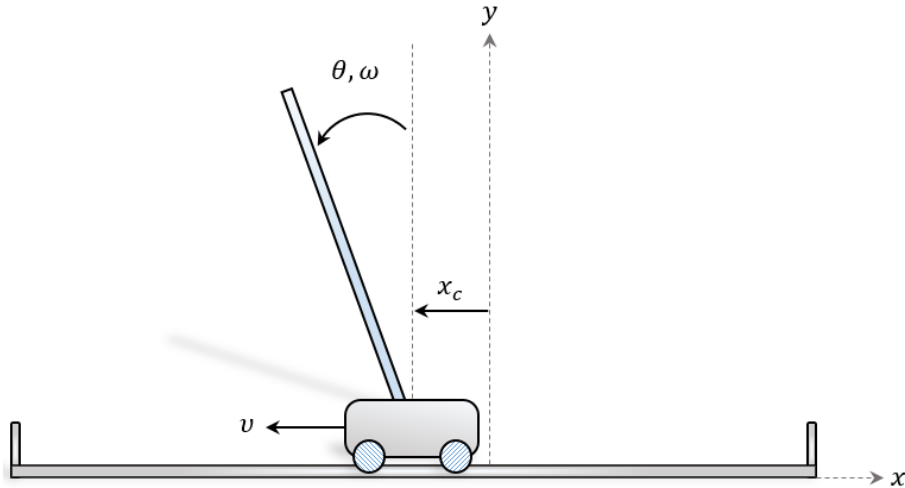


Figura 2.1: Ejemplo de coordenadas y grados de libertad en un péndulo invertido.

Se requiere escoger adecuadamente un conjunto de coordenadas generalizadas para describir el sistema. Para el caso de los sistemas mecánicos, las coordenadas q se refiere a posiciones, por lo que \dot{q} son las velocidades generalizadas y \ddot{q} las aceleraciones correspondientes.

Para empezar el procedimiento del método de Euler-Lagrange, se desarrollan las ecuaciones que describen la energía potencial de cada articulación. La energía potencial total de un sistema de n articulaciones es la suma de las energías de cada articulación, y está descrita como:

$$V = \sum_{i=1}^n v_i . \quad (2.1)$$

La obtención de la energía cinética del sistema es un requisito para el procedi-

¹Se llama grados de libertad de un sistema, al número de maneras independientes en que aquél puede moverse.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

miento de Euler-Lagrange, la cual, análogamente a la energía potencial, se calcula para cada articulación, siendo la energía cinética total la suma de la energía individual de cada articulación. La energía de una articulación se puede expresar como:

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \quad (2.2)$$

Por lo que la energía cinética total del sistema es la suma de la energía individual de cada articulación.

$$K = \sum_{i=1}^n k_i . \quad (2.3)$$

Observe que la energía cinética expresada por la Ec. (2.2), está en función de la velocidad de las articulaciones del sistema. Además, considere que la energía cinética total deberá ser siempre una cantidad escalar positiva ya que no existen masas negativas.

Si todas las fuerzas son conservativas, entonces el sistema dinámico puede representarse mediante el lagrangiano L . Las Ecs. (2.1) y (2.3) se usan para calcular el Lagrangiano, el cual se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema.

$$L = K - V . \quad (2.4)$$

El Lagrangiano proporciona un medio para obtener las derivadas de las ecuaciones del sistema con respecto a las variables del mismo. La Ec. (2.5) proporciona las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \tau , \quad (2.5)$$

donde:

P = Potencia disipada total del sistema.

τ = Vector de torque aplicado al sistema.

q_i = Vector de coordenadas generalizadas asociadas a posiciones.

\dot{q}_i = Vector de coordenadas generalizadas asociadas a velocidades.

Una forma de representar las ecuaciones diferenciales en arreglos vectoriales es:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(\dot{q}) + G(q) + K(q) = F_e, \quad (2.6)$$

donde:

q = Vector de coordenadas generalizadas.

$M(q)$ = Matriz de inercias del sistema, de $n \times n$ (n son los grados de libertad).

$C(q, \dot{q})$ = Matriz de Coriolis, contiene los efectos de coriolis y términos rotacionales.

$D(\dot{q})$ = Vector de disipación del sistema.

$G(q)$ = Vector de fuerzas gravitacionales.

$K(q)$ = Vector de fuerzas de almacenamiento en resortes.

F_e = Fuerzas externas por coordenadas q_i .

Agrupadas las ecuaciones de movimiento como muestra la Ec. (2.6), es conveniente representar al sistema en variables de estado, dichas variables de estado tendrán relación directa con las posiciones, velocidades y aceleraciones que tengan las coordenadas asociadas a los grados de libertad del sistema, entendidas como aquellas variables o coordenadas del sistema donde puede moverse, o aquellas para describir completamente el estado del sistema.

2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov es una poderosa herramienta matemática para el análisis de estabilidad de sistemas. Su importancia radica en que, a diferencia de otras, por ejemplo la teoría de estabilidad de Nyquist, esta se aplica tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales. Fue desarrollada por el matemático ruso Aleksandr M. Lyapunov en el año de 1892.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

La idea principal del análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov es el analizar las ecuaciones diferenciales y predecir su comportamiento en torno de los puntos de equilibrio sin resolver las ecuaciones diferenciales. En este sentido, la estabilidad en el sentido de Lyapunov se refiere al comportamiento de la señal de salida, en torno de un punto de equilibrio.

En el contexto de espacio de estados de un sistema invariante en el tiempo, el concepto de punto de equilibrio es importante y se define como un punto $x = X_{eq}$ en el espacio de estados del sistema, que tiene la propiedad de que sin importar cuando se inicie el movimiento del sistema cerca de la vecindad del punto X_{eq} , el sistema permanecerá ahí para todo tiempo futuro, a menos que una fuerza externa sea aplicada. Un punto de equilibrio puede ser aislado, es decir, no existe otro punto de equilibrio en su vecindad, o puede ser un conjunto de puntos de equilibrio contiguos.

Formalmente se tiene la siguiente definición [Khalil and Grizzle]:

Un punto $x = X_{eq}$ en el espacio de estados, se dice que es un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(t)$, si tiene la propiedad de que, si el sistema empieza en X_{eq} , éste permanecerá en X_{eq} para todo tiempo futuro.

Los puntos de equilibrio para un conjunto de entradas constantes, $U = U_{eq}$, deben cumplir con: $\dot{x} = 0$, $q = Q_{eq} \Rightarrow \dot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} = 0$, es decir, las derivadas en el punto de equilibrio son nulas.

Una definición formal de la estabilidad en el sentido de Lyapunov se tiene al considerar el sistema modelado mediante ecuaciones Euler-Lagrange:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(\dot{q}) + G(q) + K(q) = U .$$

Además, los estados considerados del sistema son: $x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$ (resultando un estado de $n \times 1$), y el modelo en variables de estado resultante es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q) [U - G(q) - D(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix} x + Bu = f(x, u) .$$

La estabilidad de los puntos de equilibrio resultantes se pueden analizar por medio de diferentes métodos. Sin embargo, en esta tesis se describirán sólo dos de ellos:

- Método indirecto de Lyapunov (Linealización).
- Por funciones candidatas de Lyapunov.

El método indirecto de Lyapunov puede determinarse mediante la linealización en torno del punto de equilibrio del sistema. Este método establece lo siguiente [Khalil and Grizzle] :

★ El sistema será asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov si la matriz

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=X_{eq}} ,$$

contiene valores característicos tales que $\Re_e \{ \lambda_i(A) \} < 0$, con $i = 1, \dots, n$.

★ Inestable en el sentido de Lyapunov si al menos un valor característico cumple que $\Re_e \{ \lambda_i(A) \} > 0$ para algún i .

Este método únicamente describe las condiciones para estabilidad asintótica e inestabilidad. Sin embargo, si $\Re_e \{ \lambda_i(A) \} = 0$ para algún i , entonces el teorema no permite concluir sobre la estabilidad del punto de equilibrio X_{eq} y es necesario

2. CONCEPTOS BÁSICOS

analizar mediante funciones candidatas de Lyapunov, conocido como el método directo de Lyapunov.

También es posible analizar la estabilidad mediante el método directo de Lyapunov, por ejemplo en las ecuaciones de energía del sistema. Un concepto importante para comprender la estabilidad por medio de funciones candidatas radica en la definición de las mismas, [Khalil and Grizzle] tiene las siguientes definiciones.

Función definida positiva: Una función $V(x)$ se dice que es positiva definida si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \neq 0$. Si las condiciones anteriores se satisfacen para $V(x) \geq 0$ con $x \neq 0$, entonces se dice que es *semidefinida positiva*.

Función definida negativa: Una función $V(x)$, se dice que es definida negativa si $-V(x)$ es definida positiva. Si la condición anterior se cumple con $-V(x)$ siendo semidefinida positiva, entonces $V(x)$ es semidefinida negativa.

Si se logra demostrar que la derivada $\dot{V}(x)$ de la función candidata de Lyapunov es cero, se determinará que el sistema es asintóticamente estable.

Por funciones candidatas de Lyapunov requerimos que, por simplicidad, los términos $D(\dot{q})$ y $K(q)$, de la Ec. (2.6), sean lineales, es decir, expresables mediante matrices en la forma:

$$D(\dot{q}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \dot{q}, \quad K(q) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} q.$$

Así como el término de gravedad sea nulo, es decir, $G(q) = 0$ y que $Q_{eq} = 0$ sea un punto de equilibrio para el sistema con $U_{eq} = 0$.

2.3. Linealización

La mayoría de los sistemas tienen una estructura no lineal, mientras que algunas técnicas de control plantean el análisis y diseño de controladores del tipo lineal, es decir, leyes de control lineales para regular sistemas de naturaleza eminentemente no lineal. Una alternativa es linealizar los sistemas para facilitar el diseño de controladores, esto se logra aproximando el comportamiento del sistema no lineal con un modelo lineal. Esta aproximación se realiza en torno a un punto de equilibrio u operación.

Mediante una expresión en series de Taylor [Sira-Ramírez et al.] se obtendrá un modelo aproximado del sistema no lineal.

Consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones que representan un sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & x(t_0) &= x_0, \\ y(t) &= h(x(t)).\end{aligned}\tag{2.7}$$

cuyos puntos de operación son constantes y están dados por (U_{eq}, X_{eq}, Y_{eq}) .

Mediante series de Taylor, se expande al sistema en torno al punto de operación $x = X_{eq}$ y $u = U_{eq}$, resultando:

$$\begin{aligned}f(x, u) &= f(X_{eq}, U_{eq}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} + T.O.S. \\ h(x, u) &= h(X_{eq}, U_{eq}) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} + T.O.S.\end{aligned}$$

2. CONCEPTOS BÁSICOS

con:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}.$$

Las matrices del sistema linealizado en torno al punto de equilibrio se obtiene a partir de los jacobianos:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix},$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X_{eq}, U_{eq})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, se considera que $x - X_{eq}$ es un valor pequeño, con lo que se puede aproximar al sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}, \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde:

$$\bar{x} = x - X_{eq}, \quad \bar{u} = u - U_{eq}, \quad \bar{y} = y - Y_{eq}, \quad \dot{\bar{x}} = \dot{x}.$$

Es importante mencionar que esta aproximación no tiene validez universal, únicamente es válida para una región cercana al punto de equilibrio respecto al cual

se linealiza, por lo que su aplicación está indicada para aquellos sistemas cuyas señales sufren pequeñas variaciones alrededor de sus valores de equilibrio.

Este método de linealización es válido en tanto que las perturbaciones que afectan al comportamiento del sistema no lineal, operando en equilibrio, sean pequeñas, relativas a los valores de equilibrio de las variables del sistema.

Péndulo invertido sobre carro

En este capítulo se presenta el modelo matemático del sistema necesario para describir el péndulo invertido sobre carro en forma de ecuaciones diferenciales. Dado que el objetivo de esta tesis es que el péndulo se mantenga cercano a uno de sus puntos de operación, es necesario linealizar el sistema alrededor de ese mismo punto de operación, para que posteriormente se desarrollen controladores que estabilicen al péndulo. Si el sistema no es controlado, el péndulo tenderá a dirigirse hacia su posición de reposo (punto de operación estable), por consecuencia, el control es necesario para mantenerlo cerca del punto de operación inestable, más aún, una vez controlado el sistema, se deben aplicar fuerzas externas (perturbaciones acotadas) y el controlador debe ser capaz de estabilizar al péndulo.

Una observación importante a tener en cuenta, es que la señal de entrada al sistema real es voltaje, por tanto es necesario transformar la fuerza que se aplica al carro en términos de voltaje, por lo cual se presenta el modelo del sistema electromecánico de tracción, donde se obtiene una relación voltaje-fuerza para el carro.

3.1. Descripción del sistema

El péndulo invertido sobre carro es un mecanismo que consta de un riel sobre el cual se puede deslizar un carro, sobre el que está montado un péndulo que puede girar libremente. El sistema está instrumentado, de tal forma que se puede medir el ángulo del péndulo con respecto a la vertical así como la posición del carro, mediante decodificadores (*encoders*). A través de un motor y un piñón conectados al carro, se puede hacer que éste se deslice sobre un riel acotado.

Algunas de las aplicaciones del péndulo invertido sobre carro en la vida cotidiana, se da desde el control de estabilidad de grúas, hasta la construcción de vehículos para el desplazamiento de humanos, mejor conocido como Segway.



Figura 3.1: Segway es un vehículo de transporte ligero de dos llantas, en el cual, el usuario debe inclinarse hacia la dirección que desee tomar.

El sistema físico, con el cual se trabajó a lo largo de esta tesis, es un prototipo desarrollado por *Quanser* denominado *Inverted Pendulum System*, Figura 3.2. Únicamente cuenta con un actuador (motor) y dos sensores (*encoders*) que se encargan de medir la posición traslacional y la posición angular. Dicho sistema

posee una gran calidad y fiabilidad de motores y *encoders*, lo que permite tener mejores resultados al momento de realizar pruebas experimentales.



Figura 3.2: Péndulo invertido sobre carro

Además del sistema físico, para este trabajo son necesarios un sistema de cómputo que se encarga del control, una tarjeta de adquisición que sirve para la lectura y escritura de datos, y un amplificador de potencia encargado de suministrar el voltaje de control adecuado al motor.

Los cuadros 3.1 y 3.2 presentan los diferentes parámetros que describen al péndulo, carro y al motor de corriente directa (CD), proporcionados por el fabricante.

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
m_p	Masa del péndulo	0.230	kg
m_c	Masa del carro	0.57	kg
J_p	Momento de inercia del péndulo	$7.8838e^{-3}$	$kg\ m^2$
l_p	Longitud del péndulo al centro de gravedad	0.3302	m
b_p	Coefficiente de fricción viscosa del péndulo	0.0024	$N\ m\ s/rad$
b_c	Coefficiente de fricción viscosa del carro	4.3	$N\ s/m$
g	Constante de gravedad	9.81	m/s^2

Tabla 3.1: Parámetros del sistema péndulo-carro.

Símbolo	Descripción	Valor	Unidades
k_g	Constante de relación de engranes	3.71	N/A
k_t	Constante de torque del motor	0.00767	$N\ m/A$
k_m	Constante contra-electromotriz	0.00767	$V\ s/rad$
η_g	Eficiencia de engranaje	1	100 %
η_m	Eficiencia del motor	1	100 %
r_{mp}	Diámetro del piñón del motor	0.00635	m
R_m	Resistencia de armadura	2.6	Ω

Tabla 3.2: Parámetros del motor de CD.

Para medir la posición lineal del carro y la posición angular del péndulo, el sistema cuenta con dos *encoders* ópticos, los cuales se configuraron en cuadratura, de manera que la resolución sea mucho mayor. Para el caso del péndulo, el encoder tiene una resolución de $0.0015\ [rad/pulso] = 0.0879\ [grados/pulso]$, con lo cual es posible percibir cambios en el ángulo de $0.0879\ grados$. En el caso del carro, cuenta con un encoder cuya resolución es de $2.2749e^{-5}\ [m/pulso] =$

0.0022749 [cm/pulso], permitiendo medir cambios de hasta 0.0022749 [cm].

Es necesario tener conocimiento de las velocidades del carro y del péndulo. Sin embargo, el sistema físico utilizado para esta tesis no cuenta con sensores de velocidad. Una posible solución para este problema es derivar las señales de posición, las cuales se obtienen de los decodificadores. Sin embargo, al derivar la posición el ruido de medición se amplificará significativamente, teniendo como resultado señales de velocidades ruidosas y poco precisas. Para evitar este inconveniente, se optó por aplicar un filtro de segundo orden a las posiciones medidas. La función de transferencia del filtro está dada por:

$$f_x = \frac{\omega_c^2 s}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}, \quad f_\theta = \frac{\omega_c^2 s}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}.$$

Los filtros se comportan como filtros pasa bandas, de modo que solo actúan para las frecuencias cercanas a la frecuencia de corte, asegurando que la señal obtenida sea muy parecida a la velocidad real tanto del péndulo como del carro. La frecuencia de corte de los filtros es vital debido a que, si se incrementara demasiado, la señal sufriría un atraso que afectaría las lecturas, mientras que al decrementarse, podría dejar de eliminar el ruido necesario. Por lo tanto, es importante elegir una frecuencia de corte que elimine el suficiente ruido sin atrasar demasiado la señal. Experimentalmente se obtuvieron los valores para el filtro, resultando: $\omega_c = 20\pi$ y $\xi = 0.7071$.

Las Figuras 3.3 y 3.4, muestran las mediciones de las posiciones del carro y péndulo, así como sus respectivas velocidades obtenidas mediante el filtro de segundo orden. Al sistema se le aplicó una señal $u(t) = 2 \sin\left(\left(\frac{7}{2\pi}\right)t\right)$ v; la señal sinusoidal se usa con la finalidad de obtener señales suaves en las velocidades y la frecuencia es para observar, de manera más clara, el comportamiento de las señales.

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

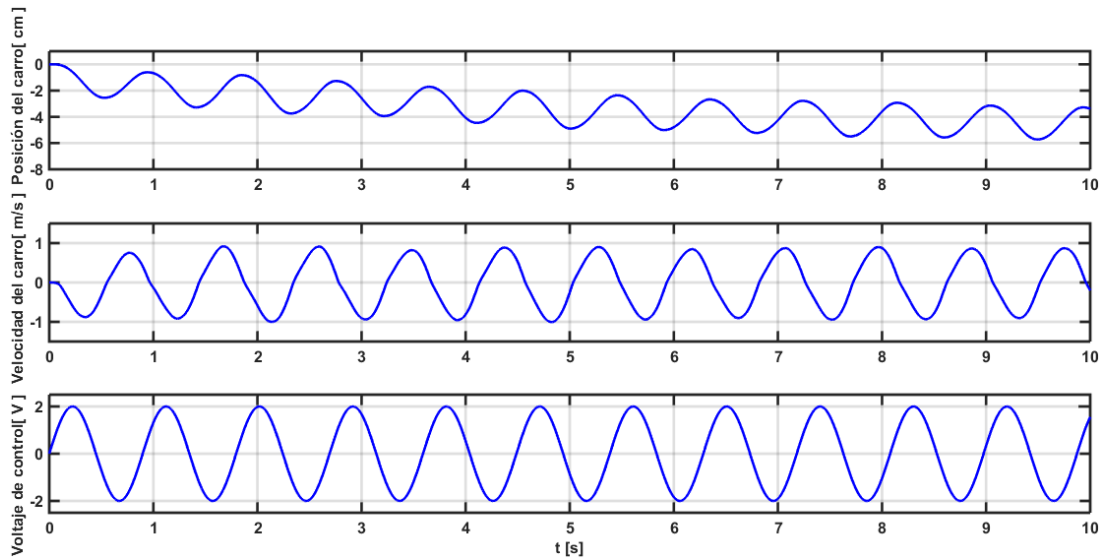


Figura 3.3: Resultado de la medición de posición y velocidad para el carro.

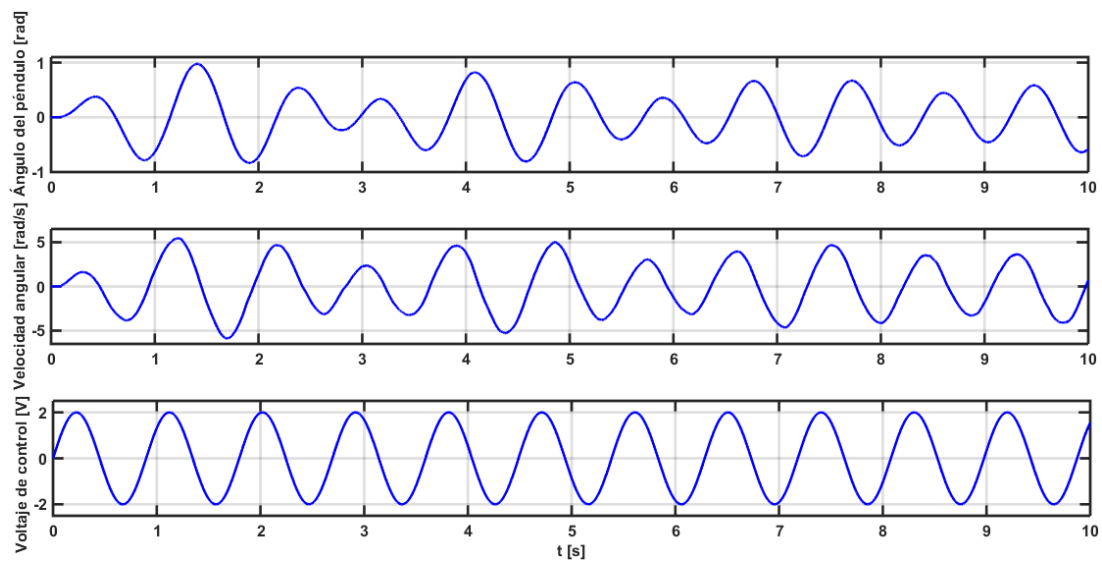


Figura 3.4: Resultado de la medición de posición y velocidad para el péndulo.

Una vez que se obtuvieron las mediciones de posición y velocidad, es posible

obtener el vector de estados x , el cual proporcionará información de las mediciones obtenidas del sistema.

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Posición del carro} \\ \textit{Velocidad del carro} \\ \textit{Ángulo del péndulo} \\ \textit{Velocidad angular del péndulo} \end{bmatrix} .$$

El carro está hecho de aluminio, accionado por un motor de corriente continua y equipado con una caja de engranajes planetarios. El carro puede deslizarse a lo largo de un eje de acero mediante rodamientos lineales. Es conducido a través de un mecanismo de piñón y cremallera con el fin de evitar deslizamientos y otros efectos indeseables. Esto, por lo tanto, garantiza una tracción constante y continua.

3.2. Modelo del péndulo invertido sobre carro

Las variables que definen la condición del sistema en todo momento son la posición del carro, x_c , y el ángulo del péndulo, θ , respecto a la vertical. En esta sección, se encontrará el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de estas variables para una fuerza F_c , aplicada al carro. Las ecuaciones diferenciales se obtienen a partir del análisis de todas las energías del sistema como lo muestra el método de Euler-Lagrange, y basándonos en el esquema de la Figura 3.5, se procederá a obtener dichas energías.

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

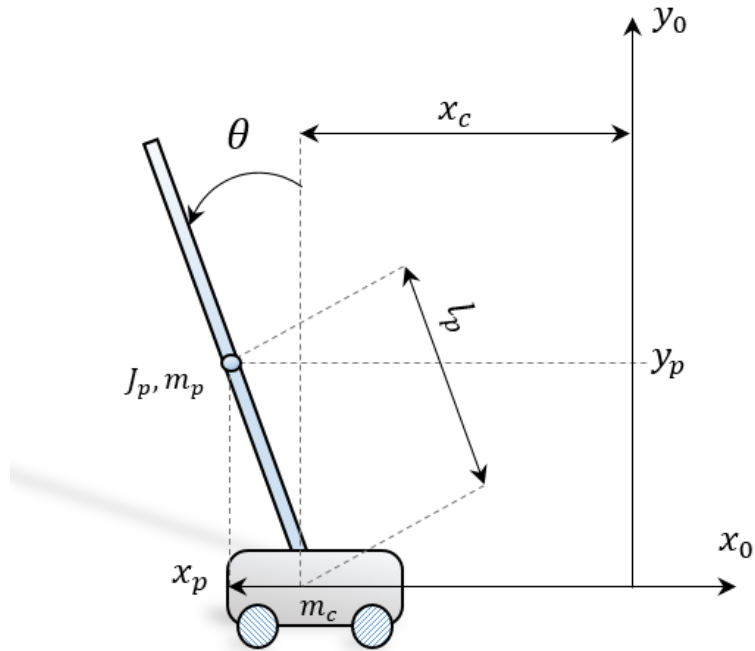


Figura 3.5: Diagrama del péndulo invertido sobre carro

donde:

m_c = Masa del carro.

m_p = Masa del péndulo.

x_c = Posición del carro.

θ = Ángulo del péndulo respecto a la vertical.

F_c = Fuerza aplicada al carro.

l_p = Longitud del péndulo al centro de gravedad.

J_p = Momento de inercia del péndulo.

b_c = Fricción viscosa del carro.

b_p = Fricción viscosa del péndulo.

La energía cinética total del sistema está dada por la suma de la energía cinética del carro (K_c) más la energía cinética del péndulo (K_p).

$$K = K_c + K_p . \quad (3.1)$$

Por un lado, la energía cinética del carro está dada por:

$$K_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 . \quad (3.2)$$

Mientras que la energía cinética del péndulo, está relacionada con su velocidad lineal y velocidad angular:

$$K_p = \frac{1}{2}m_p v_p^2 + \frac{1}{2}J_p \omega^2 . \quad (3.3)$$

Es necesario descomponer la velocidad del péndulo v_p^2 tanto en su velocidad respecto al eje x , v_x^2 , como su velocidad respecto al eje y , v_y^2 .

$$v_p^2 = v_x^2 + v_y^2 . \quad (3.4)$$

Para calcular las velocidades en ambos ejes, es preciso obtener la posición del péndulo en el eje x y en el eje y . En la Figura 3.5 se observa que ambas posiciones están dadas por:

$$x_p = -l_p \sin(\theta) + x_c , \quad (3.5)$$

$$y_p = l_p \cos(\theta) . \quad (3.6)$$

Una vez obtenidas las posiciones, sólo es cuestión de derivar las Ecs. (3.5) y (3.6) respecto al tiempo para obtener las velocidades correspondientes.

$$v_x = -l_p \omega \cos(\theta) + v_c , \quad (3.7)$$

$$v_y = -l_p \omega \sin(\theta) . \quad (3.8)$$

Por lo tanto la energía cinética total del sistema está descrita por:

$$K = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}m_p v_c^2 + \frac{1}{2}m_p l_p^2 \omega^2 + \frac{1}{2}J_p \omega^2 - m_p l_p v_c \omega \cos(\theta) . \quad (3.9)$$

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

La energía potencial del sistema está regida tan sólo por la posición del péndulo en el eje y .

$$V = m_p l_p g \cos(\theta) . \quad (3.10)$$

Ya calculadas las energías potencial y cinética del sistema, es posible hallar el lagrangiano L para obtener las ecuaciones diferenciales del sistema.

$$L = K - V .$$

La potencia que disipará el sistema está relacionada con las viscosidades tanto del péndulo como del carro (piñón del motor).

$$P = \frac{1}{2} b_c v_c^2 + \frac{1}{2} b_p \omega^2 .$$

Las ecuaciones son obtenidas mediante el Lagrangiano, Ec. (2.5). Para este sistema se tendrán dos ecuaciones diferenciales ya que se tienen dos grados de libertad, uno es la posición del carro a lo largo del riel y el segundo es el ángulo que forma el péndulo respecto a la vertical.

El procedimiento para obtener las ecuaciones se encuentra en el apéndice A, resultando:

$$(m_c + m_p) \dot{v}_c - m_p l_p \cos(\theta) \dot{\omega} + m_p l_p \sin(\theta) \omega^2 + b_c v_c = F_c , \quad (3.11)$$

$$(J_p + m_p l_p^2) \dot{\omega} - m_p l_p \cos(\theta) \dot{v}_c - g m_p l_p \sin(\theta) + b_p \omega = 0 . \quad (3.12)$$

Realizando un cambio entre las variables de estados y las coordenadas generalizadas:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ v_c \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Posici3n del carro} \\ \textit{Velocidad del carro} \\ \textit{3ngulo del p3ndulo} \\ \textit{Velocidad angular del p3ndulo} \end{bmatrix}$$

Las Ecs. (3.11) y (3.12) se reescriben como:

$$(m_c + m_p) \ddot{q}_1 - m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_2 + m_p l_p \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + b_c \dot{q}_1 = F_c \quad (3.13)$$

$$(J_p + m_p l_p^2) \ddot{q}_2 - m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_1 - g m_p l_p \sin(q_2) + b_p \dot{q}_2 = 0 \quad (3.14)$$

Ya que el sistema no cuenta con resortes, la Ec. (2.6) tomar3 la siguiente forma.

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(\dot{q}) + G(q) = F_c \quad (3.15)$$

Por tanto, el sistema del p3ndulo invertido sobre carro descrito por las Ecs. (3.13) y (3.14) puede ser representado de forma matricial de la forma de la Ec. (3.15).

$$\begin{bmatrix} m_c + m_p & -m_p l_p \cos(q_2) \\ -m_p l_p \cos(q_2) & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & m_p l_p \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} b_c & 0 \\ 0 & b_p \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g m_p l_p \sin(q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.3. Modelo del motor de corriente directa (CD)

El p3ndulo invertido utiliza un servomotor de CD que est3 acoplado a un pi3n3n, el cual se puede desplazar por un riel variando el voltaje de armadura. La fuerza F_c generada por el motor de CD a trav3s del pi3n3n del motor est3 definida como:

$$F_c = \frac{\eta_g k_g \tau_m}{r_{mp}}, \quad (3.16)$$

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

donde:

η_g = Eficiencia de engranaje.

k_g = Relación de engranaje.

τ_m = Torque generado por el motor.

r_{mp} = Radio del piñón de la flecha del motor.

Para determinar F_c en términos del voltaje del motor es necesario analizar el circuito equivalente del motor de CD. En la Figura 3.6 se ilustra el esquema del motor de CD.

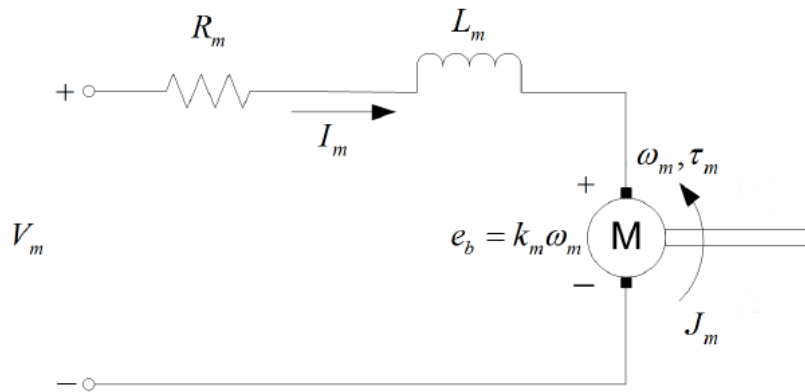


Figura 3.6: Circuito eléctrico del motor de CD.

donde:

R_m = Resistencia de armadura.

L_m = Inductancia.

k_m = Constante contra-electromotriz.

e_b = Voltaje contra-electromotriz.

Aplicando Ley de voltajes de Kirchoff's, que establece que la suma de los voltajes en un circuito en lazo cerrado es igual a cero, tenemos que:

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - L_m \dot{I}_m(t) - e_b(t) = 0 .$$

El voltaje contra-electromotriz depende de la velocidad angular del eje y de la constante electromotriz del motor.

$$e_b(t) = k_m w_m(t) .$$

Además es posible relacionar la velocidad angular del eje del motor con la velocidad lineal del carro:

$$\omega_m(t) = \frac{k_g v_c(t)}{r_{mp}} . \quad (3.17)$$

Dado que la inductancia del motor L_m es muy pequeña se considera despreciable, por tanto la corriente del motor puede ser descrita como:

$$I_m(t) = \frac{V_m(t) - k_m w_m(t)}{R_m} . \quad (3.18)$$

Agregando la constante de torque del motor, k_t , se puede relacionar la corriente del motor con el torque generado por el motor. Donde τ_m es el torque del motor y η_m es la eficiencia del motor.

$$\tau_m(t) = \eta_m k_t I_m(t) . \quad (3.19)$$

Reuniendo las ecuaciones eléctricas y mecánicas se obtiene una ecuación de movimiento para la fuerza aplicada al sistema. Sustituyendo las Ecs. (3.18) y (3.19) en la Ec. (3.16), se tiene que:

$$F_c = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t [V_m(t) - k_m \omega_m(t)]}{R_m r_{mp}} . \quad (3.20)$$

Lo que permite definir la fuerza aplicada al carro en función de la velocidad lineal del carro mediante la sustitución de la Ec. (3.17) en la Ec. (3.20).

$$F_c = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t}{R_m r_{mp}} \left[V_m - \frac{k_m k_g}{r_{mp}} v_c \right] ,$$

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

$$F_c = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t [V_m(t) r_{mp} - k_g k_m v_c(t)]}{R_m r_{mp}^2} . \quad (3.21)$$

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema completo (péndulo invertido y motor de CD) se han obtenido convirtiendo las variables rotacionales del motor (ω_m, τ_m) a variables traslacionales del carro (x_c, u) . Para ello, obtenidas las ecuaciones de movimiento del modelo del péndulo invertido sobre carro, Ecs. (3.13) y (3.14), se sustituye la fuerza aplicada al carro, Ec. (3.21), para reescribir el modelo del sistema en términos del voltaje aplicado al motor de CD.

$$(m_c + m_p) \ddot{q}_1 - m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_2 + \frac{\eta_g \eta_m k_g^2 k_t k_m}{R_m r_{mp}^2} \dot{q}_1 + m_p l_p \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + b_c \dot{q}_1 = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t}{R_m r_{mp}} V_m , \quad (3.22)$$

$$(J_p + m_p l_p^2) \ddot{q}_2 - m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_1 - g m_p l_p \sin(q_2) + b_p \dot{q}_2 = 0 . \quad (3.23)$$

Estas ecuaciones también pueden ser escritas en forma matricial de la forma:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(\dot{q}) + G(q) = U . \quad (3.24)$$

3.4. Puntos de equilibrio

De las ecuaciones dinámicas del sistema, Ecs. (3.13) y (3.14), es posible obtener los puntos de equilibrio, ya que, de acuerdo con [Khalil and Grizzle], las derivadas en el punto de equilibrio son cero. Para el sistema del péndulo invertido, esto significa que las velocidades y aceleraciones, en ese punto, son nulas; además de que no existe una fuerza externa al sistema (dicho de otra forma, el voltaje del motor tiende a cero).

Al hacer cero las velocidades y aceleraciones del sistema, las ecuaciones de la dinámica del sistema tendrán la forma:

$$(m_c + m_p) \overset{0}{\ddot{q}_1} - m_p l_p \cos(q_2) \overset{0}{\ddot{q}_2} + m_p l_p \sin(q_2) \overset{0}{\dot{q}_2}^2 + b_c \overset{0}{\dot{q}_1} = F_c \quad (3.25)$$

$$(J_p + m_p l_p^2) \overset{0}{\ddot{q}_2} - m_p l_p \cos(q_2) \overset{0}{\ddot{q}_1} - g m_p l_p \sin(q_2) + b_p \overset{0}{\dot{q}_2} = 0 \quad (3.26)$$

Se puede ver claramente que, en la Ec. (3.25), la fuerza aplicada al sistema en un punto de equilibrio es cero ya que sólo depende de velocidades y aceleraciones. Por otro lado, para que la igualdad de la Ec. (3.26) se cumpla, el valor del ángulo del péndulo, q_2 , deberá de tomar los valores de $q_2 = n\pi$ con ($n = 0, 1, 2, \dots$). Estos resultados indican que el sistema cuenta con dos puntos de equilibrio. El primer punto de equilibrio se encuentra cuando n es impar ($n = 1, 3, 5, \dots$), esto quiere decir que el péndulo se encontrará en su vertical inferior (posición de reposo) sin ninguna velocidad angular. El segundo punto de equilibrio se encuentra en la vertical superior sin ninguna velocidad angular, esto se da cuando n es par ($n = 0, 2, 4, \dots$).

El punto de equilibrio no depende de la posición del carro, es decir, el carro puede permanecer en cualquier punto sobre el riel y el péndulo seguirá estando en su posición inestable, por lo tanto se puede elegir cualquier posición dentro de la longitud del riel. Para esta tesis, el carro deberá de permanecer en $0m$.

Por lo tanto, los estados en el primer punto de equilibrio están dados por:

$$X_{1eq} = \begin{bmatrix} 0 [m] & 0 [m/s] & \pm\pi [rad] & 0 [rad/s] \end{bmatrix}^T. \quad (3.27)$$

Y los estados en el segundo punto de equilibrio son:

$$X_{2eq} = \begin{bmatrix} 0 [m] & 0 [m/s] & 0 [rad] & 0 [rad/s] \end{bmatrix}^T. \quad (3.28)$$

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

Gráficamente se pueden observar los dos puntos de equilibrio del sistema en la Figura 3.7.

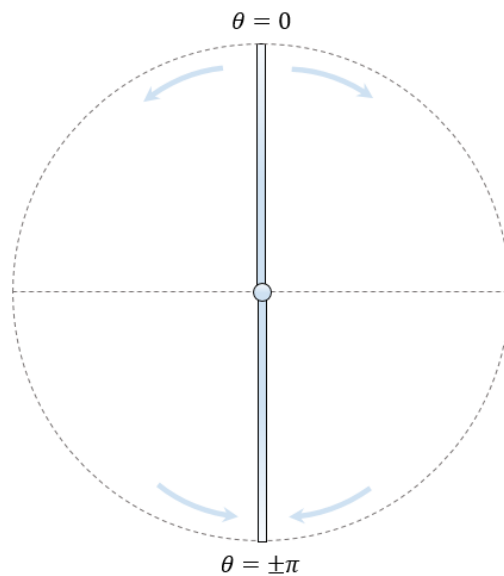


Figura 3.7: Puntos de equilibrio del péndulo invertido.

3.5. Linealización del péndulo invertido sobre carro

Obtenidas las ecuaciones de movimiento del sistema en forma matricial, es necesario pasarlas a variables de estado, para ello se considera que los estados del sistema son:

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ \theta \\ - \\ v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ - \\ \dot{q} \end{bmatrix},$$

Derivando x y sustituyendo en la Ec. (3.24), se obtienen las funciones en variables de estado mediante:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(q) [U - G(q) - D(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

El modelo en variables de estado tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por tanto, las matrices A, B, C y D se obtienen a partir de la Ec. (3.29) y de los jacobianos descritos en las secciones anteriores. Además, por ser un sistema sub-actuado, el péndulo invertido sólo es posible controlarlo en las posiciones de equilibrio estable o inestable, quedando:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_1(m_p l_p^2 + J_p)}{m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p} & \frac{g(l_p m_p)^2}{m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p} & -\frac{b_p l_p m_p}{m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_1 m_p l_p}{m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p} & \frac{g m_p l_p (m_c + m_p)}{m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p} & -\frac{b_p (m_c + m_p)}{m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p} \end{bmatrix},$$

$$\text{con: } K_1 = b_c + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m k_g^2}{R_m r_{m_p}^2},$$

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\eta_g \eta_m k_g k_m (m_p l_p^2 + J_p)}{R_m r_{mp} (m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p)} \\ 0 \\ \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t m_p l_p}{R_m r_{mp} (m_c m_p l_p^2 + (m_p + m_c) J_p)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo los parámetros del sistema de las tablas 3.1 y 3.2, se obtienen las matrices en espacio de estados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.8866 & 2.2643 & -0.0073 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36.6045 & 27.8204 & -0.0896 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.2772 \\ 0 \\ 5.2470 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

3.5.1. Estabilidad

Si se considera al péndulo separado del carro, el péndulo tiene dos puntos de equilibrio: uno estable (vertical inferior) y otro inestable (vertical superior). El objetivo del control es cambiar la dinámica del sistema para que en la posición vertical superior, se tenga un punto de equilibrio estable. En otras palabras, el objetivo es encontrar la fuerza que se le aplica al carro para que el péndulo no se caiga, incluso si se le perturba con una fuerza externa.

Haciendo uso del método indirecto de Lyapunov, mostrado en la sección 2.2, se hallará la estabilidad del sistema para los dos puntos de equilibrio. Linealizando el sistema al rededor del punto de equilibrio dado por la Ec. (3.28), los valores propios de la matriz A de la Ec. (3.31), están dados por: $\lambda(A) = \{0, -16.2577, -4.5611, 4.8426\}$, con lo cual se determina que el sistema es inestable ya que posee un valor propio positivo, esto es, que al recibir cualquier perturbación (por mínima que sea) el péndulo tenderá a alejarse del punto. Para el caso del punto de equilibrio de la Ec. (3.27), se linealiza el sistema alrededor de dicho punto y los valores propios de la matriz resultante A son: $\lambda(A) = \{0, -15.5947, -0.1908 + 4.7948 i, -0.1908 - 4.7948 i\}$, como en las soluciones aparece un valor nulo, no es posible llegar a una conclusión sobre la estabilidad de este punto de equilibrio a partir de este método y es necesario analizar mediante el método indirecto de Lyapunov, resultando que el punto de equilibrio es estable, esto es debido a que, al recibir cualquier perturbación, el péndulo después de cierto tiempo tenderá al mismo lugar.

3.5.2. Controlabilidad

La controlabilidad es una característica de un sistema, generalmente representado por un modelo en variables de estado, que indica si la evolución de uno o varias de sus dinámicas (estados) pueden ser modificadas por las entradas del sistema (control).

Se dice que el sistema descrito mediante variables de estado, Ec. (3.30), es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

3. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO

La matriz de controlabilidad para un sistema lineal e invariante en el tiempo en forma general es representada mediante [Ogata]:

$$C_o = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Para el sistema estudiado, se conoce que cuenta con 4 estados, por lo tanto $n = 4$, así que la matriz está dada por:

$$C_o = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}.$$

Aplicando los valores de las matrices A y B , de la Ec. (3.31), se obtiene:

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -36 & 588 \\ 2 & -36 & 588 & -9539 \\ 0 & 5 & -84 & 1479 \\ 5 & -84 & 1479 & 23982 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

El rango de la matriz C_o es completo, por lo tanto se dice que el sistema es completamente controlable.

3.5.3. Observabilidad

La observabilidad es una característica estructural complementaria de una representación de estado de un sistema, o del sistema en sí mismo, que nos indica la capacidad de poder estimar los valores históricos de un estado partiendo del conocimiento de las variables de salida y entrada del sistema.

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las

transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. La noción de observabilidad es crucial para los sistemas donde es imposible medir la totalidad del vector de estados y en consecuencia se requiere de la estimación de este a partir de las variables de salida.

La determinación de la observabilidad depende de las matrices A y C de un sistema lineal e invariante en el tiempo representado en variables de estado. El sistema es observable si y solo si la matriz de observabilidad O_b tiene rango n .

$$O_b = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.34)$$

Aplicando los valores de las matrices A y C obtenidos en la Ec. (3.31), se obtiene:

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15.886 & 2.264 & -0.007 \\ 0 & -36.604 & 27.82 & -0.089 \\ 0 & 252.651 & -36.17 & 2.38 \\ 0 & 584.801 & -85.37 & 28.09 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

El rango de la matriz O_b es 4, por lo tanto se dice que el sistema es completamente observable. De este modo, para el sistema de estudio, se podrán observar o estimar las velocidades (angular y lineal) sin necesidad de agregar sensores que midan dichas velocidades ya que tales mediciones se pueden estimar a partir de las posiciones del carro y del péndulo por medio de los decodificadores.

Levantamiento del péndulo invertido

(Swing Up)

Dado que las variables de estado en modelos matemáticos linealizados sólo pueden realizar acciones de control en regiones muy cercanas al punto de equilibrio, será necesario realizar una maniobra de control que permita llegar a zonas muy cercanas al punto de equilibrio inestable. Con este fin es necesario definir una función que permita la regulación de energía en el sistema, hasta alcanzar un valor energético deseado y que se define a partir de los requerimientos de control.

El diseño de controladores por regulación de energía para un péndulo invertido fue presentado por Åström y Furuta en 1996, en el cual se mostró como idea fundamental la necesidad de incrementar la energía del sistema hasta alcanzar un nivel suficiente, que permita llevar la planta a una región muy cercana al punto de equilibrio, y allí realizar la conmutación de las técnicas de control para efectuar la estabilización del sistema [Iwashiro et al.].

Considerando el modelo simplificado del péndulo, como se muestra en la Figura 4.1, donde no se toma en cuenta la fuerza aplicada al péndulo y se desprecia la fricción existente en el punto de pivote, es posible estudiar el control de energía

4. LEVANTAMIENTO DEL PÉNDULO INVERTIDO (SWING UP)

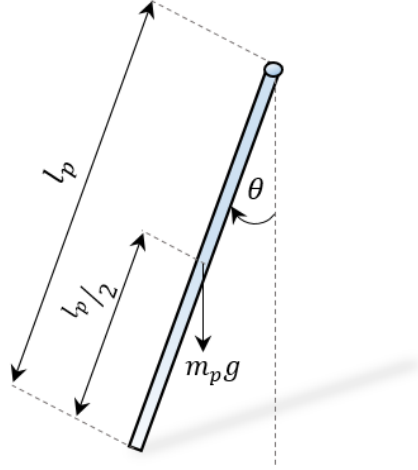


Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre del péndulo.

del péndulo sin incluir la posición y velocidad angular del eje sobre el que se encuentra el carro, en consecuencia, permite obtener un modelo simplificado de segundo orden.

La dinámica del modelo simplificado puede definirse en términos de la aceleración, u , en el punto de pivote como:

$$J_p \dot{w} + \frac{1}{2} m_p g L_p \sin(\theta) = \frac{1}{2} m_p g u \cos(\theta) . \quad (4.1)$$

De la Figura 4.1, se obtendrá la energía potencial, E_p , y la energía cinética, E_c , del péndulo.

$$E_p = \frac{1}{2} M_p g L_p (1 - \cos(\theta)) ,$$
$$E_c = \frac{1}{2} J_p w^2 .$$

La energía potencial es cero ($E_p = 0$), cuando el péndulo está en su posición de reposo ($\theta = 0$) y su energía potencial máxima será de $E_p = M_p g L_p$ cuando el

péndulo esté en la vertical superior ($\theta = \pm\pi$). La suma de la energía potencial y la energía cinética del péndulo esta dada por:

$$E = \frac{1}{2} J_p w^2 + \frac{1}{2} M_p g L_p (1 - \cos(\theta)) . \quad (4.2)$$

Para llevar el péndulo a la posición vertical superior, es estrictamente necesario llevar la energía a su valor correspondiente en dicho punto, es decir, el valor de θ y w deberán de ser cero.

Para realizar el diseño de la técnica de control es necesario conocer la influencia de la señal de control en la energía del sistema. Por lo tanto, al derivar con respecto del tiempo la Ec. (4.2) se obtiene la Ec. (4.3) a partir de la manipulación algebraica de la Ec. (4.1).

$$\dot{E} = w \left(J_p \dot{w} + \frac{1}{2} M_p g L_p \sin(\theta) \right) = M_p u l_p w \cos(\theta) . \quad (4.3)$$

De la Ec. (4.1) se observa que la controlabilidad se pierde cuando $w = 0$ y cuando $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, como ocurre cuando la velocidad cambia de dirección o se encuentra pasando por la posición horizontal.

Mediante la aplicación de la teoría desarrollada por el matemático y físico Aleksandr Lyapunov¹, es posible encontrar una señal de control que permita llevar la función correspondiente a la posición del péndulo a una región de operación deseada [Åström and Furuta].

$$u = k (E - E_0) \text{sign} (w \cos(\theta)) . \quad (4.4)$$

donde: la función $\text{sign}(x)$ representa la dirección que debe ser implementada para llevar la función de energía al valor deseado y k es un parámetro de diseño y E_0

¹Alexander Lyapunov (1857-1918) matemático ruso cuyos trabajos dieron origen al estudio de estabilidad mediante un enfoque teórico.

4. LEVANTAMIENTO DEL PÉNDULO INVERTIDO (SWING UP)

es la energía de referencia a la cual se desea llegar.

Debido a que la entrada real aplicada al sistema es una señal de voltaje, es necesario encontrar una relación entre la señal de control u (aceleración tangencial) y el voltaje aplicado al motor de CD en función de la señal de alimentación. La aceleración en la base del péndulo (pivote), es proporcional a la fuerza aplicada por el carro, la cual puede ser expresada mediante:

$$F_c = m_c u . \quad (4.5)$$

Igualando la Ec. (4.5) con la Ec. (3.21), y despejando V_m , se obtendrá el voltaje aplicado al motor en función de u .

$$V_m = \frac{m_c R_m r_{mp}}{\eta_g \eta_m k_g k_t} u + \frac{k_g k_m}{r_{mp}} v_c . \quad (4.6)$$

Sustituyendo la Ec. (4.4) en la Ec. (4.6), se obtiene la señal de control aplicada al sistema.

$$V_m = \frac{m_c R_m r_{mp}}{\eta_g \eta_m k_g k_t} \left(k (E - E_0) \text{sign}(w \cos \theta) \right) + \frac{k_g k_m}{r_{mp}} v_c . \quad (4.7)$$

La energía de referencia a la cual se desea llevar el sistema, se encuentra cuando el péndulo está en la vertical superior y se puede obtener de: $E_0 = 2m_p l_p g$.

En la Figura 4.2, se muestra el resultado de la implantación del control, en donde se aprecia la evolución del ángulo del péndulo, también se observa que el tiempo en el que el péndulo está cerca del punto de operación es, aproximadamente, 21 segundos.

Una vez que el ángulo del péndulo está cerca del punto de operación, es necesario estabilizarlo, de manera que se tendrá que realizar una conmutación con uno de

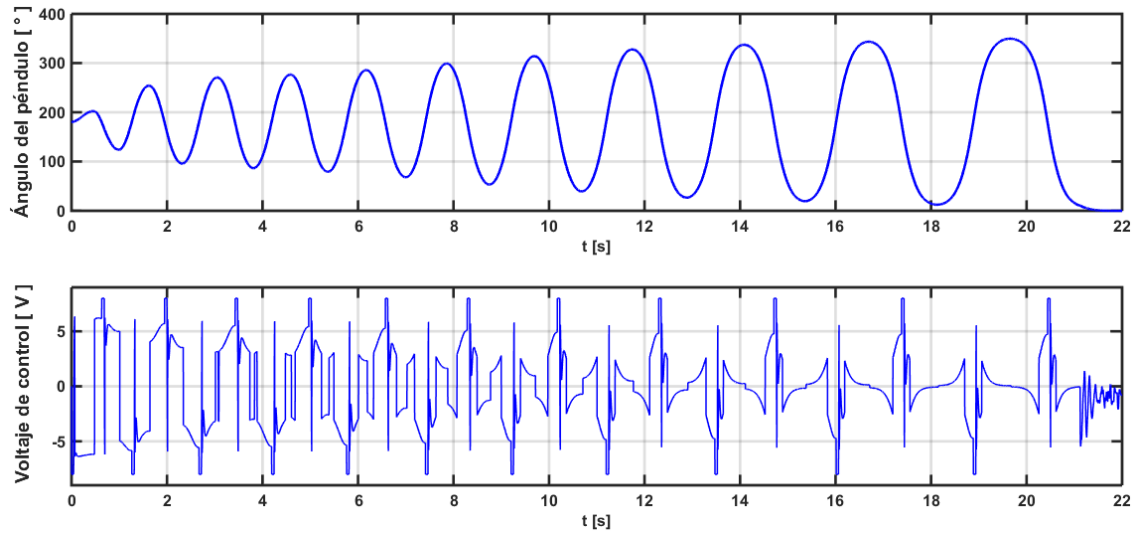


Figura 4.2: Resultados de la implantación del control *Swing Up*.

los controladores para estabilizar al péndulo descritos en el capítulo 5 . El ángulo propuesto para dicha conmutación estará entre ± 5 grados respecto a la vertical.

La Figura 4.3 muestra la implantación del control de levantamiento así como uno de los controladores para estabilizar el péndulo, descrito en la sección siguiente. Se puede notar que aproximadamente a los 22 segundos, el ángulo se encuentra cerca del punto de equilibrio, entrando en acción el controlador que estabiliza al sistema.

4. LEVANTAMIENTO DEL PÉNDULO INVERTIDO (SWING UP)

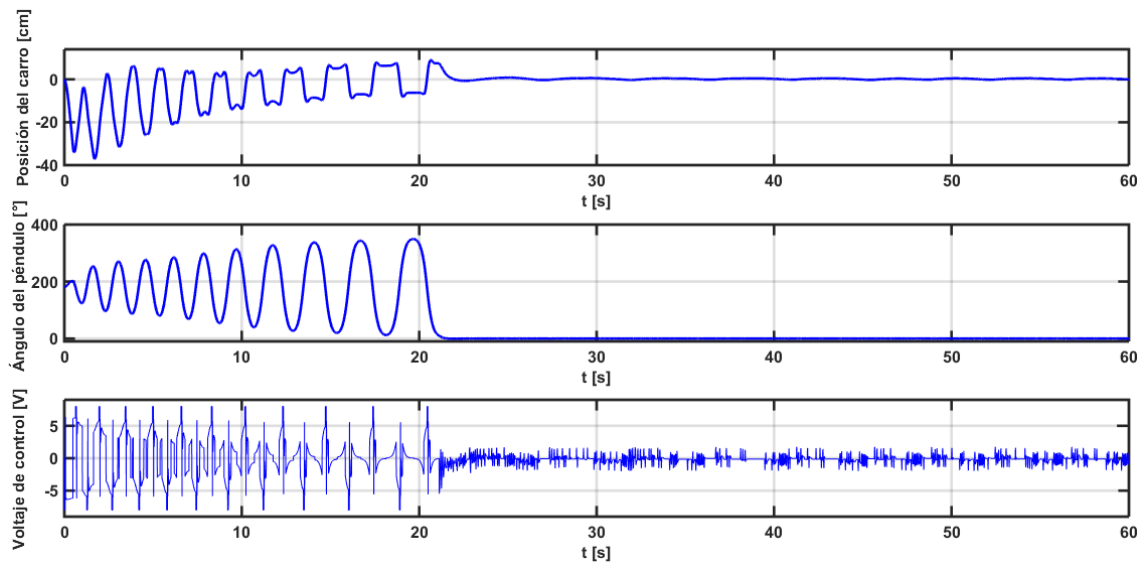


Figura 4.3: Resultados del control *Swing Up*.

Control Fraccional

En esta sección se pretende justificar de forma simple el uso de los operadores fraccionales en los sistemas de control, por lo cual es útil recordar algunas cuestiones.

El propósito de los sistemas de control es hallar un dispositivo, físico o matemático, que haga que cierto sistema cumpla unas especificaciones de funcionamiento dentro de una estructura con realimentación. A dicho dispositivo se le denomina *controlador* y al sistema inicial sobre el que opera *planta o proceso*. Las *salidas* de la planta son las magnitudes o variables medibles cuyo valor o evolución se pretende regular, mientras que se denominan *entradas* a las magnitudes o variables sobre las que podemos actuar para conseguir el funcionamiento deseado. Otras variables pueden influir en el sistema de control produciendo desviaciones en los parámetros de la planta y por tanto en las salidas, o en los valores medidos. Estas son denominadas perturbaciones y ruidos. El objetivo del controlador es que las salidas se mantengan dentro de las especificaciones a pesar de los ruidos y perturbaciones.

El control fraccional propone el uso de operadores y sistemas fraccionales como controladores. Como ejemplo de ello, y por tratar en esta tesis sólo los aspectos

fundamentales, en las secciones siguientes se hablará de las definiciones básicas y de los controladores Proporcional Integral Fraccionario (FOPI) y Proporcional Integral y Derivativo Fraccional (FOPID).

5.1. Cálculo fraccional: definiciones básicas

El cálculo fraccional es una herramienta matemática que permite la derivación e integración de funciones con órdenes no enteros. Esta teoría generaliza la noción de derivada D^α a aquellos casos en los cuales el orden de diferenciación, α , presenta un orden negativo, irracional o incluso imaginario, permitiendo cálculos del tipo derivada de orden 0.5 de una función.

El origen del cálculo fraccional se remonta a 1675, cuando Leibniz introduce el concepto de derivada de orden α de una función. Posteriormente en 1695, L'Hopital publica los primeros resultados en una carta a Leibniz, en la cual L'Hopital plantea la idea del posible significado de la derivada de orden α . Desde entonces, el cálculo fraccional ha llamado la atención de muchos matemáticos famosos, como Euler, Laplace, Fourier, Liouvielle, Riemann y Laurent. Pero no fue hasta 1884 que la teoría de operadores fraccionales logró tal nivel en su desarrollo. Para entonces la teoría se ha ampliado para incluir a los operadores D^α , donde α podría ser racional o irracional, positivo o negativo, real o complejo. El nombre *cálculo fraccional* es algo inapropiado, una mejor descripción podría ser la derivada y la integral de orden *arbitrario*. Sin embargo, se cumplirá con la tradición y en esta tesis se referirá a esta teoría como *cálculo fraccional* [Caponetto et al.].

Cabe destacar, que los operadores derivada e integral fraccional deben de satisfacer las mismas condiciones que en el caso entero, es decir, cuando se derive o

integre con orden entero usando las definiciones de los operadores fraccionales, debe de obtenerse el mismo resultado que cuando se realizan estas operaciones usando la metodología clásica.

En el dominio del tiempo, los operadores derivada e integral fraccionaria vienen definidos por la operación de convolución, por lo que son especialmente útiles para describir fenómenos de memoria tales como la difusión, la viscoelasticidad, etc.

A continuación se presentan las definiciones más usuales de los operadores fraccionales [Das].

5.1.1. Integral y derivada fraccional de Riemann-Liouville

De acuerdo con la concepción de Riemann-Liouville, la noción de integral fraccional de orden α , $\Re_e(\alpha) > 0$, es una consecuencia natural de la fórmula atribuida a Cauchy, que reduce el cálculo de la primitiva correspondiente a la integración de multiplicidad n de una función $f(t)$ a una integración simple de tipo convolución. La fórmula de Cauchy puede expresarse como:

$$I_c^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad \tau > c, n \in Z^+ . \quad (5.1)$$

donde Z^+ es el conjunto de números enteros positivos. De una forma natural, se puede extender la validez de la Ec. (5.1), de valores de índice enteros positivos a valores reales positivos utilizando la función Gamma. Teniendo en cuenta que $(n-1)! = \Gamma(n)$, e introduciendo el número real positivo α , se define la integral

fraccionaria de orden $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ como:

$$I_c^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau ,$$

$$\tau > c, \alpha \in \mathfrak{R}^+ . \quad (5.2)$$

A partir de la definición de integral de orden fraccional, Ec. (5.2), se define la derivada de orden α ($\alpha > 0$) de f , teniendo en cuenta que esta definición coincida con el caso donde α es un número natural y que además, se conserven algunas propiedades clásicas de la derivada. La derivada fraccional D^n con $n \in Z^+$ al operador derivada de orden n , e introduciendo el entero positivo m tal que $m-1 < \alpha < m$, se obtiene la definición de Riemann-Liouville para la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathfrak{R}^+$:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(1 - \tau)^{\alpha-m+1}} d\tau , \quad (5.3)$$

donde a y t son los límites del operador y $\Gamma(m - \alpha)$ es la función Gamma.

Algunas propiedades de la derivada de Riemann-Liouville [[Podlubny](#)] son:

1. **Linealidad:** Sean λ y μ constantes reales y $\alpha > 0$. Si existen las derivadas $D^\alpha f$ y $D^\alpha g$, entonces:

$$D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g .$$

2. Si $f \in L([a, b])$, entonces $D^\alpha(I^\alpha f) = f$.
3. Si $n \in N$ y $\alpha \in \mathfrak{R}^+$, entonces $D^n D^\alpha f = D^{n+\alpha} f$. Además, si $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$, entonces

$$D^n(D^\alpha f) = D^{n+\alpha} f = D^\alpha(D^n f) .$$

La derivada de orden fraccional de Riemann-Liouville, involucra ciertas dificultades cuando ésta se usa en problemas físicos, las cuales están relacionadas con las siguientes características:

- * La derivada fraccional de Riemann-Liouville de una constante es distinta de cero.
- * Esta derivada tiene una singularidad en su límite inferior, por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} D_a^\alpha = \infty$, excepto cuando $f^{(k)}(a) = 0$. Esto es un inconveniente cuando se tienen problemas de condición inicial.

5.1.1.1. Función Gamma

La función Gamma fue introducida por primera vez por el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783), con el objetivo de generalizar la función factorial a valores no enteros. Esta función pertenece a una categoría de funciones especiales, ya que muchos problemas en diversas ramas de la física, ingeniería y estadística se pueden reescribir en términos de esta función, como las integrales exponenciales, series hipergeométricas, la función Zeta de Riemann, sólo por mencionar algunas.

En la definición de Riemann-Liouville la función $\Gamma(n)$ es aplicada, siendo una extensión de la función factorial para números reales positivos n y está definida de la siguiente forma.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du , \quad (5.4)$$

donde n es un número complejo con parte real positiva. La integral converge, excepto para números enteros negativos y el cero.

Una propiedad importante de la función Gamma es:

$$\Gamma(n) = (n - 1)\Gamma(n - 1) . \quad (5.5)$$

De la cual se obtiene la función Gamma para un número entero positivo

$$\Gamma(n) = (n - 1)! . \quad (5.6)$$

5.1.2. Derivada fraccional de Caputo

El modelo matemático de ciertos problemas hace necesario considerar ecuaciones diferenciales con derivadas de orden fraccional junto a condiciones iniciales. Sin embargo, la definición de Riemann-Liouville no es suficiente para dar salida a esta necesidad pues, en este caso las condiciones iniciales correspondientes no tienen una interpretación física. Para resolver este problema, en 1969 el físico matemático italiano Michele Caputo dio una nueva definición de derivada de orden fraccional, tal definición permite plantear problemas que permitan interpretar físicamente las condiciones iniciales, es decir, los valores iniciales vienen dados por derivadas de orden entero.

Caputo definió la derivada fraccional de una función f , con derivada n absolutamente integrable, $\alpha \in \mathfrak{R}$ y $m \in Z$, como:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau , \quad (5.7)$$

donde: $(n - 1) < \alpha < n$, y $f^{(n)}$ es una derivada ordinaria.

Se puede notar que la definición de la derivada de orden fraccional propuesta por Caputo es más restrictiva que la de Riemann-Liouville, ya que en el primer caso, la función debe ser derivable, lo que no requiere la segunda definición.

Una diferencia entre la derivada fraccional de Riemann-Liouville y la de Caputo radica en que, para el primer caso, la derivada de una constante es diferente de cero, mientras que la derivada de una constante de acuerdo a la definición de Caputo es cero, lo que coincide con la derivada de orden entero.

5.1.3. Derivada de Grünwald-Létnikov

La motivación que lleva a considerar esta definición es el hecho de que para funciones que tienen $m + 1$ derivadas continuas, para $t > 0$, coinciden las definiciones de Grünwald-Létnikov y de Riemann-Liouville de derivada de orden fraccional α , $m - 1 < \alpha < m$. Esto permite aproximar la derivada de Riemann-Liouville mediante una aproximación de la derivada de Grünwald-Létnikov [Podlubny].

Anton Karl Grünwald (1838-1920) y Aleksey Vasilievich Letnikov (1837-1888), proponen la definición de la derivada fraccionaria, partiendo de la definición básica de la derivada de orden entero, esto es:

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
 f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2} \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t - mh), \\
 \binom{n}{m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}.
 \end{aligned}$$

Esto puede ser sustituido por la función Gamma de forma: $\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}$, para valores no enteros de n y α . Por lo tanto, la derivada fraccional está dada

por:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)} f(t-mh). \quad (5.8)$$

La derivada de Grünwald-Létnikov solo está definida para órdenes de derivación reales.

En [Podlubny] se demuestra que los operadores diferenciales de Riemann-Liouville y Grünwald-Létnikov dan los mismos resultados para idénticos límites inferiores y órdenes de integración reales $\alpha > 0$. Cabe preguntarse cuál utilizar ante un problema concreto. En la literatura relacionada con la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionales se utiliza preferentemente la definición de Riemann-Liouville para la formulación de problemas, y luego, a la hora de obtener la solución numérica, se pasa a la definición de Grünwald-Létnikov, muy apropiada para ser implementada en cálculos numéricos de tipo iterativo.

5.2. Acciones básicas de control

Existen múltiples formas de acción de control, cuyo tipo depende de la forma de la ley de control. Sin embargo, existen algunos tipos básicos de acción de control que se usan comúnmente en procesos industriales, estos tipos son:

- Acción de control proporcional.
- Acción de control integral.
- Acción de control derivativa.

A continuación se muestran los efectos de dichas acciones y, para el caso integral y derivativo, cómo varían dependiendo su orden fraccional.

La acción de control proporcional tiene relación directa con el error entre la salida y la referencia y produce una respuesta rápida y estable. Es esencialmente un amplificador de ganancia.

El principal efecto de la acción de integración es hacer más lenta la respuesta del sistema, disminuye la estabilidad relativa, e integra el error para minimizar el error en estado estacionario del sistema ante entradas para las que antes tenía un error finito. Para el caso de que se tenga un orden de integración fraccional, es decir $\alpha \in (0, 1)$, la selección del valor α se traduce en una determinada ponderación de los efectos mencionados. Las Figuras 5.1 y 5.2 muestran el comportamiento de esta acción para distintos valores de integración α .

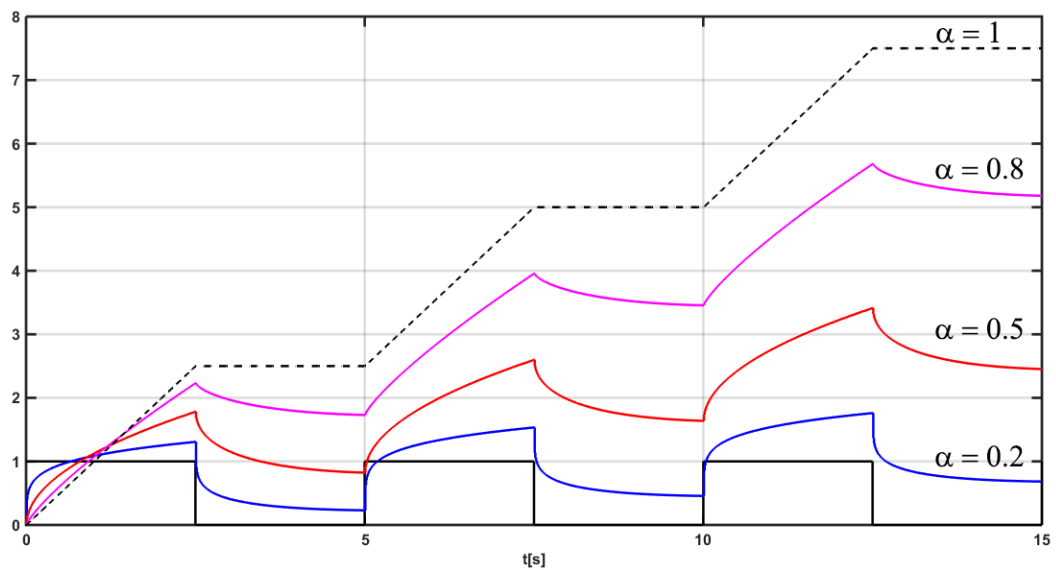


Figura 5.1: Efectos de la acción integral sobre una señal de tren de pulsos según el orden de integración.

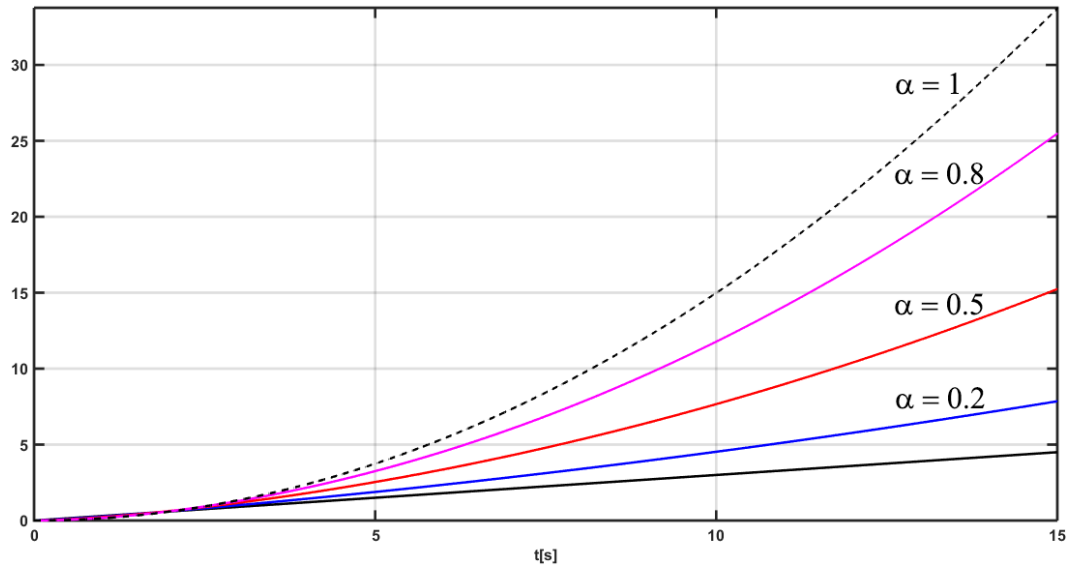


Figura 5.2: Efectos de la acción integral sobre una señal rampa según el orden de integración.

Por otro lado, la acción derivativa aumenta la estabilidad del sistema y tiende a resaltar los efectos de ruido a altas frecuencias. En el dominio del tiempo esto se puede ver principalmente por una disminución en la oscilación como en el tiempo de establecimiento. De la misma manera que en la acción integral, se observa que estos efectos pueden ser ponderados mediante la elección del orden de la derivada, Figuras 5.3 y 5.4.

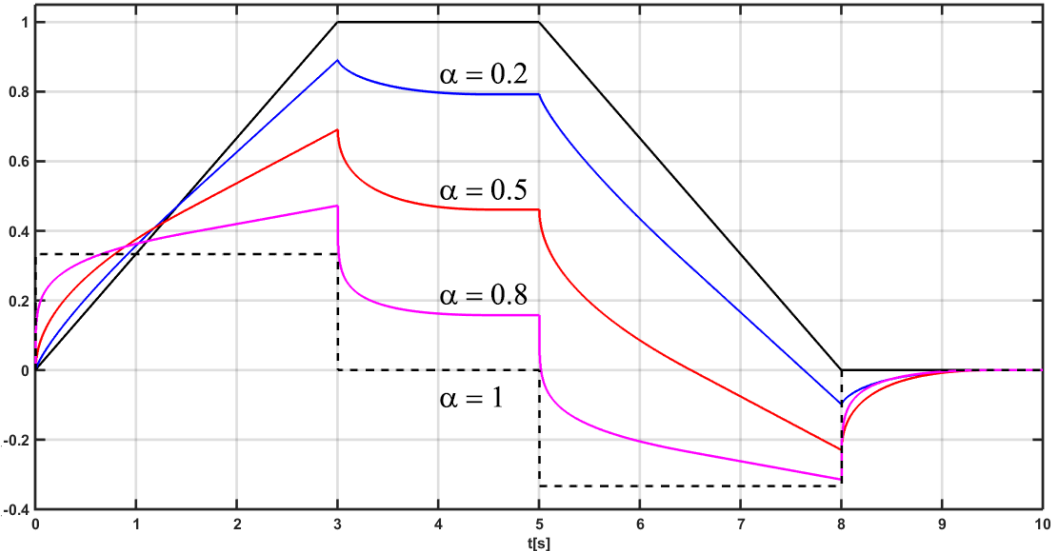


Figura 5.3: Efectos de la acción derivativa sobre una señal trapezoidal según el orden derivativo.

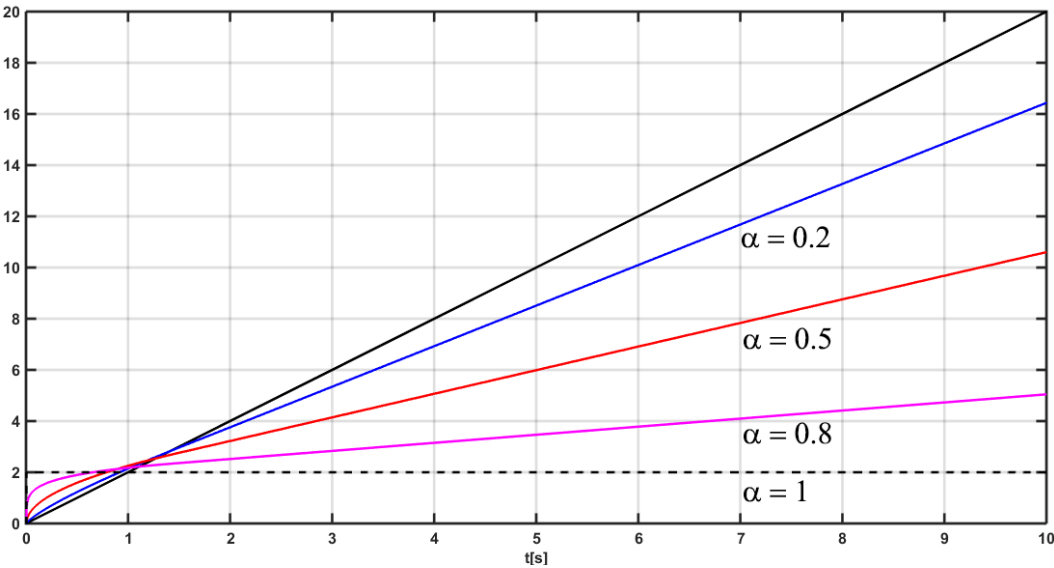


Figura 5.4: Efectos de la acción derivativa sobre una señal rampa según el orden de derivación.

En la práctica, los controles integral y derivativo no se pueden usar solos, por lo tanto, se suelen usar en combinación con otros, obteniendo las siguientes acciones de control posibles.

- Acción de control proporcional más derivativa (PD).
- Acción de control proporcional más integral (PI).
- Acción de control proporcional más integral, más derivativa (PID).

5.3. Aplicación del cálculo fraccional al control de sistemas

Es importante darse cuenta que hay una amplia gama de problemas de control y, en consecuencia, también la necesidad de una amplia gama de técnicas de diseño. Actualmente existen muchos métodos de sintonización disponibles, sin embargo, existen problemas que quedan por resolver debido a su compleja resolución.

En todo el mundo una gran cantidad de sistemas de control son operados por controladores industriales PID (Proporcional, Integral y Derivativo). Durante las últimas décadas, numerosos métodos han sido desarrollados para el ajuste de los parámetros de los controladores P, PI, y PID. Algunos de estos métodos se basan en la caracterización de la respuesta dinámica de la planta, para ser controlada mediante el uso de un modelo dinámico. Es interesante notar que, a pesar de que la mayoría de estas técnicas de sintonización proporcionan resultados satisfactorios, el conjunto de todos los parámetros en el modelado sigue siendo desconocido para los controladores PID.

Comenzando con una síntesis de las características del controlador PID, para lo cual consideremos el algoritmo teórico elemental:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (5.9)$$

cuyas variables se muestran en el lazo de control de la Figura 5.5.

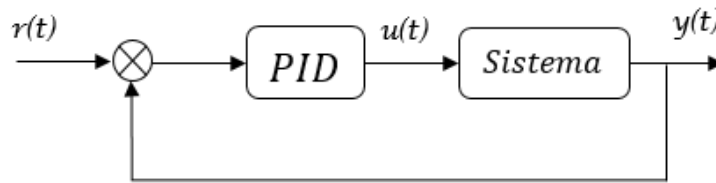


Figura 5.5: Diagrama de bloque de un controlador PID.

$y(t)$ es la variable controlada, $r(t)$ es la variable de referencia, $u(t)$ es la señal de control y $e(t) = r(t) - y(t)$ es el error actuante.

La señal de control resulta entonces igual a la suma de tres términos: el término P (proporcional al error), el término I (proporcional a la integral del error) y el término D (proporcional a la derivada del error). Los parámetros del controlador son la ganancia proporcional K , el tiempo de integración T_i y el tiempo de derivación T_d .

El controlador PID dado por la Ec. (5.9), pueden ser representado por la función de transferencia, Ec. (5.10), en donde los parámetros pueden ser relacionados a través de:

$$k_p = K, \quad k_i = \frac{K}{T_i}, \quad k_d = KT_d, \\ C(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (5.10)$$

Tener una pequeña mejora en el funcionamiento de los controladores PID podría tener un impacto relevante, así pues, estas mejoras pueden ser obtenidas mediante el uso de controladores PID fraccionales, $PI^\alpha D^\lambda$. En esta sección se propone la aplicación de controladores PID de orden fraccional como una alternativa a resolver algunos de los problemas de control que pueden surgir cuando se trata de aplicaciones industriales. Por un lado, se propone un nuevo método para el diseño de controladores de orden fraccional, y más concretamente, para la sintonización de un controlador $PI^\alpha D^\lambda$ general.

La señal de control que define la acción de control PID de orden fraccional es:

$$u(t) = K_p x(t) + K_i I^\alpha x(t) + K_d D^\lambda x(t) , \quad (5.11)$$

donde k_p es la ganancia de la acción proporcional, k_d es la ganancia de la acción derivativa y k_i es la ganancia de la acción integral, I^α es un integrador fraccional de orden α y D^λ es una derivada fraccional de orden λ .

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior con condiciones iniciales nulas, se obtiene la función de transferencia del controlador fraccional, que puede expresarse de la forma:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\lambda . \quad (5.12)$$

donde λ y α son los ordenes fraccionarios de las partes integral y derivativa del controlador, respectivamente. La Figura 5.6 muestra el diagrama de bloques de un controlador fraccional PID .

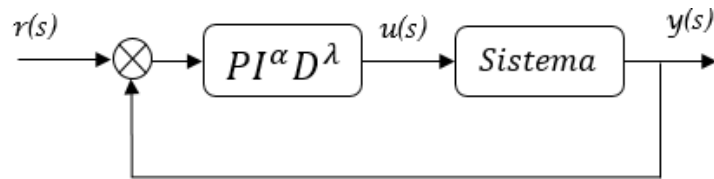


Figura 5.6: Diagrama de bloque de un controlador $PI^\alpha D^\lambda$.

Dado que este tipo de controlador tiene un máximo de cinco especificaciones de diseño que pueden satisfacer al sistema controlado (k_p , k_i , k_d , λ y α), dos más que en el caso de un controlador PID clásico donde $\lambda = 1$ y $\alpha = 1$, las especificaciones son más interesantes en cuanto a rendimiento y robustez, se refiere ya que el objetivo es tener un sistema controlado robusto a las perturbaciones y ruido de alta frecuencia. Todas estas limitaciones se tendrán en cuenta en la técnica de sintonización con el fin de tomar ventaja en la introducción de órdenes fraccionales.

Este capítulo se centra en el desarrollo de controladores fraccionales, teniendo como objetivo el determinar el conjunto de parámetros del controlador para el cual el sistema a lazo cerrado sea estable. Los controladores fraccionales propuestos son: $PI^\alpha D^\lambda$, el cual engloba las tres acciones de control con ordenes fraccionales en su parte derivada e integral, el PI^α descrito por una parte proporcional y una parte integral fraccional, y por último una variación del control $PI^\alpha D^\lambda$ llamado I^α - PD^λ .

5.3.1. Estabilidad en modelos de orden fraccional

De una manera general, el estudio de la estabilidad de los sistemas de orden fraccional puede llevarse a cabo mediante el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que los caracterizan. Una forma alternativa es localizar los polos del

5. CONTROL FRACCIONAL

sistema en el plano complejo.

De acuerdo con el teorema de estabilidad definido en [Caponetto et al.], los puntos de equilibrio son asintóticamente estables si todos los valores propios de la matriz jacobiana $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ evaluada en el punto de equilibrio, satisface la condición:

$$\left| \arg(\text{eig}(A)) \right| = \left| \arg(\lambda_i) \right| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.13)$$

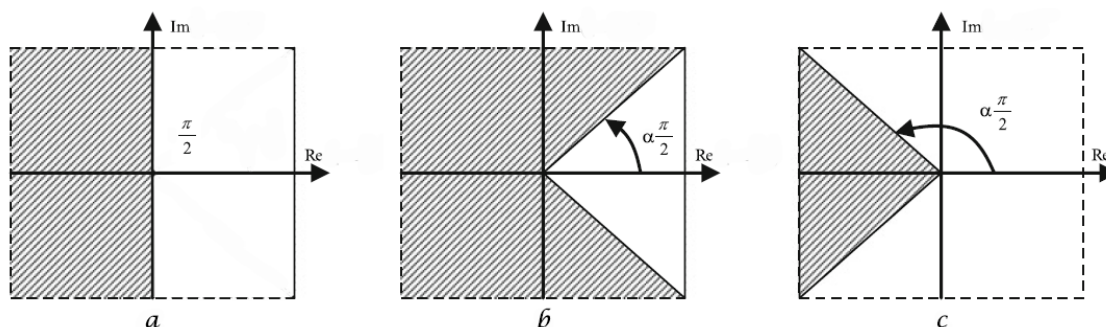


Figura 5.7: Regiones de estabilidad para: (a) $\alpha = 1$, (b) $0 < \alpha < 1$, (c) $1 \leq \alpha < 2$

Para el caso de que $\alpha = 1$, se cumple la condición de estabilidad clásica, en donde los polos del sistema deberán encontrarse en el semiplano izquierdo del plano complejo para que el sistema sea estable; en el caso de que α esté comprendida entre 0 y 1, la región de estabilidad aumenta al semiplano derecho, es decir, el rango de estabilidad aumenta consiguiendo que la ubicación de la parte real de los polos no esté restringida a ser negativos. Por otro lado, si α es mayor a 1, la región de estabilidad disminuye, reduciendo el rango en el cual los polos pueden encontrarse para que el sistema sea estable.

5.3.2. Control fraccional PI

El control fraccional PI, (FOPI, Fraccional Order Proportional Integration) ofrece una realimentación de estados del tipo proporcional-integral, donde se toman en cuenta valores fraccionales para la parte integral. Esto permite dar dos soluciones al mismo tiempo, la primera es eliminar el error en estado estacionario y la segunda es introducir el cálculo fraccional usando un integrador fraccional que permita cumplir cierto mejoramiento.

En esta sección se desarrollará un medio para determinar las ganancias proporcional e integral para esta ley de control, por ende, se utilizará el método de asignación de polos con un polinomio a lazo cerrado. Este método ofrece un esquema muy simple para lograr la realimentación de estados FOPI. El polinomio característico deseado en lazo cerrado se compone de dos polinomios: el primer polinomio es de orden entero y permite agregar los $(n - 1)$ polos deseados, el segundo polinomio tendrá un orden fraccional establecido por el polinomio en lazo cerrado.

Después de resolver los aspectos teóricos, se implantará esta ley de control fraccional al sistema físico del péndulo invertido sobre carro. Estas pruebas experimentales validan prácticamente el resultado teórico. Además, demuestran la robustez frente a perturbaciones (fuerzas externas), así como los cambios en los parámetros del sistema controlado.

5.3.2.1. Diseño de control

Como ya se mencionó, el método que se utilizará para obtener la ley de control de un FOPI, es mediante la realimentación de variables de estado por asignación de

5. CONTROL FRACCIONAL

polos en lazo cerrado, este método consiste en igualar el polinomio característico del sistema a un polinomio deseado, y entonces encontrar el valor de las ganancias de realimentación. Para ello consideremos el sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathfrak{R}$ es la salida y A, B, C, D son las matrices del sistema.

De la Figura 5.8, se obtiene la ley de control:

$$u(t) = k_p x(t) + k_i I^\alpha x(t), \quad (5.15)$$

donde k_p y k_i son vectores de ganancias diseñados, e I^α es un integrador fraccional de orden α .

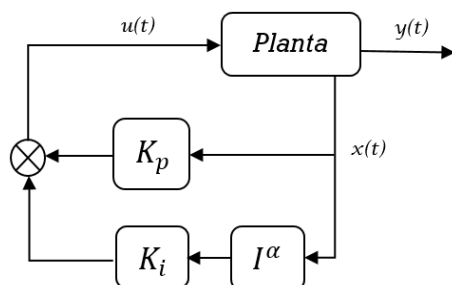


Figura 5.8: Diagrama de control realimentado FOPI.

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (5.15) tenemos:

$$u(s) = k_p x(s) + k_i \frac{1}{s^\alpha} x(s). \quad (5.16)$$

Tomando en cuenta que el sistema de estudio posee cuatro estados ($n = 4$), se procede a transformar el sistema descrito por la Ec. (3.31), a su forma canónica

controlable, resultando:

$$A_c(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 y a_3 pertenecen al polinomio característico del sistema; también es posible encontrar dicho polinomio mediante el determinante de $(sI - A)$. Para el caso del péndulo invertido, el determinante estaría dado por:

$$\det(sI - A) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \quad (5.18)$$

Cerrando el lazo con la ley de control (5.15) resulta:

$$A_{cl}(s) = sI - A_c - B_c k_{p_n} - B_c k_{i_n} \frac{1}{s^\alpha} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & s + z_3 \end{bmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} z_0 &= a_0 - k_{p_1} - \frac{k_{i_1}}{s^\alpha}, & z_1 &= a_1 - k_{p_2} - \frac{k_{i_2}}{s^\alpha}, \\ z_2 &= a_2 - k_{p_3} - \frac{k_{i_3}}{s^\alpha}, & z_3 &= a_3 - k_{p_4} - \frac{k_{i_4}}{s^\alpha}. \end{aligned}$$

Desarrollando el determinante de $A_{cl}(s)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(s) &= s^4 + \left(a_3 - k_{p_4} - \frac{k_{i_4}}{s^\alpha} \right) s^3 + \left(a_2 - k_{p_3} - \frac{k_{i_3}}{s^\alpha} \right) s^2 + \left(a_1 - k_{p_2} - \frac{k_{i_2}}{s^\alpha} \right) s \\ &\quad + \left(a_0 - k_{p_1} - \frac{k_{i_1}}{s^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Que puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s^\alpha \Delta_{cl}(s) &= s^{\alpha+4} + (a_3 - k_{p_4}) s^{\alpha+3} - k_{i_4} s^3 + (a_2 - k_{p_3}) s^{\alpha+2} - k_{i_3} s^2 + (a_1 - k_{p_2}) s^{\alpha+1} \\ &\quad - k_{i_2} s + (a_0 - k_{p_1}) s^\alpha - k_{i_1}. \end{aligned}$$

5. CONTROL FRACCIONAL

El polinomio característico del modelo en espacio de estados en lazo cerrado se calcula como $\det(A_{cl}(s)) = 0$, y viene dado por:

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(s) = s^\alpha & \left(s^4 + (a_3 - k_{p4}) s^3 + (a_2 - k_{p3}) s^2 + (a_1 - k_{p2}) s + (a_0 - k_{p1}) \right) \\ & - k_{i4} s^3 - k_{i3} s^2 - k_{i2} s - k_{i1} , \end{aligned} \quad (5.19)$$

el cual puede ser escrito como:

$$\Delta_{cl}(s) = s^\alpha \Delta_{cl_1}(s) - k_{i_n} \Delta_{cl_2}(s) . \quad (5.20)$$

siendo $\Delta_{cl_1}(s)$ y $\Delta_{cl_2}(s)$ dos polinomios enteros de orden n y $n-1$ respectivamente, donde:

$$\Delta_{cl_1}(s) = s^4 + (a_3 - k_{p4}) s^3 + (a_2 - k_{p3}) s^2 + (a_1 - k_{p2}) s + (a_0 - k_{p1}) , \quad (5.21)$$

$$\Delta_{cl_2}(s) = k_{i4} s^3 + k_{i3} s^2 + k_{i2} s + k_{i1} . \quad (5.22)$$

El valor de las ganancias k_{p_n} y k_{i_n} , pueden ser calculadas de la siguiente manera. Primero se requiere que $a_0 - k_{p1} = 0$, por lo tanto: $a_0 = k_{p1}$. De esta manera, la Ec. (5.21) puede ser escrita como:

$$\Delta_{cl_1}(s) = s \tilde{\Delta}_{cl_1}(s) , \quad (5.23)$$

donde:

$$\tilde{\Delta}_{cl_1}(s) = s^3 + (a_3 - k_{p4}) s^2 + (a_2 - k_{p3}) s + (a_1 - k_{p2}) . \quad (5.24)$$

Por lo tanto, el polinomio característico de la Ec. (5.19), toma la forma:

$$\Delta_{cl}(s) = s^{\alpha+1} \tilde{\Delta}_{cl_1}(s) - k_{i_n} \Delta_{cl_2}(s) . \quad (5.25)$$

$\tilde{\Delta}_{cl_1}(s)$ y $\Delta_{cl_2}(s)$ ahora son dos polinomios del mismo orden, $n - 1$, y sus respectivos coeficientes k_{p_n} y k_{i_n} , finalmente, se calculan a partir de igualarse a un polinomio entero de orden $n - 1$, esto con el fin de permitir elegir los $n - 1$ polos del polinomio característico en lazo cerrado de $\Delta_{cl}(s)$.

$$\tilde{\Delta}_{cl_1}(s) = \Delta_{cl_2}(s) = \tilde{\Delta}_d(s) .$$

El polinomio de diseño en lazo cerrado está dado por $\Delta_d(s)$. Éste a su vez consta de dos polinomios; el primero de ellos es un polinomio entero con los $n - 1$ polos enteros, y el segundo polinomio es de valor fraccional $(s^{\alpha+1} + p_f)$. De esta manera se puede elegir un polo dominante, p_f , para imponer la dinámica de la respuesta a lazo cerrado, y el valor fraccional ($0 < \alpha < 1$), se selecciona para imponer el sobre paso en la respuesta del sistema.

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+1} + p_f)(s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0) . \quad (5.26)$$

Igualando los coeficientes $(a_i - k_{p_n})$ de la Ec. (5.24) con los coeficientes β_i del polinomio fraccional de la Ec. (5.26), es posible hallar los valores de las ganancias k_{p_n} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_3 - k_{p_4} = \beta_2 &\Rightarrow k_{p_4} = a_3 - \beta_2 , \\ a_2 - k_{p_3} = \beta_1 &\Rightarrow k_{p_3} = a_2 - \beta_1 , \\ a_1 - k_{p_2} = \beta_0 &\Rightarrow k_{p_2} = a_1 - \beta_0 , \\ &k_{p_1} = a_0 . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para el cálculo de los valores de k_{i_n} , se procede a igualar los coeficientes k_{i_n} de la Ec. (5.22) con los coeficientes β_i del polinomio entero de la Ec. (5.26), resultando:

$$k_{i_4} = -p_f ; \quad k_{i_3} = -p_f \beta_2 ; \quad k_{i_2} = -p_f \beta_1 ; \quad k_{i_1} = -p_f \beta_0 . \quad (5.28)$$

5. CONTROL FRACCIONAL

De esta forma, la asignación de polos a lazo cerrado en la base original se consigue mediante:

$$\begin{aligned} k_p &= \begin{bmatrix} a_0 & (a_1 - \beta_0) & (a_2 - \beta_1) & (a_3 - \beta_2) \end{bmatrix} T, \\ k_i &= \begin{bmatrix} -p_f \beta_0 & -p_f \beta_1 & -p_f \beta_2 & -p_f \end{bmatrix} T. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Por lo tanto las ganancias del controlador k_p se obtienen a partir del polinomio de diseño y el polinomio característico del sistema, mientras que las ganancias k_i , vienen dadas por un polinomio de diseño y un polo dominante¹, para la parte fraccionaria. Además, es necesario calcular una matriz de transformación T para obtener las ganancias en el sistema original, [Ogata].

Para el diseño del polinomio, Ec. (5.26), es importante resaltar que el polo dominante es el más cercano al eje imaginario y debe de tener una distancia entre los polos restantes, de al menos 5 veces [Nise and Romo] el valor de la parte real del polo dominante. Además, una condición necesaria y suficiente para la colocación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable. De esta manera, se parte de los siguientes polos deseados de diseño: $p_f = -2.5$, $p_1 = -19$, $p_2 = -14$ y $p_3 = -15$, para obtener los coeficientes β_i , dando como resultado el siguiente polinomio.

$$\Delta_d(s) = (s^\alpha + 2.5)(s^3 + 48s^2 + 761s + 3990). \quad (5.30)$$

Una vez obtenidos los polinomios característicos, tanto del sistema como de diseño, se necesita determinar la matriz de transformación y, dado que el modelo es completamente controlable, es posible hallarla a fin de que transforme el sistema

¹los polos dominantes son aquellos que hacen una aportación importante a la respuesta transitoria y son los más cercanos al eje imaginario.

original a su forma canónica controlable. La manera de hallar dicha matriz para el sistema del péndulo invertido sobre carro se muestra a continuación:

$$T = \begin{bmatrix} Q' & (QA)' & (QA^2)' & (QA^3)' \end{bmatrix}', \quad (5.31)$$

donde Q , está ligada a la matriz de controlabilidad C_o y a un vector unitario e .

$$Q = e C_o^{-1}. \quad (5.32)$$

Al sustituir valores, se obtiene la siguiente matriz de transformación:

$$T = \begin{bmatrix} -0.0194 & -6.2583e - 05 & 0.0084 & 2.7161e - 05 \\ 0 & -0.0194 & 6.1394e - 04 & 0.0084 \\ 0 & 3.4694e - 17 & 0.1905 & -1.2468e - 17 \\ 0 & -8.3266e - 16 & -4.7878e - 16 & 0.1905 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

por lo tanto, es posible hallar las ganancias k_p y k_i que requiere la ley de control fraccional, sustituyendo los coeficientes de las Ecs. (5.18) y (5.30) en la Ec. (5.29) se obtiene:

$$\begin{aligned} k_p &= \begin{bmatrix} 0 & 49.7164 & -114.9866 & -32.9127 \end{bmatrix}, \\ k_i &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.08 & 15 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

El rango del valor fraccional considerado en esta tesis, está comprendido entre $0 < \alpha < 1$, debido a que, con estos valores se puede extender la región de estabilidad, Figura 5.7. El valor fraccional inicial propuesto es de 0.5, esto con el fin de tener un valor medio en el rango de operación, es decir, no se desea integrar por completo la señal de error (α cercano a 1), ni se pretende anular por completo la integración de la señal de error (α cercano a 0). En secciones siguientes, se realizarán simulaciones donde se observará la respuesta del sistema para distintos valores de α .

5.3.2.2. Estabilidad en lazo cerrado

Una vez diseñado el controlador *FOPI*, se procede a obtener la estabilidad del sistema al aplicarle este tipo de controlador, de modo que se pueda garantizar la implementación del controlador en el sistema físico.

En la sección 5.3.1, se definió la estabilidad para sistemas fraccionales, en donde los puntos de equilibrio son asintóticamente estables si todos los valores propios del sistema a lazo cerrado satisfacen la Ec. (5.13). Para obtener los valores propios es necesario calcular las soluciones de la Ec. (5.30), y enseguida obtener su argumento para satisfacer el teorema de estabilidad. Dichas soluciones están dadas por:

$$\begin{aligned} s_1 &= -21.15079 + 5.93721 i , & s_3 &= -8.33889 + 1.61977 i , \\ s_2 &= -21.15079 - 5.93721 i , & s_4 &= -8.33889 - 1.61977 i . \end{aligned}$$

Calculando el argumento de las soluciones:

$$\begin{aligned} \arg(s_1) &= 2.867927 , & \arg(s_3) &= 2.94974 , \\ \arg(s_2) &= -2.867927 , & \arg(s_4) &= -2.94974 . \end{aligned}$$

Para garantizar la estabilidad, se debe de cumplir que $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{4}$, ya que el valor de $\alpha = 0.5$. Por tanto, como se observa en los argumentos calculados, el controlador fraccional *FOPI* es asintóticamente estable.

5.3.2.3. Control del sistema

Antes de implementar el control en el sistema físico, se realizaron las simulaciones pertinentes, en donde se observó el comportamiento del sistema con las ganancias previamente obtenidas. Además, es posible verificar el tiempo en que el controlador estabiliza al péndulo en su vertical, así como la posición del carro en cero

(posición inicial).

En la Figura 5.9 se presentan los resultados de la simulación, en la cual, las condiciones iniciales propuestas son de $\theta = 3$ grados, $x_c = 0m$ y las velocidades del carro y del péndulo son nulas. El valor fraccional para la parte integral que se tomó en un inicio fue de $\alpha = 0.5$, aunque es posible variar este valor para observar su comportamiento. El tiempo que tarda el controlador en estabilizar al péndulo en su vertical es de aproximadamente 2 segundos, asimismo el carro tarda aproximadamente 3 segundos en volver a su posición inicial después de recibir la perturbación. Se observa que la señal de control es aceptable ya que no supera los límites de voltaje que el actuador soporta.

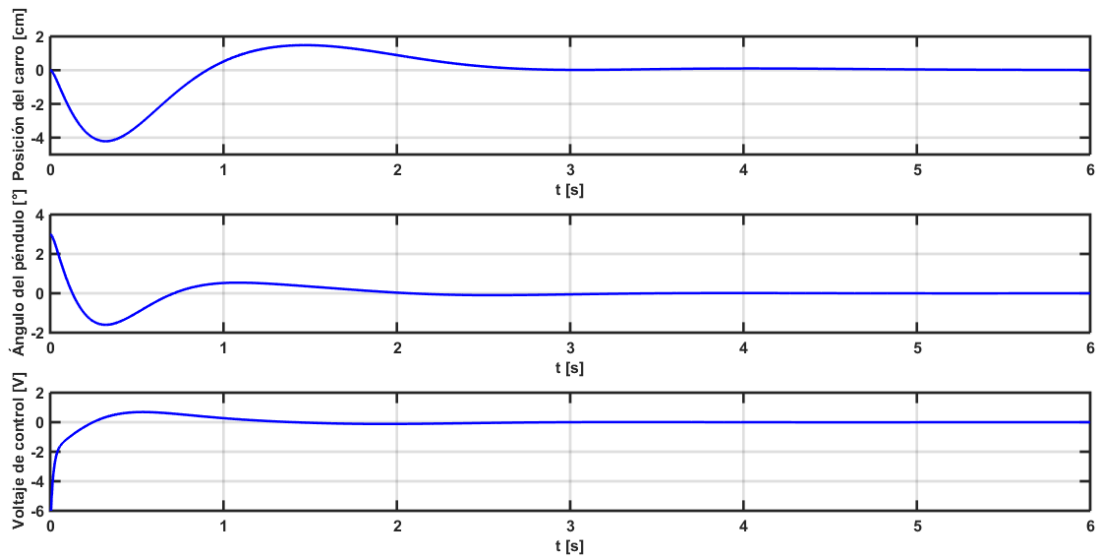


Figura 5.9: Resultados de la simulación del controlador FOPI.

Como se ha mencionado, el valor fraccional α pondera los efectos de la acción integral y es posible variarlo para obtener mejores resultados. Debe tenerse en cuenta que, si se toma un valor muy cercano a cero, equivaldría a no tomar en cuenta la acción integral en el control. En la Figura 5.10 se muestran los resultados

5. CONTROL FRACCIONAL

de la simulación, donde se prueban diferentes valores de α .

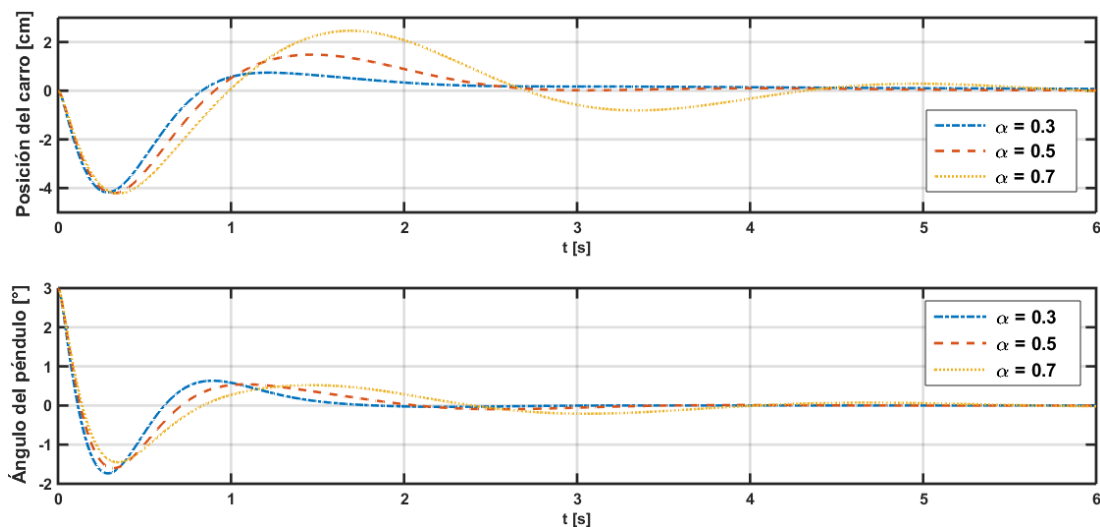


Figura 5.10: Resultado de la simulación del controlador fraccional PI variando el orden fraccional.

En la simulación se tomaron tres valores para el parámetro fraccional α . Puede notarse que para valores de $\alpha = 0.3$, el péndulo converge al origen en aproximadamente 1.5 segundos, pero la posición del carro no llega a su posición inicial, presentando un pequeño error en estado estacionario; esto es debido a que los valores de α están muy cerca de cero, haciendo mínima la acción del integrador. Por otro lado, para el valor de $\alpha = 0.5$ el péndulo alcanzó el origen en 2 segundos, además de que el carro alcanzó su posición inicial en aproximadamente 3 segundos, y en este caso el error en estado estacionario es cero. Finalmente, cuando $\alpha = 0.7$, el sistema empieza a presentar oscilaciones en las variables a controlar, haciendo que el sistema se vuelva inestable conforme α llegue a 1.

La Figura 5.11 muestra el resultado de la implantación del control fraccional PI con los valores de ganancias obtenidos. El control se aplicó aproximadamente a

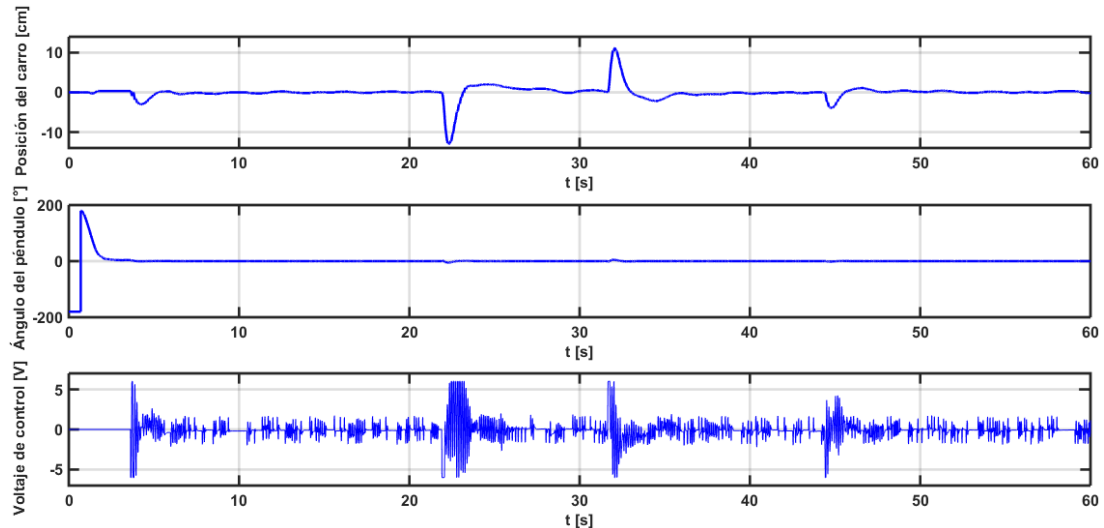


Figura 5.11: Implantación del controlador fraccional PI.

los 4 segundos, una vez que el péndulo se encontraba totalmente en su vertical (cero grados), teniendo una ligera perturbación al inicio. Se puede observar que el sistema es perturbado con un empujón a los tiempos 22 segundos, 32 segundos y 45 segundos y en cada uno de ellos el control FOPI logra estabilizar al péndulo en su posición vertical y al carro en su posición inicial. También es posible ver que el voltaje de control oscila entre los 2 y -2 volts mientras el sistema no sea perturbado.

5.3.3. Control fraccional PID

Esta sección trata sobre el diseño de un controlador *PID* fraccional, en el que los órdenes de las partes integrales y derivativas, λ y α respectivamente, son fraccionales. El objetivo es obtener ventaja de los parámetros fraccionales y cumplir las especificaciones adicionales de diseño, asegurando un rendimiento robusto del sistema controlado.

El control fraccional PID, también llamado $PI^\alpha D^\lambda$ o *FOPID* (fraccional order, por sus siglas en inglés) introduce una realimentación de estados del tipo proporcional-integral-derivativo, permitiendo agregar tres soluciones al mismo tiempo, la primera elimina el error en estado estacionario (parte integral), la segunda disminuye las oscilaciones y el tiempo de establecimiento (parte derivativa), y la tercera introduce el cálculo fraccional empleando un integrador y un derivador para cumplir cierto mejoramiento.

De manera similar que en el control *FOPI*, el método que se utilizará para obtener las ganancias del controlador será por medio de la reubicación de los polos del sistema mediante un polinomio en lazo cerrado, ya que es un método práctico y sencillo de encontrar las ganancias para el controlador. El polinomio característico deseado en lazo cerrado se compone de dos polinomios: el primer polinomio es de orden entero y permite agregar los $(n - 1)$ polos deseados, el segundo polinomio tendrá un orden fraccional establecido por el polinomio en lazo cerrado. Ya que el controlador *FOPID* requiere dos valores fraccionales, λ y α , ambos valores fraccionales se tomarán iguales, es decir, $\lambda = \alpha = 0.5$, esto con el fin de simplificar cálculos.

5.3.3.1. Diseño de control

Las variables de estados estarán realimentadas mediante asignación de polos en lazo cerrado, teniendo que igualar el polinomio característico del sistema a un polinomio de diseño, y así calcular el valor de las ganancias del controlador. De la Figura 5.12 se determina la ley de control para el controlador fraccional FOPID.

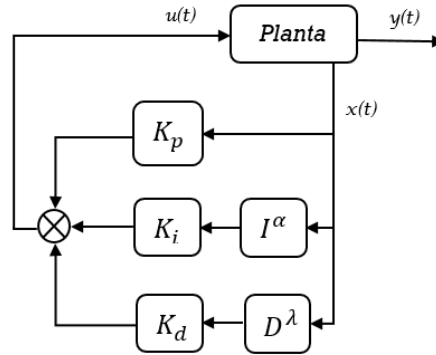


Figura 5.12: Diagrama de bloques del control FOPID

La ley de control FOPID esta descrito por:

$$u(t) = k_p x(t) + k_i I^\alpha x(t) + k_d D^\lambda x(t) , \quad (5.35)$$

donde k_p , k_i y k_d son los vectores de ganancias diseñados para imponer el polinomio de diseño en lazo cerrado. I^α es un integrador fraccional de orden fraccional α y D^λ es un derivador de orden fraccional λ .

Aplicando la Transformada de Laplace:

$$u(s) = k_p x(s) + k_i \frac{1}{s^\alpha} x(s) + k_d s^\lambda x(s) . \quad (5.36)$$

Cerrando el lazo con el sistema en forma canónica controlable, Ec (5.17) y de la ley de control, Ec. (5.36).

$$A_{cl}(s) = sI - A_c - B_c k_{pn} - B_c k_{in} \frac{1}{s^\alpha} - B_c k_{dn} s^\lambda = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & s + z_3 \end{bmatrix} ,$$

5. CONTROL FRACCIONAL

donde:

$$\begin{aligned} z_0 &= a_0 - k_{p1} - \frac{k_{i1}}{s^\alpha} - k_{d1} s^\lambda, & z_1 &= a_1 - k_{p2} - \frac{k_{i2}}{s^\alpha} - k_{d2} s^\lambda, \\ z_2 &= a_2 - k_{p3} - \frac{k_{i3}}{s^\alpha} - k_{d3} s^\lambda. & z_3 &= a_3 - k_{p4} - \frac{k_{i4}}{s^\alpha} - k_{d4} s^\lambda. \end{aligned}$$

Obteniendo el determinante de $A_{cl}(s)$.

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(s) &= s^4 + \left(a_3 - k_{p4} - \frac{k_{i4}}{s^\alpha} - k_{d4} s^\lambda \right) s^3 + \left(a_2 - k_{p3} - \frac{k_{i3}}{s^\alpha} - k_{d3} s^\lambda \right) s^2 \\ &+ \left(a_1 - k_{p2} - \frac{k_{i2}}{s^\alpha} - k_{d2} s^\lambda \right) s + \left(a_0 - k_{p1} - \frac{k_{i1}}{s^\alpha} - k_{d1} s^\lambda \right). \end{aligned}$$

El polinomio característico del modelo en espacio de estados en lazo cerrado se calcula como $\det(\Delta_{cl}(s)) = 0$, y viene dado por:

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(s) &= s^{\alpha+1} \left(s^3 + (a_3 - k_{p4}) s^2 + (a_2 - k_{p3}) s + (a_1 - k_{p2}) \right) + (a_0 - k_{p1}) s^\alpha \\ &- k_{i4} s^3 - k_{i3} s^2 - k_{i2} s - k_{i1} - \left(k_{d4} s^3 + k_{d3} s^2 + k_{d2} s + k_{d1} \right) s^{\alpha+\lambda}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para calcular el valor de k_{pn} , k_{in} y k_{dn} , se requiere que $a_0 - k_{p1} = 0$, por lo tanto: $k_{p1} = a_0$, de esta manera, $\Delta_{cl}(s)$ puede ser escrito como:

$$\Delta_{cl}(s) = s^{\alpha+1} \Delta_{cl1}(s) - \Delta_{cl2}(s) - s^{\alpha+\lambda} \Delta_{cl3}(s). \quad (5.38)$$

Siendo $\Delta_{cl1}(s)$, $\Delta_{cl2}(s)$ y $\Delta_{cl3}(s)$ polinomios enteros de orden $n - 1$, en donde:

$$\Delta_{cl1}(s) = s^3 + (a_3 - k_{p4}) s^2 + (a_2 - k_{p3}) s + (a_1 - k_{p2}) + (a_0 - k_{p1}). \quad (5.39)$$

$$\Delta_{cl2}(s) = k_{i4} s^3 + k_{i3} s^2 + k_{i2} s + k_{i1}. \quad (5.40)$$

$$\Delta_{cl_3}(s) = k_{d_4}s^3 + k_{d_3}s^2 + k_{d_2}s + k_{d_1} . \quad (5.41)$$

$\Delta_{cl_1}(s)$, $\Delta_{cl_2}(s)$ y $\Delta_{cl_3}(s)$ ahora son polinomios del mismo orden, y sus respectivos coeficientes k_{p_n} , k_{i_n} y k_{d_n} finalmente se calculan a partir de igualarse a un polinomio deseado de orden $n - 1$, esto con el objetivo de permitir elegir los polos del polinomio característico en lazo cerrado de $\Delta_{cl}(s)$.

El polinomio de diseño en lazo cerrado, $\Delta_d(s)$, está formado por tres polinomios. El primero de ellos es un polinomio entero con $n - 1$ polos, el segundo polinomio es de valor fraccional correspondiente a la acción integral ($s^{\alpha+1}$), y el tercer polinomio corresponde a la parte derivativa ($s^{\alpha+\lambda}$), teniendo relación directa con la acción integral.

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+1} + s^{\alpha+\lambda} + p_f)(s^3 + \beta_2s^2 + \beta_1s + \beta_0) . \quad (5.42)$$

Igualando los coeficientes ($a_i - k_{p_n}$) de la Ec. (5.39) con los coeficientes β_i del polinomio fraccional ($\alpha + 1$) de la Ec. (5.42), es posible hallar los valores de las ganancias k_{p_n} , por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_3 - k_{p_4} = \beta_2 &\Rightarrow k_{p_4} = a_3 - \beta_2 , \\ a_2 - k_{p_3} = \beta_1 &\Rightarrow k_{p_3} = a_2 - \beta_1 , \\ a_1 - k_{p_2} = \beta_0 &\Rightarrow k_{p_2} = a_1 - \beta_0 , \\ &k_{p_1} = a_0 . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Para el cálculo de los valores de k_{i_n} , se procede a igualar los coeficientes k_{i_n} de la Ec. (5.40) con los coeficientes del polinomio entero de la Ec. (5.42), teniendo:

$$k_{i_4} = -p_f , \quad k_{i_3} = -p_f\beta_2 , \quad k_{i_2} = -p_f\beta_1 , \quad k_{i_1} = -p_f\beta_0 . \quad (5.44)$$

Para k_{d_n} , se igualan los coeficientes de la Ec. (5.41) con los coeficientes β_i del polinomio fraccional ($\alpha + \lambda$) de la Ec. (5.42), resultando:

$$k_{d_4} = -1 , \quad k_{d_3} = -\beta_2 , \quad k_{d_2} = -\beta_1 , \quad k_{d_1} = -\beta_0 . \quad (5.45)$$

Obteniendo los valores de k_p , k_i y k_d en la base original:

$$\begin{aligned} k_p &= \begin{bmatrix} a_0 & (a_1 - \beta_0) & (a_2 - \beta_1) & (a_3 - \beta_2) \end{bmatrix} T, \\ k_i &= \begin{bmatrix} -p_f \beta_0 & -p_f \beta_1 & -p_f \beta_2 & -p_f \end{bmatrix} T, \\ k_d &= \begin{bmatrix} -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -1 \end{bmatrix} T. \end{aligned} \quad (5.46)$$

El vector de ganancias k_p se obtendrá a partir de las raíces del polinomio diseñado y los polos del sistema, mientras que los vectores de ganancias k_i y k_d están en función de las raíces del polinomio a diseñar y un polo dominante correspondiente a la parte fraccional, ya que se supone que λ y α son iguales. Además, se tomará en cuenta la matriz de transformación T , Ec. (5.33) calculada en la sección anterior.

Debido a que el sistema es completamente controlable, se podrán colocar arbitrariamente los polos de diseño, por lo tanto, los polos de diseño propuestos para el controlador FOPID son: $p_f = -2.5$, $p_1 = -33$, $p_2 = -23$, $p_3 = -15$, dando como resultado el siguiente polinomio de diseño.

$$\Delta_d(s) = (s^\alpha + 2.5)(s^3 + 71s^2 + 1599s + 11385). \quad (5.47)$$

Por lo tanto, las ganancias necesarias para el controlador son obtenidas mediante las Ecs. (5.18), (5.33) y (5.47), dando como resultado los valores:

$$\begin{aligned} k_p &= \begin{bmatrix} 0 & 214.2091 & -306.4356 & -109.5450 \end{bmatrix}, \\ k_i &= \begin{bmatrix} 552.9636 & 79.4439 & -276.3303 & -34.9557 \end{bmatrix}, \\ k_d &= \begin{bmatrix} 26.8572 & 0.1045 & -12.0892 & -0.1974 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

De manera similar que en el controlador FOPI, los valores fraccionales λ y α , son considerados inicialmente como 0.5, para tener un valor medio en el rango de operación definido entre $0 < \alpha < 1$, pero experimentalmente se irá variando de modo que se obtengan mejoras en la respuesta del sistema.

5.3.3.2. Estabilidad en lazo cerrado

Para garantizar la estabilidad del controlador es necesario conocer los polos del polinomio característico del sistema a lazo cerrado, sustituyendo la Ec. (5.48) en la Ec. (5.37) y resolviendo resulta:

$$\begin{aligned} s_1 &= -3.00565 + 0.0029746 i , & s_3 &= -6.77817 + 1.31381 i , \\ s_2 &= -3.00565 - 0.0029746 i , & s_4 &= -6.77817 - 1.31381 i . \end{aligned}$$

Calculando el argumento de las soluciones:

$$\begin{aligned} \arg(s_1) &= 3.14061 , & \arg(s_3) &= 2.95014 , \\ \arg(s_2) &= -3.14061 , & \arg(s_4) &= -2.95014 . \end{aligned}$$

Podemos concluir que el sistema es asintóticamente estable ya que todas las soluciones cumplen con $|\arg(s_i)| > \frac{\pi}{4}$.

5.3.3.3. Control del sistema

En esta sección se muestra el comportamiento del sistema aplicando los valores de las ganancias obtenidas anteriormente. Primero se mostrarán los resultados de las simulaciones para observar la respuesta del sistema ante una perturbación, también es posible observar el tiempo en que el controlador estabiliza el péndulo en su vertical.

En la Figura 5.13 se muestran los resultados de la simulación con las ganancias obtenidas en la Ec. (5.48). El sistema tiene que ser perturbado para observar el funcionamiento del controlador, para ello se le asigna una condición inicial al péndulo, haciendo que empiece en 3 grados respecto a su vertical. Se observa que el controlador estabiliza al péndulo en aproximadamente 2 segundos, teniendo

5. CONTROL FRACCIONAL

que hacer un recorrido de 4 cm sobre el riel el carro y llegando a su posición inicial en aproximadamente 3 segundos.

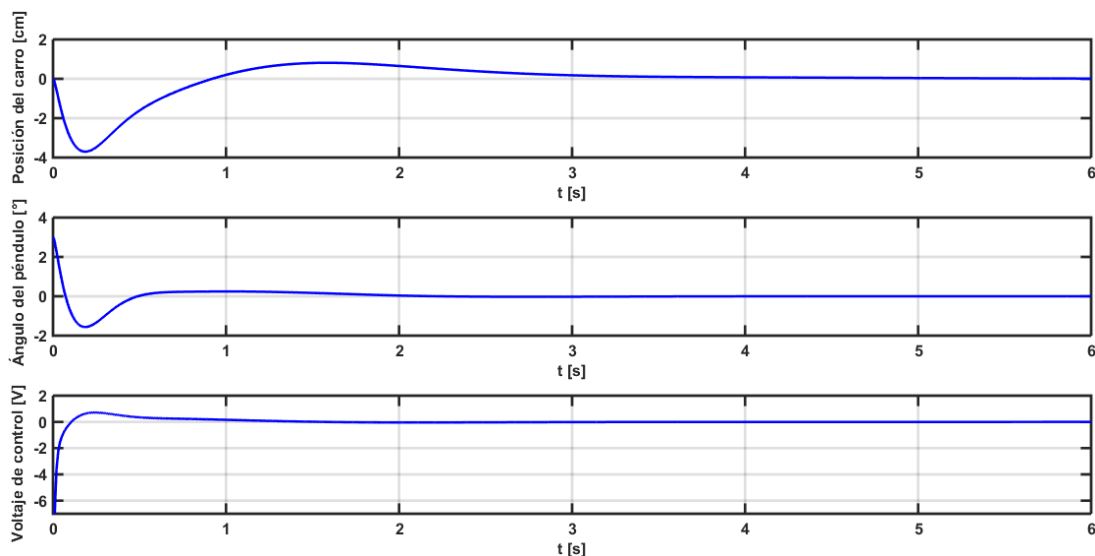


Figura 5.13: Resultados de la simulación del controlador FOPID.

Como ya se ha mencionado, el valor fraccional pondera los efectos de las acciones fraccionales, integral y derivativa, por tal motivo se realizó una simulación donde se tengan diferentes valores para comparar la respuesta del sistema ante una perturbación. De igual forma, se empleará una perturbación al péndulo de alrededor de 3 grados respecto a su vertical.

La Figura 5.14 muestra la respuesta del sistema ante una perturbación (3 grados respecto a la vertical) para tres valores fraccionales diferentes $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 0.7$. Se observa que, mientras se incrementa el valor fraccional, la respuesta del sistema tiende a oscilar más, por el contrario, si se decrementa el valor fraccional, la respuesta del sistema tiene un sobrepaso menor, pero el tiempo de establecimiento tiene un pequeño incremento.

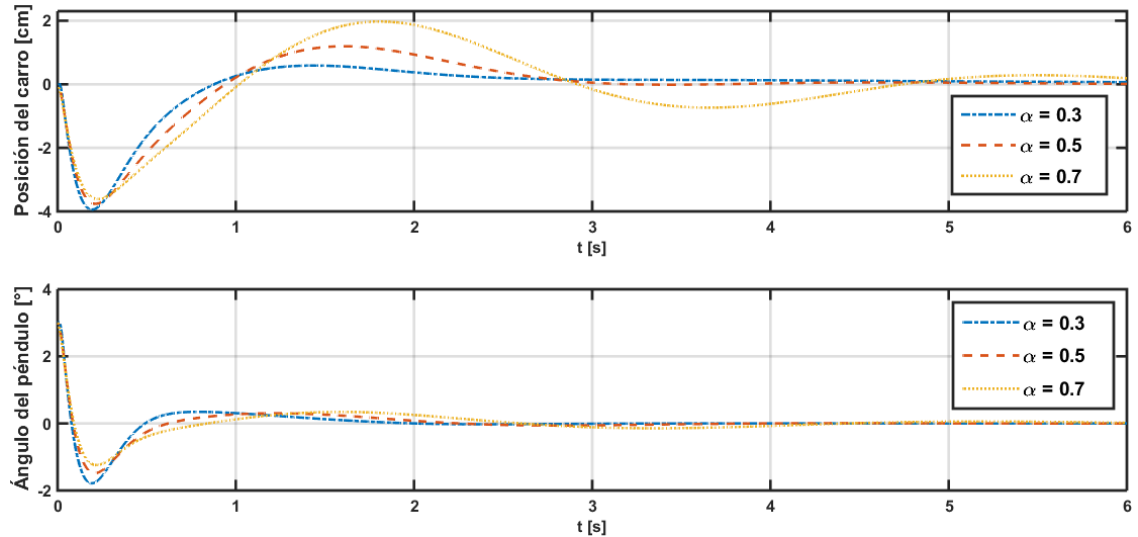


Figura 5.14: Resultado de la simulación del controlador FOPID, variando el orden fraccional.

Teniendo en cuenta los efectos de los valores fraccionales sobre la respuesta del sistema y con las ganancias obtenidas previamente, el controlador FOPID se implantó en el sistema físico para analizar su comportamiento. En la Figura 5.15, se muestra el resultado experimental con valores fraccionales de $\lambda = 0.5$ y $\alpha = 0.5$.

El control FOPID se aplicó una vez que el péndulo se encontrara cerca del origen, en aproximadamente 5 segundos. Se observa que, mientras el péndulo no reciba perturbación alguna, la señal de control permanecerá en un rango de ± 2 V. De lo contrario, al aplicarle una perturbación o empujón (segundos 28 y 51), el controlador responderá haciendo que el carro avance aproximadamente 10 cm y el ángulo del péndulo sólo tenga un desvío de alrededor de 4 grados. La posición del carro tardó 5 segundos en llegar a su origen, dos segundos por arriba respecto a los resultados de la simulación.

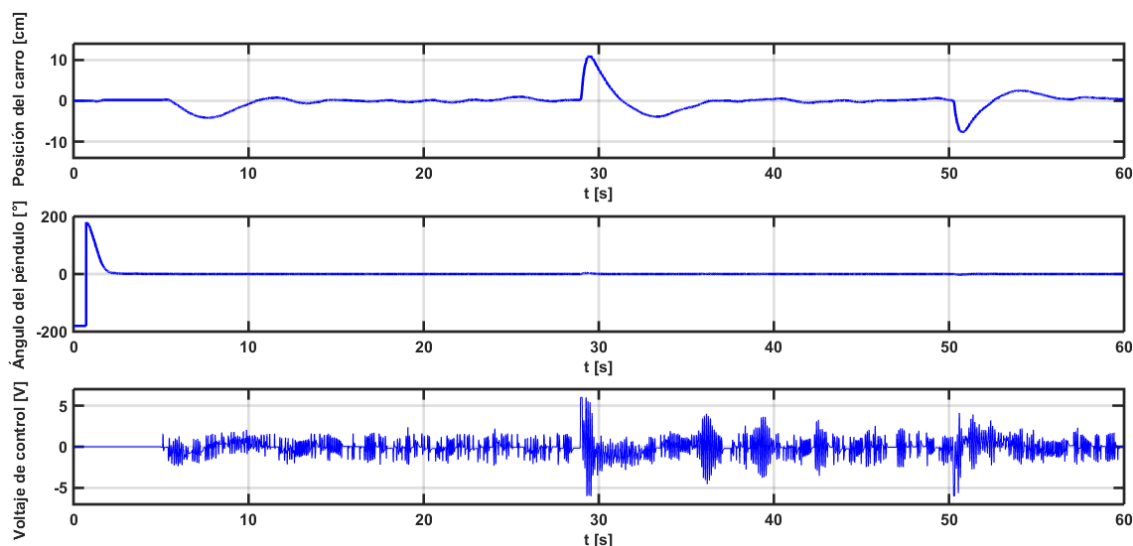


Figura 5.15: Implantación del controlador FOPID.

5.3.4. Control fraccional I-PD

Al usar la ley de control, Ec. (5.9), resulta claro que un cambio en la señal de referencia originará cambios bruscos en la señal de control, situación que no es deseable en la mayoría de los casos. Por esta razón la acción derivativa, frecuentemente, no es aplicada sobre la señal de referencia. Otra posibilidad es que la acción proporcional sea aplicada tan solo sobre una fracción de la señal de referencia. Un controlador PID dado por la Ec. (5.9) se convierte entonces en:

$$u(t) = K \left(br(t) - y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \left(c \frac{dr(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \right), \quad (5.49)$$

donde b y c son parámetros adicionales. El término integral debe depender del error, a fin de proporcionar la respuesta deseada en estado de régimen. El controlador definido por la Ec. (5.49) posee una estructura de dos grados de libertad ya que los caminos de y a u y de r a u son diferentes, resultando las funciones de

transferencia:

$$\frac{U(s)}{R(s)} = C_r(s) = K \left(b + \frac{1}{sT_i} + csT_d \right), \quad (5.50)$$

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = C_y(s) = -K \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right). \quad (5.51)$$

De acuerdo con la Ec. (5.51), el controlador dado por la Ec. (5.49) reaccionará ante una perturbación en la carga de la misma manera que lo hace un controlador de un sólo grado de libertad; la respuesta a cambios en la variable de referencia se verá influida por los parámetros b y c .

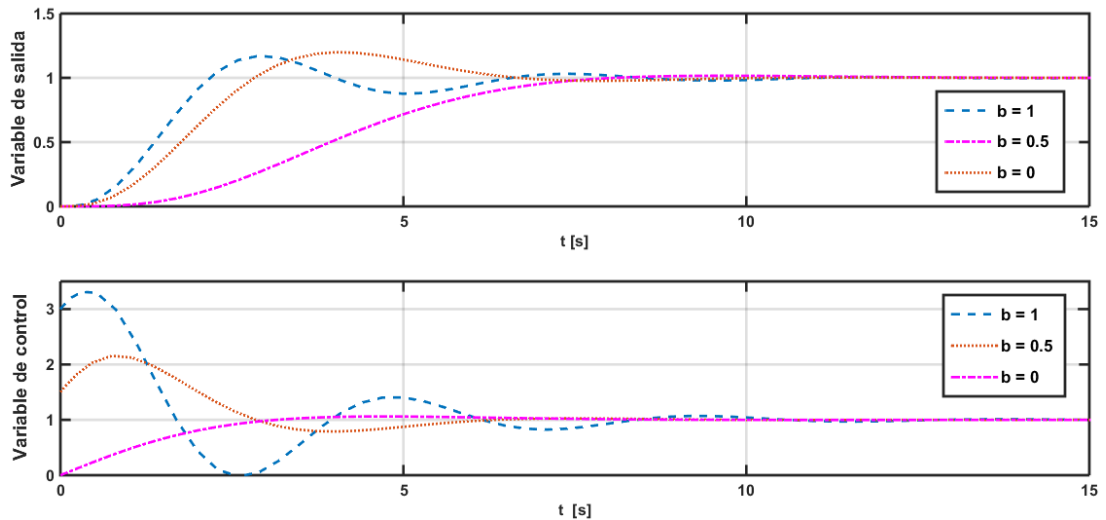


Figura 5.16: Respuesta a un escalón en la variable de referencia para diferentes factores de peso. Función de transferencia del proceso $P(s) = 1/(s + 1)^3$.

La Figura 5.16 muestra las variaciones que resultan de los factores de peso b y c . Obsérvese que el sobrepaso y el tiempo de respuesta dependen del factor de peso b . El valor de c es normalmente cero para evitar grandes transitorios en la señal

5. CONTROL FRACCIONAL

de control debido a variaciones abruptas del punto de operación.

Por tanto, conviene tomar los valores de $b = 0$ y $c = 0$ si se desea que los cambios en la señal de control sean más suaves. Con ello, los términos proporcional y derivativo se encontrarán en el camino de realimentación, y únicamente la acción integral en el camino directo, Figura 5.17. De esta manera, la acción integral responderá al error, mientras que los términos proporcional y derivativo se aplicarán a la salida, así, un cambio brusco en la entrada de referencia no afectará los términos proporcional y derivativo, esto da lugar al control denominado I-PD [Åström].

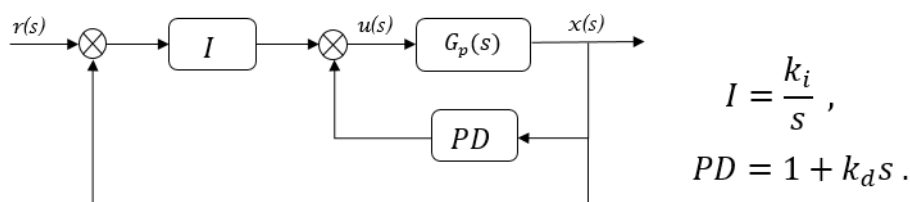


Figura 5.17: Diagrama de bloques de un controlador I-PD.

De acuerdo con el diagrama de bloques de la Figura 5.17, la señal de control $U(s)$, está dada por la Ec. (5.52). Notar que la ganancia proporcional del controlador PD debe ser unitaria para obtener un error en régimen nulo.

$$U(s) = \frac{k_i}{s} \left(R(s) - Y(s) \right) - \left(k_p + k_d s \right) Y(s) . \quad (5.52)$$

Desarrollando la relación entrada-salida, se obtiene la función de transferencia a lazo cerrado. Teniendo en cuenta que la salida está dada por:

$$Y(s) = G_p(s)U(s) . \quad (5.53)$$

Sustituyendo la Ec. (5.52) en la Ec. (5.53), y obteniendo la relación entrada-salida:

$$Y(s) = G_p(s) \left(\frac{k_i}{s} (R(s) - Y(s)) - (k_p + k_d s) Y(s) \right),$$

$$Y(s) \left(1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) G_p(s) \right) = R(s) G_p(s) \left(\frac{k_i}{s} \right),$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_i}{s} G_p(s)}{1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) G_p(s)} = \frac{k_i G_p(s)}{s + \left(s k_p + k_i + k_d s^2 \right) G_p(s)}. \quad (5.54)$$

Se puede observar que este tipo de controlador no agrega ningún cero, solamente polos. El hecho de no adicionar ceros en la función de transferencia a lazo cerrado, provocará que el sobrepaso de la respuesta del sistema sea menor.

Además, es posible aplicar los fundamentos del cálculo fraccional para obtener mejoras en el funcionamiento del sistema. Estas mejoras pueden ser ponderadas mediante el orden fraccional tanto de la acción integral como de la acción derivativa. Al igual que en casos anteriores, se propone un valor fraccional inicial de 0.5, y experimentalmente se procederá a modificar el valor fraccional para observar el comportamiento. La Figura 5.18 muestra el diagrama de bloques de un controlador fraccional I-PD.

La señal de control $U(s)$, correspondiente al diagrama de bloques de la Figura 5.18, está descrita por:

$$U(s) = \frac{k_i}{s^\alpha} \left(R(s) - Y(s) \right) - \left(k_p + k_d s^\lambda \right) Y(s). \quad (5.55)$$

5. CONTROL FRACCIONAL

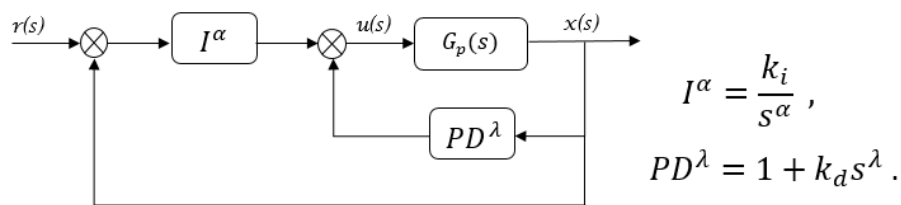


Figura 5.18: Diagrama de bloques de un controlador fraccional I-PD.

Cerrando el lazo se obtiene la función de transferencia del controlador fraccional. Si α y λ son unitarios, la función de transferencia toma la forma de la Ec. (5.54).

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_i}{s^\alpha} G_p(s)}{1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s^\alpha} + k_d s^\lambda \right) G_p(s)} = \frac{k_i G_p(s)}{s^\alpha + \left(k_p s^\alpha + k_i + k_d s^\alpha s^\lambda \right) G_p(s)} . \quad (5.56)$$

5.3.4.1. Diseño de control

Cerrando el lazo con la ley de control de la Ec. (5.52), donde la referencia $R(s)$ es cero y la ganancia proporcional de la parte PD^λ es unitaria se tiene que:

$$A_{cl}(s) = sI - A_c - B_c - B_c k_{i_n} \frac{1}{s^\alpha} - B_c k_{d_n} s^\lambda = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & s + z_3 \end{bmatrix} .$$

donde:

$$\begin{aligned} z_0 &= a_0 - 1 - \frac{k_{i_1}}{s^\alpha} - k_{d_1} s^\lambda , & z_1 &= a_1 - 1 - \frac{k_{i_2}}{s^\alpha} - k_{d_2} s^\lambda , \\ z_2 &= a_2 - 1 - \frac{k_{i_3}}{s^\alpha} - k_{d_3} s^\lambda , & z_3 &= a_3 - 1 - \frac{k_{i_4}}{s^\alpha} - k_{d_4} s^\lambda . \end{aligned}$$

El determinante de $A_{cl}(s)$ queda como:

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(s) = & s^4 + \left(a_3 - 1 - \frac{k_{i_4}}{s^\alpha} - k_{d_4} s^\lambda \right) s^3 + \left(a_2 - 1 - \frac{k_{i_3}}{s^\alpha} - k_{d_3} s^\lambda \right) s^2 \\ & + \left(a_1 - 1 - \frac{k_{i_2}}{s^\alpha} - k_{d_2} s^\lambda \right) s + \left(a_0 - 1 - \frac{k_{i_1}}{s^\alpha} - k_{d_1} s^\lambda \right). \end{aligned} \quad (5.57)$$

El polinomio característico del modelo en espacio de estados en lazo cerrado se calcula como $\det(\Delta_{cl}(s)) = 0$, y viene dado por:

$$\begin{aligned} \Delta_{cl}(s) = & \left(s^3 + (a_3 - 1)s^2 + (a_2 - 1)s + (a_1 - 1) \right) s^{\alpha+1} + (a_0 - 1)s^\alpha \\ & - \left(k_{d_4} s^3 + k_{d_3} s^2 + k_{d_2} s + k_{d_1} \right) s^{\alpha+\lambda} - \left(k_{i_4} s^3 + k_{i_3} s^2 + k_{i_2} s + k_{i_1} \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

$\Delta_{cl}(s)$ puede ser escrito como:

$$\Delta_{cl}(s) = \Delta_{cl_1}(s)s^{\alpha+1} + \Delta_{cl_2}s^\alpha - \Delta_{cl_3}(s)s^{\alpha+\lambda} - \Delta_{cl_4}(s). \quad (5.59)$$

$\Delta_{cl_3}(s)$ y $\Delta_{cl_4}(s)$ son dos polinomios enteros del mismo orden, y sus respectivos coeficientes k_{i_n} y k_{d_n} se calculan a partir de igualar $\Delta_{cl}(s)$ a un polinomio deseado del mismo orden, esto con el fin de reubicar los polos del polinomio característico en lazo cerrado de $\Delta_{cl}(s)$.

El polinomio de diseño entonces toma la forma:

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+\lambda} + p_f)(s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0). \quad (5.60)$$

Igualando la Ec. (5.58) con la Ec. (5.60).

$$\begin{aligned} k_{i_4} = -p_f, & \quad k_{i_3} = -p_f \beta_2, & \quad k_{i_2} = -p_f \beta_1, & \quad k_{i_1} = -p_f \beta_0, \\ k_{d_4} = -1, & \quad k_{d_3} = -\beta_2, & \quad k_{d_2} = -\beta_1, & \quad k_{d_1} = -\beta_0. \end{aligned}$$

Obteniendo los valores de k_{p_n} , k_{i_n} y k_{d_n} en la base original:

$$\begin{aligned} k_i &= \begin{bmatrix} -p_f\beta_0 & -p_f\beta_1 & -p_f\beta_2 & -p_f \end{bmatrix} T, \\ k_d &= \begin{bmatrix} -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -1 \end{bmatrix} T, \\ k_p &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} T. \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde T es la matriz de transformación a la forma canónica dada por la Ec. (5.33).

Por lo tanto, las raíces de los polinomios de diseño propuestos para la Ec. (5.60) son: $p_f = -0.05$, $p_1 = -30$, $p_2 = -22$ y $p_3 = -0.5$, dando como resultado el polinomio:

$$\Delta_d(s) = (s^{\alpha+\lambda} + 0.05)(s^3 + 52.5s^2 + 686s + 330). \quad (5.62)$$

Sustituyendo los coeficientes de la Ec. (5.62) en la Ec. (5.61) se obtienen las ganancias siguientes:

$$\begin{aligned} k_p &= \begin{bmatrix} 0.0194 & 0.0195 & -0.1815 & -0.1821 \end{bmatrix}, \\ k_i &= \begin{bmatrix} 0.3206 & 0.6674 & -0.6605 & -0.2992 \end{bmatrix}, \\ k_d &= \begin{bmatrix} 6.4112 & 13.3481 & -13.2101 & -5.9838 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

El valor de las ganancias se fueron ajustando experimentalmente de manera que la respuesta del sistema tuviera menores oscilaciones y que la respuesta del sistema fuera lo más rápido posible sin exceder los valores permitidos de la señal de control. Además, por las mismas razones que los controladores anteriores, los valores fraccionales propuestos fueron de 0.5.

5.3.4.2. Estabilidad en lazo cerrado

Para garantizar la estabilidad, es necesario conocer el argumento de cada una de las soluciones del polinomio 5.62, que son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -27.42567 , & s_3 &= -0.06786 + 0.117538 i , \\ s_2 &= -24.07453 , & s_4 &= -0.06786 - 0.117538 i . \end{aligned}$$

Dichos argumentos son:

$$\begin{aligned} \arg(s_1) &= \pi , & \arg(s_3) &= 2.09439 , \\ \arg(s_2) &= \pi , & \arg(s_4) &= -2.09439 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, se dice que el sistema es asintóticamente estable ya que todas las soluciones de la Ec. (5.62) cumplen con $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{4}$.

5.3.4.3. Control del sistema

En la Figura 5.19 se presentan los resultados de la simulación con los valores de las ganancias obtenidas. En la simulación se presenta una perturbación de 3 grados respecto a la vertical del péndulo, además de que los parámetros fraccionales aplicados son de 0.5. Es posible observar que el péndulo tiende a su origen en aproximadamente 1 segundo sin que la señal de control exceda los límites permitidos para el actuador. No obstante, la posición del carro tardó 3 segundos en llegar de vuelta a su origen.

Como se tenía previsto, tanto la posición del carro como el ángulo del péndulo son controlados sin que se presenten grandes sobrepasos respecto a los controladores FOPI y FOPID.

5. CONTROL FRACCIONAL

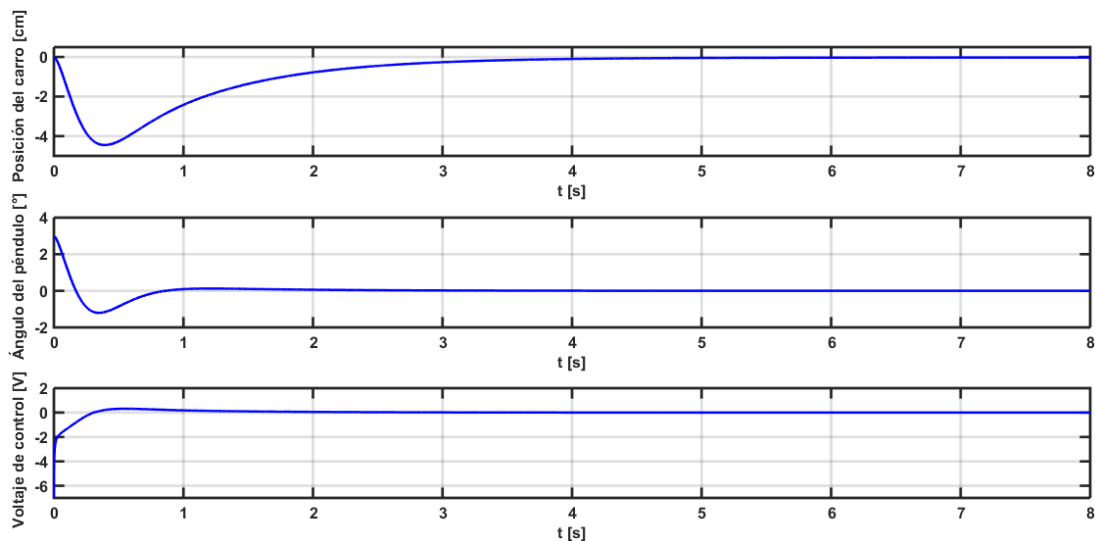


Figura 5.19: Resultado de la simulación del controlador FO I-PD.

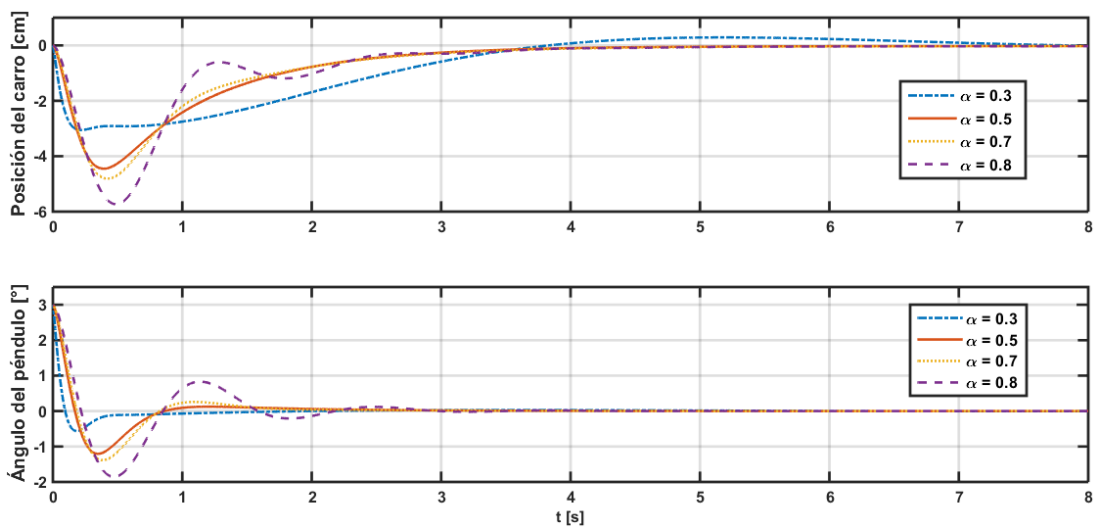


Figura 5.20: Resultado de la simulación variando el parámetro fraccional.

En la simulación el parámetro fraccional propuesto para las acciones integral y derivada es de 0.5, resultando en un control rápido y suave. Sin embargo, es posible variar este valor para obtener mejoras en el desempeño del controlador, en

la Figura 5.20 se muestra la comparación del controlador con diferentes valores fraccionales.

Se puede notar que mientras el valor fraccional se acerca a 1, el sistema tiende a tener mayores oscilaciones, esto es debido a que la señal de control es muy pequeña; por el contrario, si el valor fraccional se acerca a cero, el sobrepaso inicial en ambas posiciones disminuirá. Sin embargo, la señal de control aumentará.

El mismo controlador empleado en la simulación es implementado en el sistema físico para observar su comportamiento. Los resultados experimentales se muestran en la Figura 5.21, en donde se tomó un tiempo de muestreo de 3 *milisegundos*.

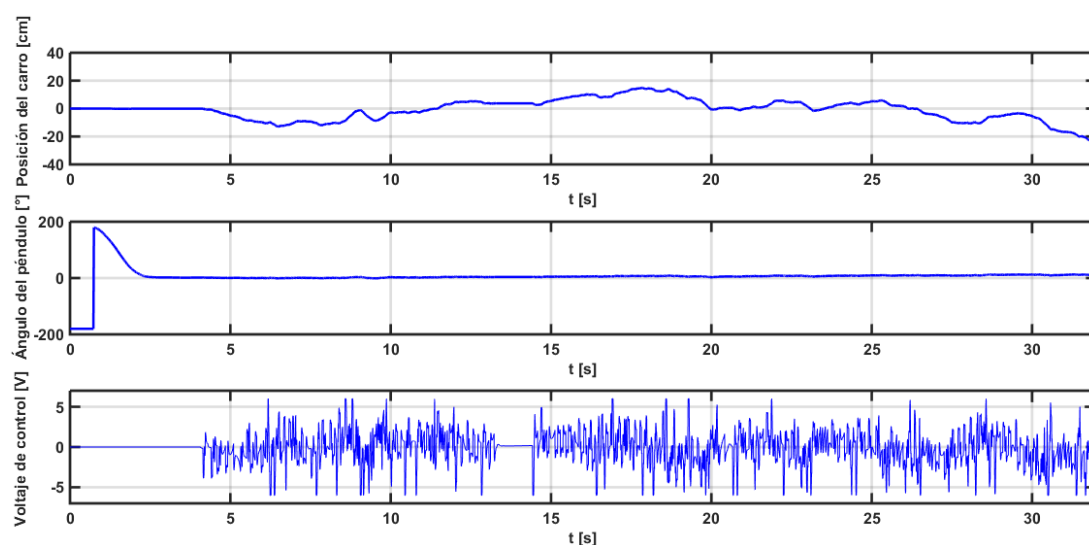


Figura 5.21: Resultados experimentales de la implantación del controlador FO I-PD.

El control es aplicado a los 4 *seg*, manteniendo al péndulo invertido cercano a la posición deseada, sin embargo, el controlador no logró estabilizar en forma

5. CONTROL FRACCIONAL

experimental a todos los estados del sistema, ya que el carro tiende a estar en constante movimiento a lo largo del riel para mantener al péndulo sobre su vertical; esto podría ser ocasionado por la pérdida de muestras, debido a que el tiempo de muestreo que requiere el controlador es demasiado pequeño y la tarjeta de adquisición no lograba dar tal tiempo de muestreo. Además, la señal de control permaneció por debajo de los límites de voltaje del actuador.

Conclusiones

El estudio del control de un péndulo invertido tomando como base el cálculo fraccional, representa un amplio campo de posibilidades en cuanto a su utilidad, motivo por el cual la integración de estas aplicaciones en control aporta una extensión desde un punto de vista diferente para la solución de problemas. Los aportes matemáticos de orden fraccional generan y proveen una opción alternativa para resolver algunos de los problemas de control, que pueden surgir cuando se trata de aplicaciones que exigen mayor robustez y menor esfuerzo de implementación.

El péndulo invertido Quanser es un sistema inestable, que contiene elementos difíciles de modelar, como el desgaste en los componentes (engranes) y fricción no uniforme. A pesar de esto, el objetivo general del trabajo se cumplió: Se logró implementar controladores fraccionales que estabilicen al péndulo invertido en una posición cercana a su punto de equilibrio inestable.

Para realizar los experimentos se empleó un equipo de computo personal y la tarjeta de adquisición BNC 2120 como interfaz para controlar al sistema, la programación se realizó en Simulink de Matlab, logrando un tiempo de procesamiento (muestreo de las señales, filtrado, etapa de control y salida de control) de 3 milisegundos entre muestras, lo cual es suficiente para estabilizar al sistema.

6. CONCLUSIONES

Los tres controladores implementados arrojaron resultados satisfactorios en el comportamiento del sistema, sin embargo, aunque la respuesta en simulación del controlador FOI-PD eliminó por completo el sobrepaso de las variables a controlar, experimentalmente no tuvo un buen desempeño debido a que el carro presentaba demasiadas oscilaciones para mantener al péndulo en su vertical, por el contrario, el controlador FOPI experimentalmente mantenía al péndulo en su vertical presentando mínimas oscilaciones en la posición del carro, siendo éste el que mejor resultado obtuvo.

Los controladores fraccionales $PI^\alpha D^\lambda$ presentan ventajas frente a los clásicos PID, pues poseen dos parámetros de ajuste más (ordenes fraccionales α y λ), permitiendo así ajustar mejor el comportamiento de un sistema (mejoramiento del comportamiento transitorio, mejora el sobrepaso, velocidad de convergencia mayor, etc.). Sin embargo, una gran desventaja que poseen los controladores fraccionales radica en que físicamente son más complejos de implementar, ya que se requieren de dispositivos o circuitos específicos (dispositivos fractales) que sinteticen la función de transferencia requerida.

En cuanto a la estabilidad, se comprobó que los tres controladores fraccionales implementados garantizan una estabilidad asintótica en el punto de equilibrio, en donde dicha estabilidad puede ser obtenida de manera similar que en los métodos clásicos. Además, se mostró que los operadores fraccionales pueden ampliar los rangos de estabilidad hacia el semiplano complejo derecho, haciendo que se disponga de un abanico mucho más amplio a la hora del diseño de controladores.

Por otra parte, los experimentos en la plataforma física mostraron que el con-

trolador *swing up*, desarrollado por Åström y Furuta [Åström and Furuta], no logra cumplir con su objetivo para algunas condiciones iniciales y ganancia. Para ganancias menores a 13, el control no logra llevar al péndulo cerca del punto de equilibrio deseado. Esto se debe a que el cálculo del controlador fue basado en un modelo simplificado del péndulo invertido (segundo orden), siendo que el sistema real es no lineal. Por lo tanto, si se desea mejorar el desempeño del controlador *swing up*, un buen punto de partida es desarrollar un controlador considerando el orden real del sistema.

Personalmente, este trabajo me ha ayudado en mi capacidad de resolver problemas con iniciativa, toma de decisiones, creatividad, razonamiento crítico y de comunicar y transmitir conocimientos, habilidades y destrezas en el campo de la Ingeniería Electrónica Industrial.

6.1. Trabajo a futuro

La identificación de sistemas desde el punto de vista fraccional puede aportar modelos más realistas del comportamiento de sistemas físicos. En relación a los aspectos tratados en esta tesis, señalemos el problema de determinar el modelo matemático de un péndulo invertido en términos de orden fraccional.

Observando el desempeño del control y con los resultados positivos, se propone implementar el controlador fraccional $I^\alpha - PD^\lambda$ al sistema péndulo invertido sobre carro montado sobre un balancín, presentando un mayor reto al contar con más variables y únicamente un actuador para controlarlas.

Además, se implementaría un controlador *Swing-up* más completo para que el

6. CONCLUSIONES

tiempo de balanceo sea menor, ya que para esta tesis no se hicieron aportaciones a este tipo de controlador. De este modo, se obtendría un sistema más completo con un controlador que estabilice al péndulo en su posición deseada y otro que lleve (balancee) al péndulo, hasta alcanzar la posición deseada en el menor tiempo posible.

Por último, realizar una comparación de los controladores fraccionales PID con los controladores clásicos PID, de modo que se observe como los controladores fraccionales mejoran fenómenos de *windup*, causados por la interacción de la acción integral con las saturaciones.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Partiendo del lagrangiano dado por:

$$L = K - V . \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$K = \frac{1}{2}m_c\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_p\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_pl_p^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{q}_2^2 - m_pl_p\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2). \quad (\text{A.2})$$

$$V = m_pl_pg \cos(q_2) . \quad (\text{A.3})$$

La Ec. (A.4) proporciona las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \tau , \quad (\text{A.4})$$

donde la potencia que disipará el sistema está dada por:

$$P = \frac{1}{2}b_c \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b_p \dot{q}_2^2 . \quad (\text{A.5})$$

Para la primer ecuación, se procede a calcular la derivada parcial de la Ec. (A.1) respecto a \dot{q}_1 , resultando:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_c\dot{q}_1 + m_p\dot{q}_1 - m_pl_p \cos(q_2)\dot{q}_2. \quad (\text{A.6})$$

Obteniendo la derivada respecto al tiempo de la Ec. (A.6):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_c\ddot{q}_1 + m_p\ddot{q}_1 - m_pl_p \cos(q_2)\ddot{q}_2 + m_pl_p \sin(q_2)\dot{q}_2^2 . \quad (\text{A.7})$$

A. ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

La derivada parcial del lagrangiano respecto a q_1 es cero.

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 . \quad (\text{A.8})$$

La derivada parcial de la Ec. (A.5) respecto a \dot{q}_1 resulta ser:

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_1} = b_c \dot{q}_1 . \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, sustituyendo las Ecs. (A.7), (A.8) y (A.9) en la Ec. (A.4), se obtiene la primer ecuación del sistema dada por:

$$(m_c + m_p) \ddot{q}_1 - m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_2 + m_p l_p \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + b_c \dot{q}_1 = F_c . \quad (\text{A.10})$$

Para la segunda ecuación, se calcula la derivada parcial de la Ec. (A.1) respecto a \dot{q}_2 , resultando:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_p l_p^2 \dot{q}_2 - m_p l_p \dot{q}_1 \cos(q_2) + J_p \dot{q}_2 . \quad (\text{A.11})$$

Obteniendo la derivada respecto al tiempo de la Ec. (A.11):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_p l_p^2 \ddot{q}_2 - m_p l_p \ddot{q}_1 \cos(q_2) + m_p l_p \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) + J_p \ddot{q}_2 . \quad (\text{A.12})$$

La derivada parcial del lagrangiano respecto a q_2 es:

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_p l_p \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) + m_p l_p g \sin(q_2) . \quad (\text{A.13})$$

La derivada parcial de la Ec. (A.5) respecto a \dot{q}_2 resulta:

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_2} = b_p \dot{q}_2 . \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (A.12), (A.13) y (A.14) en la Ec. (A.4), resulta la segunda ecuación del sistema descrita por:

$$(J_p + m_p l_p^2) \ddot{q}_2 - m_p l_p \cos(q_2) \ddot{q}_1 - g m_p l_p \sin(q_2) + b_p \dot{q}_2 = 0 . \quad (\text{A.15})$$

Toolbox para Simulink

La herramienta utilizada en Simulink para obtener las derivadas de orden fraccional es llamada *Fractional Variable Order Derivative Simulink Toolkit ver. 2.00* [Sierociuk].

Esta herramienta toma como base la definición de Grunwald-Letnikov para la generalización de la derivada de orden fraccional.

$${}_0\mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh) \quad (\text{B.1})$$

donde $n = t/h$, t es el tiempo y h es el tiempo de muestreo. Para el caso ideal, cuando $t \rightarrow \infty$, el número de muestras n tomadas en consideración también aumenta hasta infinito. En la práctica n tiene que ser restringido a un cierto número predefinido, en nuestra aplicación es una constante.

Según esta definición se obtiene: derivadas fraccionales para $\alpha > 0$, integrales fraccionales para $\alpha < 0$, y la función original $f(t)$ para $\alpha = 0$. Para el caso de que el orden fraccional cambie con el tiempo, existen tres tipos de definiciones que se pueden encontrar en [Valério and Da Costa].

Bibliografía

- [1] Åström, K. J. (2002). Control system design. [84](#)
- [2] Åström, K. J. and Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2):287–295. [43](#), [95](#)
- [3] Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., and Petráš, I. (2010). Modeling and control applications. [48](#), [62](#)
- [4] Das, S. (2011). *Functional fractional calculus*. Springer Science & Business Media. [49](#)
- [5] Iwashiro, M., Furuta, K., and Åström, K. J. (1996). Energy based control of pendulum. In *Control Applications, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on*, pages 715–720. IEEE. [41](#)
- [6] Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Educación, SA. [8](#)
- [7] Khalil, H. K. and Grizzle, J. (1996). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall New Jersey. [12](#), [13](#), [14](#), [32](#)
- [8] Nise, N. S. and Romo, J. H. (2002). *Sistemas de control para ingeniería*. Cecsca. [68](#)
- [9] Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación. [38](#), [68](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [10] Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press. [50](#), [53](#), [54](#)
- [11] Sierociuk, D. (2014). Fractional variable order derivative simulink toolkit (2012). [99](#)
- [12] Sira-Ramírez, H., Márquez, R., Rivas-Echeverria, F., and Llanes-Santiago, O. (2004). Control de sistemas no lineales. *Perason Education*. [2](#), [15](#)
- [13] Tarenzio, S. (2013). *Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton*. República Bolivariana de Venezuela. [8](#)
- [14] Valério, D. and Da Costa, J. S. (2011). Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations. *Signal Processing*, 91(3):470–483. [99](#)