COLEGIO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

LICENCIATURA EN FILOSOFÍA E HISTORIA DE LAS IDEAS

GOTTLOB FREGE: UN ANÁLISIS DE SU NOCIÓN SEMÁNTICA DE ANALITICIDAD.

TRABAJO RECEPCIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN

FILOSOFÍA E HISTORIA DE LAS IDEAS

PRESENTA

CHRISTIAN OLIVA RAMÍREZ

Director del trabajo recepcional:

Dr. Jesús Jasso Méndez

México, D.F. enero de 2016

UACM
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

CA Coordinación Académica

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO
COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a cada uno de los profesores que han sido parte de mi formación académica. Mi sincero agradecimiento al Dr. Jesús Jasso Méndez, sin su paciencia, tolerancia y sus comentarios, esta investigación no se habría podido llevar a cabo. Gracias Jasso, por escucharme, orientarme y aclarar mis dudas; en verdad te lo agradezco.

Quiero expresar mi agradecimiento a la UACM por el apoyo brindado para la impresión y empastado de mí trabajo recepcional.

En particular, quiero expresar mi más grande agradecimiento a mi madre. María Cristina Ramírez Reséndiz a mi padre Crisóforo Oliva González y a cada uno de mis hermanos: Oscar, Ariel, Edgar y Esmeralda que sin el apoyo incondicional que a diario me brindan no habría sido posible culminar esta investigación.

Con mucho cariño agradezco a cada uno de los compañeros que me han acompañado en el camino del saber. Las charlas que constantemente hemos tenido han servido para adentrarnos en el fantástico mundo del conocimiento.

Índice

Introducción

Mi interés particular por la noción de analiticidad surgió al considerar, desde mi perspectiva, que había una reducción entre la noción semántica de analiticidad y la noción epistemológica de *a prioridad*. ¿Por qué pensaba esto? Si prestamos atención en cómo se caracterizan las nociones analítico/sintético y *a priori/a posteriori* desde (Frege, 1884:117)[1] se advierte que en cada una de las cuatro distinciones arriba señaladas, se hace referencia a la 'prueba lógica' como medio para diferenciarlas. Por lo tanto, si la 'prueba lógica' era el medio para distinguir lo analítico de lo sintético por un lado y, lo *a priori* de lo *a posteriori* por otro lado, no era claro para mí si la analiticidad y la *a prioridad* eran lo mismo o si la analiticidad se reducía a la *a prioridad* o si la *a prioridad* se reducía a la analiticidad, y en qué términos tal reducción -de ser el caso- se daba. Por consecuencia, me parece importante justificar en qué sentido la analiticidad y la *a prioridad* son nociones co-extensionales[2] y, al mismo tiempo, defender la idea de que la co-extensionalidad no implica reductibilidad[3].

Esta investigación tiene un triple objetivo: (i) explicar cómo caracteriza Gottlob Frege la noción de analiticidad y *a prioridad* solamente desde algunos pasajes del prólogo de la

---

1 Frege, Gottlob.(1972) <u>Conceptografía, Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos.</u> Trad., Hugo Padilla, UNAM, IIF, México, DF., 1972. págs. 271.

2 En general cuando decimos que A es co-extensional a B, también decimos que tal relación se cumple de B a A. Sin embargo, podemos decir que la extensión de A incluye los elementos de B y que B incluye a los elementos de A y a otros más, es decir, todo lo que es idéntico es co-extensional pero no todo lo que es co-extensional es idéntico. Esta última forma de entender co-extensionalidad es a la que me refiero. Lo anterior se desarrolla en las sección *II.4.- ¿La 'analiticidad' y la 'a prioridad ' son nociones co-extensionales ? ¿La co-extensionalidad implica reducibilidad?*

3 Por reductibilidad estoy entendiendo que dos conceptos son iguales o son lo mismo. En el caso de esta investigación defenderé que el término analítico con el término *a priori* tiene diferentes compromisos conceptuales por lo que no son reducibles entre sí.

Conceptografía (1879) y, de la introducción de *Fundamentos de la aritmética* (1884). ii. ¿la explicación en (i) implica co-extensionalidad entre los términos analítico y *a priori*? y iii. ¿la co-extensionalidad en (ii) implica una reducción entre los términos analítico y *a priori?*

La pregunta que concentra los objetivos anteriores y de la cual obtendremos una respuesta al final de esta investigación son: ¿en qué términos Frege define la analiticidad y la *a prioridad* y cómo atribuye estas propiedades como partes definitorias de los enunciados matemáticos?

Como se mencionó arriba, las fuentes primarias que me serán útiles para satisfacer los puntos anteriores son: el prólogo de la *Conceptografía* (1879), y la introducción de *Fundamentos de la aritmética* (1884).

La estrategia conceptual que seguiré para obtener los resultados esperados es:

1.- Presentar la caracterización que hace Kant de los pares conceptuales analítico/sintético y *a priori*/*a posteriori* y su relación entre ellas.

2. Explicar por qué las Geometrías no euclidianas pusieron en duda el carácter analítico de sus enunciados y la condición *a priori* de la justificación de su verdad.

3.- Explicar al *logicismo* desde su tesis central: la matemática se reduce a la lógica. Esto es, los términos matemáticos pueden ser *definidos* y *deducidos* (demostrables) por medios puramente lógicos.

4.- Identificar particularmente en el programa logicista de Frege su forma de explicar la analiticidad y la *a prioridad.*

5.- Explicar la relación entre analiticidad y *a prioridad*, en el marco del *logicismo* Fregeano.

Esta investigación se divide en dos apartados. Estas secciones son consistentes y limitadas con el orden señalado en mi estrategia conceptual. El apartado I. *Algunos antecedentes conceptuales de la definición fregeana de analiticidad*, cuenta con dos secciones. La primera sección: I.1. *Kant y la analiticidad*, tiene cuatro objetivos, en primer lugar identificar y explicar las distinciones kantianas: analiticidad/sinteticidad y *a prioridad*/*a posterioridad*. Para esto únicamente me basaré en el prólogo de *La Critica de la razón pura*, [1781], (1984),[4] En segundo lugar, identificaré algunas de las condiciones conceptuales relevantes a la definición de analiticidad fregeana (1879, 1884) a partir de la noción de analiticidad que ofrece Kant (1781, 1984) considerando sus dos ideas básicas **a)** el contenido conceptual del predicado está incluido en el contenido conceptual del sujeto y, **b)** la negación de un enunciado analítico genera una contradicción. En tercer lugar explicaré, de acuerdo con Kant, cómo se puede reconocer un enunciado sintético. Por último, comentaré por qué las Geometrías no euclidianas pusieron en duda el carácter analítico de sus enunciados y la condición *a priori* de la justificación de su verdad.

Como se verá, de acuerdo con lo anterior, Kant no ofrece un análisis conceptual sistemático de las nociones analítico/sintético, *a priori/a posteriori* sino que sólo hace una distinción entre ellas para caracterizar el tipo de enunciados que constituyen el conocimiento científico y particularmente los enunciados geométricos. Desde este punto de vista, podemos considerar a

---

4 Kant [1781] (1984). La Crítica de la razón pura. Alfaguara, México, D.F., pp. (43. B-3), (47), (48. B-11), (49. B-12)

Kant como un antecedente del programa fregeano, pues parte de los intereses de Frege será explicar qué es una verdad matemática y cuáles son las propiedades que la distinguen a diferencia de otros enunciados de la ciencia. En este sentido, no centraré mis esfuerzos a un análisis de fondo del programa kantiano sino tan sólo lo consideraré en tanto fue el primer filósofo que pone en la mesa de discusión tales términos motivado por una clasificación estricta de los enunciados descriptivos que componen la ciencia.

El Apartado II, *Gottlob Frege un logicista,* se limitará a cuatro objetivos, En primer lugar, explicaré brevemente en qué términos, de acuerdo con el *logicismo*, puede reducirse la matemática (aritmética) a la lógica., esto es: i. en qué sentido los términos matemáticos son expresados en términos lógicos y, ii. en qué términos los teoremas matemáticos pueden ser derivados a partir de la lógica. Para ello me basaré sólo en Jaakko Hintikka (2009).[5] En segundo lugar, expondré cómo se caracteriza la analiticidad a partir de algunos pasajes del *prólogo (*1879) y, la *introducción* (1884). En tercer lugar, señalaré no sólo las propiedades que satisfacen la naturaleza de los enunciados matemáticos, sino que explicaré la relación conceptual existente entre sus propiedades al interior del logicismo, es decir, explicaré qué papel desempeñan los conceptos de “generalidad” y “prueba lógica” al momento de caracterizar a los enunciados que constituyen la aritmética. Finalmente, señalaré en qué sentido la analiticidad y la *a prioridad* son nociones co-extensionales y, al mismo tiempo, defenderé la idea de que la co-extensionalidad no implica reductibilidad en el *logicismo* de Frege.

---

5 Hintikka (2009) “*Logicism*” en Handbook of the Philosophy of Mathematics, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam, pág. 271.

Es importante dar constancia del hecho de que las traducciones del inglés al español son responsabilidad mía en el caso de las fuentes de: Jaakko Hintikka (2009)[6] y Morado, R. (1987) 7

Consideramos a esta investigación como un contenido introductorio al análisis conceptual de las nociones arriba señaladas. A partir de este contenido el lector interesado en este tema pueda tomarlo como un punto de partida claro, sencillo y riguroso, de tal modo que pueda servir como una lectura inicial para comprender en general el proyecto *logicista* de Frege y, particularmente, la noción fregeana de analiticidad.

Es importante señalar que existen diferentes trabajos respecto a este tema y a estos problemas en específico *ex. gr.*, Quine, W.O.[8], Kripke[9], Russell, G. 2008,[10] etc. pero estos serán considerados, o al menos algunos de ellos, para investigaciones futuras, tan solo damos constancia por ahora de este hecho.

Por último, incluimos una sección de consideraciones finales y una de bibliografía.

6 Op. Cit. Hintikka (2009), pág. 271.

7 “Frege, Hempel and Dedekind: Definitions of number and Correferentiality”, en *Ergo*. Vol. 1. No. 2. pág. 47.

8 Quine, W.O. [1951] (1961), “Dos dogmas del empirismo”, en *Desde un punto de vista lógico*, Ariel, Barcelona.

9 Kripke, S. [1971] (1978) Identidad y necesidad, en Cuadernos de Critica, UNAM, México.

10 Russell, G., (2008), *Truth in Virtue of Meaning: a Defense of the Analytic/Synthetic Distinction*, Oxford: Oxford University Press.

APARTADO I

Algunos antecedentes conceptuales de la definición fregeana de analiticidad

I.- Algunos antecedentes conceptuales de la caracterización fregeana de analiticidad

Objetivos del Apartado

(i): presentar el concepto kantiano de 'enunciado analítico'

(ii): mostrar cuáles fueron las motivaciones y propósitos de la escuela logicista

I.1 Kant y la analiticidad.

Objetivos particulares

(i): identificar y explicar las distinciones kantianas: analiticidad/sinteticidad *a prioridad*/*a posterioridad*, de acuerdo con el prólogo de La Crítica de la razón pura, [1781] (1984).

(ii): identificar algunos aspectos relevantes para la explicación de analiticidad fregeana (1879, 1884) a partir de la noción de analiticidad que ofrece Kant [1781] (1984).

I.1.- Kant y la analiticidad

Desde que Kant ofreció criterios para caracterizar la distinción de los enunciados *analítico/sintético,* varios filósofos posteriores han investigado y expuesto su punto de vista sobre las consecuencias conceptuales de dicha distinción. Gottlob Frege es uno de ellos. La caracterización kantiana de analiticidad brinda un interesante antecedente directo a la perspectiva de Frege (1879, 1884). Kant dice:

> En todos los juicios en los que se piensa la relación entre un sujeto y un predicado (me refiero sólo a los afirmativos), pues la aplicación de los negativos es fácil [después,]), tal relación puede tener dos formas: o bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está (implícitamente) contenido en el concepto A [...] Los Juicios analíticos (afirmativos) son, pues, aquellos en que se piensa el lazo entre predicado y sujeto mediante la identidad; [...] Si digo, por ejemplo: «Todos los cuerpos son extensos», tenemos un juicio analítico. En efecto no tengo necesidad de ir más allá del concepto que ligo «cuerpo» para encontrar la extensión como enlazada con él. [...] sería absurdo fundar un juicio analítico en la experiencia, ya que para formularlo no tengo que salir de mi concepto. [...] Sólo de tal concepto (cuerpo) puedo extraer el predicado, de acuerdo con el principio de contradicción, y, a la vez, sólo él me hace adquirir conciencia de la necesidad del juicio, necesidad que jamás me enseñará la experiencia. 11

En esta cita podemos identificar dos sentidos en que Kant intenta clarificar su noción de

[11] Kant, Immanuel, [1781], (1984), “Prólogo” en La Crítica de la razón pura. Alfaguara, México, D.F., págs. (47, 48, B-11, 49, B-12)

analiticidad: El caso en que el predicado está incluido en el sujeto, y el caso en el que además hay relación de identidad entre sujeto y predicado. Además, estos dos casos son consistentes con el principio de no contradicción. Veamos:

(a), un enunciado es analítico si el contenido conceptual del predicado está incluido en el contenido conceptual del sujeto y, **(b)** la negación de un enunciado analítico genera una contradicción.

Si se tiene el enunciado Δ : 'El cuadrado es una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos', de acuerdo con **(a)**, la pregunta que debemos hacer para saber si Δ es un enunciado analítico es la siguiente: ¿el contenido conceptual del predicado (ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos) está incluido en el contenido conceptual del sujeto, 'cuadrado'? En el caso de tener una respuesta afirmativa, como de hecho lo es, ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos (predicado) es la propiedad de cualquier cuadrado tal que, ser un cuadrado implica ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. Por lo tanto, será suficiente ser un cuadrado para ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. De tal suerte, todo *x* que sea un cuadrado será una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. El contenido del predicado de Δ está incluido en el contenido del sujeto de Δ.12

---

12 Es importante señalar que de acuerdo con la observación de Kant la relación entre el contenido conceptual del sujeto y del predicado es una relación de identidad, lo cual es en estricto sentido más fuerte que lo señalado arriba. Una relación de identidad produciría que ser un cuadrado sea suficiente para ser una una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos y viceversa, es decir, ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos sea suficiente para ser un cuadrado y ser un cuadrado sea necesario

Es importante aclarar el tipo de relaciones entre el sujeto y el predicado de acuerdo con Kant al identificar la analiticidad de ciertos juicios. Un análisis de ello puede hacerse mediante la postulación de dos tipos de relación, el primer tipo será una relación de implicación lógica y el segundo tipo una relación de identidad.

Veamos:

(i) Relación de implicación lógica:

La relación conceptual entre el sujeto A y el predicado B en el juicio13 Δ :'El cuadrado es una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos' es una relación de contención entre un contenido conceptual con otro contenido conceptual. El predicado B (ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos) está incluido en el contenido conceptual del sujeto A (un cuadrado). De tal suerte que si A implica B es verdadero y A es el caso, no es lógicamente posible que B no sea el caso. Cada que se afirme A se afirma B, luego, A es suficiente para B y este último es necesario para A. Otra forma de decirlo es: no se da el caso de afirmar B sin A, pues al ser verdadero A (dada la implicación) será necesariamente verdadero B.

(ii) Relación de identidad:

La relación del contenido conceptual del sujeto A y el contenido conceptual del predicado B en Δ, al parecer, en Kant, también es una relación que puede expresarse mediante la identidad,

---

para ser una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. Por lo tanto, el contenido conceptual del sujeto y del predicado (ambos) serán suficientes y necesarios entre ellos.

13 Por juicio estoy entendiendo como el enunciado predicado que atribuye una propiedad o relación a un sujeto gramatical. De hecho, en el caso de Kant, cuando habla de la analiticidad refiriéndome a la cita anterior sólo hablará de lo que hemos Llamado 'Δ' sólo en este sentido.

del tipo A=B. En este caso, lo que es verdadero para A será verdadero para B y todo lo que es verdadero para B será verdadero para A. Una forma contemporánea de entender esta identidad es a través de la identidad de conjuntos. Así, B, sería un subconjunto impropio de A y A un subconjunto impropio de B. Esta última relación así es una forma de explicar la identidad entre A y B. En consecuencia, todo lo que se dijera con verdad de un cuadrado se dice con verdad de una figura geométrica que satisfaga cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos y, todo lo que se diga con verdad de una figura geométrica de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos se dirá con verdad de un cuadrado. Veámoslo formalmente:

1.- $\forall(x)\,(x \in A \rightarrow x \in B)$ &

1.- Para todo *x* que pertenezca a A entonces, *x* pertenece a B, y

2.- $\forall(y)\,(y \in B \rightarrow y \in A)$

2.- Para todo *y* que pertenezca a B entonces, *y* pertenece a A, luego

3.- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$,

3.- A es un subconjunto impropio de B y B es un subconjunto impropio de A,

Dado el principio de extensionalidad conjuntista, si se da 3 tendríamos como consecuencia que:

4.- $A = B$

4.- A es igual a B

Cuando ocurre esto, decimos que A y B son co-extensionales.

Si el análisis es correcto, de acuerdo con (ii) un juicio es analítico si y solo si al afirmarse el contenido conceptual del predicado de tal juicio se afirma el contenido conceptual del sujeto y viceversa, al afirmarse el contenido conceptual del sujeto de tal juicio se afirma el contenido conceptual del predicado. Si un concepto está incluido en otro y esa relación puede llevarse hasta la identidad entre tales contenidos, entonces, no es posible afirmar un concepto sin afirmar el otro. Si entendemos así las cosas, claramente se atentaría contra el principio de no contradicción si afirmamos un contenido y negamos el otro. Si esta interpretación conjuntista recoge bien la idea de Kant, puede señalarse, como hace Kant, que la negación de un enunciado analítico implica contradicción, justo esta propiedad lógica determinará, para este filósofo, la necesidad de los juicios analíticos.

En otras palabras, un juicio analítico, siguiendo a Kant, es necesario, pues, tal necesidad se deriva de la consistencia lógica del principio de no contradicción, es decir, de propiedades de una ley lógica sin considerar en lo absoluto la experiencia. Por esta razón al ser (ii) (relación de identidad) más fuerte que (i) (relación de implicación lógica), se ve en su condición con mayor claridad la relación entre el concepto semántico de analiticidad y el concepto lógico (en Kant) de necesidad.

Al parecer, la relación (i), implicación lógica, es una relación que puede entenderse en términos de: es suficiente señalar la condición analítica de un enunciado para admitir su necesidad lógica. ¿Por qué? Porque no hay algo que sea analítico y no sea necesario. Respecto a la relación (ii), Identidad, igual que (i) es una relación en la que es suficiente advertir la condición analítica de un enunciado para aceptar su necesidad lógica. Por este motivo (i) y (ii) son consistentes en sí mismos, al no violar cada uno el principio de no contradicción como parte de la extensión de 'ser analítico' es decir. Toda negación de un juicio, tal que ésta genere una contradicción, implicará que tal juicio en principio sea analítico. (i) y (ii) son consistentes en términos lógicos, su necesidad se sigue de dos aspectos importantes:

(i) mediante la aplicación de una regla de inferencia, por ejemplo, *modus ponens*:

$$((A \rightarrow B) \wedge A) \text{ por lo tanto, } B$$

(i) es consistente con el principio de no contradicción. En este caso, B es un contenido implicado en A y, dado que A se afirma y que A → B es verdadera, podemos obtener con necesidad lógica B desde A.

(ii) apelar al principio lógico de no contradicción – (p ^ -p), en este caso, (ii) implica (i). Si A=B es verdadero, entonces no existe un caso en que se adscriba correctamente una propiedad a A y no a B. Si esto fuera el caso, entonces incurriríamos en una falta al principio lógico de no contradicción. De tal suerte que si es verdad que A=B y esta es una forma adicional de Kant de explicar analiticidad, entonces, no es el caso que A=B sea analítica y no necesaria.

Kant señala que (i) y (ii) son formas de explicar analiticidad. La necesidad del juicio analítico surge o lo que esta a la base de ella es sólo la propiedad lógica del principio de no contradicción. La necesidad del juicio analítico deviene del criterio de que si es negado produce una contradicción.

Tanto (i), la implicación lógica, como (ii), relación de identidad, no sólo son consistentes con el principio de no contradicción sino que ambas relaciones implican que la necesidad del juicio se sigue exclusivamente de la extensión de ‘ser analítico’. Esto es: todo juicio que al negarse genere una contradicción, en principio tal juicio será analítico. Ambos casos (i) y (ii) coinciden con la extensionalidad de ser analítico. Si esto es correcto, entonces, será suficiente ser analítico para conceder su necesidad tal como hemos caracterizado esta necesidad.

A continuación veremos de acuerdo con Kant, la segunda manera para saber si un enunciado es analítico.

Si consideramos el mismo enunciado Δ de acuerdo con **(b),** éste se expresaría de la siguiente manera, Δ' : 'Es falso que [el cuadrado sea una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos]'. Negar que el cuadrado sea una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos claramente genera contradicción, es decir, el enunciado Δ' no sólo no puede ser verdadero, sino que es necesariamente falso. Lo anterior puede aclararse a partir de los siguientes puntos:

A) Todo lo que es verdadero para A es verdadero para B y viceversa, todo lo que es verdadero para B es verdadero para A. Todo lo que está en A esta en B y todo lo que está en B está en A. Además todos los elementos existentes en A son todos los elementos existentes en B, por lo que podemos concluir que A es B y B es A. A y B son co-extensionales.

B) Si A es B y B es A, y puedo sustituir A por B y B por A, lo que en realidad se está afirmando es: 'A es A'. Ahora, si el principio de no contradicción dice: no puedo afirmar y negar al mismo tiempo *p* y no *p* sin generar una contradicción, es decir, – (p ^ – p) al sustituir *p* por A (*p* = A), entonces queda: no puedo afirmar y negar al mismo tiempo A y no A o lo que es lo mismo, – (A ^ – A).

C) Si A es B y B es A, entonces cuando se afirma algo para B se está afirmando para A y viceversa, si se afirma algo para B se está afirmando para A. Luego, no puede ser verdadero que se afirme algo para A y no para B o se afirme algo para B y no para A, dado que A es B y B es A.

D) Si en (C) ocurriera que se afirmara algo para A y no para B o que se afirmara algo para B pero no para A, entonces se llega a una evidente contradicción, esto sucede porque se está afirmando algo de A pero no de B, y si A y B son lo mismo, entonces, se afirma que no es cierto que A sea idéntica a sí misma, esto es: $-$ A = A, o lo que es lo mismo, es falso que A=A.

E) Luego, decir por una parte, A es igual a B, es analítico y, por otra parte, es falso que, A es igual a B, entonces, obtenemos una contradicción, de tal suerte si consideramos (A), (B), (C) y (D) obtenemos la extensionalidad de “ser analítico” de acuerdo con Kant, al menos cuando señala una relación de identidad entre A y B.

F) Por lo tanto, si negamos un juicio y al negar el juicio se genera una contradicción en el sentido explicado hasta (E), tal contradicción me permitirá establecer que tal juicio en principio era 'analítico'.

Expliquemos lo anterior con nuestro ejemplo:

1) Δ : ‘Para toda *x* si *x* es un cuadrado entonces *x* es un figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos’.

Ahora si negamos Δ, queda:

2) Δ’: Existe por lo menos una *x* tal que *x* es un cuadrado y *x* no es una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

3) Si alguien dice que se cumple Δ', entonces estaría afirmando una contradicción.

El contenido conceptual de A y el contenido conceptual de B está dado mediante la identidad entre ambos conceptos, no se puede afirmar uno y negar el otro sin atentar contra el principio de no contradicción. De ahí se sigue la necesidad del juicio.

No existe una *x* que al ser un cuadrado tal *x* no sea una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. De tal suerte, el enunciado Δ' : 'Es falso que [el cuadrado sea una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos]' no es sólo un enunciado falso sino necesariamente falso, ya que el negarlo genera una evidente contradicción. O dicho de otra manera, la negación Δ no sólo es verdadera sino necesariamente verdadera.

Las consecuencias conceptuales hasta aquí obtenidas nos permiten decir lo siguiente. Analizado el enunciado Δ : 'El cuadrado es una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos' a partir de los criterios **(a)** y **(b)** se puede notar que la caracterización que ofrece Kant para saber si un enunciado es analítico no encierra inconsistencia alguna, es decir, **(a)** y **(b)** son entre ellos consistentes. Veamos: **(a)** el contenido conceptual del predicado está incluido en el contenido conceptual del sujeto, implica una consideración estrictamente semántica cuya relación puede demostrarse lógicamente, pero la caracterización se basa en una relación entre contenidos conceptuales y, **(b)** por su parte, implica una propiedad lógica de la relación de identidad entre el sujeto y predicado cuantificado en un enunciado o juicio, por lo que **(b)** se trata de una caracterización estrictamente lógica: si Δ: -el cuadrado es una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos- es no sólo verdadera sino necesariamente verdadera, pues, no es el caso que una *x* que sea una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos no sea un cuadrado o bien que una *x* que sea un cuadrado no sea una figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos

Así, es posible suponer que los dos criterios que ofrece Kant, para distinguir a los enunciados analíticos, son consistentes en términos de no implicar entre ellos contradicción alguna, sino todo lo contrario por la propiedad semántica **(a)** puede establecerse la propiedad lógica-semántica **(b)**.

I.1.2.- Lo *a priori*

De acuerdo con Kant, serán enunciados analíticos aquellos cuya verdad conceptual es necesaria y su justificación *a priori*, mientras que los enunciados sintéticos su verdad conceptual no es necesaria (al no seguirse del principio de no contradicción) y su justificación es *a posteriori*. Al respecto, Kant dice:

> [...] tal relación puede tener dos formas: o bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está (implícitamente) contenido en el concepto A, o bien B se haya completamente fuera del concepto A, aunque guarde con él alguna conexión. En el primer caso llamo al juicio analítico; en el segundo sintético [...].14

Pedro Ribas, conocido especialista de Kant describe lo *a priori* como sigue:

> *¿Qué es el conocimiento* a priori*? Según Kant, «es el absolutamente independiente de toda experiencia». Las proposiciones matemáticas poseen este carácter. La universalidad y la necesidad son propiedades distintivas del mismo. Frente a este conocimiento está el empírico o* a posteriori*, que*

14 Op. Cit. Kant, Immanuel, [1781], (1984), pág. 48. A-7

> *nunca es estrictamente universal —es simplemente una generalización inductiva— ni estrictamente necesario —su negación no implica una contradicción— [...].15*

Es interesante hacerle notar al lector la importancia que vio Kant en la posibilidad de los enunciados sintéticos/*a priori*[16], esto con el fin de comprender claramente la relación que existe entre la caracterización de analiticidad/sinteticidad y *a prioridad/a posterioridad* desde Kant. Justo, para lograr este objetivo, a continuación explicaré cómo se relacionan dichos pares conceptuales, a saber, enunciados analíticos/*a priori*, sintéticos/*a posteriori* y sintéticos/*a priori*.

Kant considera que la ciencia y en particular la geometría está constituida por enunciados que por una parte incrementan nuestro conocimiento del mundo y por otra son necesarios, este es el antecedente de la gestación conceptual de los enunciados sintéticos/*a priori*. Las distinciones *analítico/sintético* y *a priori/a posteriori* se orientan en el proyecto de Kant a explicar no sólo el desarrollo de la ciencia, sino a identificar el conjunto de juicios que constituyen a las ciencias en general y, particularmente aclarar cómo es que se genera conocimiento científico y bajo qué medios proposicionales.

Al parecer, Kant en su interés por no mantener la conclusión humeana de sólo disponer de enunciados contingentes sobre el conocimiento del mundo externo, estaba seguro de resolver

15 Ribas, Pedro. Kant, Immanuel. [1781], (1984), Introducción del traductor, p. *XXIII*

16 Mi interés no es problematizar si son posibles o no, o en qué caso sí, los enunciados "*sintéticos/a priori*", sólo me interesan este tipo de enunciados en la medida en que su comprensión implica claridad conceptual de la analiticidad y la *a prioridad* acerca de lo que dice Kant sobre lo analítico, de tal forma que pueda verse que él fue un antecedente importante para el logicismo en general y, particularmente, para el programa *logicista* de Frege.

un falso dilema, este falso dilema consistía en pensar o bien que los enunciados científicos eran necesarios pero no informativos o bien eran informativos pero contingentes. De acuerdo con la interpretación de Kant, si los enunciados analíticos son aquellos en los que el contenido del predicado se encuentra incluido en el contenido del sujeto o aquellos que su negación genere contradicción entonces, esta manera de caracterizar a los enunciados analíticos implica que si bien estos enunciados son necesariamente verdaderos al ser consistentes con el principio lógico de no contracción, su predicado no agregan información adicional a la contenida en el sujeto, por lo que su propiedad semántica y epistemológica se establece al margen de cualquier consideración sobre la experiencia. Por ésta razón, se dice que son enunciados no informativos aunque sean necesarios. Ahora, si además nos preguntamos por la forma de justificar los contenidos de los enunciados analíticos, de acuerdo con Kant al solo requerirse la relación lógica entre los contenidos conceptuales del sujeto y del predicado parece innecesario apelar a la experiencia para atribuirles su verdad. Esto último desemboca no en una precisión semántica sino en una explicación de orden estrictamente epistemológico de las distintas formas posibles de justificar los contenidos de los juicios científicos. Si la manera de justificar los contenidos de los enunciados analíticos es ajena a toda experiencia empírica, no hay necesidad de acudir al mundo externo, entonces se dice que son enunciados cuya justificación es *a priori*, ya que su prueba sintáctica es totalmente suficiente.

Por su parte, los enunciados, informativos pero contingentes, son enunciados en los que el contenido del predicado no está incluido necesariamente en el contenido del sujeto y además su negación no implica una contradicción; enunciados en los que la información contenida del predicado agrega información adicional a la ya contenida en el sujeto. Para probar este tipo de enunciados es necesario que se contrasten con el mundo empírico, apelan a aspectos extralógicos. Esto es a lo que se denomina una justificación *a posteriori.* Así, las condiciones de verdad de los enunciados sintéticos dependen de particulares, es decir, de leyes no lógicas o de evidencia empírica.

Sobre este último caso, de acuerdo con Kant, si bien hay una relación entre el contenido conceptual del predicado y el contenido conceptual del sujeto, ésta no es en términos de implicación lógica ni de identidad, es una relación predicativa que aumenta nuestro conocimiento del término sujetivo. Así:

i. el contenido del predicado no está incluido en el contenido del sujeto

ii. la negación de enunciados con esta clase de relación predicativa no genera contradicción

Veamos un ejemplo, sea ***e*** el siguiente enunciado 'Christian Oliva Ramírez es calvo' y la pregunta es: ¿el enunciado ***e*** es un enunciado analítico? Apliquemos los dos criterios de analiticidad arriba explicados (**a** y **b**).

Veamos si el enunciado ***e*** es analítico por el criterio de analiticidad **(a)** que ofrece Kant; para ello preguntémonos lo siguiente: ¿el contenido del predicado conceptual de 'ser calvo' está incluido en el contenido conceptual del término (sujetivo) 'Christian Oliva Ramírez'? No, ¿por qué? Porque el predicado 'ser calvo' no refiere a una propiedad constitutiva y necesaria que hace al objeto 'Christian Oliva Ramírez' ser lo que es. Existe una independencia conceptual entre el término sujetivo 'Christian Oliva Ramírez' y el predicado 'ser calvo'. 'Ser calvo' incrementa la información del término sujetivo 'Christian Oliva Ramírez', por lo tanto, por **(a)** el enunciado ***e*** no es analítico, porque el predicado 'ser calvo' no está incluido necesariamente en el contenido conceptual del término sujetivo 'Christian Oliva Ramírez'. Por lo tanto, no existe tampoco una relación conceptual en términos de identidad entre el contenido conceptual de 'ser calvo' y el contenido conceptual de 'Christian Oliva Ramírez'.

Ahora, veamos si el enunciado ***e*** 'Christian Oliva Ramírez es calvo' es analítico de acuerdo al criterio **(b)** que ofrece Kant, es decir, la negación de un enunciado analítico genera una contradicción. Preguntémonos lo siguiente, ¿negar el enunciado ***e*** implica alguna contradicción en términos lógico-semánticos o bien es contradictorio afirmar que Christian Oliva Ramírez es calvo? Veamos.

Sean las proposiciones **i, ii,** siguientes:

i. Δ= Para toda *x*, 'si *x* es Christian Oliva Ramírez entonces x es calvo '.

El análisis estaría dado por:

i. Δ” = Existe por lo menos una *x* tal que '*x* es Christian Oliva Ramírez y *x* no es calvo'.

iii. Si alguien afirma que Δ” se cumple y esto no genera contradicción.

Así, tenemos que el enunciado ***e*** no es analítico dado que no cumple **(a)** y tampoco **(b)**.

Negar el enunciado ***e*** no implica contradicción porque es lógicamente posible que exista un *x* que sea 'Christian Oliva Ramírez' y que tal *x* 'sea calvo', así como es lógicamente posible que exista una *x* que sea 'Christian Oliva Ramírez' y que tal *x* 'no sea calvo'.

En suma, en el caso del enunciado del tipo ***e*** el contenido conceptual del predicado 'ser calvo' no está incluido en el contenido conceptual del sujeto 'Christian Oliva Ramírez'.

Por lo que podemos concluir que la negación del enunciado ***e*** no implica una contradicción, ya que es lógicamente posible la verdad del segundo enunciado ***e'*** : 'Christian Oliva Ramírez no es calvo'.

Por lo que ni la verdad ni la falsedad de ambos enunciados son necesarias ni generan por separado contradicción alguna.

El enunciado ***e*** será verdadero si es el caso que la descripción se cumple al existir un estado de cosas tal, o bien ***e*** será falso si no existe un hecho que satisfaga tal descripción.

Si el enunciado 'Christian Oliva Ramírez es calvo' no es un enunciado analítico de acuerdo a los criterios kantianos de analiticidad (**a)** y (**b**) entonces ¿qué tipo de enunciado es ***e***? De acuerdo con Kant, si el contenido del predicado no está incluido necesariamente en el contenido del sujeto ni que su negación genere contradicción. Así, este tipo de enunciado es un ejemplo que se caracteriza como enunciado sintético, enunciado cuya justificación será *a posteriori*. De este modo, el valor de verdad del enunciado en cuestión dependerá de: 1) su estructura (sintaxis) junto con 2) el significado de cada una de las palabras que lo componen (semántica) y, 3) la contrastación empírica, como el punto importante para su verificación. Es necesario recurrir al referente en el mundo empírico para saber si el predicado le corresponde o no al sujeto; el mundo es importante adicionalmente para contrastar el referente del nombre y el caso para, así, hacer la asignación del predicado como la asignación del valor de verdad de la expresión predicativa.

Si lo anterior es correcto, Kant se pregunta ¿cómo puede darse cuenta del progreso y desarrollo científico? ¿Qué tipo de juicios pueden expresar el avance de nuestro conocimiento? ¿Enunciados analíticos cuya justificación es *a priori*, o enunciados sintéticos cuya justificación es *a posteriori?*

De acuerdo con Kant, no podrían ser los enunciados científicos sólo analíticos*/a priori* porque este tipo de enunciados no dicen más que el contenido del sujeto gramatical. De esta manera, los enunciados analíticos/*a priori* al no ampliar nuestro conocimiento y, al no ser informativos, no podrían dar cuenta del desarrollo de la ciencia. Por su parte, los enunciados *sintéticos/a posteriori* tampoco podrían dar cuenta del avance y objetividad del conocimiento ¿por qué? Porque este tipo de enunciados si bien sí aumentan nuestro conocimiento del término sujetivo de un juicio y, luego, son informativos, el predicado adscrito no es ni una relación necesaria de implicación semántica ni de una relación de identidad de tal sujeto gramatical. Consecuentemente, la información ofrecida, por decirlo de alguna manera, no es necesaria. En este caso, parece ser que Hume tendría razón de establecer el carácter contingente a la base de todos nuestros enunciados científicos.

Recordemos, de acuerdo con Hume, el principio de causalidad sugiere en general que a determinadas causas se sigan determinados efectos. Por ejemplo, si se lanza una moneda al aire sabemos que la moneda caerá al suelo, ¿cómo se sabe que la moneda caerá al suelo? Hume considera que sabemos que la moneda caerá al suelo porque habitualmente ocurre tal hecho, es decir, habitualmente ocurre que cuando se lanza una moneda al aire, ésta caerá al suelo. Si esto hace sentido, la consideración humeana consiste en **negar** la existencia de una relación **necesaria** entre el antecedente y consecuente en el siguiente enunciado: 'Si aventamos una moneda al aire ésta caerá al suelo'. La consideración Humeana es explicable en términos de **hábito.** En otros términos, Hume asume algo así como, un principio de causalidad pragmático o, por lo menos pragmáticamente verificable**.** La noción de hábito, por tanto, no es una de carácter lógico sino evidentemente pragmático, de donde no puede advenir -de acuerdo con Hume- ninguna propiedad de corte necesario. Lo anterior justifica la creencia de que al aventar una moneda al aire ésta caerá al suelo, tal contenido tendrá entonces la propiedad de ser contingente. Al respecto Hume dice:

> En todos los casos aislados de actividad de cuerpos o mentes no hay nada que produzca impresión alguna ni que, por consiguiente, pueda sugerir idea alguna de poder o relación necesaria. Pero cuando aparecen muchos casos uniformes y el mismo objeto es siempre seguido por el mismo suceso, entonces empezamos a albergar la noción de causa y relación. Entonces *sentimos* un nuevo sentimiento o impresión, a saber, una conexión habitual en el pensamiento o en la imaginación entre un objeto y su acompañante usual. [17]

Bajo estas circunstancias, el punto kantiano no era establecer un análisis conceptual de las dicotomías anteriores, es decir, analítico/sintético y *a priori*/*a posteriori*, sino más bien poder explicar la necesidad del conocimiento y su avance y, con ello, no sucumbir en la conclusión humeana. De esta forma, era necesario por una parte dar cuenta de la posibilidad heurística de los enunciados científicos, es decir, del poder ampliativo y explicativo de los enunciados que

---

[17] Hume, David. [1994] Investigación sobre el entendimiento humano. Gernika. Trad. Fernando Ramos González. México. D.F., págs. 99-100.

constituyen la ciencia y, por otra parte, dar cuenta de su necesidad. Esta condición llevó a Kant a considerar juicios sintéticos/*a priori*.

De acuerdo con Kant, los juicios sintéticos/*a priori* serán juicios informativos (por ser sintéticos), necesarios y universales (porque se justifican *a priori*). El progreso científico se daría justo porque los enunciados sintéticos podían incrementar nuestro conocimiento bajo estructuras predicativas sobre hechos del mundo (matemático o físico) y que, al mismo tiempo, la justificación fuese necesaria. Un claro ejemplo de este tipo de enunciados se puede encontrar en la aritmética. Al respecto Kant dice:

> Se podría pensar, de entrada, que la proposición 7 + 5 = 12 es una simple proposición analítica, que se sigue de acuerdo con el principio de no contradicción del concepto de suma de siete y cinco. Pero, si se observa más de cerca, se advierte que el concepto de siete y cinco no contiene otra cosa que la unión de ambos números en uno solo, con lo cual no se piensa en absoluto cuál sea el número único que sintetiza a los dos. El concepto de doce no está todavía en modo alguno al pensar yo simplemente dicha unión de siete y cinco. Puedo analizar mi concepto de esa posible suma el tiempo que quiera, pero no encontraré en tal concepto el doce. Hay que ir más allá de esos conceptos y acudir a la intuición correspondiente a uno de los dos, los cinco dedos de nuestra mano, por ejemplo […]. 18

De acuerdo con Kant, si se conseguía descubrir las posibilidades de lograr justificar los enunciados *sintéticos/a priori,* entonces, se lograría una sólida fundamentación y avance en la ciencia ya que este tipo de enunciados son informativos, nos dicen cosas del mundo, proveen

---

[18] Kant, Immanuel, [1781], (1984), "Prólogo" en La Crítica de la razón pura. Alfaguara. México. D.F., pág. 53. B-17

conocimiento genuino y, como son *a priori*, entonces son necesarios, es decir:

i. la noción de *sinteticidad*, en tanto que necesita de la experiencia, garantiza acumulación y avance de nuestro conocimiento, pero por sí misma no implica necesidad, y

ii. el conocimiento debería estar fundado sobre juicios *a priori*, justo porque lo *a priori* sí implica necesidad y universalidad para los enunciados que constituyen a las ciencias, luego

iii. Los juicios sintéticos/*a priori* hacen posible nuestro conocimiento bajo condiciones de necesidad.

Con este ejemplo Kant construye una refutación contra el carácter contingente que de acuerdo con Hume tenemos en los enunciados que componen nuestro conocimiento.

Es interesante notar que Kant mismo dice que un juicio analítico es necesario pues tal necesidad se deriva de la consistencia lógica con el principio de no contradicción, sin considerar en lo absoluto la experiencia. Ahora, al considerar los enunciados *sintéticos/a priori*[19] Kant se pronuncia a favor de su carácter necesario por su condición de *a prioridad.* Podemos pensar entonces que la modalidad de necesidad de un juicio de acuerdo con Kant, ya sea por su propiedad semántica analítica o por su propiedad epistemológica *a priori*, recae en el carácter de aplicación general que tienen las leyes lógicas para ofrecer el significado o la prueba de contenidos proposicionales, al margen de la experiencia. De acuerdo con Kant:

> «Un cuerpo es extenso» es una proposición que se sostiene *a priori,* no un

[19] Como se dijo anteriormente, no analizaré las condiciones filosóficas de los juicios sintéticos/*a priori* sólo los enuncio para señalar la diferencia entre enunciados analíticos/sintéticos y su justificación *a priori/a posteriori*.

> juicio de experiencia, pues ya antes de recurrir a la experiencia, tengo el concepto de cuerpo todos los requisitos exigidos por el juicio. Sólo de tal concepto (cuerpo) puedo extraer el predicado, de acuerdo con el principio de contradicción y, a la vez, sólo él me hace adquirir conciencia de la necesidad del juicio, necesidad que jamás me enseñará la experiencia. 20

Sin embargo, observemos que, a diferencia de las primeras citas que he expuesto de Kant, en esta última la modalidad de necesidad no recae en su noción de analiticidad sino en su noción de *a prioridad*

Bajo estas condiciones, la pregunta acerca de la naturaleza de la necesidad y su relación con la analiticidad y la *a prioridad* parece importante: ¿el concepto de necesidad es propio a la analiticidad o bien a la *a prioridad*? Y con mayor especificidad, ¿qué noción es más básica, la necesidad o en su caso la analiticidad, o por su parte, la *a prioridad*?

Siguiendo a Kant, el punto de convergencia entre su criterio de identidad de lo analítico y lo *a priori* es que tanto el significado del juicio como la justificación de su contenido se dará al margen de la experiencia. De lo cual sería un exceso pensar que de acuerdo con Kant lo analítico y lo *a priori* sean lo mismo. En cualquier caso, lo que sí se seguiría es que respecto al punto sobre 'la independencia a la experiencia' ambas nociones, 'analítico ' y '*a priori'* serán co-extensionales, es decir, o bien el significado se determina por el principio de no contradicción, o bien la prueba de su contenido se sigue mediante una demostración sintáctica (lógica) consistente. La cual es también consistente con el principio de no contradicción. De tal suerte que la necesidad de contenido o bien de su justificación asume su consistencia con el

[20] Kant, Immanuel, [1781], (1984), "Prólogo" en La Crítica de la razón pura. Alfaguara. México. D.F., pág. (49, B-12)

principio de no contradicción. Si lo anterior es correcto, entonces, será suficiente decir que un enunciado es semánticamente analítico o su prueba es epistémicamente *a priori* para predicarle su necesidad. A partir de lo anterior, al parecer, el concepto de necesidad está a la base de la propiedad semántica y epistémica de un enunciado analítico y *a priori*. De tal manera, que es posible pensar que la necesidad, para Kant, es una propiedad más básica que los conceptos de analítico y *a priori*.

Cabe señalar que en el análisis de Kant no hay una respuesta explicita a las preguntas arriba señaladas y esto se debe a que justamente Kant no hace un análisis conceptual exhaustivo de la analiticidad, *la a prioridad* y la necesidad. Esto quedaría como un punto abierto para el análisis. Justo por esta razón filósofos posteriores, entre ellos Frege, se ven en la necesidad de aclarar los límites conceptuales de estas nociones, aclarando su campo de aplicación y estableciendo lo que consideraron sus correctas relaciones entre ellas.

En suma, si nos preguntamos sobre los aspectos relevantes para la evaluación semántica de un juicio, debemos considerar las siguientes condiciones.

Un enunciado se puede abordar de dos formas distintas, a partir de sus propiedades semánticas o bien a partir de sus propiedades epistemológicas. En el caso de Kant como se ha visto, el hecho de 'ser independiente a la experiencia' permite identificar el tipo de juicio en cuestión:

i. si un juicio es significativo al margen de la experiencia, entonces decimos que es un juicio analítico y necesario.

ii. si el significado de un juicio requiere de una contrastación empírica sobre el contenido del predicado y su correcta aplicación al término sujetivo incluido en el juicio entonces tal juicio será sintético y contingente.

iii. si la verdad de un juicio se mantiene (se justifica) al margen de la experiencia, entonces decimos que se trata de un juicio que expresa un conocimiento *a priori*, necesario y universal.

iv. si la verdad de un juicio sólo puede mantenerse (justificarse) mediante una investigación empírica, entonces decimos que se trata de un juicio que expresa un conocimiento *a posteriori*. Luego, será un juicio, contingente y no necesario ni universal.

En suma, la distinción analítico/sintético para Kant, se refiere al establecimiento del significado de una proposición cuya semántica se establece internamente a partir de los conceptos en ella incluidos. En el caso de la analiticidad, ésta propiedad semántica de un juicio puede establecerse en términos de una relación conceptual entre los contenidos predicativos y sujetivos de un juicio –relación de implicación lógica o de identidad-, tal que, el juicio sea significativo y al mismo tiempo tal significado se establezca al margen de la experiencia.

En el caso de la sinteticidad, tal propiedad semántica de un juicio se establece al señalar su significado considerando aspectos extralógicos. Esto es, el contenido predicativo no está incluido necesariamente en el contenido sujetivo del juicio, ni tampoco la negación de tal juicio generará una contradicción. Así, el significado del juicio quedará determinado por la experiencia.

Por su parte, la explicación kantiana de la *a prioridad* versa sobre un tipo de justificación del contenido del juicio. La justificación del contenido proposicional es contextualmente dependiente a un análisis conceptual al margen de la experiencia, esto es, no se requiere una verificación empírica de la descripción ofrecida en el juicio. No hay un contraejemplo empírico a la asignación de su verdad del enunciado y a su prueba lógica. La relación lógica entre la función predicativa y el término sujetivo del juicio es suficiente para mantener tal asignación. En este caso, se dice que un juicio, al justificarse *a priori,* su necesidad adviene justamente de la consistencia con el principio lógico de no contradicción.

En el caso del carácter *a posteriori* de la verdad de un juicio ocurre que éste será consecuencia de una comparación entre el contenido del juicio y el hecho que describe. En este caso, la justificación de la asignación de verdad y de la prueba de un contenido proposicional dependerá de una investigación experimental. Se necesitará de una contrastación empírica para sostener la verdad del juicio, tal que, aún siendo verdadero su verdad **no** será ni **necesaria** ni **universal**.

En suma, el carácter *a priori* y *a posteriori* de un juicio se trata de una propiedad de corte epistemológico y no semántico. Kant, como hemos visto, mezcla la noción de sintético con la noción de *a priori*. La relevancia de estos juicios recae en una motivación epistemológica. Kant, quiere evitar la indeseable conclusión humeana sobre el carácter contingente de nuestro conocimiento y ofrecer los requisitos conceptuales para evidenciar necesidad de algunos de nuestros juicios epistémicos. Con ello -como se ha señalado más arriba-, Kant intenta dar cuenta de cómo se dan las condiciones del desarrollo y avance científico. Kant no ofrece un análisis conceptual sistemático de las nociones analítico/sintético, *a priori/a posteriori,* sólo hace una distinción entre ellas para caracterizar el tipo de enunciados que constituyen al conocimiento científico en general, y particularmente a los enunciados geométricos. Estos últimos enunciados, de acuerdo con Kant, ejemplificarán el caso de avance epistémico resguardado con necesidad aplicativa. Con ello, Kant rechaza la conclusión humeana de que estamos destinados a la contingencia de nuestros juicios sobre el mundo externo.

Desde este punto de vista, podemos considerar a Kant, entonces, como un antecedente del programa fregeano, pues parte de los intereses de Frege será explicar qué es una verdad matemática y cuáles son sus propiedades a diferencia de los otros enunciados de la ciencia, además de considerar una co-extensionalidad[21] entre las nociones de ser "analítico" y ser "*a priori*". En este sentido, no centro mis esfuerzos a un análisis de fondo del programa kantiano, ni de la viabilidad de un proyecto trascendental que privilegie juicios sintéticos *a priori*, sino sólo considero a este programa en tanto constituye un primer acercamiento a la discusión de tales distinciones <analítico/sintético y *a priori*/*a posteriori*> y en tanto, motivado por una clasificación estricta de los enunciados descriptivos que componen la ciencia.

A continuación explicaré porqué las Geometrías no euclidianas pusieron en duda el carácter analítico de sus enunciados y la condición *a priori* de la justificación de su verdad. Mi punto es hacer notar cómo en la historia de la geometría pudieron desarrollarse nuevas estructuras matemáticas considerando una proposición que se consideró como verdadera —V postulado

[21] Véase la sección II.4.- ¿La 'analiticidad' y la '*a prioridad* ' son nociones co-extensionales ? ¿La co-extensionalidad implica reducibilidad?

de Euclides— y cuya **necesidad**, en algún sentido de ésta, no pudo sostenerse. Luego, es natural que uno se pregunte: ¿es posible identificar en la historia de las estructuras matemáticas proposiciones cuya verdad no es **necesaria** y al mismo tiempo con utilidad en el desarrollo de nuevas teorías? Lo anterior es el punto central que me interesa contestar comentar en esta sección.

I.2.- Geometrías no Euclidianas

Desde Euclides hasta principios del siglo XIX, la geometría era considerada como reveladora de verdades absolutas. Por ejemplo, se afirmaban enunciados tales como: i. dado dos puntos se puede trazar una línea; ii. todos los ángulos rectos son iguales; iii. la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°, etc. Enunciados que durante siglos nadie supondría falsos. El V postulado de Euclides afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°. Sin embargo, las geometrías no euclidianas, contrario al V postulado de Euclides, implican que la suma de los ángulos internos de un triángulo puede sumar más, o menos, que 180°, lo cual puso en la mesa de discusión el carácter absoluto de las verdades geométricas de acuerdo con el sistema euclidiano.

> Euclides había derivado los teoremas de su sistema a partir de cinco axiomas: ahora se había mostrado que uno de esos axiomas, lejos de ser una verdad necesaria podía ser negado sin pecar de inconsistencia; la consecuencia de ello fue el surgimiento de geometrías no euclidianas

basadas en otros axiomas alternativos. [22]

Las siguientes imágenes ejemplifican la cita anterior. La imagen (a) representa la geometría del espacio euclidiano. Véase imagen (a):

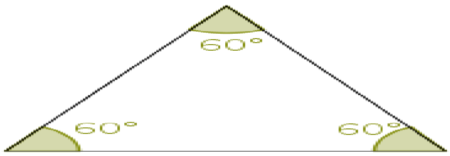

Imagen a : 60°+60°+60°=180°

En la imagen (a) la suma de los ángulos internos del triángulo es de 180°. Ahora, de acuerdo con la geometría hiperbólica, la suma de los ángulos internos del triángulo es menor a 180°. Véase imagen (b):

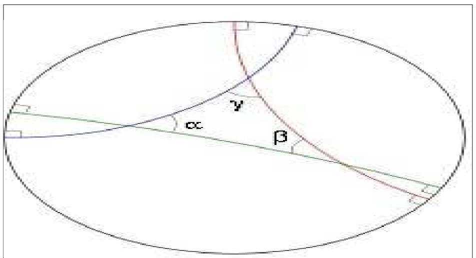

Imagen b: $\alpha + \beta + \gamma < 180°$

[22] Tiel, Christian. (1972) Sentido y Referencia en la Lógica de Gottlob Frege. Trad. José Sanmartin Esplugues, Tecnos. Madrid, pág. 14.

En la geometría elíptica, la suma de los ángulos internos del triángulo es mayor a 180. Véase imagen (c) :

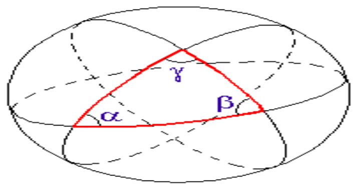

Imagen c: $\alpha + \beta + \gamma > 180°$

Negar el quinto postulado de Euclides y elegir un axioma en el que la suma de los ángulos internos de un triángulo sumara más o menos de 180°, implicó concebir entonces nuevas geometrías. Los geómetras euclidianos tenían la firme convicción que la demostración del postulado de las paralelas o también llamado el V postulado de Euclides, no era del todo satisfactoria; sin embargo, ellos mismos al no tener una prueba de su falsedad lo tenían como verdadero.23 Al ponerse en duda el V postulado de Euclides se puso en duda la supuesta generalidad de todas las verdades matemáticas -o al menos todas aquellas consideradas hasta el momento- y la preservación de su verdad a partir del significado técnico de sus términos al margen de la experiencia:

> [...] antes de que Riemann y Lobachevski desarrollaran la geometría no

23 Con esta consideración no afirmo el ejercicio de una falacia de apelación a la ignorancia por parte de los geómetras estándar, esto es: un enunciado es verdadero porque no se ha probado su falsedad o aceptar la falsedad de un enunciado porque no se ha probado su verdad. Mi consideración se compromete tan solo con el hecho de que el desarrollo de la geometría se dio suponiendo la verdad de un postulado –V postulado de Euclides- que fue posteriormente negado mediante casos geométricos que invalidaron su contenido, surgiendo con ello nuevas geometrías.

> euclideana, las mejores mentes filosóficas consideraban virtualmente analíticos los principios de la geometría. La mente humana no podía concebir su falsedad. [24]

Al discutirse la generalidad y necesidad de un enunciado matemático se ponía en discusión las propiedades más básicas de las verdades matemáticas, esto es: su carácter analítico y su justificación *a priori* atribuibles a todas las verdades que constituían a esta ciencia de los números [25]

Ahora bien, el hecho de que un geómetra euclidiano haya tomado un postulado matemático como verdadero[26] sin serlo puede explicarse al menos considerando dos casos:

Caso 1. Existe un matemático que considera un postulado como un axioma y al paso de los años el desarrollo de la matemática demuestra que tal postulado es falso. En este caso, es posible afirmar que no se niegan las propiedades epistémicas y semánticas de las verdades matemáticas, sino que el matemático simplemente se equivocó. De tal suerte que el postulado se corrige o se abandona o se desarrolla una nueva estructura matemática. Por tanto, la equivocación del matemático no implica la negación de la analiticidad (aspecto semántico) ni

---

[24] Putnam, H.[1962] (1983) "Lo analítico y lo sintético", en Cuadernos de Crítica/ UNAM, IIF. México, pág. 25.

[25] Sabemos que la naturaleza del conocimiento matemático no es asunto resuelto definitivamente por alguna perspectiva en filosofía de las matemáticas. Por ello, es importante dar constancia del hecho de que es posible hablar del carácter científico de la matemática en el mismo sentido en que la Física o la Química o la Biología son ciencias –monismo matemático- o bien defender la idea de que el conocimiento matemático requiere de una epistemología independiente al resto de las ciencias –dualismo matemático- Cfr. Jasso M. Jesús (2014), " *¿Monismo y Dualismo en Matemáticas?* en: Díaz y Jasso (2014) Problemas Contemporáneos de Filosofía. UACM, México, pp. 129-167. Pero esto es un asunto que no nos interesa considerar centralmente aquí, pues no afecta nuestro argumento central sobre el carácter analítico de las verdades matemáticas. Llamaremos a la matemática por medio de expresiones del tipo 'ciencia formal', 'ciencia de los números', sin considerar el conflicto conceptual arriba señalado.

[26] No me centraré en este análisis en el concepto de verdad matemática, sino solo en algunas de las propiedades que se le suelen atribuir.

de la *a prioridad* (aspecto epistemológico) como propiedades necesarias de toda verdad matemática. En este caso, el matemático sólo erró al considerar un enunciado necesario y general cuando éste, de hecho, no lo era.

Caso 2: Existe un matemático que toma un postulado como verdadero sin tener su prueba correspondiente. Aun así, tal postulado forma parte de la axiomatización matemática en diferentes estructuras de esta ciencia. Los matemáticos intuyen que el postulado es falso pero al no tener una prueba de ello lo suponen, lo aplican y desarrollan su teoría y, curiosamente la teoría funciona hasta desarrollar nuevas estructuras. Alternativamente, existe un desarrollo de otras teorías matemáticas consistentes con la anterior. En este caso, parece relevante preguntarse sobre la naturaleza de las verdades matemáticas y del conocimiento matemático en general. ¿Cómo es posible un desarrollo de la matemática a partir de algunas (o al menos una) proposiciones falsas? ¿Una situación de este tipo nos hace pensar de manera distinta cuando atribuimos propiedades generales a las verdades de la matemática? en otras palabras, ¿el carácter analítico y *a priori* del conocimiento matemático prevalece en cualquier caso? Bajo esta interpretación, será relevante establecer si hay verdades matemáticas no analíticas cuya justificación no sea *a priori*, al menos como una posibilidad. Si esto ocurriera, nuestra forma de explicar la cientificidad de la matemática y la naturaleza de su conocimiento daría un giro importante.

La negación del V postulado de Euclides bien podría insertarse en este segundo caso. Pues, podemos conceder que Euclides no sólo se equivocó sino que desarrolló una estructura matemática que permitió el desarrollo de otras en las que se vio implicada la negación del principio inicial, pero el principio inicial permitió el avance del conocimiento matemático.

> La carrera de Frege como matemático comenzó en un periodo excitante en la historia de la matemática. La geometría Euclidiana considerada como un sistema de verdades necesarias durante dos milenios, había perdido su carácter de única a principios del siglo XIX. Euclides había derivado los teoremas de su sistema a partir de cinco axiomas: ahora se había mostrado que uno de esos axiomas, lejos de ser una verdad necesaria podía ser negado sin pecar de inconsistencia [...]. [27]

Si tomamos aquellos sistemas matemáticos donde aparece el V postulado de Euclides y asumimos que tales sistemas son correctos o bien son útiles epistemológicamente, esas estructuras matemáticas sí ponen en discusión la analiticidad y la *a prioridad* de las verdades matemáticas, pues el V postulado de Euclides no fue un enunciado necesario y general como se pensaba y al tiempo fue altamente útil.

Considero que lo sucedido en la geometría, suponiendo que el caso 2 es un ejemplo suficiente para una investigación sobre el carácter semántico y epistemológico de las verdades matemáticas, nos lleva a la importancia de discutir sobre el carácter analítico y su justificación *a priori*, como bien hizo el programa *logicista*.

¿Cómo se pronunciaría Kant al considerar un axioma matemático que no fuera necesario ni general? Para Kant y Frege,[28] los conceptos de "necesidad" y "generalidad" son conceptos que

---

[27] Kenny, Anthony. Introducción a Frege. Trad. Carmen García Trevijano. Edit. Cátedra, Madrid. 1995, pág. 15.

[28] En el Apartado II de está investigación: *Gottlob Frege un logicista*, se explica cómo caracteriza Frege el término de 'enunciado analítico' Sólo damos cuenta de ello para señalar que Frege caracteriza a los enunciados de la aritmética, como enunciados analíticos/*a priori*.

están estrechamente relacionados con las nociones de analiticidad y de *a prioridad*. De acuerdo con Kant, un rasgo distintivo de la noción ser "analítico" radica en que a la base de esta propiedad semántica se encuentra su carácter necesario. No hay un enunciado analítico que no sea necesario y, todo enunciado cuya justificación sea *a priori* será*:* necesario y, además general -el Apartado I de ésta investigación: I.1. *Kant y la analiticidad* da cuenta de ello-. Así, siguiendo a Kant, los enunciados geométricos satisfacen dos condiciones i. tienen capacidad de generar conocimiento y ii. son necesarios. De tal suerte que un postulado geométrico al considerarse verdadero se considera ampliativo y necesario en términos semánticos (sintéticos) y epistémicos (*a priori*) respectivamente, es decir, de acuerdo con Kant, serán enunciados que aumentan nuestro conocimiento y, además serán necesarios y generales.

Ahora bien, si por varios siglos se consideró el V postulado de Euclides como un enunciado analítico *a priori*, y resultó que al paso de los años se demostró que tal postulado no era necesario, esto es: el V postulado no representaba una instancia analítica ni *a priori* y tampoco tenía su carácter general, entonces, ¿cuál era su naturaleza? Es decir, ¿cómo podríamos caracterizar dicho postulado en términos semánticos y epistemológicos? La posibilidad de considerar un postulado como verdadero sin serlo en matemáticas abre entonces la discusión sobre cuáles son las propiedades que satisfacen el conjunto de los enunciados matemáticos.

Los dos casos anteriores muestran cómo la necesidad de explicar la naturaleza del conocimiento matemático puede justificarse por lo menos de dos formas. i. desde la historia de las matemáticas misma, el V postulado de Euclides es un claro ejemplo de ello y, ii.

considerando las observaciones de los programas de investigación en Filosofía de las Matemáticas como esfuerzos para decidir sobre el carácter de la verdad matemática y la referencia de sus objetos.

Analizar cada uno de los programas de investigación en filosofía de las matemáticas es una tarea que nos conduciría a múltiples problemas sobre la cientificidad matemática, además de que es un análisis largo que sobrepasa los límites de un trabajo de tesis, como éste. Por las razones anteriores, me concentraré no sólo en el problema en torno a la naturaleza de las verdades matemáticas sino que en el Apartado II: *Gottlob Frege un logicista*, restringiré mi estudio en la propuesta logicista de Frege (1879, 1884) con la finalidad de explicar el significado de analiticidad desde uno de los programas en Filosofía de la Matemáticas que abrió la discusión respecto a la naturaleza de los enunciados matemáticos. Pero antes de explicar los compromisos conceptuales del logicismo respecto a su definición de analiticidad y *a prioridad* veremos en qué términos se debe comprender la reducción de la matemática a la lógica. Esto será el objetivo del siguiente apartado, explicar brevemente dos aspectos que caracterizan al reduccionismo logicista: i. en qué sentido los **términos** matemáticos son expresados en **términos** lógicos y, ii. en qué términos los **teoremas** matemáticos pueden ser **derivados a partir de la lógica.** Basaré mi exposición fundamentalmente en el trabajo de Jaakko Hintikka (2009). [29]

[29] Hintikka (2009) "*Logicism*" en *Handbook of the Philosophy of Mathematics*, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam., pág. 271.

APARTADO II

Gottlob Frege un logicista

II. Gottlob Frege un logicista

Objetivo del apartado

(i): explicar brevemente en qué términos se debe comprender la reducción de la matemática a la lógica.

(ii): explicar la 'analiticidad’ de acuerdo con Frege (1879, 1884).

Objetivos particulares

(i): explicar cómo caracteriza Frege la analiticidad a partir de algunos pasajes del prólogo de *Conceptografía* (1879), y de la introducción de *Fundamentos de la*

Aritmética (1884).

(ii): clarificar no sólo las propiedades que satisfacen la naturaleza de los enunciados matemáticos, sino explicar la relación conceptual existente entre sus propiedades, esto es: en qué sentido la analiticidad y la *a prioridad* son nociones co-extensionales y, al mismo tiempo, defender la idea de que la co-extensionalidad no implica reductibilidad.

II.- *Logicismo*

II.1.- Reducción de la matemática a la lógica: *logicismo.*

De acuerdo con el *logicismo*, las verdades matemáticas pueden reducirse a verdades lógicas. En general, para los *logicistas* todo enunciado matemático es decidible mediante principios lógicos. ¿Pero qué quiere decir que la matemática sea decidible lógicamente? La decidibilidad hace referencia a dos aspectos importantes para la tesis reduccionista del *logicismo*. i. todo término matemático puede ser definido en términos lógicos, y ii. todo enunciado matemático puede ser probado tan solo bajo las herramientas técnicas de la lógica. Hintikka (2009) es consistente con esta distinción y explica al *logicismo* considerando dos niveles: i. los conceptos matemáticos pueden ser “definidos” lógicamente y, ii. las verdades matemáticas pueden ser “derivadas” por medio de definiciones y principios lógicos.

De esta manera, por decidibilidad debemos entender, tanto la posibilidad de definirse términos por términos y la posibilidad de inferirse enunciados mediante otros enunciados aplicando ciertas reglas. Al respecto, Hintikka señala:

> [...] that according to logicism mathematics can be reduced to logic.
> (a) All **concept** of mathematics, i.e., of arithmetic, algebra, and analysis, can be defined in **terms** of pure logic.
> (b) All the **theorems** of mathematics can be **deduced from** those definitions by means of the principles of logic […]. [30]
>
> [...] según el logicismo, la matemática puede ser reducida a la lógica.
> (a) Todos los **conceptos** de las matemáticas, i.e., de la aritmética, álgebra y análisis, pueden ser definidos en **términos** puramente lógicos.
> (b) Todos los **teoremas** de las matemáticas pueden ser **deducidos a partir de** estas definiciones por medio de los principios de la lógica [...]

Entenderé por principios de la lógica que Hintikka se esta refiriendo a axiomas, definiciones y leyes lógicas.

Dado que (a) refiere a una relación de interpretación entre términos, llamaré a **(a)**: sentido semántico. Por su parte, al considerarse en (b) un proceso de prueba entre enunciados, llamaré a **(b)**: sentido lógico.

---

30 Hintikka (2009) “*Logicism*” en Handbook of the Philosophy of Mathematics, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam, pág. 271. Las negritas son responsabilidad mía y tienen la intención de señalar que una cosa es hablar de definición de términos y otra de derivación de teoremas. Al parecer el programa reduccionista de Frege basa su motivación en estos dos aspectos.

El sentido semántico puede entenderse cuando una prueba lógica funciona como el *definiens* de una expresión matemática. En este caso, cada parte de la prueba constituye la extensión de la definición conceptual de la expresión matemática. En otras palabras, la prueba lógica captura el concepto matemático y lo expresa en sólo términos lógicos.

La segunda consideración (b): sentido lógico, hace énfasis en un aspecto de **'derivabilidad'** de los enunciados matemáticos -verdades matemáticas- a partir de principios lógicos. En éste caso, se hace énfasis en la capacidad de la lógica por inferir mediante sus enunciados, definiciones y reglas lógicas cualquier verdad matemática. La diferencia entre (b) y (a), es que en (a) la prueba es considerada como una forma conceptual que captura las propiedades de los términos y definiciones matemáticas, mientras (b) hace énfasis en el poder de la lógica como un sistema sintáctico que puede, bajo sus propias propiedades, derivar o probar sintácticamente cualquier enunciado matemático. Aquí la prueba es considerada estrictamente hablando como una relación de derivación entre enunciados.

La tesis logicista entonces plantea dos condiciones: i) la lógica es capaz de definir a las matemáticas y, ii) la lógica es capaz de probar a las matemáticas. Adicionalmente, lo interesante es notar que si las verdades lógicas son consideradas como enunciados semánticamente analíticos y epistemológicamente *a priori*, entonces, al reducirse las matemáticas a la lógica en los sentidos arriba señalados, toda verdad matemática debía considerarse también analítica y *a priori*.

11.2.- Gottlob Frege un *logicista*

Gottlob Frege fue un filósofo, lógico y matemático que dedicó gran parte de su vida en tratar de fundamentar la matemática (aritmética). Su proyecto *logicista* consistía en demostrar que los fundamentos del conocimiento matemático estaban en la lógica, esto es, los enunciados matemáticos son reducibles a la lógica. Este proyecto ha sido el objeto primario de la explicación de lineas arriba. Como vimos, la tesis reduccionista implica en primer lugar, defender que los términos matemáticos eran definibles mediante términos y definiciones lógicas y, en segundo lugar, sostener que cualquier teorema matemático era derivable mediante pruebas puramente lógicas. Frege fue uno de los precursores de este proyecto *logicista.* Particularmente si se dice que los enunciados lógicos son semánticamente analíticos y epistemológicamente *a priori* al probarse mediante definiciones y reglas lógicas exclusivamente y, si los enunciados matemáticos eran reducibles (en el sentido anterior) a enunciados lógicos, entonces, por transitividad los enunciados matemáticos serán analíticos y su justificación será *a priori.*

> El objetivo a largo plazo de Frege era mostrar que la aritmética podía ser formalizada sin tener que recurrir a ningún tipo de nociones o axiomas no lógicos, pues estaba basada únicamente en leyes generales que son operativas en cualquier esfera del conocimiento y no requieren la menor apoyadura de hechos empíricos.[31]

De acuerdo con Frege, analiticidad es una propiedad que no todos los enunciados satisfacen. Para el *logicismo* los enunciados lógicos serán las únicas expresiones que satisfacen tales propiedades.

A continuación explicaré cómo se caracteriza la analiticidad y la aprioridad para el programa

---

[31] Kenny, Anthony. Introducción a Frege. Trad. Carmen García Trevijano. Edit. Cátedra. Madrid, 1995. pág. 18.

logicista de Frege (1879, 1884).

II.3.- Analiticidad y *A prioridad*: relaciones entre el concepto de generalidad y prueba lógica.

En el prólogo de su *Conceptografía* (1879), Frege dice que una verdad científica se puede fundamentar de dos maneras: i. mediante la prueba lógica, como la fundamentación más pura y firme y, ii. por medio de hechos justificados mediante una prueba en la cual parte de su estructura tiene alguna implicación con hechos no matemáticos. Al respecto dice:

> [...] dividimos en dos clases todas las verdades que requieran una fundamentación; mientras que la prueba puramente lógica puede preceder a las unas, las otras deben apoyarse en hechos empíricos. Es patente que la más firme es la prueba lógica pura, la cual prescindiendo de las características particulares de las cosas, sólo se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento.[32]

De acuerdo con este pasaje, es posible caracterizar a los enunciados en términos estrictamente lógicos a partir de su prueba, esto es, enunciados derivados únicamente a partir de: axiomas, definiciones y leyes lógicas.

En *Fundamentos de la aritmética (1884)*, Frege distingue entre las proposiciones que expresan verdades matemáticas de aquellas que expresan contenidos de otra naturaleza y que deban justificarse apelando a aspectos empíricos o no-lógicos. Al respecto dice:

---

32 Frege, Gottlob. Conceptografía. Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla. UNAM. IIF. México. DF. 1972. pág. 117.

> Si en este camino [camino de la prueba y seguirlas hasta verdades primitivas] sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales, entonces se trata de una verdad analítica por lo cual debe presuponerse el todo de las proposiciones sobre las cuales descansa la plausibilidad de cualquier deducción. Pero si es imposible llevar a cabo la prueba sin utilizar verdades que no sean de naturaleza lógica general, sino que pertenezcan a un campo especial del conocimiento, entonces se trata de una proposición sintética.[33]

Según Frege, un enunciado analítico en matemáticas es aquel derivado únicamente a partir de axiomas, definiciones y leyes lógicas generales. Por otro lado, un enunciado sintético, será aquel que pertenezca a un campo específico en la ciencia y que no sea de una naturaleza lógica general.

Una vez visto cómo caracteriza Frege la noción ser analítico desde el prólogo de *Conceptografía (1879)*, y la introducción de *Fundamentos de la Aritmética (1884)*. Veamos por qué hace énfasis en la prueba lógica como medio para caracterizar a los enunciados analíticos.

De acuerdo con Frege, la lógica es analítica porque las verdades de la lógica son las más generales, él considera que la lógica es la ciencia de todo lo pensable, pues sus verdades se mantienen frente a cualquier cambio de hechos. Al respecto, Raymundo Morado dice:

> […] Frege can not think of other source of such tremendous generality but logic itself the science of "what ever thinkable" *par excellence*. So, both the claim that the arithmetic is all-embracing, and the claim that this generality comes form logic, receive simultaneous expression

33 Op. cit. Frege, Gottlob. Conceptografía [...] pág. 117.

in the *dictum* in the that arithmetic is analytic. Analiticity will mean here not the kantian relation between the contents of subject and predicate but the property of being provable from general logical laws and the propositions involved in admissible definitions.[34]

Frege no puede pensar en otra fuente de tan tremenda generalidad, sino la lógica por sí misma, la ciencia de "todo lo pensable" *por excelencia*. Así, tanto la afirmación de que la aritmética lo abarca todo, y la afirmación de que esta generalidad viene de la forma lógica, reciben la expresión simultánea de que la aritmética es analítica. Analiticidad significará no la relación kantiana entre los contenidos de sujeto y predicado, sino la propiedad de ser demostrable de leyes lógicas generales y las proposiciones implicadas en definiciones admisibles.

Con esta observación, es posible pensar que la extensión del concepto “ser analítico”, no pertenece a todos los enunciados de la ciencia, en todo caso sólo a algunos de ellos, es decir, a los enunciados matemáticos. De acuerdo con Frege, los enunciados matemáticos se caracterizan a partir dos aspectos básicos: i. con base en la 'prueba lógica' y ii. con base en su nivel de 'generalidad'. Por ejemplo, si es el caso que en la prueba lógica de un enunciado sólo participen enunciados derivados a partir de axiomas, definiciones, leyes y reglas lógicas, entonces, estos enunciados serán considerados con un nivel de generalidad mayor. Serán enunciados catalogados como analíticos y su justificación será *a priori.* ¿Por qué *a priori*? porque en la prueba no participa ningún compromiso empírico, esto es, su justificación se da al margen de la experiencia. Por otra parte, si los enunciados son menos generales, sean estos

34 Morado, R. (1987). “*Frege, Hempel and Dedekind: Definitions of number and Correferentiality*”, en Ergo. Vol. 1. No. 2. pág. 47.

proposiciones o leyes de menor alcance, entonces serán enunciados *sintéticos* y su justificación será *a posteriori*, porque en su prueba participa algún aspecto empírico. Expliquemos esto.

Al llevar a cabo su programa logicista, Frege caracterizó a los enunciados que constituían a la ciencia; era a partir de la noción de 'prueba' como Frege conseguía la jerarquización de los enunciados que componían al conocimiento científico. En la prueba, Frege consideraba si estos enunciados eran teoremas lógicos o no. Si era el caso que fueran teoremas lógicos, entonces estos enunciados probados de esta manera tenían la característica de ser *analíticos* y *a priori*. Si era el caso que no todos fueran teoremas lógicos y que se apelara en la prueba a aspectos de otra índole, entonces los enunciados probados de este modo tenían la característica de ser enunciados sintéticos y *a posteriori*. Justo a partir de la prueba lógica[35] era posible distinguir a los distintos enunciados de las ciencias entendiendo sólo las características de su prueba. De acuerdo con Frege, es posible ordenar los enunciados científicos a partir de su prueba lógica y del grado de generalidad. Frege dice:

> La prueba no sólo se propone poner a salvo de dudas la verdad de una proposición, sino que también pretende propiciar la comprensión de la dependencia de unas verdades con respecto a otras.[36]

A partir de la prueba lógica y su nivel de generalidad, Frege distinguía entre dos

---

35 Con prueba lógica me refiero a un orden sistemático de justificación deductiva, esto es: la conclusión es derivada necesariamente de las premisas.

36 Op. Cit. Frege, Gottlob. Conceptografía, Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla. UNAM. IIF. México. DF. 1972. pág. 116.

caracterizaciones filosóficas de los enunciados y coincide en que ambas caracterizaciones están estrechamente vinculadas. La primera caracterización refiere a un nivel que he denominado *"semántico-lógico"* En este caso, 'la prueba lógica' define y establece que los teoremas matemáticos son consecuencia lógica de definiciones, leyes y reglas lógicas generales y, esta caracterización se le asigna a la noción ser **analítico-sintético**. Expliquemos esto.

i. Frege considera enunciados que son consecuencia lógica sólo de definiciones lógicas, reglas y leyes lógicas generales, en este caso, considera que sólo los enunciados lógicos son los que cumplen esta caracterización, y esta caracterización coincide con su forma de definir la analiticidad. En este caso, la prueba lógica cumple un papel semántico, luego la analiticidad entra en consideración tal que, un enunciado matemático funciona como definición de una proposición matemática. Al respecto dice Frege: "Si en este camino [camino desde lo probado hasta verdades primitivas] sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales, entonces se trata de una verdad analítica, por lo cual debe presuponerse el todo de las proposiciones sobre las cuales descansa la plausibilidad de cualquier deducción "[37]

ii. Frege considera otros enunciados cuando en su prueba participan compromisos de orden no solamente lógico, en este caso no sólo se usan en la prueba enunciados lógicos sino de otras disciplinas y señala que esto es una forma de explicar su carácter sintético. Al respecto dice: "Pero si es imposible llevar a cabo la prueba sin utilizar verdades que no sean de naturaleza lógica general, sino que pertenezcan a un campo especial del conocimiento, entonces se trata

[37] Op. Cit. Frege, Gottlob. Conceptografía pág.117.

de una proposición sintética".[38]

Hasta aquí he expuesto la primera caracterización.

La segunda caracterización refiere a un plano en donde la prueba lógica juega un papel epistémico, en el sentido que funciona de manera análoga a la evidencia empírica como evidencia formal para mantener la verdad matemática, a este plano se le asigna la noción ***a priori- a posteriori.*** Expliquemos esto:

iii. Un enunciado será considerado *a priori* cuando en su prueba no participen aspectos extra lógicos, y sólo con una prueba formal se logre saber en qué medida y cómo estamos justificados para afirmar su verdad. "Si [...] es posible producir la prueba totalmente en base a leyes generales que por su parte ni necesitan ni admiten prueba, entonces la verdad es a *priori*."[39] y,

iv. Un enunciado será *a posteriori* cuando su prueba refiera a aspectos extra-lógicos, es decir, cuando la prueba lógica no sea suficiente para asignar un valor de verdad, sino que además se tenga que recurrir a la contrastación empírica para justificar su verdad. Frege dice: "para que una verdad sea *a posteriori*, se exigirá que su prueba no pueda producirse sin apelar a situaciones fácticas, esto es, a verdades que no se puedan probar y que no sean generales, a verdades que contengan asertos sobre objetos determinados".[40]

En general, de acuerdo con Frege, distinguir los enunciados matemáticos del resto de

---

38 Idem. Pág. 117.

39 Op. Cit. Frege, Gottlob. Conceptografía pág.117.

40 Idem. pág. 117.

enunciados científicos era la consecuencia de asumir la prueba lógica desde dos puntos de vista. Por un lado la prueba lógica es la definición o la forma semántica y sintáctica de definir una proposición matemática; y, por otro lado, la prueba lógica funciona como evidencia formal del enunciado probado. En el primer caso la prueba juega un papel estrictamente semántico, y en el segundo caso un papel epistémico. Al respecto Jesús Jasso dice:

> Si es posible justificar la verdad de una proposición únicamente a partir de leyes lógicas generales y definiciones en una prueba, entonces se trata de una verdad generalizable, inmune a cualquier falsación empírica. Luego, es una verdad *a priori*. La justificación epistemológica de las verdades aritméticas es independiente de toda experiencia, así la distinción *a priori/ a posteriori* es primariamente una distinción entre modos de conocer. Conjuntamente, la justificación también tiene un matíz puramente lógico-semántico y a este aspecto pertenece la aplicación de la distinción analítico/sintético.[41]

En este sentido, será a partir de las características de la prueba de un enunciado como se podrá determinar o no, su carácter analítico/sintético por una parte o, en segundo lugar, su propiedad *a priori/ a posteriori.*

Si Frege demostraba su *logicismo,* esto es, que todo término matemático era definible, en términos puramente lógicos, y si toda verdad matemática era revelada por medio de una prueba lógica, entonces, Frege demostraría que los fundamentos del conocimiento matemático estaban en la lógica y, por lo tanto, las verdades matemáticas serían tan generales como las

[41] Jasso, Jesús. Analiticidad, Aprioricidad y necesidad. Un análisis conceptual. IIF., UNAM., D.F., 2003. pág. 127.

verdades lógicas. Al respecto dice Frege:

> Naturalmente con ello no quiero introducir un nuevo sentido, [entre las distinciones de *a priori y a posteriori*, entre sintético y analítico] sino sólo precisar lo que varios autores anteriores, Kant en especial, han opinado. [42]

Al llevar a cabo su *logicismo,* Frege caracterizó a los enunciados que constituían a la ciencia, en este pasaje él hace referencia a lo dicho por Kant, con ello intenta delimitar con claridad la caracterización kantiana de analítico/sintético, y *a priori/a posteriori,* a partir de su *logicismo.* Recordemos que Kant no ofrece un análisis conceptual sistemático de las nociones analítico/sintético y *a priori/a posteriori* sino que sólo hace una distinción entre ellas para caracterizar el tipo de enunciados que constituyen al conocimiento científico, particularmente para defender la idea que existen enunciados necesarios e informativos, es decir, enunciados sintéticos/*a priori*. Véase la primera parte del primer apartado de ésta investigación, I. *Algunos antecedentes conceptuales de la definición fregeana de analiticidad.*

En síntesis, de acuerdo con Frege, tanto en *Conceptografía (1879)* como en *Fundamentos de la aritmética (1884)* es consistente al momento de caracterizar ser 'analítico' y ser *'a priori'*. En ambos textos sugiere que la 'prueba lógica' y 'el nivel de generalización' son la caracterización principal de los enunciados que constituyen la ciencia, y esta caracterización la cumplen los enunciados matemáticos, esto es, enunciados analíticos cuya justificación es *a priori.*

A continuación defenderé en qué sentido las nociones ser “analítico” y “*a priori*”son co-extensionales y por qué considero que no pueden *ser* reducidas entres sí.

---

[42] Frege, Gottlob. Conceptografía. Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla. UNAM. IIF. México. DF. 1972. pág. 116.

II.4.- ¿La analiticidad y la aprioricidad son nociones co-extensionales?. ¿La co-extensionalidad implica reductibilidad?

La forma en que se relaciona lo analítico y lo *a priori* se sigue de una manera natural del análisis elaborado en la sección anterior. Hay quien piensa que la analiticidad y la *a prioricidad* en Frege son dos conceptos altamente parecidos hasta el grado de reducirse a una misma explicación. ¿Por qué digo esto? Recordemos cómo caracteriza Frege lo analítico**:**

> [...] cuando se trata de una verdad matemática. El problema es el de encontrar su **prueba**[43] y seguirla hasta las verdades más primitivas. Si en este camino sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales, entonces se trata de una **verdad analítica**, por lo cual debe presuponerse el todo de las proposiciones sobre las cuales descansa la plausibilidad de cualquier deducción. [44]

y, acerca de lo *a priori* dice:

> [...] Si, por el contrario, es posible producir la **prueba** totalmente en base a leyes generales que por su parte ni necesitan ni admiten **prueba**, entonces la **verdad es a priori**. [45]

---

43 Las negritas son mías y tienen la intención de señalar que en la caracterización que hace Frege acerca de lo analítico y lo *a priori* se hace énfasis en el carácter estrictamente lógico de la "prueba" es decir, i. en el proceso mismo de inferencia a partir de la aplicación de ciertos principios lógicos; ii. en la naturaleza lógica de todas las proposiciones que integran a la demostración (axiomas, leyes lógicas, definiciones, teoremas previos,). Como veremos más adelante, la diferencia entre el concepto semántico de analiticidad y el concepto epistemológico de *aprioricidad* radica en el papel que juega la prueba o bien para definir un teorema o bien para que un S (cualquier sujeto) esté justificado en afirmar el teorema.

44 Frege, Gottlob. Conceptografía. Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla. UNAM. IIF. México. DF. 1972. pág. 117.

45 Idem. Pág 117. Con esta caracterización Frege presupone la distinción entre teoremas que pueden probarse mediante proposiciones lógicas y mediante proposiciones empíricas en una misma demostración, considerando que la evidencia empírica es imprescindible para la prueba de tales teoremas y, teoremas cuya única evidencia o la prueba para su demostración radica en una prueba estrictamente lógica, tal que la evidencia empírica resulta irrelevante. En el primer caso, se dice que S está justificado sólo *a posteriori* para afirmar el

Si prestamos atención en cómo caracteriza Frege lo analítico y lo *a priori,* veremos que en ambos casos hace alusión a la 'prueba lógica'. Luego, pareciera que ser analítico y ser *a priori* son lo mismo, pero esto es falso. Pensar que lo analítico y lo *a priori* son lo mismo implica una comprensión equivocada de ambos conceptos. Por ello, a continuación haré énfasis en la propiedad semántica y epistemológica que tiene la prueba lógica para seguir hablando de lo analítico y *a priori* como dos conceptos co-extensionales y no idénticos.[46] Luego, defenderé la idea que son conceptos no reducibles y que esto puede verse tanto en el trabajo de Frege (1879, 1884) como en algunos pasajes de los trabajos de Dummet (1990) y Mosterín (2000).

Para Frege, la noción ser analítico y la noción ser *a priori* -como se explicó líneas arriba- son distintas, la distinción radica en el papel que juega la 'prueba lógica' ya como un medio de definición de una proposición ya como un medio de evidenciar la naturaleza epistémica de su afirmación. Veamos.

---

teorema, mientras en el segundo caso S está justificado en afirmar el teorema *a priori*. Si lo anterior es correcto la *a prioridad* supone a la analiticidad y no viceversa es decir, si se ha definido un teorema analíticamente, S está en condiciones de justificar tal teorema en términos *a priori*. Pero, como veremos más adelante, al menos es polémico establecer que dado que un S está justificado *a priori* para afirmar una proposición tal proposición sea necesariamente analítica. Luego, la analiticidad y la *a prioridad* de acuerdo con el *logicismo* de Frege (1879) (1884) serán co-extensionales pero no idénticos, luego, no reducibles.

[46] En general cuando decimos que A es idéntico a B es una manera compacta de señalar que todos los elementos de A son elementos de B y, A y B no tienen más elementos. De tal suerte que será inconsistente decir que algún elemento de A tiene alguna propiedad y ese mismo elemento en B no la tiene. Luego, A será un sub-conjunto impropio de B y B será un subconjunto impropio de A (Véase la página 11 de esta investigación). Por su parte, la co-extensionalidad a la que me refiero implica que el conjunto de elementos que tiene A están incluidos en B, pero es posible que B tenga más elementos que A. Luego habrá casos donde las propiedades del conjunto B sean compartidas con el conjunto A, pero dado que B puede tener más elementos, algunas propiedades del conjunto B son no satisfechas por A. Por lo tanto, la co-extensionalidad, en este caso, no implica identidad, luego no es posible reducir B a A. La co-extensionalidad y la no reductibilidad también la defiende como veremos -más adelante- Dumett (1990) y Mosterín (2000).

PRUEBA LÓGICA	PRUEBA LÓGICA
• Analítico/Sintético	• *A priori/A posteriori*
• Carácter semántico de la prueba	• Carácter epistémico de la prueba
• Definiciones	• Evidencia
• La prueba es el *definiens* de un teorema	• La prueba funciona como la evidencia que justifica a un S a afirmar un teorema (La prueba habilita a un conocedor afirmar sobre la base de la experiencia o sobre la base de la lógica un teorema)
• Si para definir una proposición sólo se consideran axiomas, definiciones, reglas y leyes lógicas el carácter semántico de la proposición será analítico. En caso de requerir una proposición para dotar de sentido al teorema, para definirlo, tal proposición será sintética.	• Si S está justificado en afirmar un teorema mediante una prueba estrictamente lógica entonces S está justificado *a priori.* Si S requiere una proposición que describa un hecho empírico el cual funcione como una evidencia para que la prueba se lleve a cabo entonces S estará justificado *a posteriori.*
La condición epistémica de la *a prioridad* como una forma de justificación de un teorema depende de que tal teorema se haya definido analíticamente. Luego, la analiticidad será más básica que la aprioridad. (Lo anterior no implica una relación biyectiva, es decir, no todo lo *a priori* será analítico).	

De acuerdo con Frege, distinguir los enunciados matemáticos del resto de enunciados científicos era la consecuencia de asumir la prueba lógica desde los dos puntos de vista trazados y señalados en el esquema anterior.

Por un lado, la prueba lógica es la definición o el medio semántico[47] y sintáctico para definir una proposición matemática y, por otro, la prueba lógica funciona como una evidencia formal que permite afirmar *(a priori* o *a posteriori*) el enunciado probado. En este sentido, será a

[47] Por 'semánticamente analítica' me refiero a que la prueba lógica funciona como un tipo de definición del enunciado probado.

partir de las características de la prueba lógica de un enunciado que se podrá determinar o no, su carácter semántico (analítico/sintético) por una parte o, en segundo lugar, su propiedad epistémica (*a priori/ a posteriori*). Si lo anterior es correcto entonces, podemos decir que las nociones ser analítico y ser a *a priori* son nociones que tienen diferente valor cognoscitivo y ambos refieren a la prueba lógica. Al respecto Jesús Jasso dice:

> [...] la distinción a priori/a posteriori, como la distinción analítico/sintético, conciernen al contenido del enunciado en tanto éste incluye una referencia a la justificación de la emisión de tal expresión, a su prueba lógica. La prueba lógica entonces funciona como un dispositivo sintáctico que permite decidir la condición semántica analítica de un enunciado i.e. si este es consecuencia lógica de leyes lógicas generales y definiciones o bien es un axioma lógico, en el marco de una demostración; y al tiempo funciona como un dispositivo epistemológico tal que ser un enunciado probado exclusivamente por medio de herramientas sintácticas, al margen de cualquier hecho extra-lógico, se considera que expresa una verdad a priori. Esto es lo que se conoce como la coextensionalidad en Frege entre analiticidad y aprioricidad. [48]

De acuerdo con este pasaje, reitero, por una parte, la prueba lógica es la definición técnica de una proposición matemática, y por otra, la prueba lógica funciona como un dispositivo epistemológico el cuál evidencia el carácter formal de la justificación de un enunciado. Justo para explicar la diferencia y la relación estrecha que tienen las nociones analítico/ sintético y

48 Jasso, M. Jesús (2014), “*LOGICISMO Y ANALITICIDAD: Frege y Carnap dos propuestas logicistas”*, en Andamios. Revista de Investigación Social del Colegio de Humanidades y Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, No. 26, cuatrimestre septiembre-diciembre 2014. Pág. 11.

a priori/ a posteriori, Frege hace énfasis en la 'prueba lógica' y el nivel de 'generalidad' como propiedades distintivas de dichos pares conceptuales. Veamos, para que un S este Justificado en afirmar un teorema *a priori* se debe satisfacer que tal proposición sea analítica. Este caso explica la relación entre lo analítico y lo *a priori* pero no su reducción.

Todo enunciado que sea consecuencia lógica de definiciones y leyes lógicas será un enunciado analítico y su justificación será *a priori.* Por el contrario, aquel enunciado en el que participe algún hecho extra lógico será un enunciado sintético y su justificación será *a posteriori,* pues, al llevar a cabo su prueba intervendría algún hecho con algún compromiso empírico.

Si lo anterior es correcto, entonces es posible pensar que desde el prólogo de la *Conceptografía (1879)* y, la introducción de los *Fundamentos de la Aritmética (1884)*, la relación entre lo analítico y lo *a priori* puede expresarse en términos de co-extensionalidad en el *logicismo* de Frege. Ambas nociones -analítico y *a priori*- comparten las siguientes características. Veamos:

Analítico	*A priori*
• Necesidad.	• Necesidad.
• Generalidad.	• Generalidad.
• No tienen contra ejemplo empírico.	• No tienen contra ejemplo empírico.
• Se establecen al margen de la experiencia.	• Se establecen al margen de la experiencia.
Como se dijo lineas arriba -no toda co-extensionalidad implica identidad- el conjunto de elementos que tiene A están incluidos en B, pero es posible que B tenga más elementos.	habrá casos donde las propiedades del conjunto B sean compartidas con el conjunto A, pero dado que B puede tener más elementos, algunas propiedades del conjunto B son no satisfechas por A.

• Ser analítico es más básico que lo *a priori.* Por eso: • Todo enunciado analítico es necesariamente *a priori.*	• No todo enunciado *a priori* es necesariamente analítico. Lo *a priori* contiene más elementos que la noción ser analítico, esto es: • Enunciados sintéticos *a priori.*

Si lo anterior es correcto, podemos apreciar en la última fila del esquema anterior que los términos analítico y *a priori* no son reducibles, ya que no todo enunciado justificado *a priori* es necesariamente analítico. Al respecto Frege, dice lo siguiente:

> Para que no se me reproche censurar mezquinamente a un espíritu al que sólo podemos mirar con rendida admiración, creo que también debo destacar las concordancias que prevalecen sobre cualquier desacuerdo. Para aludir sólo a la más próxima, veo como un gran servicio prestado por Kant, el que haya hecho la distinción de juicios sintéticos y analíticos. Al llamar sintéticas *a priori* a las verdades geométricas reveló su verdadera naturaleza. Y tiene valor repetirlo ahora porque frecuentemente no se reconoce. Si Kant se equivoco respecto a la aritmética, creo que esto no hace mella esencial en su trabajo. Llegó a la conclusión de que hay juicios sintéticos *a priori*; si éstos aparecen únicamente en la geometría o también en la aritmética, resulta de menor importancia.[49]

[49] Frege, Gottlob. Conceptografía. Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla. UNAM. IIF. México. DF. 1972. pág. 193.

De acuerdo con esta cita, Frege mismo considera relevante la distinción kantiana acerca de la geometría. Si esto es correcto, entonces es posible establecer que el mismo Frege presupone en su argumentación sobre dar orden al conjunto de proposiciones que integran al conocimiento matemático y científico la diferencia entre la noción ser analítico con la noción ser *a priori.* Otro argumento a favor de la no reductibilidad de los términos analítico y *a priori* y de su co-extensionalidad -en los términos arriba explicados- puede apoyarse en Michael Dummet y Jesús Mosterín[50]. Veamos. Michael Dummet dice acerca de la tesis de que la matemática es reducible a lógica lo siguiente:

> Debe notarse que Frege en ningún momento sostuvo esta tesis para toda la matemática [Esta fue la famosa tesis logicista]. La aplicó tanto al análisis (la teoría de los números reales) como a la aritmética elemental, pero a lo largo de su carrera sostuvo el punto de vista kantiano sobre la geometría, es decir, que ésta se funda en verdades sintéticas *a priori* no reducibles a la lógica.[51]

De acuerdo con este pasaje, Frege comparte la idea de la distinción kantiana implicada por los enunciados "sintéticos *a priori*". Por su parte, Jesús Mosterín dice lo siguiente:

> En general, la actitud de Frege respecto a la geometría es bastante paradójica. Frege, fundador del programa logicista de reducción de la matemática a la lógica, excluye por completo a la geometría de su programa. Y Frege, crítico implacable de la concepción Kantiana de la

---

50 Lo citado por Dummet y Mosterín únicamente me interesa para señalar que es posible sostener que lo analítico y lo *a priori* son nociones no reducibles. No es mi intención centrarme en la discusión de si estos dos filósofos están equivocados o no en su interpretación de Frege acerca del tipo de enunciados que participan en Geometría, esto es, enunciados sintéticos/*a priori*.

51 Dummet, Michael. La verdad y otros enigmas. Trad. Alfredo Herrera Patiño. FCE. 1990. México D.F., pág. 160.

> aritmética, acepta sin más y como definitiva la concepción Kantiana de la Geometría.[52]

Suponiendo que Michael Dummet y Jesús Mosterín estén en lo correcto, es decir, que Frege comparta la idea de la distinción kantiana acerca de los enunciados sintéticos/*a priori* podemos ver con mayor claridad que para Frege la noción ser analítico es distinta, es decir, no reducible a la noción ser *a priori*. En este sentido, de acuerdo con Frege, en todo caso lo analítico será más básico que lo *a priori* admitiendo que toda proposición analítica tiene una justificación *a priori*, pero no admitiría que toda justificación de una proposición *a priori* sería necesariamente analítica. En este caso es posible mantener la co-extensionalidad de la analítico con lo *a priori* pues Frege aceptaría que: la co-extensionalidad implica que el conjunto de elementos que tiene A están incluidos en B, pero es posible que B tenga más elementos. Habrá casos donde las propiedades del conjunto B sean compartidas con el conjunto A, pero dado que B puede tener más elementos, algunas propiedades del conjunto B son no satisfechas por A, dado que no todo enunciado justificado *a priori* es analítico. Por lo tanto, la co-extensionalidad no implica identidad, luego no es posible reducir B a A. Si lo anterior es correcto, así se explicaría la consideración de Frege (1879, 1884) y de Dummet (1990) y Mosterín (2000) quienes aceptan que los enunciados aritméticos serán analíticos *a priori* mientras los geométricos sintéticos *a priori*.

Será suficiente que un enunciado sea analítico para que su justificación sea *a priori*. No existe un enunciado analítico cuya justificación no sea *a priori*. Al respecto Frege dice:

---

52 Mosterín, Jesús. <u>Los Lógicos.</u> Espasa. 2000. España, pág. 74.

> En éste escrito espero haber hecho probable el que las leyes de la aritmética sean juicios analíticos y, por consiguiente, *a priori*. Según esto la aritmética sólo sería una lógica más avanzada, cada proposición aritmética sería una ley lógica, aunque derivada. [...] calcular sería deducir.[53]

Sin embargo, -reitero- no todo enunciado justificado *a priori* es necesariamente analítico, como es el caso de la geometría, -considerando sólo como posible que la interpretación de Michael Dummet, (1990) y de Jesús Mosterín (2000) sea correcta. Si esto es el caso, y se considera la explicación de co-extensionalidad entre A y B -señalada arriba- y que dicha explicación es consistente con lo dicho por estos autores, entonces no existe reductibilidad entre las nociones ser analítico y ser *a priori* pero al tiempo se mantiene su co-extensionalidad. En suma, podemos afirmar lo siguiente:

1) la noción ser analítico es más básica que lo *a priori*

2) todo enunciado analítico es necesariamente justificado *a priori*.

3) lo analítico y lo *a priori* están estrechamente vinculados mediante la prueba lógica. Su distinción radica en un medio de definición o en el medio de evidencia que se haga sobre la prueba lógica y su nivel de generalidad.

4) la co-extensionalidad en Frege puede entenderse en los siguientes términos:

1) necesarios

2) generales

[53] Frege, Gottlob. Conceptografía. Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad. Hugo Padilla. UNAM. IIF. México. DF. 1972. pág. 191-192.

3) no tienen contraejemplo empírico

4) se justifican al margen de la experiencia

5) al relacionarse A y B donde B contiene más elementos que A. En este sentido, los términos analítico y *a priori* son co-extensionales, es decir, no todo lo co-extensional implica identidad.

5) a) la noción de analiticidad refiere a la semántica, pues, apela al concepto de significado de los términos que componen a una proposición, y

b) la noción de *a prioridad* le compete a la epistemología, ya que es un criterio de justificación de contenidos proposicionales.

Luego, a partir de (a) y (b) podemos suponer que las nociones analítico y *a priori* son diferentes, por lo tanto, no son reducibles entre sí.

III.- Consideraciones finales

El propósito de esta tesis ha sido dar respuesta a tres objetivos: (i) explicar cómo caracteriza Gottlob Frege la noción de analiticidad y *a prioridad* desde algunos pasajes del prólogo de la *Conceptografía (1879)* y de la introducción de *Fundamentos de la aritmética (1884)*. ii. ¿la explicación en (i) implica co-extensionalidad entre los términos analítico y *a priori* ? y, iii. ¿la co-extensionalidad en (iii) implica una reducción entre los términos analítico y *a priori?*

Para dar respuesta a cada una de las tres preguntas arriba señaladas se examinaron las siguientes fuentes primarias: el prólogo de la *La Critica de la razón pura*, [1781], (1984), Jaakko Hintikka (2009) y Frege, (1879) y (1884).

Comenzamos nuestro análisis explicando cómo caracteriza Kant los pares conceptuales analítico/sintético y *a priori/a posteriori.* Los resultados fueron los siguientes.

De acuerdo con el análisis del Apartado I, tenemos que en el proyecto filosófico de Kant, la noción ser analítico se explica de dos maneras: **a)** el contenido conceptual del predicado está incluido en el contenido conceptual del sujeto y, **b)** la negación de un enunciado analítico genera una contradicción. De acuerdo con **a)** ésta puede entenderse de dos formas, la primera de ellas es: i. entenderla como una relación de implicación lógica y la segunda es entenderla como una relación de identidad lógica. Expliquemos esto.

En el caso de **(a),** implicación lógica, se entiende como una relación conceptual existente entre el contenido conceptual de predicado incluido en el contenido conceptual del sujeto. Si el contenido conceptual del sujeto de una oración implica al contenido conceptual del predicado no se puede afirmar algo del sujeto sin implicar al predicado.

En el segundo caso, es decir, **(a')** Identidad lógica, donde A=B, es una relación de identidad, esto puede explicarse de la siguiente manera: todo lo que es verdadero para A será verdadero para B y todo lo que es verdadero para B será verdadero para A. Una forma contemporánea de entender esta identidad es a través de la identidad de conjuntos. Si entendemos los conceptos A y B como conjuntos, B sería un subconjunto impropio de A y A sería un subconjunto impropio de B. Esta última relación puesta así es una forma de explicar formalmente la identidad entre A y B. Si lo anterior es correcto, y si un concepto está incluido en otro y esa relación puede llevarse hasta la identidad entre tales contenidos, entonces, no es posible afirmar un concepto sin afirmar el otro. Si se diera el caso en que se afirmara algo de A pero no de B o se afirmara algo de B pero no de A claramente se atentaría contra el principio lógico de no contradicción, esto es, si afirmamos un contenido y negamos el otro.

A partir de estos dos sentidos (a) y (a') Kant señala que la negación de un enunciado analítico implica una contradicción, justo esta propiedad lógica -principio lógico de no contradicción- determinará la necesidad de los juicios analíticos.

De acuerdo con Kant, (a) y (a') son maneras en que podemos identificar a un enunciado analítico. Kant señala que (a) y (a') son formas de explicar analiticidad. La necesidad del juicio ser analítico surge a partir de la propiedad lógica del principio de no contradicción. Justo porque (a) -implicación lógica- y (a') -identidad- son necesarias y, si en algún momento se niegan evidentemente se genera una contradicción.

Siguiendo a Kant, la segunda forma para identificar a un enunciado analítico es **b)** la negación de un enunciado analítico genera contradicción. Y ¿qué quiere decir que negar un enunciado analítico genere una contradicción? Veamos. Por ejemplo, supongamos que X sea 'el rectángulo es una figura geométrica con cuatro ángulos rectos en el que sus lados opuestos tienen la misma longitud'. Si negamos X, quedaría expresado de la siguiente manera: 'es falso que el rectángulo es una figura geométrica con cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos tienen la misma longitud'. Claramente se genera una contradicción. Se puede observar que de acuerdo a Kant el enunciado X es un enunciado analítico porque al negarlo se genera una contradicción. Ya que no hay casos de rectángulo que fallen en tener cuatro ángulos rectos o en que sus lados opuestos no tenga la misma longitud

El contenido conceptual de A y el contenido conceptual de B está dado mediante la identidad entre ambos conceptos, no se puede afirmar el primero y negar el segundo sin atentar contra el principio lógico de no contradicción. De ahí se sigue la necesidad del juicio, tan solo por ser consistente con la propiedad lógica del principio de no contradicción Algo similar ocurre con la analiticidad en términos de identidad.

Las instancias, (a), (a') y (b) de acuerdo con Kant, son justificadas *a priori;* y ¿qué quiere decir que un enunciado sea justificado *a priori*? Lo siguiente: se trata de enunciados cuyo contenido pueda justificarse al margen de cualquier contraste empírico, son enunciados que conservan necesidad y generalidad. Su justificación recae sólo en proposiciones lógicas de los enunciados. Si lo anterior es correcto, entonces, los enunciados analíticos *a priori* son enunciados trivialmente verdaderos que no aumentan nuestro conocimiento del mundo empírico y son justificados al margen de la experiencia.

Por su parte, los enunciados sintéticos/*a posteriori* son enunciados no necesarios, este tipo de enunciados si son verdaderos, aumentan nuestro conocimiento, y su justificación apela a la experiencia, por ello se dice que son enunciados contingentes. Veamos un ejemplo. Sea Y : 'Mariana es inteligente'. Si afirmamos lo siguiente: 'es falso que' 'Mariana es inteligente' ¿se genera alguna contradicción entre el contenido conceptual del sujeto 'Mariana' con el contenido conceptual del predicado 'es inteligente'? No, no se genera una contradicción afirmar que: 'es falso que Mariana es inteligente' porque este tipo de enunciados, a diferencia de los analíticos, el contenido conceptual del término sujetivo 'Mariana' no incluye necesariamente el contenido conceptual del predicado 'ser inteligente'. Tampoco el término 'ser inteligente' refiere a una propiedad necesaria que hace al objeto 'Mariana' ser lo que es. Existe una independencia conceptual entre el contenido del término sujetivo 'Mariana' y el contenido del predicado 'ser inteligente'. 'Ser inteligente' incrementa la información del término sujetivo 'Mariana' por lo que el enunciado 'es falso que Mariana es inteligente' no es analítico.

Siguiendo a Kant, si el contenido del predicado no está incluido en el contenido del sujeto ni tampoco su negación genera una contradicción, entonces, este tipo de enunciado es un ejemplo que se caracteriza como enunciado sintético. En el caso de anterior sobre Mariana, es además de sintético *a posteriori*. El valor de verdad de este tipo de enunciados dependerá de: su forma su sintaxis junto con su significado de cada una de las palabras que componen al enunciado, el nivel interpretativo del enunciado (semántica) y, su contrastación empírica, como el punto importante para su verificación. El mundo empírico es necesario para: i. saber si el predicado le corresponde o no al sujeto y, ii. para contrastar el referente del nombre para luego hacer la asignación del valor de verdad de la expresión predicativa.

Se dijo después, que la preocupación de Kant consistía en dar cuenta del avance del conocimiento científico. Para ello, Kant se pregunta ¿qué tipo de enunciados son los que dan cuenta del avance del conocimiento científico? No podrían ser los enunciados analíticos/*a priori,* porque este tipo de enunciados, si bien son necesarios, generales y se justifican al margen de toda experiencia, no aumentan nuestro conocimiento. No dicen nada más de lo contenido del predicado en el sujeto y viceversa. Pero, ¿podrían ser los enunciados sintéticos/*a posteriori* los enunciados que den cuenta del avance y aumento de nuestro conocimiento? No, porque estos tipos de enunciados no son necesarios. Pero, entonces, ¿qué tipo de enunciados son los que podrían dar cuenta del avance y de nuestro conocimiento científico, si no son los enunciados analíticos/*a priori* ni los enunciados sintéticos/*a posteriori?* Justo para dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta, Kant postula una especie de enunciados que él denominó enunciados sintéticos/*a priori.* Los enunciados sintéticos son enunciados dan cuenta de la posibilidad del aumento del conocimiento científico, es decir:

i. la noción de *sinteticidad,* en tanto que necesita de la experiencia, garantiza acumulación y avance de nuestro conocimiento, pero por sí misma no implica necesidad, y

ii. el conocimiento debería estar fundado sobre juicios *a priori,* justo porque lo *a priori* sí implica necesidad y universalidad para los enunciados que constituyen a las ciencias, luego

iii. los juicios sintéticos/*a priori* hacen posible nuestro conocimiento bajo condiciones de necesidad.

En síntesis, de acuerdo con Kant, los juicios sintéticos/*a priori* son juicios informativos -al ser sintéticos- y necesarios y universales -al ser *a priori*-. El progreso científico se daba justo porque los enunciados sintéticos/*a priori* podían incrementar nuestro conocimiento bajo estructuras predicativas sobre hechos del mundo (matemático o físico) y que, al mismo tiempo, la adscripción fuese necesaria y general.

Mencioné después que Kant no estaba interesado en ofrecer un análisis conceptual sistemático de las nociones analítico/sintético, *a priori/a posteriori.* Dije que él sólo hace una distinción entre ellas para caracterizar no sólo el tipo de enunciados que constituyen al conocimiento científico y particularmente a los enunciados geométricos, sino para dar cuenta de la ciencia misma. En este sentido, podemos considerar a Kant como un antecedente del programa fregeano, pues parte de los intereses de Frege era dar cuenta, desde su programa *logicista* qué es una verdad matemática y cuáles son sus propiedades a diferencia de los otros enunciados que constituyen a la ciencia.

Expliqué en el Apartado II, *Gottlob Frege un logicista,* que el interés de Frege radicaba en precisar la caracterización de los pares conceptuales analítico/sintético y *a priori/a posteriori* ofrecida por Kant. Comencé diciendo que el proyecto *logicista* de Frege consistía en demostrar que los fundamentos del conocimiento matemático estaban en la lógica. Esto es: i. los términos matemáticos pueden ser definidos en términos puramente lógicos. ii. los teoremas matemáticos pueden ser probados por medio de la lógica. Si los enunciados matemáticos son reducibles a la lógica y si los enunciados lógicos tienen las propiedades de ser analíticos *a priori*, entonces, los enunciados matemáticos también tendrían tales propiedades. Si además, consideramos que los enunciados lógicos son semánticamente analíticos y epistemológicamente *a priori,* entonces, por transitividad los enunciados matemáticos también serían analíticos y su justificación *a priori.*

Si Frege demostraba su *logicismo*, es decir, que todo término matemático era definible en términos puramente lógicos, y si toda verdad matemática era revelada por medio de una prueba lógica, entonces, Frege demostraba que los fundamentos del conocimiento matemático estaban en la lógica. Pero, ¿a qué se refiere Frege, cuando habla de prueba lógica? De acuerdo con Frege, distinguir los enunciados matemáticos del resto de enunciados científicos era la consecuencia de asumir la prueba lógica desde dos puntos de vista. Veamos.

Por un lado, la prueba lógica es la definición o la forma semántica[54] y sintáctica de definir una proposición matemática y, por otro, la prueba lógica funciona como evidencia formal del enunciado probado. En el primer caso la prueba juega un papel estrictamente semántico y en el segundo caso un papel epistémico. En este sentido, será a partir de las características de la prueba lógica de un enunciado que se podrá determinar o no, su carácter (semántico) analítico/sintético por una parte o, en segundo lugar, su propiedad (epistémica) *a priori/ a posteriori*. Expliquemos lo anterior con un ejemplo.

A saber para toda (∀x) (∀y) (∀z) (x = y ^ y = z ▪ ▪ x = z), y supongamos que tenemos el axioma de transitividad [(A▪ ▪ B) ^(B▪ C)] ▪ ▪ ▪ ▪ =C) queremos demostrar que A, B y C se cumple. Existen dos respuestas a esta pregunta. La primera es semántico-lógico (analítico) y, la segunda es, epistemológica *(a priori)*. Respecto de la primera, decimos que [(A▪ ▪ B) ^(B▪ C)] ▪ ▪ ▪ ▪ =C) se sigue únicamente de definiciones y principio lógicos como lo es el principio de transitividad y la regla de instanciación, por tanto la proposición [(A▪ ▪ B) ^(B▪ C)] ▪ ▪ ▪ ▪ =C) es semánticamente analítica.

Por otra parte, una verdad puede justificarse *a priori o a posteriori* dependiendo de la evidencia que se tenga, es decir, si es evidencia lógica o evidencia empírica. Si la evidencia es lógica, entonces se dice que tal verdad se justifica *a priori*. Si la evidencia para justificar nuestra afirmación es de carácter empírico o existe al menos una premisa de carácter empírico, entonces se dice que nuestra justificación para afirmar tal verdad es *a posteriori*. Si lo anterior es correcto, y vemos la prueba de [(A▪ ▪ B) ^(B▪ C)] ▪ ▪ ▪ ▪ =C) derivada del Axioma de

[54] Por 'semánticamente analítica' me refiero a que la prueba lógica funciona como un tipo de definición del enunciado probado.

transitividad, donde independientemente de lo que sea A B C la inferencia se sigue necesariamente, luego la evidencia que tenemos para afirmar A→C es lógica. En este sentido, la prueba funciona como una evidencia lógica para estar justificados en afirmar la instanciación de axioma y, dado que la evidencia es lógica, entonces, se dice que esta aseveración se puede afirmar por razones *a priori.* Aquí es donde señalamos que la "prueba lógica" cumple con dos aspectos: uno para determinar el carácter lógico-semántico de la aseveración en cuestión (analítica) y, el carácter epistemológico de ésta al estar justificados en afirmarla sólo mediante una prueba lógica. Luego la aseveración A→C se justifica *a priori.*

En general, de acuerdo con Frege, sabiendo el tipo de enunciados que participan en la prueba lógica se puede decir que se trata de verdades lógicas o de otro tipo de verdades. Y ¿cuáles son los tipos de verdades que pueden participar en la prueba?: (i) axiomas (ii) definiciones (iii) reglas y leyes lógicas generales, —(i), (ii) y (iii) tienen la característica de no referir al mundo empírico— y, (iv) enunciados que tienen algún compromiso con el mundo empírico. Por ejemplo, si en la prueba sólo participan: (i), (ii) y (iii) entonces, este tipo de enunciado son caracterizados como analíticos. Si en la prueba participan (i), (ii), (iii), y (iv) entonces, son enunciados caracterizados como sintéticos, pues no es posible definir al enunciado probado mediante términos estrictamente lógicos, sino que refiere por lo menos a un término particular extra lógico. Así en el caso de los enunciados justificados *a posteriori*, la prueba requiere de una proposición con contenido empírico, en este caso, la justificación no puede darse sólo en términos lógicos sino que requiere de la experiencia. Si lo anterior es correcto, entonces, una verdad matemática será aquella que únicamente pueda probarse por enunciados estrictamente lógicos, es decir: (i), (ii) y (iii).

¿Y por qué se consideran *a priori* las verdades matemáticas? Porque la *a prioridad* es una forma de justificar contenidos proposicionales en términos estrictamente lógicos. Este rasgo es evidentemente epistemológico, y consiste en que se puede asignar un valor de verdad al enunciado, considerando condiciones de verdad que no son en lo absoluto condiciones relacionadas con particulares en el sentido anterior, es decir, se justifican al margen de la experiencia.

Si lo anterior es correcto, entonces es posible pensar que desde el análisis elaborado del prólogo de la *Conceptografía (1879)* y, la introducción de los *Fundamentos de la Aritmética (1884)*, la relación entre lo analítico y lo *a priori* puede expresarse en términos de co-extensionalidad en el *logicismo* de Frege, ya que, ambas nociones -analítico y *a priori*- comparten las siguientes características: 1.-son necesarias 2.- son generalizables 3.- no tienen contra ejemplo empírico 4.- se justifican al margen de la experiencia, pero tiene diferente valor cognoscitivo. Abordan a la prueba lógica de manera diferente. Luego, podemos suponer que son nociones no reductibles entre sí. ¿por qué pienso que digo esto?

Si prestamos atención en cómo caracteriza Frege las nociones ser analítico y ser *a priori* advertiremos que ambos conceptos parecen ser iguales hasta el grado de pensar que refieren a lo mismo.

La co-extensionalidad -como la estoy entendiendo- implica que el conjunto de elementos que tiene A están incluidos en B, pero es posible que B tenga más elementos, es decir, no todo lo co-extensional es idéntico, si lo anterior es correcto, habrá casos donde las propiedades del conjunto B son compartidas con el conjunto A, pero dado que B puede tener más elementos, algunas propiedades del conjunto B son no satisfechas por A. Por lo tanto, -en este caso- la co-extensionalidad no implica identidad, luego no es posible reducir B a A.

La co-extensionalidad y la no reductibilidad también la defiende como veremos Dumett (1990:160) y Mosterín (2000:74). Dummet y Mosterín piensan que Frege compartía la opinión kantiana acerca de los enunciados que participan en la Geometría, estos son enunciados sintéticos *a priori*. Si partimos del supuesto de que Dummet y Mosterín, tienen razón, entonces puede observarse que lo analítico y lo *a priori* no son reducibles entre sí. Ya que no todo enunciado justificado *a priori* es necesariamente analítico, ni todo juicio sintético es necesariamente justificado *a posteriori*. Si lo anterior es correcto, entonces, podemos decir que lo analítico es co-extensional con lo *a priori*, pero no reducibles. Si fuera el caso que lo analítico y lo *a priori* fueran reducibles, entonces no podrían postularse enunciados sintéticos a *priori*. Dado que lo analítico y lo *a priori* son diferentes, entonces no pueden ser reducidos entre sí.

En síntesis, suponiendo que la interpretación de Dummet, (1990: 160) y Mosterín, (2000: 74). es correcta, entonces puedo suponer que Kant y Frege caracterizan de la misma manera a los enunciados geométricos. Sin embargo, difieren en la manera de caracterizar a los enunciados que participan en la matemática (aritmética), esto es, enunciados sintéticos/*a priori* en el caso de Kant y, enunciados analíticos *a priori* en el caso de Frege. Kant se interesaba en caracterizar y justificar que el conocimiento científico está constituido por enunciados sintéticos/*a priori*, mientras que el interés de Frege, consistía en precisar las nociones analítico/sintético y *a priori/a posteriori* expuestas por Kant y, a su vez, ofrecer razones a favor de la naturaleza analítica/*a priori* de los enunciados matemáticos (aritmética).

En una investigación a futuro tengo interés de investigar la propuesta de Willard V. Orman Quine, (1908-2000). De su artículo, "*Dos Dogmas del Empirismo" (1951).* En dos dogmas del empirismo Quine establece que no es posible mantener la distinción *Logicista* de analiticidad y sinteticidad. .

IV.- Bibliografía Básica

Dummet, Michael. La verdad y otros enigmas, Traducción Alfredo Herrera Patiño. FCE, 1990. México D.F. Págs. 570.

Frege, Gottlob. Conceptografía, Los Fundamentos de la aritmética, otros estudios filosóficos. Trad., Hugo Padilla, UNAM, IIF, México, DF., 1972, págs. 271.

Frege, Gottlob. Estudios sobre semántica. Introducción de. Jesús Mosterín. Traducción de

Ulises Moulines Edit. Ariel S.A. Barcelona. 1984. págs. 179.

Hintikka (2009) "*Logicism*" en Handbook of the Philosophy of Mathematics, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam.

Hume, David. [1994] Investigación sobre el entendimiento humano. Gernika, Traducción Fernando Ramos González, México, D.F.

Jasso, M. Jesús (2014), *"LOGICISMO Y ANALITICIDAD: Frege y Carnap dos propuestas logicistas"* en Andamios. Revista de Investigación Social del Colegio de Humanidades y Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, No. 26, cuatrimestre septiembre-diciembre 2014.

Jasso M. Jesús (2014), "*¿Monismo y Dualismo en Matemáticas?*" en: Díaz y Jasso (2014) Problemas Contemporáneos de Filosofía. UACM. México, pp. 291.

Morado, R. (1987). "Frege, Hempel and Dedekind: Definitions of number and Correferentiality", en *Ergo*. Vol. 1.

Mosterín, Jesús. Los Lógicos. Espasa., 2000, España. págs. 324.

Kant, Immanuel. Crítica de la razón pura. Prólogo, traducción, notas e índice Pedro Ribas. Taurus, D.F. 2006, págs. 693

Kenny, Anthony. Introducción a Frege. Trad., Carmen García Trevijano, Cátedra, Madrid, 1997, págs. 293.

Putnam, Hilary. Lo analítico y lo Sintético. Cuadernos de Crítica 24. México, IIF, UNAM, 1983, págs. 62.

Tiel, Christian. Sentido y Referencia en la Lógica de Gottlob Frege. Trad., José Sanmartin Esplugues, Tecnos, Madrid, 1972, págs. 171.

V.- Bibliografía complementaria

Coffa, J. Alberto. La tradición semántica de Kant a Carnap. *Vol. 1*. México DF. UAM, 2005. págs. 287.

Coffa, J. Alberto. La tradición semántica de Kant a Carnap. *Vol. 2*. México DF. UAM, 2005. págs. 651.

Frege, Gottlob. (1892) (1973) Sobre sentido y la denotación, en Simpson, Semántica Filosófica Problemas y discurso, S. XXI, Buenos aires. pp. 3-27.

Frege, Gottlob. (1848-19259). Investigaciones Lógicas / Madrid, Tecnos, Traducción y presentación Luís MI Valdés Villanueva, págs. 147.

Frege, Gottlob. Estudios sobre semántica, Traducción Ulises Moulines. Ariel, Barcelona, 1973, págs. 179.

Mora, Ferrater, J. Diccionarios de Filosofía, Tomo III, K-P. Ariel., Nueva edición revisada, aumentada y actualizada por el profesor Josep-María Terrical. Barcelona.

Putnam, Hilary. Otras Mentes. Cuadernos de Crítica 26. México, IIF, UNAM, 1984, págs. 37.

Putnam, Hilary. Cerebro y Conducta. Cuadernos de Crítica 23. México, IIF, UNAM, 1983, págs. 31.

Kripke, Saúl. Identidad y Necesidad. Cuadernos de Crítica 7. México. IIF; UNAM, 1978, págs. 47.

Livio, Mario. ¿Es Dios un matemático?. Barcelona, Ariel, 2009, págs. 303.

Boghossian, P. and Peacocke, C. *New essays on the a priori*. Oxford University Press, 2000.

Benacerraf, P. And Putnam H. *Philosophy of mathematics: selected reading*. Oxford. B. Blacwell. 1964. págs. 536.