

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

**“Diseño e Implantación de Diversas Técnicas de Control
Adaptable Aplicadas a un Sistema Hidráulico”**

TRABAJO RECEPCIONAL

PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

PRESENTA:

Emmanuel Olivar Domínguez

Director del trabajo recepcional

Dr. Marcos Ángel González Olvera

Codirector

Ing. Agustín Ortíz Castro

Ciudad de México, mayo 2016.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Dedicatoria.

Quisiera dedicar este trabajo en primer lugar a mi familia: a mi madre (Bertha), mi padre (Ausencio) y mi hermana (Berta María) por el apoyo que me han otorgado durante tantos años, por no haber perdido nunca la confianza en mí y por estar siempre apoyándome.

A los profesores que han aportado tanto a mi preparación (a todos los de la academia de ISEI-SLT en particular), a mis compañeros porque siempre aprendí algo de cada uno de ellos, a mis amigos por todas esas desveladas y días de levantarse temprano para conseguir la certificación de cada una de las materias que tomamos, ustedes saben quienes son.

Al profesor Rogelio Mendoza Pérez por su paciencia y por el apoyo otorgado para poder finalizar este trayecto de la mejor forma, muchas gracias.

Finalmente al profesor Marcos Ángel González Olvera por todo el apoyo, la paciencia, la confianza y por creer en mí en momentos en los que ni siquiera yo lo hacía, en verdad gracias.

Gracias a todos ustedes es posible el presente trabajo.

Agradecimientos.

Quisiera agradecer al proyecto:

- **“Implantación de observadores y controladores adaptables e identificación de Sistemas”** con clave **UACM-PI2014-65** perteneciente a la *Secretaría de Ciencia, Tecnología e Innovación del Distrito Federal (SECITI)* a cargo del Ing. Agustín Ortiz Castro.

y a la *Universidad Autónoma de la Ciudad de México* a través de los proyectos:

- **UACM/AGO/ADI/015/2011** a cargo del Dr. Marcos Ángel González Olvera,
- **UACM/AGO/ADI/17/2012** a cargo del Dr. Marcos Ángel González Olvera,

por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

Además, a mis lectores porque todas sus observaciones enriquecieron este trabajo y ayudaron a terminarlo de la mejor manera.

Agradecimientos institucionales.

Agradezco a la *Universidad Autónoma de la Ciudad de México* por el apoyo otorgado para la impresión y el empastado de este trabajo recepcional mediante el convenio **UACM-CSE-ITR/40/2016**.

Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XV
1. Introducción.	1
1.1. Antecedentes.	1
1.2. Descripción del problema.	2
1.3. Objetivos.	2
1.4. Justificación.	4
1.5. Estructura del trabajo recepcional.	4
1.6. Publicaciones generadas.	5
2. Fundamento teórico para el modelado de sistemas y técnicas de control automático.	7
2.1. Modelado de sistemas.	7
2.1.1. Representación de sistemas mediante modelos no lineales.	8
2.1.2. Representación de sistemas lineales mediante el uso de la función de transferencia.	9
2.1.2.1. Representación de modelos lineales mediante variables de estado.	12
2.2. Sistemas de control.	15
2.2.1. Control proporcional, integral, derivativo (PID).	16
2.2.1.1. Combinación de las acciones de control.	19
2.2.2. Diseño de controladores.	20
2.2.2.1. Diseño mediante el lugar geométrico de las raíces (LGR).	21
2.2.3. Predictor de Smith.	23

2.2.4.	Sintonización de controladores mediante el método de la curva de reacción.	24
2.2.5.	Regulador óptimo lineal (LQR).	26
2.2.5.1.	Control mediante realimentación de estados.	26
2.2.5.2.	Control LQR	28
2.2.6.	Control de equivalencia cierta.	30
2.2.7.	Control difuso.	32
2.2.7.1.	Lógica difusa, conjuntos difusos y agregación.	32
2.2.8.	Control adaptable.	35
2.2.8.1.	Control por linealización exacta.	38
2.2.8.2.	Algoritmo adaptable.	42
2.3.	Identificación de Sistemas.	45
2.3.1.	Identificación de sistemas de segundo orden.	46
2.3.2.	Identificación paramétrica de sistemas en tiempo discreto.	47
2.3.3.	Observador adaptable para sistemas lineales variantes con el tiempo de múltiple entrada y múltiple salida.	49
3.	Características, modelado y análisis del sistema de dos tanques en cascada.	53
3.1.	Descripción física del sistema.	54
3.1.1.	Características del sistema.	54
3.1.1.1.	Bomba.	54
3.1.1.2.	Tanques.	55
3.2.	Modelado del sistema.	57
3.2.1.	Variables del sistema y notación.	59
3.3.	Análisis del modelo.	60
3.3.1.	Modelo no lineal.	60
3.3.2.	Modelo lineal.	62
4.	Diseño de controladores para el sistema de dos tanques en cascada.	67
4.1.	Controladores lineales.	67
4.1.1.	Sintonización PI con predictor de Smith.	67
4.1.2.	Control PD.	71
4.1.2.1.	Condición de fase.	72
4.1.2.2.	Condición de magnitud.	73
4.1.3.	Control LQR.	75

4.1.4. Control de equivalencia cierta.	77
4.2. Controladores no lineales.	78
4.2.1. Control difuso.	79
4.2.2. Control por linealización por realimentación de estados.	83
4.2.3. Control adaptable pasivo con algoritmo PI.	88
4.3. Observador adaptable.	92
5. Resultados experimentales.	95
5.1. Sintonización PI con predictor de Smith.	96
5.2. Control PD.	97
5.3. Control LQR.	98
5.4. Control de equivalencia cierta.	101
5.5. Control difuso.	102
5.6. Control por linealización por realimentación de estados.	104
5.7. Control adaptable pasivo con algoritmo PI.	106
5.8. Observador adaptable.	108
5.9. Comparación de desempeño entre los controles de regulación.	110
6. Conclusiones.	113
A. Equipo utilizado.	119
A.1. Tarjeta de adquisición de datos.	119
A.2. Analog sensors adapter.	121
A.3. VoltPAQ-X2/X4.	121
Bibliografía	123

Índice de figuras

2.1. Esquema de control en lazo cerrado.	17
2.2. Esquema general del control PID.	17
2.3. Sistema de control en lazo cerrado.	22
2.4. Representación de un sistema con retraso.	23
2.5. Esquema de doble lazo de realimentación utilizado en el predictor de Smith.	24
2.6. Entrada y salida del sistema para realizar la sintonización.	25
2.7. Esquema del control por realimentación de estados.	28
2.8. Esquema de control óptimo.	30
2.9. Conjunto difuso Singleton.	33
2.10. Estructura general de un sistema difuso.	34
2.11. Estructura general del control adaptable.	36
2.12. Estructura interna de un control adaptable.	37
2.13. Estructura de unificación de los algoritmos adaptables pasivos.	43
2.14. Método de la pendiente.	46
2.15. Método de Smith.	47
2.16. Representación gráfica del algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido.	49
3.1. Sistema de tanques acoplados Quanser.	53
3.2. Configuración utilizada.	54
3.3. Relación entre el V_{bomba} con el flujo aplicado al sistema.	55
3.4. Relación entre el V_{sensor} con la altura del tanque.	56
3.5. Esquema para la obtención del modelo.	57
3.6. Comportamiento de diversas trayectorias de las variables de salida del sistema con un flujo de entrada $u = 10 \text{ cm}^3/s$	61

ÍNDICE DE FIGURAS

3.7. Comportamiento de diversas trayectorias de las variables de salida del sistema con un flujo de entrada $u = 25 \text{ cm}^3/s$	61
3.8. Comportamiento de diversas trayectorias de las variables de salida del sistema con un flujo de entrada $u = 40 \text{ cm}^3/s$	62
3.9. Lugar geométrico de las raíces para el primer punto de equilibrio.	63
3.10. Respuesta del sistema en el primer punto de equilibrio.	64
3.11. Lugar geométrico de las raíces para el segundo punto de equilibrio.	65
3.12. Respuesta del sistema en el segundo punto de equilibrio.	65
4.1. Respuesta del sistema a una entrada escalón.	68
4.2. Respuesta del sistema y aproximación realizada mediante el método de Smith.	69
4.3. Respuesta del sistema para realizar la sintonización de un control PI.	69
4.4. Respuesta del sistema al aplicar el control PI sintonizado.	70
4.5. Flujo de control PI.	71
4.6. LGR compensado.	74
4.7. Respuesta del sistema con el control PD diseñado.	74
4.8. Señal generada por el controlador PD.	75
4.9. Altura de los tanques utilizando el control LQR diseñado.	76
4.10. Flujo suministrado al sistema por el control LQR.	76
4.11. Altura del tanque inferior, aplicando el control de equivalencia cierta.	78
4.12. Señal aplicada al sistema por el control de equivalencia cierta.	78
4.13. Funciones de membresía usadas en el diseño del control difuso.	80
4.14. Superficie de control.	82
4.15. Altura del tanque inferior utilizando el control difuso diseñado.	82
4.16. Señal de control difuso.	83
4.17. Regulación mediante el control por linealización por realimentación de estados para una referencia de 8 cm	85
4.18. Regulación mediante el control por linealización por realimentación de estados para una referencia de 10 cm	86
4.19. Regulación mediante el control por linealización por realimentación de estados para una referencia de 12 cm	87
4.20. Altura del tanque inferior con el control adaptable pasivo PI.	91
4.21. Señal control adaptable pasivo PI.	91
4.22. Cambio en el parámetro θ_2 en el sistema.	92
4.23. Estimación del estado h_1	94

4.24. Aproximación de los parámetros desconocidos estados θ_1 , θ_2	94
5.1. Configuración utilizada en la implantación de los controladores.	95
5.2. Respuesta del control PI implantado.	96
5.3. Flujo del control PI con predictor de Smith implantado.	97
5.4. Respuesta del control PD implantado.	97
5.5. Flujo del control PD implantado.	98
5.6. Respuesta del control LQR implantado.	99
5.7. Altura del tanque superior.	99
5.8. Altura del tanque inferior.	100
5.9. Flujo del control LQR implantado.	100
5.10. Respuesta del control de equivalencia cierta implantado.	101
5.11. Flujo entregado por el control de equivalencia cierta implantado.	102
5.12. Respuesta del control difuso para varias alturas.	102
5.13. Flujo de control generada.	103
5.14. Control por linealización por realimentación estados implantado.	104
5.15. Señal de control generada.	105
5.16. Control del rango de alturas del tanque inferior.	105
5.17. Señal de control para el rango de alturas del tanque inferior.	106
5.18. Control adaptable con algoritmo pasivo PI de seguimiento.	107
5.19. Señal de control adaptable con algoritmo pasivo PI implantado.	107
5.20. Valor del parámetro del orificio de salida del tanque inferior.	108
5.21. Estimación del estado desconocido h_1	109
5.22. Aproximación de los parámetros desconocidos θ_1 y θ_2	109
5.23. Respuesta del sistema a los diversos controladores de regulación aplicados.	112
A.1. N.I PCI-621. Imagen obtenida de: http://www.ni.com/es-mx.html	119
A.2. Adaptador de sensores analógicos. Obtenida de http://www.quanser.com/	121
A.3. Amplificador Lineal. Imagen obtenida de http://www.quanser.com/	122

Índice de tablas

2.1. Discretizaciones para obtener el modelo en variables de estado en tiempo discreto.	15
2.2. Funciones de transferencia de las acciones de control.	20
2.3. Parámetros para el controlador mediante el método de la curva de reacción.	26
2.4. Ejemplos de algunas funciones de membresía.	33
3.1. Características de las resistencias de salida del sistema de tanques.	55
4.1. Definición de los intervalos para la altura actual y la altura deseada.	79
4.2. Valores de las características de cada función de membresía.	79
4.3. Flujos de salida.	80
5.1. Comparativa de desempeño de los controles de regulación aplicados.	111
A.1. Característica de la tarjeta de adquisición de datos <i>PCIE-6321</i> a 25°C.	120
A.2. Características del Amplificador Lineal.	122

Introducción.

El control de nivel de líquidos y flujo entre contenedores es un problema que se presenta en diferentes y muy variadas industrias (como en la industria petroquímica, en la industria de fabricación de papel, en la industria farmacéutica, en las compañías de fabricación de pintura, en las plantas de tratamiento de agua, etc.), muchos de estos procesos requieren líquidos que tienen que ser bombeados para ser almacenados y después ser nuevamente transferidos a otros tanques. Además, el líquido pueda ser procesado en el tanque antes de ser enviado al siguiente o, se puede requerir que el nivel de varios tanques deba ser controlado con la finalidad de llevar a cabo otra acción particular. Por ello es necesario que el ingeniero en sistemas de control cuente con conocimientos del funcionamiento del control de nivel de líquido y flujo entre tanques.

En este trabajo se realiza el control de nivel de un sistema de tanques utilizando diversas técnicas de control, usando para ello la función de transferencia y la representación en variables de estados.

1.1. Antecedentes.

El ser humano se encuentra rodeado de una infinidad de sistemas que requieren el control de flujo y nivel, los sistemas que manejan algún fluido dependen de sistemas de control de nivel para evitar que se desborde el recipiente en donde es almacenado el fluido. Por ejemplo, en las plantas de tratamiento de agua, se llena un tanque a un nivel determinado y se realiza un proceso físico, químico o biológico con el fin de eliminar contaminantes o de enriquecer con determinados nutrientes el agua que se encuentra contenida en él. En la actualidad, muchas industrias requieren de líquidos procesados que deben mantener un nivel de altura específico, y por ello la importancia que tiene el control del nivel de líquidos y el flujo entre ellos.

1. INTRODUCCIÓN.

Para realizar los controles de nivel se cuenta con mucha información disponible, puesto que estos sistemas se analizan de manera recurrente en los libros de sistemas de control [2, 3, 15, 19], pero se deja de lado la aplicación de nuevas técnicas de control de nivel por considerarse que el nivel puede regularse de manera adecuada por medio de controladores ya diseñados en el pasado. Por esto la aplicación de nuevas técnicas de control de nivel se vuelven de mucha importancia, puesto que con ellas se realiza un menor gasto energético en el actuador, una adaptación al cambio de algún parámetro del contenedor o se logran mejores desempeños para alcanzar el valor de nivel deseado.

1.2. Descripción del problema.

En este trabajo se plantea controlar el sistema de tanques acoplados que se encuentra en el laboratorio de control e instrumentación de la UACM-SLT. Este sistema cuenta con un par de tanques uno arriba del otro, cuyo nivel es medido mediante sensores de presión, y son llenados con un fluido que se encuentra en un depósito utilizando una bomba, ver capítulo 3.

El problema a solucionar es la regulación del nivel del tanque inferior, llenado de manera indirecta por medio del tanque superior, para esto se cuenta con un bomba que suministra el líquido de manera directa al tanque superior. Además, si con el paso del tiempo algún parámetro del tanque inferior cambia, se debe seguir regulando el nivel de manera adecuada.

1.3. Objetivos.

El objetivo es controlar la altura del tanque inferior en un sistema de dos tanques en cascada alimentados con un flujo provisto por una bomba controlada mediante una señal de voltaje en corriente continua. Se aplican diversas técnicas de control de regulación y se desea comprobar el funcionamiento adecuado de éstos en lazo cerrado, también se diseñará un control de seguimiento que se adapte al cambio en un parámetro del sistema. Además, se realiza la estimación de algunos parámetros y la reconstrucción de un estado mediante un observador.

Para conseguir este objetivo se tienen los siguientes objetivos específicos:

- **Modelado matemático del sistema de dos tanques en cascada** representado en variables de estado, mediante el cual se estudia el comportamiento del

sistema, se obtienen las funciones de transferencia que se utilizan más adelante para el diseño de controladores.

- **Aproximar el modelo del sistema e implantar un controlador sintonizado** utilizando técnicas de aproximación y sintonización para regular la altura del segundo tanque a 10 *cm*, obteniendo un sobrepaso del 20 %.
- **Diseñar e implantar un control PD en tiempo discreto** que regule la salida del sistema a una altura de 10 *cm* utilizando un modelo linealizado en tiempo discreto para el diseño.
- **Diseñar e implantar un regulador óptimo** el cual lleve cada una de las alturas del sistema a un nivel de 10 *cm* evitando la saturación del actuador, utilizando para su diseño el modelo del sistema.
- **Diseñar e implantar un control de equivalencia cierta** que lleve al tanque inferior a una altura de 10 *cm* utilizando un modelo lineal en tiempo discreto, con el fin de imponer una nueva dinámica.
- **Diseñar e implantar un control difuso** con el que se pueda regular la altura del tanque inferior en un intervalo de alturas de 10 *cm*.
- **Diseñar e implantar un control por linealización por realimentación de estados** donde se obtenga una salida del sistema regulada en un intervalo de alturas de 25 *cm*.
- **Diseñar e implantar un control adaptable con algoritmo pasivo PI** que siga la trayectoria de una señal senoidal y que se adapte al cambio del parámetro correspondiente a el área del orificio de salida del tanque inferior.
- **Realizar la comparación de los diferentes controladores de regulación** utilizando para ello parámetros de desempeño como: tiempo de levantamiento, tiempo de asentamiento, sobrepaso y error en estado permanente.
- **Diseñar e implantar un observador adaptable lineal** que identifique el parámetro que afecta el flujo de entrada en el tanque superior ($1/A_1$) y el orificio de salida del tanque inferior, además, debe reconstruir el estado en el que se encuentra el tanque superior.

1.4. Justificación.

Muchos de los controladores que se encuentran en la literatura se basan en una estructura de tanques en serie o tanques en solitario, dejando de lado a los tanques en cascada, y de ahí la importancia de realizar el diseño de controladores para este tipo de sistemas.

Otra justificación al realizar el diseño de estos controladores es verificar la eficiencia de distintos algoritmos en una sistema real, para así llevar los conocimientos a la industria y solucionar problemas que tengan estructuras similares de una manera más rápida y precisa en caso de ser necesario.

Además, existen trabajos que presentan el diseño de controladores para obtener el nivel deseado en uno o más tanques aplicando de dos a cuatro técnicas de control para realizarlo, pero no existe alguno en el que se apliquen siete técnicas de control tan diversas, como lo son los controladores clásicos, mediante sintonización y el control PD, control óptimo, control de equivalencia, control difuso, hasta controles por linealización por realimentación de estados.

1.5. Estructura del trabajo recepcional.

Este trabajo está dividido en 6 capítulos. En el capítulo 1, se da una pequeña introducción al tema del control nivel de tanques. En el capítulo 2, se describe la teoría de modelado de sistema utilizando la función de transferencia y las variables de estado, la técnica de control mediante el lugar geométrico de la raíces, el control óptimo, el control de equivalencia, el control difuso, una pequeña introducción al control linealizante y al algoritmo de adaptación PI, así como a un observador adaptable y la identificación de sistemas. En el capítulo 3, se detalla el sistema a utilizar, así como la obtención del modelo, las variables de interés y el análisis dinámico del mismo. En el capítulo 4, se desarrolla el diseño de los controles: sintonizado PI, control PD, el control LQR, el control de equivalencia, el control difuso, el control linealizante entrada-salida, el control adaptable con algoritmo pasivo PI y el observador adaptable que se implantarán, mientras que en el capítulo 5, se muestran los resultados experimentales de cada uno de ellos y la comparación de desempeño entre los controles de regulación. Finalmente, en el capítulo 6, se dan las conclusiones obtenidas al desarrollar cada uno de los controladores y el observador adaptable en este trabajo.

1.6. Publicaciones generadas.

En el desarrollo de este trabajo se realizó el artículo:

- González-Olvera, Marcos A; Olivar-Domínguez, Emmanuel; Tang, Yu. *Control Adaptable Pasivo Para Un Sistema de Dos Tanques en Cascada*. Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático (AMCA) 2015. Cuernavaca, Morelos.

Fundamento teórico para el modelado de sistemas y técnicas de control automático.

La ingeniería de control se encarga del análisis dinámico y el diseño de controladores para obtener el comportamiento deseado de un sistema, utilizando la teoría de control. Esta rama de la ingeniería “se ha convertido en una parte importante e integral para los procesos industriales y de manufactura modernos (máquinas herramientas, automóviles y vehículos espaciales son algunos ejemplos” [19]), en virtud de brindar los medios para obtener un desempeño óptimo de los sistemas dinámicos utilizando procedimientos analíticos, por esto resulta vital el desarrollo y la preparación de ingenieros dentro del área de control en vista de que el uso de los sistemas de control se vuelve cada vez más importante debido al desarrollo tecnológico que se vive en la actualidad.

En este capítulo se presentan conceptos de modelado de sistemas, técnicas de control lineal, control difuso, control adaptable y de observación de sistemas.

2.1. Modelado de sistemas.

Un modelo matemático es una representación mediante ecuaciones algebraicas en la cual son descritas las propiedades suficientes y necesarias para comprender el comportamiento de un sistema. Un sistema es, de manera general, un conjunto de elementos que interactúan entre si para obtener un fin común [15]. En ingeniería, los modelos sirven para entender de una forma sistemática el entorno del sistema y así solucionar

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

problemas cada vez más complicados.

En el caso de la ingeniería de control un modelo matemático (a partir de ahora denominado solamente *modelo*) se define como un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de un sistema, representándolo con la precisión necesaria para realizar su estudio de manera adecuada.

Así, en ingeniería de control los modelos son la base mediante la cual se comprende qué tan susceptible a ser controlado es un sistema al conocer su dinámica.

2.1.1. Representación de sistemas mediante modelos no lineales.

La mayoría de los procesos reales son de naturaleza no lineal, por lo que el modelo del sistema debe representar esta dinámica para describir con precisión su comportamiento. En estos procesos con regularidad se tiene más de una entrada y más de una salida para obtener un modelo. La forma de modelar estos sistemas es utilizando la representación mediante variables de estado.

Para comprender la representación mediante variables de estado de un sistema, se definen los siguientes conceptos:

- *Variable del sistema*: Se le denomina de esta manera a cualquier variable que responda a la entrada del sistema o a las condiciones iniciales de éste.
- *Estado*: es la cantidad más pequeña de variables necesarias para, que a partir del conocimiento de éstas y de la entrada al sistema, se pueda determinar por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo futuro.
- *Variables de estado*: es el conjunto más pequeño de variables para determinar el estado del sistema.
- *Vector de estados*: es un vector en el cual sus componentes son las variables de estado del sistema.
- *Espacio de estados*: es un espacio dimensional cuyos ejes coordenados son las variables de estado del sistema.
- *Ecuaciones de estado*: son un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden con n variables (las variables de estado).
- *Ecuación de salida*: esta ecuación expresa las variables de salida como una combinación de las entradas y las variables de estado.

Si se tiene un proceso que cuenta con p entradas, m salidas y que describe su dinámica con n variables de estado, en donde cada variable de estado describe su dinámica mediante una función dependiente de todas las variables de estado del sistema, las entradas al sistema y del tiempo, y además, las salidas del sistema son funciones dependientes de las variables de estado, de las entradas al sistema y del tiempo, entonces las funciones que describen el comportamiento del sistema mediante la representación de variables se agrupan de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_p, t) \end{bmatrix}.$$

Y se tiene la representación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.2)$$

que representa la *dinámica no lineal del sistema*, en donde la Ec. (2.1) es denominada *ecuación de estado* y la Ec. (2.2) es denominada *ecuación de salida* [15]. Por otra parte, si el sistema se encuentra operando alrededor de un punto de operación. Entonces el sistema puede ser representado por medio de ecuaciones lineales, que se explicarán más adelante.

2.1.2. Representación de sistemas lineales mediante el uso de la función de transferencia.

Dentro del proceso de modelado de sistemas, solamente se toma en cuenta las variables que son de interés y gracias a esto se cuenta con modelos más sencillos. En caso de que las suposiciones para simplificar el modelo no puedan ser aplicadas, entonces se dice que el modelo no puede simplificarse.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

Función de transferencia en tiempo continuo.

Para realizar el modelado de un sistema lineal con una entrada y una salida se considera la ecuación diferencial lineal de orden n de la forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t), \quad (2.3)$$

la cual tiene coeficientes constantes.

Con la Ec. (2.3) se representan una gran variedad de sistemas al considerar a $y(t)$ como la variable de salida y a $u(t)$ como la variable de entrada. Para solucionar de manera más rápida esta ecuación se utiliza la transformada de Laplace* [16] y se analiza el comportamiento del sistema mediante el uso de la función de transferencia.

La función de transferencia para un sistema lineal se define como: “la transformada de Laplace de la respuesta impulso con todas las condiciones iniciales iguales a cero.” [9]

Aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (2.3) y evaluando sus condiciones iniciales igual a cero, se obtiene:

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s), \quad (2.4)$$

factorizando los términos con respecto de $Y(s)$ y de $U(s)$ en cada uno de los lados de la igualdad, y obteniendo la relación entre la transformada de Laplace de la salida con respecto a la transformada de Laplace de la entrada, se tiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = G(s). \quad (2.5)$$

La relación de la Ec. (2.5) es conocida como *función de transferencia con condiciones iniciales nulas* y se representa mediante $G(s)$. Una propiedad importante de la función de transferencia es que ésta se encuentra definida únicamente para sistemas lineales e invariantes con el tiempo y no depende de la entrada del sistema. Además, en este tipo de representación el sistema solamente es función de la variable s y no de la variable temporal t . Estas definiciones son válidas para sistemas en tiempo continuo los cuales son sistemas en los que *sus señales se encuentran definidas en un intervalo continuo de tiempo así como las amplitudes* [13], o dicho de otra forma, el sistema puede tener un valor definido en cualquier instante de tiempo.

*La transformada de Laplace de una señal general $x(t)$ se define como: $X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$

Función de transferencia pulso.

En caso de que las señales del sistema se encuentren definidas por medio de un conjunto de valores distintos, se dice que el sistema se encuentra *cuantificado* y los valores resultantes se denominan valores cuantificados. En caso de que estos valores se encuentren cuantificados en intervalos con separaciones iguales, se dice que los valores se encuentran en tiempo discreto. Se define a una señal en tiempo discreto.

Definición 1 Una señal en tiempo discreto es una señal que se encuentra definida sólo en valores discretos de tiempo, esto es, aquellos en los que la variable independiente t se encuentra cuantificada [14].

Una señal en tiempo discreto también puede ser denominada *señal digital*. Un sistema se encuentra en tiempo discreto si una o más de variables pueden cambiar sólo en instantes de valores discretos. El modelado de este tipo de sistemas se realiza utilizando ecuaciones en diferencias y para realizar su análisis se usa una función de transferencia, la cual se encuentra representada a través del equivalente para tiempo discreto de la transformada de Laplace, la cual es denominada *transformada Z^** [16].

La obtención de la representación de sistemas en tiempo discreto utilizando una función de transferencia considera una ecuación en diferencias de la forma:

$$y[k] + a_1y[k-1] + a_2y[k-2] + \dots + a_ny[k-n] = b_0u[k] + b_1u[k-1] + \dots + b_mu[k-m], \quad (2.6)$$

donde $u[k]$ representa a la entrada, $y[k]$ a la salida. Si se consideran condiciones iniciales nulas y se transforma la Ec. (2.6) al dominio Z se obtiene:

$$Y[z] + a_1z^{-1}Y[z] + a_2z^{-2}Y[z] + \dots + a_nz^{-n}Y[z] = b_0U[z] + b_1z^{-1}U[z] + \dots + b_mz^{-m}U[z], \quad (2.7)$$

factorizando los términos con respecto a $U[z]$ y $Y[z]$, la relación de la salida con respecto de la entrada de la Ec. (2.7) es:

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} = G[z]. \quad (2.8)$$

La Ec. (2.8) es denominada *función de transferencia pulso con condiciones iniciales*

*La transformada z de una señal discreta general $x[n]$ se define como: $X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$

igual a cero. Es conveniente utilizar, para este caso, potencias negativas porque con ellas se hace visible cuantas veces se ha llevado a cabo un retraso de la señal requerida (entrada o salida).

Se observa que las Ecs. (2.5) y (2.8) son muy parecidas dado que representan las funciones de transferencia en tiempo continuo y en tiempo discreto de sistemas lineales, respectivamente, mediante las cuales se puede realizar el modelado del sistema no importando en que dominio se encuentre aquél.

Se debe mencionar que la representación de sistemas utilizando la función de transferencia brinda información de la estabilidad y la respuesta transitoria del sistema y observar cómo es afectado éste para así conseguir una aproximación aceptable del modelo requerido.

2.1.2.1. Representación de modelos lineales mediante variables de estado.

A la representación de sistemas mediante el uso de la función de transferencia se le conoce en ingeniería de control como la *representación clásica*. El problema de este tipo de representación radica en que no todos los sistemas tienen una entrada y una salida. Los sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas se pueden modelar de una forma más conveniente utilizando las *variables de estado* (también denominada *representación moderna*), en vista de que es una forma en el cual el comportamiento del sistema es descrito con muchas más variables que definen su dinámica.

Modelos lineales mediante variables de estado en tiempo continuo.

Utilizando los conceptos de variables de estado descritos anteriormente, la representación en el espacio de estados de un sistema lineal e invariante en el tiempo se realiza por medio de las ecuaciones [13]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{2.9}$$

para todo $t \geq t_0$, con condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0)$, donde:

$\mathbf{x}(t)$: el vector de estados.

$\dot{\mathbf{x}}(t)$: el vector de derivada del vector de estados con respecto al tiempo.

$\mathbf{y}(t)$: vector de salida.

$\mathbf{u}(t)$: el vector de entrada o de control.

A : la matriz de estados.

B : matriz de entrada.

C : matriz de salida.

D : matriz de transmisión directa.

Si existen: n estados, p entradas y m salidas; las dimensiones de cada vector y cada matriz son: $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

En la Ec. (2.9), los valores de las matrices A , B , C y D son constantes, es decir estos valores no cambian con el tiempo, por ello, se representan sistemas lineales, los cuales aproximan de manera adecuada el comportamiento dinámico del sistema modelado alrededor de un punto de equilibrio *. Cabe señalar que la selección de las variables de estado no es única, y que para escoger estas variables se debe de cumplir la condición de *independencia lineal*[†] entre ellas y que se deben de elegir el número mínimo de variables.

En caso de ser necesario, para obtener el sistema descrito por las Ecs. (2.9) se utiliza una aproximación lineal del sistema representado mediante las Ecs. (2.1) y (2.2). Esta aproximación se realiza en torno a un punto de operación (X, U) donde cada una de las matrices se obtiene mediante:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \bigg|_{(X, U)}, \quad (2.10)$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \bigg|_{(X, U)}, \quad (2.11)$$

*Un punto de equilibrio, es aquel valor o valores de $x = X$, $u = U$ constantes para los cuales el estado permanece invariante, es decir: $\dot{x} = 0$.

[†]Se dice que un conjunto de variables son linealmente independientes si no se puede escribir ninguna como combinación lineal de las demás.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(X, U)} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{(X, U)}, \quad (2.12)$$

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(X, U)} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{array} \right) \Bigg|_{(X, U)}. \quad (2.13)$$

Por otra parte, si se desea obtener la representación del sistema mediante el uso de la función de transferencia a partir del conocimiento del modelo en variables de estado de éste, se utiliza la transformación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.14)$$

Modelos lineales mediante variables de estado en tiempo discreto.

En caso de que se requiera que el sistema esté representado en tiempo discreto, el modelo en el espacio de estados se realizará mediante el uso de ecuaciones en diferencias de primer orden, por lo cual el modelo de un sistema en variables de estado en tiempo discreto de un sistema lineal se puede representar mediante:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k], \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde: $\mathbf{x}[k]$ es el vector de estados, $\mathbf{x}[k+1]$ es el vector de estado siguiente, $\mathbf{y}[k]$ es vector de salida, \mathbf{A} es la matriz de estados, \mathbf{B} es matriz de entrada, \mathbf{C} es matriz de salida y \mathbf{D} es matriz de transmisión directa. Estos vectores y matrices tienen las mismas dimensiones que su equivalente en tiempo continuo y al igual que en estas, las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} son constantes.

Es posible obtener el modelo en variables de estado en tiempo discreto si se cuenta con el modelo del sistema en variables de estado en tiempo continuo, utilizando las discretizaciones que se muestran en la tabla 2.1.

Utilizando las ecuaciones (2.9) y (2.15), se puede realizar el modelado de una gran variedad de sistemas SISO (Single input- Single output) ó MIMO (Multiple input-

Discretización Aproximada
$A_d = AT_s + I$
$B_d = T_s B$
$C_d = C$
$D_d = D$
Discretización exacta utilizando un retén de orden cero
$A_d = e^{T_s A}$
$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(A_d - I)B$
$C_d = C$
$D_d = D$

Tabla 2.1: Discretizaciones para obtener el modelo en variables de estado en tiempo discreto.

Multiple output).

Como se mencionó anteriormente, estas representaciones son útiles para sistemas lineales e invariantes con el tiempo, además funcionan entorno a un punto de equilibrio, por lo cual con ellas no se puede tener la dinámica completa del sistema; si se desea obtener el comportamiento de un sistema de manera general, se requiere de la representación no lineal del mismo.

En muchas ocasiones los sistemas se enfrentan a acciones externas que modifican los valores en estado estacionario de aquéllos; si a un sistema se le aplica una acción externa y aquél vuelve al valor estacionario anterior cuando desaparezca la acción, entonces se dice que el sistema es *estable*.

Utilizando estos conceptos matemáticos se realiza el modelado de cualquier sistema independientemente de la cantidad de entradas, salidas.

2.2. Sistemas de control.

En la actualidad una gran cantidad de procesos necesitan ser intervenidos de manera externa con el fin de describan el comportamiento que se desea. Para lograr esto, es necesario realizar acciones específicas; los sistemas encargados de generar estas acciones son denominados *sistemas de control o controladores*. Un sistema de control tiene como

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

objetivo obtener una respuesta deseada de un sistema mediante la manipulación de ciertas variables o señales.

Para entender el funcionamiento de los sistemas de control es necesario realizar algunas definiciones útiles:

Proceso: es una operación continua marcada por una serie de cambios en el tiempo, y en sistemas de control es aquella operación que se desea controlar.

Planta: es un equipo o sistema cuyo propósito es realizar una operación específica.

Perturbación: es una señal que tiende a afectar de forma adversa el proceso, esta puede ser generada en el interior o exterior del sistema o proceso.

Variable Controlada: es la cantidad que es medida o controlada.

Variable Manipulada: es la condición que es variada por un controlador de modo que afecte a la variable controlada.

Así se define al **control** como:

Definición 2 *Aquella acción en la cual se mide el valor de la variable a controlar y se realiza la adaptación (o variación) necesaria de la variable manipulada para realizar la corrección o limitar la desviación de la primera con respecto de la segunda.*

La estrategia más utilizada para realizar el control de un proceso es *la estrategia de control en lazo cerrado*, en la que se busca reducir la diferencia que existe entre el valor deseado y el valor de salida actual, para conseguirlo se realimenta la información necesaria de la salida, después el valor obtenido de la diferencia es introducido a un controlador, colocado en cascada con el proceso, que genera una nueva señal de entrada. En la Fig. 2.1 se muestra el esquema general de un sistema de control en lazo cerrado. Usando las estrategias de control mencionadas, se realiza el diseño de controladores necesarios para obtener el comportamiento deseado de un proceso determinado (empleando para ello diferentes técnicas de diseño).

2.2.1. Control proporcional, integral, derivativo (PID).

Uno de los controladores más comunes y utilizados a nivel industrial, es el control Proporcional-Integral-Derivativo (conocido como control PID) el cual se basa en una estrategia de control en lazo cerrado. El esquema general de un control PID se muestra

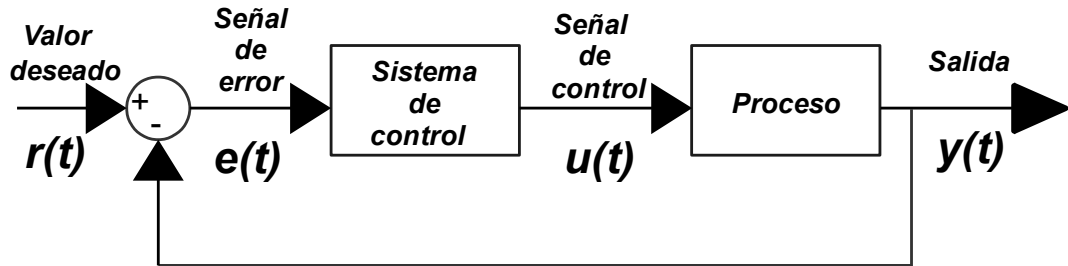


Figura 2.1: Esquema de control en lazo cerrado.

en la Fig. 2.2. Para obtener la salida deseada, se toma el valor $r(t)$ y se compara con el valor de la salida $y(t)$, del proceso, para genera una señal de error $e(t)$, la cual es introducida el controlador y enviada al proceso como señal $u(t)$, ver Fig. 2.2.

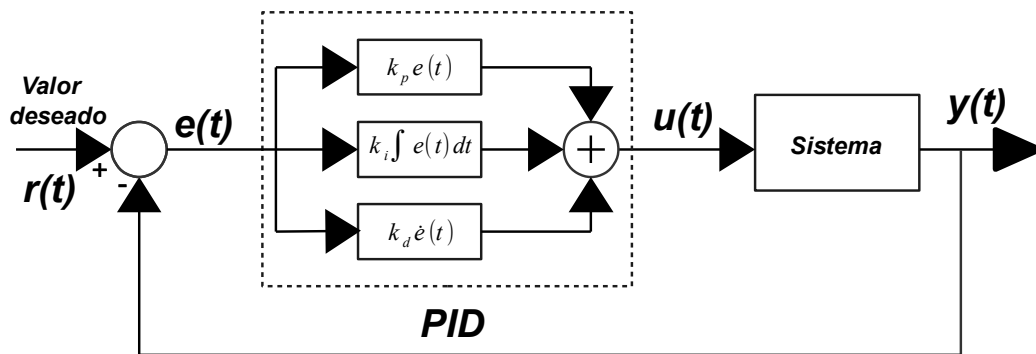


Figura 2.2: Esquema general del control PID.

Cada una de las acciones de control tiene una participación particular en el desempeño que se desea de un sistema, por ello es necesario entender cómo afecta cada una de las acciones de control al comportamiento del sistema.

Acción de control proporcional.

En este caso, si se requiere de una entrada para el sistema $u(t)$ y se tiene un error entre el valor deseado $r(t)$ y la señal de salida $y(t)$, denominado $e(t)$, la acción de control

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

proporcional (o control proporcional) se define como[13]:

$$u(t) = K_p e(t).$$

Al utilizar la representación mediante la función de transferencia, el control proporcional tiene la forma:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p,$$

es decir al realizar una acción de control proporcional se genera un valor constante K_p (denominado ganancia proporcional) el cual es multiplicado por el error y este valor se introduce al sistema como nueva señal de entrada. Se observa que mientras más grande sea el valor del error, mayor será el valor de la señal de control generada por el control proporcional.

Acción de control integral.

En esta acción de control el valor de la señal de error es sumado en un determinado periodo y multiplicado por una constante para generar una señal de control, se representa mediante:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt.$$

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación y obteniendo la función de transferencia, el control integral toma la forma:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}.$$

Con esta acción de control es fácil ver que si el valor de $e(t)$ aumenta, el valor del control integral variará más rápido [9], pero al realizar una suma de la señal de error, esta acción continuará incrementando su valor hasta que el error sea cero.

Acción de control derivativa.

Esta acción de control intenta prevenir una acción que aún no ha ocurrido e indicar cuanto ha cambiado la variable del proceso por unidad de tiempo realizando una acción proporcional de acuerdo a este cambio. También provoca la amplificación de las señales de ruido, en vista de que en la derivada un cambio abrupto crea valores muy grandes

de ésta y se generan efectos no deseados.

Se representa la acción de control mediante:

$$u(t) = K_d \frac{d e(t)}{dt},$$

la función de transferencia de un control derivativo tiene la estructura:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s.$$

2.2.1.1. Combinación de las acciones de control.

Se puede observar que al realizar la suma de cada una de las acciones de control se pueden realizar combinaciones entre ellas. Las combinaciones más comunes bajo el esquema de control PID son:

- **Control proporcional:** este control llevará la salida del sistema a un valor final cercano al valor deseado, pero tendrá un error en estado estable si se es aplicada una señal escalón como referencia.
- **Control proporcional-integral:** con este control se mejora la respuesta en estado estable al aumentar el tipo de sistema *, pero tiene un tiempo de levantamiento y de asentamiento menor.
- **Control proporcional-derivativo:** llamado control PD, tendrá un efecto en estado estable si este valor varía con el tiempo. Es un control de tipo anticipado, puesto que anticipa la dirección del error y mejora la respuesta transitoria con la cual se puede obtener tiempos de levantamiento más pequeños que los del control PI, pero no elimina el error en estado estable de una entrada escalón.
- **Control proporcional-integral-derivativo:** este control mejora tanto el error en estado estable como la respuesta transitoria al combinar las técnicas del control PI (que afecta la estabilidad relativa) y del control PD (que añade amortiguamiento al sistema) [9].

Las funciones de transferencia de cada uno de los controladores mencionados se muestran en la tabla 2.2. Con estas combinaciones se puede seleccionar un controlador

*Un sistema es de tipo n si tiene n polos en el origen.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

que se ajuste a las características de desempeño que se deseen para un sistema en particular.

Este tipo de controladores tienen la ventaja de poder ser implantados en cualquier sistema, mejorando tanto la respuesta transitoria como el error en estado permanente, pero tiene la desventaja de ser susceptibles al ruido, por el efecto de la acción derivativa, o seguir sumando valores de la señal de error en un momento que no es necesario, esto se debe al uso de la acción integral.

Control P	Control PI	Control PD	Control PID
$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$	$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s}$	$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s$	$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$

Tabla 2.2: Funciones de transferencia de las acciones de control.

2.2.2. Diseño de controladores.

Al realizar un controlador se busca que el sistema controlado presente determinadas características en su salida. Estas características dependen de la aplicación que se realiza y sugieren el método mediante el cual se diseña el controlador.

Las características de desempeño más importantes ante una entrada escalón son:

- Tiempo de respuesta: es el tiempo que le toma al sistema en ir del 10 % al 90 % de su valor final [13].
- Tiempo de asentamiento: es el tiempo en que el sistema llega a su valor final [13].
- Tiempo pico: es el instante de tiempo en el que el sistema tiene su valor máximo [13].
- Máximo sobrepaso: es el valor pico máximo que alcanza el sistema, comúnmente se indica en porcentaje [13].
- Error en estado permanente: es la diferencia que presenta el sistema entre el valor deseado y el valor final que presenta el sistema. Para indicar un buen desempeño, este error debe ser $\leq 5\%$ [13].

Existen muchas más características de desempeño (como la robustez o el rechazo a perturbaciones), pero las indicadas son las más utilizadas en sistemas de segundo orden o que su dinámica se aproxime a uno de ellos.

De esta manera el controlador que se diseña rige la dinámica del sistema al cerrar el lazo de realimentación cumpliendo con las características de diseño requeridas.

2.2.2.1. Diseño mediante el lugar geométrico de las raíces (LGR).

Para comprender el diseño de controladores mediante el lugar geométrico de las raíces (LGR) se debe contar con los conceptos de polo y cero de una función de transferencia.

Definición 3 *Se dice que un cero de un sistema es aquel valor (o valores) de s que al ser sustituido en la función de transferencia hace que ésta tome el valor de cero o un valor que tiende hacia él, mientras que el polo de un sistema es un valor (o valores) de s que al ser sustituido en la función de transferencia hace que ésta tome un valor que tiende al infinito [13].*

Es de destacar que en una función de transferencia *existen el mismo número de polos y de ceros*. Con estos conceptos se puede comprender de mejor manera la técnica de diseño mediante LGR.

El lugar geométrico de las raíces es una técnica gráfica en la que se observan los efectos de la variación en la ubicación de los polos en lazo cerrado de un sistema al cambiar un parámetro del mismo. En la mayoría de los casos el parámetro que se varía es el valor de K que es denominada *ganancia de lazo*, la cual afectará el factor de amortiguamiento y el lugar de los polos dominantes*. Para obtener el valor de esta ganancia el método LGR indica una forma de elegir un polo o un cero en lazo abierto, siempre y cuando aquél sea una variable del sistema. Para construir LGR de un sistema en lazo abierto, se deben considerar dos condiciones: **la condición de magnitud y la condición de fase**.

Si se tiene un sistema representado mediante el lazo cerrado de la Fig. 2.3 la función de transferencia de este sistema se puede escribir mediante:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}. \quad (2.16)$$

Al igualar a cero el denominador de esta función se obtiene la *ecuación característica* del sistema en lazo cerrado:

$$1 + KG(s)H(s) = 0,$$

*Se dice que un polo es dominante con respecto a otro, si la parte real del primero se encuentra más cerca del origen que el segundo.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

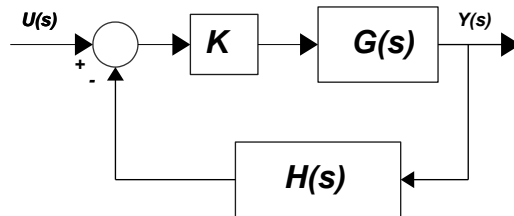


Figura 2.3: Sistema de control en lazo cerrado.

o bien:

$$KG(s)H(s) = -1. \quad (2.17)$$

Al ser $KG(s)H(s)$ una cantidad compleja, la Ec. (2.17) se divide en dos condiciones, igualando las magnitudes y los ángulos de ambos lados de la ecuación como:

$$|KG(s)H(s)| = 1 \quad (2.18)$$

$$\angle KG(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1), \quad \text{donde: } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

donde la Ec. (2.18) es denominada condición de magnitud y la Ec. (2.19) es llamada condición de fase. Al agregar un polo o un cero a la función de transferencia en lazo abierto para cumplir tanto la condición de fase como la condición de magnitud, se tienen algunos efectos que tal vez puedan no ser los esperados.

Al *añadir un polo* el sistema es llevado hacia el origen, lo cual tendría una implicación en la estabilidad relativa del sistema, además de hacer más lento su asentamiento (hay que recordar que un control integral añade un cero en el origen). Si se *añade un cero* al sistema, éste tiende a alejarse del origen, por lo cual la estabilidad relativa aumenta y el asentamiento de se vuelve más rápido (un control derivativo produce este efecto). Finalmente, para conocer si el sistema en lazo cerrado genera un nuevo sistema que sea estable, se utiliza el *criterio de Routh-Hurwitz*, el cual se basa en los valores característicos del denominador de la función de transferencia del sistema. Si se tiene un sistema representado mediante la Ec. (2.16), el polinomio del denominador hace que el sistema sea estable si *todas sus raíces se encuentran del lado izquierdo del plano complejo*, y si esta condición se cumple se dice que dicho polinomio es *Hurwitz*. Para conocer más acerca de la estabilidad de sistemas lineales en tiempo continuo véase [9, 13, 15].

Si se realiza el diseño de un controlador mediante la técnica LGR en tiempo discreto

se deben cumplir con el equivalente para tiempo discreto (ya que z también es un número complejo) de las Ecs. (2.18) y (2.19), las cuales son:

$$|KG(z)H(z)| = 1, \quad (2.20)$$

$$\angle KG(z)H(z) = \pm 180^\circ(2n + 1) \quad \text{donde: } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

De manera similar que en el caso en tiempo continuo el criterio de *Jury* es utilizado para conocer la estabilidad del nuevo sistema en lazo cerrado y si las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia en tiempo discreto se encuentran todas dentro del círculo unitario se dice que el sistema es estable. Para saber más acerca de estabilidad de sistemas lineales en tiempo discreto pueden observarse [4, 14].

Con las Ecs. (2.18) y (2.19), es posible desarrollar cualesquiera de las combinaciones de control (P, PI, PD o PID) que se requiera para lograr el desempeño deseado del sistema que se esté intentando controlar.

2.2.3. Predictor de Smith.

En algunos al introducir una señal de entrada al sistema, se observa algún retraso en su salida; las técnicas de control clásicas presentan algunos inconvenientes al controlar éste tipo de sistemas. Para conseguir un desempeño adecuado se utiliza una técnica especial de control mediante la cual se puede regular el sistema compensando el retraso, esta técnica es conocida como: *predictor de Smith*.

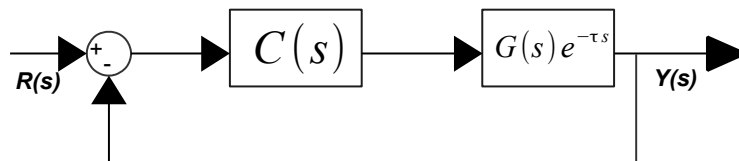


Figura 2.4: Representación de un sistema con retraso.

Si se tiene un sistema como el mostrado en la Fig. 2.4 donde τ es el retraso que sufre el sistema, puede ser controlado mediante un método convencional añadiendo una modificación con un doble lazo de realimentación al controlador $C(s)$, el cual se muestra

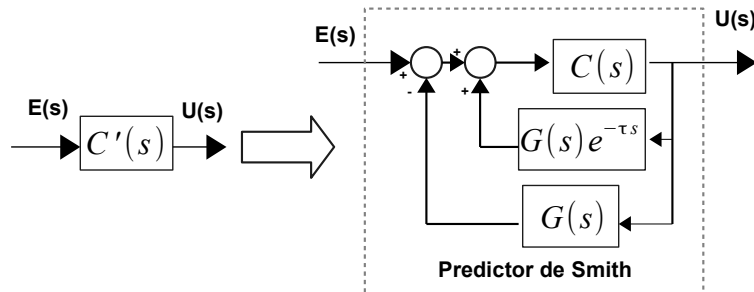


Figura 2.5: Esquema de doble lazo de realimentación utilizado en el predictor de Smith.

en la Fig. 2.5, de forma tal que la nueva función de transferencia del controlador sea:

$$C'(s) = \frac{C(s)}{1 + (1 - e^{-\tau s})G(s)C(s)}. \quad (2.22)$$

Al emplear este controlador, el nuevo sistema realimentado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + G(s)C(s)} e^{-\tau s}, \quad (2.23)$$

se observa que al aplicar el controlador se tiene la misma estructura de un control realimentado convencional añadiendo un retraso al sistema, y con ello se garantiza la misma respuesta transitoria que en un sistema sin retraso.

2.2.4. Sintonización de controladores mediante el método de la curva de reacción.

En muchas ocasiones los controladores diseñados de manera analítica presentan errores (o desviaciones) al regular un sistema. Es usual que el ingeniero en control debe sintonizar el controlador, es decir, debe de lograr que el control lleve al sistema al valor deseado modificando los valores de las ganancias del controlador.

Por otra parte, si se desea realizar un control de manera rápida, sin el modelado del sistema, se puede utilizar la sintonización del controlador para lograr que el sistema tenga la respuesta deseada.

Existen muchos métodos de sintonización para una gran variedad de controladores

(el método de Ziegler-Nichols en lazo cerrado, síntesis directa, el método de Tyreus y Luyben en lazo cerrado, el método en lazo abierto de Cohen y Coon, por nombrar algunos ejemplos), cabe señalar que la mayoría de los controladores son sintonizados manualmente por la experiencia de los operadores con los equipos de un proceso en particular.

En esta sección se explica el método de sintonización mediante la curva de reacción que se utiliza más adelante.

Si se tiene un sistema representado mediante el uso de una función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$ y éste se encuentra operando en lazo abierto en régimen permanente, es decir, el sistema ha llegado al estado estacionario después de haber sido aplicado un escalón a la entrada $u(t) = u_0$ con $y(t) = y_0$. Para realizar la sintonización del controlador mediante la curva de reacción del sistema se utilizan dos pasos:

- 1.- En un tiempo inicial $t = t_0$, se aplica un cambio escalón de forma que $u(t)$ pasa de u_0 a u_f en el rango del 10 % al 20 % del rango de entrada.
- 2.- Se debe adquirir la señal desde momentos antes de t_0 , hasta que $y(t)$ vuelva a encontrarse en régimen permanente.

La forma de la entrada y respuesta del sistema para realizar estos pasos se muestra en la Fig. 2.6.

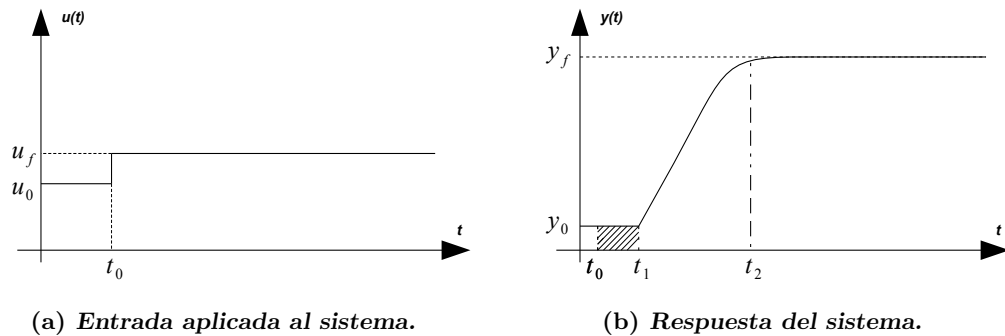


Figura 2.6: Entrada y salida del sistema para realizar la sintonización.

Como se conoce el valor inicial del escalón de entrada y el valor del escalón para provocar la nueva respuesta del sistema, los parámetros de la planta se obtienen mediante:

$$K = \frac{Y_f - Y_0}{u_f - u_0}, \quad \theta = t_1 - t_0, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (2.24)$$

Utilizando los parámetros K , θ y τ , se obtiene los valores para sintonizar un control

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

PID, los parámetros para realizar el control requerido se muestran en la tabla 2.3. Este método tiene como objetivo generar un sistema en lazo cerrado subamortiguamiento de forma que la respuesta transitoria tenga una relación 4:1 entre el primer y el segundo sobrepaso.

—	K_p	T_i	T_D
P	$\tau/K\theta$	—	—
PI	$0.9 \tau/K\theta$	3θ	—
PID	$1.2 \tau/K\theta$	2θ	0.5τ

Tabla 2.3: Parámetros para el controlador mediante el método de la curva de reacción.

Este método tiene algunas ventajas como no llevar a la planta hasta la oscilación y que con una entrada escalón se obtiene todos los parámetros; en contraparte una desventaja es que es muy sensible a los cambios de θ/τ , dado que un ligero cambio en esta relación genera grandes cambios en los parámetros del controlador.

2.2.5. Regulador óptimo lineal (LQR).

En el caso en que se requiera el comportamiento de todas las variables que definen la dinámica del sistema, y no solo información de una entrada y una salida, se utiliza el modelo en variables de estado para diseñar controladores para lograr el desempeño requerido.

2.2.5.1. Control mediante realimentación de estados.

Si se tiene el modelo de un sistema representado mediante la Ec. (2.9) con n estados; se dice que el sistema es controlable (es decir se puede diseñar un controlador basado en su representación mediante variables de estado) si la Ec. (2.25) es de rango n . A esta matriz se le denomina *matriz de controlabilidad*.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} A & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Por otra parte, en caso de que no se pueda tener acceso a todos los valores de los estados del sistema, si la Ec. (2.26) es rango completo, se dice que el sistema es *observable* y la matriz es llamada *matriz de observabilidad*. Esto indica que se puede desarrollar un *observador* mediante el cual se logrará reconstruir los valores de las variables de estado

a las cuales no se puede tener acceso.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Con estos conceptos se puede iniciar el análisis y diseño de controladores basados en la representación de variables de estado.

El sistema representado por la Ec. (2.9), en la cual no se toma en cuenta la matriz de transmisión directa, tiene un punto de equilibrio (X, U) que satisface:

$$\begin{aligned} AX + BU &= 0, \\ Y &= CX. \end{aligned}$$

Se define la traslación del sistema como:

$$\bar{x} = x - X, \quad \bar{u} = u - U, \quad \bar{y} = y - Y,$$

con esta traslación, la dinámica del sistema está dada por:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}.$$

En caso de que el sistema sea controlable, se puede diseñar un control lineal por realimentación de estados definido como:

$$U = -Kx(t) + r(t).$$

El esquema de este tipo de control se muestra en la Fig. 2.7.

Al realimentar el sistema y sustituyendo el valor de U , se obtiene:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t), \quad (2.27)$$

como se observa en la ecuación (2.27) el sistema tiene una nueva dinámica definida por la matriz $(A - BK)$ con la cual posible asignar los polos de forma arbitraria para

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

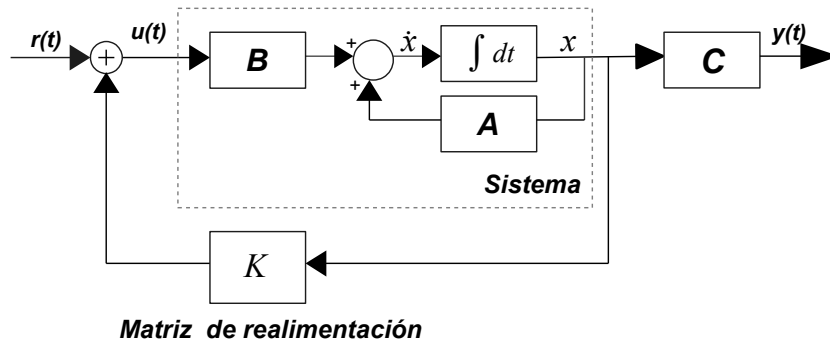


Figura 2.7: Esquema del control por realimentación de estados.

obtener el comportamiento deseado, y la entrada $r(t)$ permite modificar el estado de equilibrio al cual converge el sistema.

El objetivo es diseñar $\bar{u} = -K\bar{x}$ con los valores de los polos deseados para obtener la dinámica requerida. El controlador será entonces:

$$u = \bar{u} + U = -K\bar{x} + U,$$

$$u(t) = -Kx + \underbrace{KX + U}_{r(t)},$$

finalmente:

$$u(t) = -Kx(t) + r(t), \quad (2.28)$$

$$r(t) = KX + U.$$

Con la Ec. (2.28) se diseña un control por asignación de polos para regulación del sistema.

2.2.5.2. Control LQR

En muchos casos un sistema de control, diseñado mediante asignación de polos, se encuentra realizando un gasto de energía importante para obtener la respuesta deseada (es decir las señales generadas por el controlador son muy grandes). Para minimizar este problema se busca optimizar la respuesta del sistema con relación a este gasto energético, mediante *el diseño basado en optimización o control óptimo*. Este tipo de

control debe satisfacer un criterio de optimización en su diseño; el criterio es una función escalar positiva definida que depende en forma cuadrática de los estados del sistema, de las entradas y de la diferencia entre el valor actual y el valor deseado del estado, esta función es denominada *función de costo cuadrática* y tiene la forma:

$$J(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{x}(t_i)) = \int_0^\infty [\bar{x}^T(t)Q\bar{x}(t) + \bar{u}^T(t)R\bar{u}(t) + \bar{x}^T(t_i)M\bar{x}(t_i)] dt,$$

donde:

- $\bar{x}^T Q \bar{x}$: energía del error.
- $\bar{u}^T R \bar{u}$: energía de la entrada.
- $\bar{x}^T(t_i) M \bar{x}(t_i)$: error cuadrático de llegada.

Q , R y M son matrices positivas (semi) definidas cuyos valores indican la energía de cada variable dentro de la función de costo.

Para realizar el diseño del control óptimo con horizonte de tiempo infinito, se define un control como el de la Ec. (2.28), tal que satisfaga la siguiente ecuación:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \int_0^\infty (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt. \quad (2.29)$$

Se observa que el término $\bar{x}^T(t_i)M\bar{x}(t_i)$ no aparece en la función de costo de la Ec. (2.29), considerando que la diferencia entre el valor deseado y el valor de los estados sea cero ($e = 0$) cuando el tiempo tiende a infinito. Con el fin de obtener el diseño requerido, se definen las matrices Q y R como:

$$Q \geq 0, \quad R > 0, \quad (2.30)$$

después se resuelve la ecuación algebraica de Riccati para P :

$$A^T P + P A + Q + P B R^{-1} B^T P = 0, \quad (2.31)$$

y por último se obtiene la matriz de ganancias K para obtener el desempeño deseado

$$K = R^{-1} B^T P. \quad (2.32)$$

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

Con estos valores de K , la matriz $(A - BK)$ siempre resulta estable.

Este tipo de controlador es muy útil cuando se desea obtener un desempeño determinado utilizando un gasto de energía que es propuesto por el diseñador, pero a su vez este gasto de energía optimizado puede hacer que el sistema converja de manera más lenta al valor deseado. El esquema de este control se muestra en la Fig. 2.8. Cabe señalar que el control lleva al sistema al origen a donde fue trasladado en el proceso de linealización.

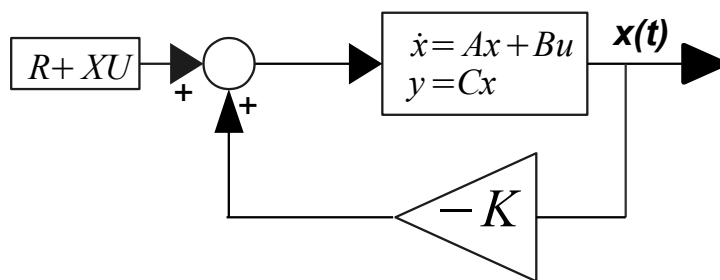


Figura 2.8: Esquema de control óptimo.

2.2.6. Control de equivalencia cierta.

En muchas ocasiones el modelo del sistema que se obtiene describe el comportamiento dinámico del sistema de forma que se puede llevar a cabo la “cancelación” de este modelo y mediante un nuevo controlador hacer que el sistema tenga una dinámica impuesta; este tipo de control se le denomina *Control de equivalencia cierta* (o *control de equivalencia*).

En el caso de un sistema en tiempo discreto, que describe su dinámica mediante la ecuación en diferencias:

$$y[k + 1] = f \left[y[k], y[k - 1], \dots, y[k - n] \right] + g \left[y[k], y[k - 1], \dots, y[k - n] \right] u[k] \quad (2.33)$$

con $y[k]$ la salida, y $u[k]$ la entrada, al definir las funciones:

$$\begin{aligned} f \left[y[k], y[k - 1], \dots, y[k - n] \right] &= f[\bar{y}], \\ g \left[y[k], y[k - 1], \dots, y[k - n] \right] &= g[\bar{y}], \end{aligned}$$

y para garantizar que el sistema es controlable debe cumplirse que:

$$g[\bar{y}] > 0, \exists g^{-1}[\bar{y}]$$

Si se conocen perfectamente las funciones $f[\bar{y}]$ y $g[\bar{y}]$, el control de equivalencia cierta para el sistema de la Ec. (2.33) está definido mediante:

$$u[k] = \frac{1}{g[\bar{y}]} \left(-f[\bar{y}] + v \right),$$

con $f[y]$ la dinámica del sistema, al restarla se obtiene la anulación de esta dinámica con el modelo del sistema. Por otra parte $g[y]$ representa la dinámica que tiene la señal de entrada, al realizar la división entre esta dinámica se logra que la nueva entrada al sistema solamente dependa del valor del control v .

Construyendo al control v como:

$$v = y[k]_d - K_1 e[k-1] - K_2 e[k-2] - \dots - K_n e[k-n],$$

donde: $y[k]_d$ es la dinámica deseada y $e[k] = y[k] - y[k]_d$ es el error de seguimiento.

El sistema en lazo cerrado utilizando el control v es:

$$y[k] = y[k]_d - K_1 e[k-1] - K_2 e[k-2] - \dots - K_n e[k-n]$$

si las raíces del polinomio

$$1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2} + \dots + K_n z^{-n} = 0, \quad (2.34)$$

se encuentran dentro del círculo unitario, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0.$$

El objetivo es obtener los valores de K_1, K_2, \dots, K_n tal que el sistema se comporte de la manera deseada.

Aunque este control impone un nuevo comportamiento al sistema tiene la desventaja de utilizar el modelo del sistema y depender del conocimiento exacto de la planta en la práctica generalmente no es posible, porque si no se tiene una representación adecuada,

al realizar la cancelación del modelo en el diseño del controlador no se podrá cancelar la dinámica del sistema y el control no impondrá la nueva dinámica de la manera deseada.

2.2.7. Control difuso.

En muchas aplicaciones industriales al no contar con un modelo que describa el comportamiento de un proceso, sea por la complejidad de éste o porque presenta cambios inesperados en su comportamiento, el proceso es controlado de manera manual por operadores con experiencia en el proceso. Cuando se desea diseñar un controlador para un proceso con estas características se utilizan los denominados *controladores difusos*. Este tipo de controladores utilizan el conocimiento del experto en el proceso y mediante este conocimiento el control toma la decisión requerida para obtener el resultado deseado.

2.2.7.1. Lógica difusa, conjuntos difusos y agregación.

Para comprender el funcionamiento del control difuso, es necesario el conocimiento de *lógica difusa*. Esta lógica considera que existen muchos más valores posibles que verdadero y falso, estos valores indican que tanto *pertenece o no pertenece** un valor a un conjunto determinado. Este tipo de lógica permite modelar el comportamiento de un fenómeno al contar con la información que lo describe.

En lógica difusa la pertenencia de un determinado valor es representada por un número real, el cual es obtenido mediante una *función de membresía (o pertenencia)* con la que se conoce si ese valor tiene una pertenencia total o parcial a un conjunto determinado. De forma matemática el grado de pertenencia de un elemento \mathbf{x} a un conjunto \mathbf{X} se puede describir como:

$$\mu = \{ \bar{\mu} \in \mathfrak{R} \mid \bar{\mu} \in [0, 1] \},$$

esto quiere decir que entre más cercano sea el valor de μ a cero, \mathbf{x} pertenece en menor grado a \mathbf{X} e inversamente cuando el grado de pertenencia está cercano a la unidad [6].

Algunos ejemplos de funciones de membresía, con las que se puede describir un conjunto difuso, se muestran en la tabla 2.4.

Un caso particular de conjunto difuso es el denominado conjunto *Singleton*, en el cual el valor de la sentencia es completamente cierto y no permite ningún tipo de ambigüedad, este caso se muestra en la Fig. 2.9.

*En el caso del álgebra de Boole la pertenencia es absoluta o no lo es.

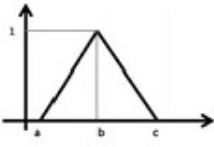

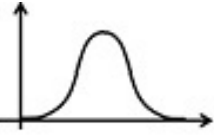
Nombre	Representación	Función
Triangular		$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-c}, & x \in [a, b] \\ -\frac{x-b}{b-c}, & x \in [b, c] \\ 0, & x > c \end{cases}$
Sigmoide		$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & x \in (a, b) \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & x \in (b, c) \\ 1, & x > c \end{cases}$
Gaussiana		$f(x) = e^{-\sigma^2(x-\mu)^2}$

Tabla 2.4: Ejemplos de algunas funciones de membresía.

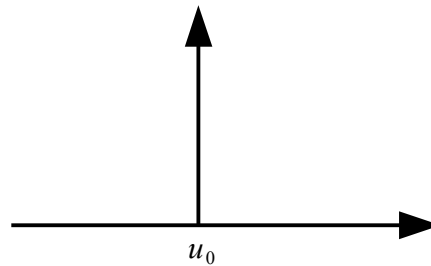


Figura 2.9: Conjunto difuso Singleton.

Entre los conjuntos difusos pueden llevarse diferentes tipos de operaciones (las cuales son muy similares a las de la lógica convencional), entre las más usuales se tiene:

Negación (not): Si se tiene un conjunto A , la negación de este son aquellos valores que no pertenecen a él. Se simboliza mediante $\neg A(x) = 1 - A(x)$.

Conjunción (and): Si se tiene un conjunto A y un conjunto B , la conjunción de A y B es el conjunto de elementos que son comunes a ambos. Se simboliza como $A \wedge B$.

Disyunción (or): Si se tiene un conjunto A y un conjunto B , la disyunción de los conjuntos A y B son el conjunto de elementos de ambos. Se simboliza por $A \vee B$.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

De esta forma se puede decir que el sentido práctico de la lógica difusa es el de dar una interpretación matemática a las sentencias que se realizan en lenguaje usual con la finalidad de cuantificar el conocimiento que se tiene de un proceso determinado. De forma general en lógica difusa se utilizan sentencias del tipo *condición* \rightarrow *acción* (antecedente \rightarrow consecuente), conocidas también como sentencias *Si... entonces...* (un ejemplo de este tipo de sentencia sería: en un pase de fútbol americano *si* el receptor está a más de veinte yardas, *entonces* se aplica la mayor fuerza al balón).

Con estos conceptos básicos se puede entender la estructura general de un sistema difuso, esta estructura se muestra en la Fig. 2.10.

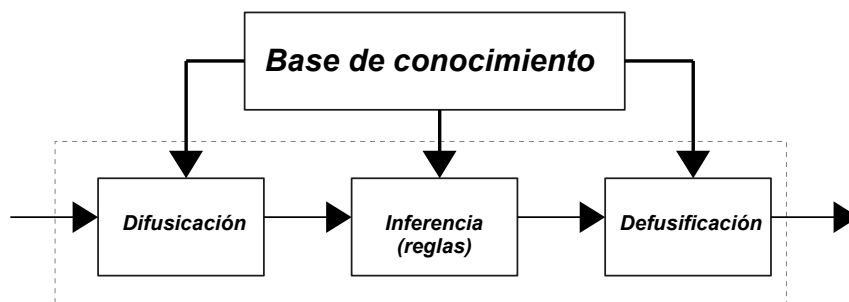


Figura 2.10: Estructura general de un sistema difuso.

Se aprecian cuatro componentes, cada uno de ellos es:

- **Base de Conocimiento:** Es el conocimiento que se tiene del comportamiento del sistema, se puede obtener de la reglas físicas que describen al sistema y del conocimiento empírico del experto.
- **Difusificación:** Es la conexión entre las entradas reales del sistema y su conversión a entradas difusas, es decir, es el mapeo necesario para que las entradas puedan ser interpretadas por el mecanismo de inferencia.
- **Inferencia:** Son las reglas que dictan la acción que se debe tomar, basada en el conocimiento del experto el cual ayuda a generar las sentencias *si... entonces...*
- **Defusificación:** Toma el valor difuso obtenido de las reglas y realiza una conversión generando un valor de salida que pueda ser interpretado por el sistema.

Al tener el conocimiento de cómo se activan cada una de las reglas, se realiza la

agregación* de éstas. Se pueden distinguir dos grandes grupos para realizar la agregación: los sistemas tipo Mamdani y los sistemas tipo Takagi-Sugeno cada uno con un tipo de agregación distinto.

Los sistemas tipo *Mamdani* se basan en reglas de la forma:

$$R_i : \text{Si } x_1 \text{ es } A_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } x_{in} \text{ entonces } y \text{ es } B,$$

en donde los conjuntos A y B son difusos.

En este caso, se utilizan diferentes métodos de agregación (como el centroide, el centro del área, método del valor máximo entre otros) los cuales se pueden revisar en [12].

Para los sistemas tipo *Takagi-Sugeno* las reglas tienen la forma:

$$R_i : \text{Si } x_1 \text{ es } A_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } x_{in} \text{ entonces } y = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Éstos sistemas consideran funciones en la parte consecuente de las reglas difusas, que permiten realizar la agregación mediante:

$$\varphi = \frac{R_i}{\sum R_i},$$
$$y = \sum_i \varphi_i f_i,$$

que es un promedio ponderado y permite diseñar controladores difusos que convierten un estrategia de control lingüística (que está basada en el comportamiento del experto) en una estrategia de control automático. Este control presenta las ventajas de poder controlar sistemas muy complejos sin la obtención de un modelo y poder ser evaluados en una gran cantidad de valores de salida, pero tiene la desventaja de ser más costoso en un desarrollo, además presenta poca flexibilidad si se requiere cambia alguna de las reglas o funciones de membresía.

2.2.8. Control adaptable.

En la mayoría de las ocasiones los parámetros con los cuales se describe el comportamiento de un sistema cambian con el paso del tiempo, esto afecta el desempeño del controlador diseñado, por lo cual hay que realizar modificaciones al mismo. Para evitar estas situaciones existen controles que se pueden *adaptar* a dichos cambios, evi-

*Es la activación de la parte consecuente de las reglas.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

tando modificaciones mayores o un rediseño por completo del controlador, estos son denominados *controladores adaptables*.

El control adaptable son un conjunto de técnicas que proporcionan un enfoque sistemático para el ajuste automático de los controladores en tiempo real, con el fin de lograr o mantener un nivel deseado de rendimiento del sistema de control cuando los parámetros de la planta (modelo dinámico) son desconocidos y/o cambian en el tiempo [10].

Si los cambios en los parámetros del modelo del sistema cambian de una manera muy lenta, el control adaptable utiliza éstos cambios para lograr y mantener un desempeño aceptable del controlador. Para conseguirlo se diseña un controlador el cual no toma en cuenta los cambios de los parámetros, pero se ajusta de manera automática usando un mecanismo que se adapta a los cambios de éstos afectando los valores que tiene el controlador y el desempeño requerido. La forma general del control adaptable se muestra en la Fig. 2.11.

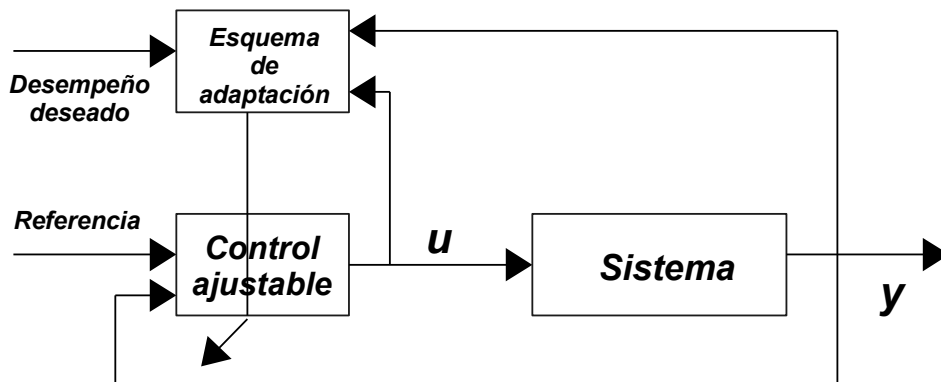


Figura 2.11: Estructura general del control adaptable.

Para realizar un controlador es necesario el conocimiento de la planta y el desempeño que se requiere, con esto se realiza el diseño del control y su sintonización (en caso de ser necesario), por otra parte un control adaptable puede verse como una implementación igual a la anterior pero con ajustes en tiempo real, ya que la sintonización de aquél se hace utilizando los datos actuales de los parámetros del sistema. Para comprender de una mejor manera el control adaptable se describe el esquema mostrado en la Fig. 2.12.

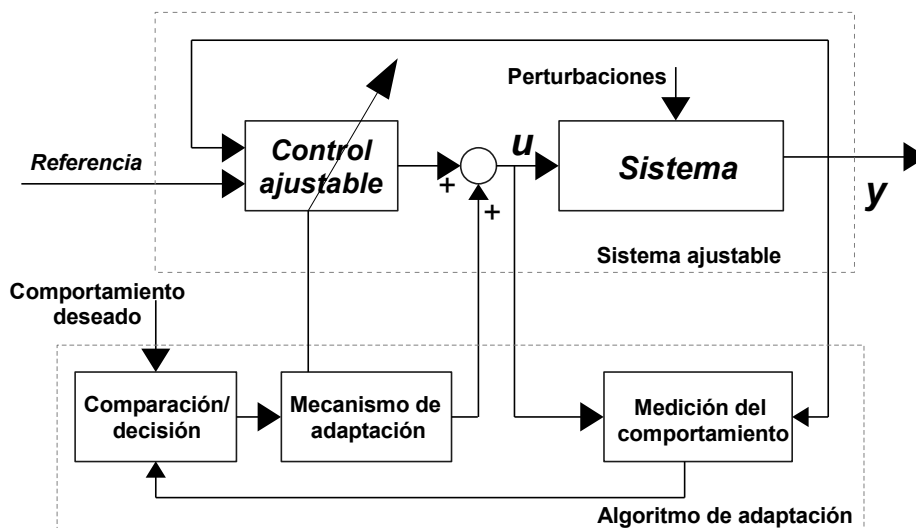


Figura 2.12: Estructura interna de un control adaptable.

Este esquema cuenta con dos bloques principales que son el *Algoritmo de adaptación* y el *sistema ajustable*.

El algoritmo de adaptación cuenta con los elementos:

- **Comparación/decisión:** en el cual se compara la medición tomada con el desempeño que se desea y se decide la acción que debe tomar el mecanismo de adaptación.
- **Mecanismo de adaptación:** éste es el mecanismo que se encarga de realizar los cambios en los parámetros del controlador para obtener el comportamiento deseado y ayuda a compensar la señal de control.
- **Medición del comportamiento:** realiza la medición de la señal de control y del valor de salida del sistema para, dependiendo de sus valores, realizar la toma de decisiones adecuada mediante el mecanismo de adaptación.

Mientras que el sistema ajustable se compone de:

- **Control ajustable:** genera una señal de control a partir del valor de referencia. Sus parámetros son ajustados mediante el algoritmo de adaptación para obtener el desempeño deseado del sistema.

- **Sistema:** es el proceso que se desea controlar, el cual se encuentra representado mediante un modelo.

El diseño adecuado de un control adaptable requiere dos componentes principales: el control ajustable (el cual es un control por linealización) y el algoritmo de adaptación (con el cual se estimará el cambio en los parámetros del sistema). A continuación se describen ambos componentes.

Este tipo de controladores tienen la ventaja de poder ajustarse a cambios de parámetros en los sistemas, siempre que estos cambios sean considerados en el diseño, pero éstos deben ser lentos para que el desempeño del controlador sea el adecuado.

2.2.8.1. Control por linealización exacta.

Los controladores no lineales tienen como objetivo obtener el desempeño deseado de un sistema con características no lineales, aquéllos cuentan con diversos métodos mediante los que se controla el sistema.

Una gran ventaja es que en la mayoría de los casos se cuenta con un modelo que especifica el comportamiento del sistema, pero este modelo debe cumplir con ciertas propiedades para lograr una “cancelación” de las dinámicas no lineales y así diseñar el control no lineal que se desea. Para comprender esto, se analiza el esquema de linealización por realimentación.

Se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u, \\ y(t) &= m(x).\end{aligned}\tag{2.35}$$

La idea general del control linealizante mediante realimentación de estados es convertir un sistema representado por la Ec. (2.35) en un sistema controlable mediante representación de estados realizando la cancelación de las no linealidades mediante una ecuación de estado con la estructura:

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)],\tag{2.36}$$

en donde:

- A es una matriz de $n \times n$.

- B es una matriz de $n \times p$.
- α : es una función que va de $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$.
- γ : es una función $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{p \times p}$ y su matriz debe ser no singular.
- El par (A, B) debe ser controlable.

Este sistema se linealiza mediante la realimentación de estado de la Ec. (2.37):

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (2.37)$$

con $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ con lo que se obtiene el sistema linealizado:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (2.38)$$

para lograr estabilizar el sistema, $v = -Kx$ y la matriz $A - BK$ debe ser Hurwitz*. Finalmente, el control no lineal por realimentación de estados tiene la estructura:

$$u = \alpha(x) - \beta(x)Kx. \quad (2.39)$$

Se aprecia que para cancelar la no linealidad $\alpha(x)$ por medio de una resta el control u y la no linealidad deben aparecer siempre juntos como una suma, y para cancelar el término $\gamma(x)$ éste y el control deben aparecer como un producto. Además, si la matriz de la función $\gamma(x)$ es no singular, en el dominio de interés, entonces puede ser cancelado mediante $u = \beta(x)$ [20].

Existen dos formas de obtener un control por linealización, una de ellas es utilizar realimentación de entrada-salida y la otra mediante realimentación de entrada-estado.

Control por linealización por realimentación de entrada-salida.

Para este tipo de control se considera el sistema descrito por la Ec. (2.35), se busca establecer una única ecuación diferencial no lineal con orden igual al grado relativo ρ :

$$\frac{d^\rho y(t)}{dt^\rho} = \frac{1}{\phi(w)}(\psi(w) + u).$$

*Es decir que tiene valores característicos con parte real negativa.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

Esto se logra realizando el cálculo de las derivadas de la salida y en forma creciente y se define el grado relativo como el número de la salida en la cual aparece la entrada u en forma explícita, para lograr esto se debe cumplir con:

$$\dot{y}(x) = \frac{\partial m(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial m(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u]. \quad (2.40)$$

En esta ecuación se define a la *derivada de Lie* como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x)}{\partial x} f(x) &= L_f m(x), \\ \frac{\partial m(x)}{\partial x} g(x) &= L_g m(x). \end{aligned}$$

Por esto la Ec. (2.40) tiene la forma:

$$\dot{y}(x) = \frac{\partial m(x)}{\partial x} \dot{x} = L_f m(x) + L_g m(x)u.$$

Para conseguir un control linealizante por realimentación de estados, se obtienen las derivadas de Lie mientras $L_g L_f^r m(x) = 0$, en el número de la $r + 1$ derivada donde la ecuación es diferente de cero, se obtiene el modelo representado mediante [8]:

$$\frac{d^{r+1} y(x)}{dt^{r+1}} = L_f m(x) + L_g L_f^r m(x)u.$$

Al conocer los parámetros y las funciones del sistema, se puede cancelar la dinámica $L_f m(x)$ y $L_g L_f^r m(x)$ con lo cual se propone el control ideal:

$$u^*(x) = \frac{1}{L_g L_f^r m(x)} \left(-L_f^{r-1} m(x) + v \right), \quad (2.41)$$

con un nuevo control v , el cual permite diseñar un control lineal de la forma:

$$\frac{d^{r+1} y}{dt^{r+1}} = v,$$

este nuevo control se define mediante:

$$v = -k_r \frac{d^r y}{dt^r} - k_{r-1} \frac{d^{r-1} y}{dt^{r-1}} - \dots - k_3 \frac{d^2 y}{dt^2} - k_2 \frac{dy}{dt} - k_1 y(t) + k_1 r(t),$$

si el polinomio $P(s) = s^{r+1} + k_{r-1}s^r + \dots + k_3s^2 + k_2s + k_1$ es estable, entonces se garantiza que la salida converge al valor deseado de referencia.

Control por linealización por realimentación de entrada-estado.

En este caso, se considera un sistema no lineal descrito mediante la estructura:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.42)$$

este sistema es linealizable de la forma entrada-estado si existe una transformación $Z = T(x)$ denominada *difeomorfismo* [8] tal que el sistema toma la forma:

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad (2.43)$$

con el par (A, B) controlable y $\gamma(x)$ no singular.

La transformación debe cumplir con:

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + g(x)u],$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} f(x) &= AT(x) - B\gamma^{-1}(x)\alpha(x), \\ \frac{\partial T}{\partial x} g(x) &= B\gamma^{-1}(x), \end{aligned}$$

con estas condiciones y para obtener la representación del sistema en la nuevas coordenadas, se toma: $\alpha_0 = \alpha(T^{-1}(z))$, $\gamma_0 = \gamma(T^{-1}(z))$, con lo cual el sistema de la Ec. (2.42) se convierte en:

$$\dot{z} = Az + B\gamma_0(x)[u - \alpha_0(x)].$$

Esta transformación se utiliza para los estados, mientras que para la entrada se usa la transformación $u = u(x, v)$, con lo cual se logra cambiar la dinámica no lineal en una forma lineal e invariante con el tiempo con la estructura:

$$z = Az + Bv. \quad (2.44)$$

El objetivo es diseñar el control v para obtener la dinámica requerida, para ello se

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

obtiene una forma por componentes del sistema de la Ec. (2.44) el cual es equivalente a $z_1^n = v$. Por último, para obtener el controlador se utiliza una técnica de control de estados donde se diseñará v de forma tal que al reubicar los polos se tenga la forma:

$$v = u - Kz = u - k_0z_1 - k_1z_2 - \cdots - k_{n-1}z_n.$$

Estas técnicas de control no lineal son útiles para diseñar el control ajustable.

2.2.8.2. Algoritmo adaptable.

Existen muchas y muy diversas técnicas mediante las cuales es posible realizar un algoritmo adaptable, uno de los esquemas utilizados es *el algoritmo adaptable pasivo*. El algoritmo pasivo que se presenta es el *algoritmo adaptable pasivo PI*, aunque existen muchos más (como el algoritmo gradiente, el algoritmo promediador, entre otros) este es el algoritmo que se aplica en el desarrollo de este trabajo.

En este caso, se tiene un sistema representado mediante:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= m(x).\end{aligned}$$

Se dice que este sistema es pasivo*, si existe una función continua positiva semidefinida $V(x)$ tal que cumpla con la condición:

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u).$$

Por otra parte, el esquema mediante el cual se explica algoritmo pasivo adaptable PI [5], se muestra en la Fig. 2.13. Este esquema propone una estimación generalizada de la variable $\hat{\theta}$, la cual se descompone de la forma:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_I(t) + \hat{\theta}_P(s), \quad (2.45)$$

donde:

- $\hat{\theta}_I(t)$: la estimación de la dinámica del error.
- $\hat{\theta}_P(s)$: la interacción del error de seguimiento.

*Que el sistema no genera energía por si mismo.

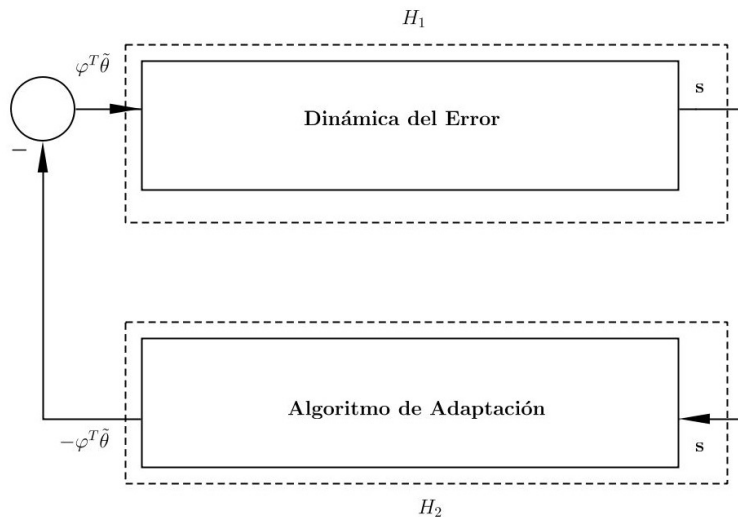


Figura 2.13: Estructura de unificación de los algoritmos adaptables pasivos.

Al introducir la interacción entre error de seguimiento s y la estimación de la dinámica del error, se define al parámetro del error:

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_I + \tilde{\theta}_P,$$

con:

$$\tilde{\theta}_I = \hat{\theta}_I - \theta, \quad \tilde{\theta}_P = \hat{\theta}_P.$$

Para caracterizar esta ley de adaptación se considera un algoritmo adaptable que satisfaga:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_I &= -\delta Z(t)\tilde{\theta}_I(t) - \gamma_1 P(t)\varphi s, \\ -\gamma_1 \tilde{\theta}_P^T(s)\varphi s &\geq \frac{1}{2} \tilde{\theta}_I^T \frac{dP(t)^{-1}}{dt} \tilde{\theta}_I, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde:

- $Z(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$; $Z(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$.
- $P(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$; $P(t) > 0$, para todo $t \geq 0$.
- Las constantes δ y γ_1 son estrictamente positivas.

Si se cumplen estas condiciones, se garantiza que el algoritmo es pasivo desde

$$s \rightarrow -\varphi^T \tilde{\theta},$$

y se garantiza que el algoritmo se adapta de manera adecuada a los cambios del parámetro para el que fue diseñado. La demostración se encuentra en [5]. Además, el algoritmo debe ser estable, para ello se utilizan los conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov que se presentan a continuación.

Estabilidad en el sentido de Lyapunov (ESL).

Para conocer la estabilidad del sistema en lazo cerrado de este algoritmo se utilizan los conceptos de *estabilidad en el sentido de Lyapunov*. Este tipo de estabilidad busca describir la dinámica de un sistema con muchas variables en torno a un punto de operación, utilizando para ello funciones que describan el comportamiento de las trayectorias del sistema cuando $t \geq 0$, las cuales son denominadas funciones candidatas de Lyapunov y se puede describir con base en la "distancia" que existe entre el origen y su trayectoria con $x_0 = 0$, pero acotada en el espacio de estados. En general, se pueden describir las propiedades de estabilidad del origen ($x = 0$) en tres condiciones distintas, en estas condiciones se puede decir que el origen es:

- Estable en el sentido de Lyapunov (E.S.L.).
- Asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov (A.E.S.L.).
- Inestable en el sentido de Lyapunov.

La estabilidad en sentido de Lyapunov puede comprenderse como sigue:

Si se tiene una función candidata de Lyapunov

$$V(x),$$

positiva definida, $\dot{V}(x) \leq 0$ y $\frac{\partial V}{\partial x}$ es continua en una vecindad del origen, entonces la función puede ser llamada: *Función de Lyapunov*.

Ahora, si estas condiciones logran cumplirse, se define la *estabilidad en el sentido de Lyapunov* mediante el siguiente teorema:

Teorema 1 Si un sistema $\dot{x} = f(x, t)$ tiene una función candidata de Lyapunov $V(x)$, entonces el origen $X = 0$ es E.S.L.

Además, si \dot{V} es (localmente) negativa definida, entonces el origen $X = 0$ es A.E.S.L.

Este teorema no implica que si no se encuentra una función de Lyapunov, entonces el origen sea inestable. Para más referencias sobre la estabilidad en el sentido de Lyapunov véase [8, 20].

Para conocer la estabilidad del algoritmo pasivo PI descrito, es necesario asumir que el algoritmo es pasivo desde $s \rightarrow -\varphi^T \tilde{\theta}$ y debe satisfacer la siguiente definición *:

$$-\int_0^T s\varphi^T \tilde{\theta} dt \geq -\beta, \quad \forall T \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Además, se asume que $\tilde{\theta} \in L_\infty$, $s \in L_2$, $e \in L_2 \cap L_\infty$, $\dot{e} \in L_2$; por lo cual: $e \rightarrow 0$, $\dot{e} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Si se considera una función $V(s, \tilde{\theta})$ cuya derivada con respecto al tiempo tenga la forma:

$$\dot{V}(s, \tilde{\theta}) = -k_s s^2, \quad (2.47)$$

y cumpla con la condición de ser *negativa semidefinida*, ésta cumplirá con las suposiciones: $s \in L_2$, $\tilde{\theta} \in L_\infty$, entonces $\dot{s} \in L_\infty$, por lo cual $e, \dot{e} \rightarrow 0$ de manera asintótica.

2.3. Identificación de Sistemas.

Los controladores hasta ahora presentados basan su diseño en un modelo que describe el comportamiento del sistema que se desea controlar. Sin embargo, cuando no se cuenta con un modelo (por que es muy complejo y complicado de deducir) es posible obtenerlo o aproximarlos mediante distintas técnicas que se denominan *identificación de sistemas*.

Estos procedimientos intentan aproximar el modelo, y/o los parámetros, del sistema a partir del conocimiento de los valores de las señales de entrada y salida del mismo. La idea es reconstruir un modelo mediante una función de transferencia que ayude a aproximar su dinámica.

*La demostración de estabilidad de este algoritmo se encuentra de manera completa en [5].

2.3.1. Identificación de sistemas de segundo orden.

En el caso de necesitar una representación de un sistema de segundo orden, se pueden usar dos métodos: el método de la pendiente y el método de Smith [1], siempre que el sistema sea sobreamortiguado.

Si la respuesta del sistema presenta la estructura:

$$y(t) = KU(1 - C_1 e^{-\frac{t}{\alpha_1}} - C_2 e^{-\frac{t}{\alpha_2}}), \quad (2.48)$$

cuya función de transferencia se encuentra representada por:

$$G(s) = \frac{K}{(\alpha_1 s + 1)(\alpha_2 s + 1)},$$

se puede aproximar mediante un sistema de primer orden con retraso, usando una función de transferencia nueva descrita mediante:

$$G'(s) \simeq \frac{K'}{(\alpha s + 1)} e^{-\tau s}. \quad (2.49)$$

El método de la pendiente utiliza una respuesta como la mostrada en la Fig. 2.14. El valor de K' se calcula mediante:

$$K' = \frac{Y}{U}, \quad (2.50)$$

y los valores de τ y α se obtienen de la gráfica.

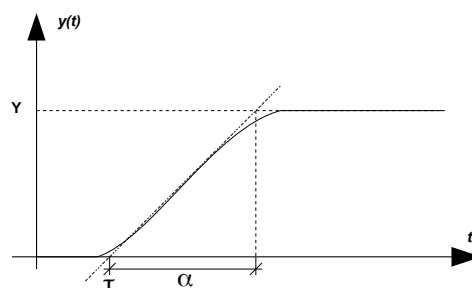


Figura 2.14: Método de la pendiente.

En el método de Smith, el cual es un método más preciso, el cálculo de K' se hace

con la Ec. (2.50) y se calculan los valores de τ y α mediante:

$$\alpha = \frac{3}{2}(t_2 - t_1), \quad \tau = t_2 - \alpha. \quad (2.51)$$

La forma de la respuesta para aproximar un sistema mediante el método de Smith se muestra en la Fig. 2.15.

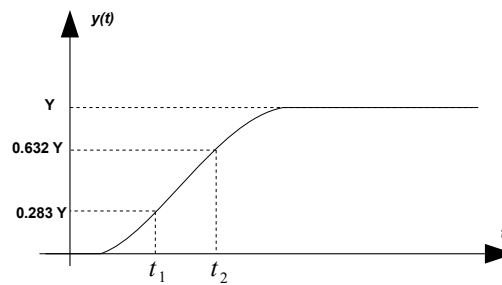


Figura 2.15: Método de Smith.

Estos métodos se utilizan para sistemas que se describen en tiempo continuo, para sistemas descritos en tiempo discreto, se utiliza otro tipo de estructuras.

2.3.2. Identificación paramétrica de sistemas en tiempo discreto.

En tiempo discreto si la representación mediante función transferencia de un sistema, con algunos o todos sus parámetros desconocidos, se aproxima mediante el uso de la identificación paramétrica. El caso más general de un sistema en tiempo discreto representado mediante una ecuación en diferencias, obedece a una estructura de la forma:

$$y[k] = a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \dots + a_n y[k-n] + b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m] + e[k],$$

con $e[k]$ una señal de error de aproximación de dinámicas no modeladas. Con la función de transferencia:

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}} U(z) + \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}} E(z),$$

La ecuación a resolver tiene la forma:

$$Y = \phi \hat{\theta},$$

donde:

- Y : es el vector de salida,
- ϕ : es denominado *regresor*,
- $\hat{\theta}$: es el vector de parámetros,

que tienen la forma:

$$Y = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix},$$

$$\phi = \begin{bmatrix} y[-1] & y[-2] & \dots & y[-n] & u[0] & \dots & u[-m] \\ y[0] & y[-1] & \dots & y[-n+1] & u[1] & \dots & u[-m+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[N-2] & y[N-3] & \dots & y[N-n] & u[N-1] & \dots & u[N-m] \end{bmatrix},$$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m]^T.$$

Uno de los algoritmos más utilizados para obtener el valor del vector de parámetros es el *algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido*, el cual resta importancia a los datos que tienen más tiempo en el cálculo de los parámetros y otorga un mayor valor a los datos más recientes.

La obtención del vector de parámetros se logra mediante:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + P_k \phi_k^T (y_k - \phi_k \hat{\theta}_{k-1}),$$

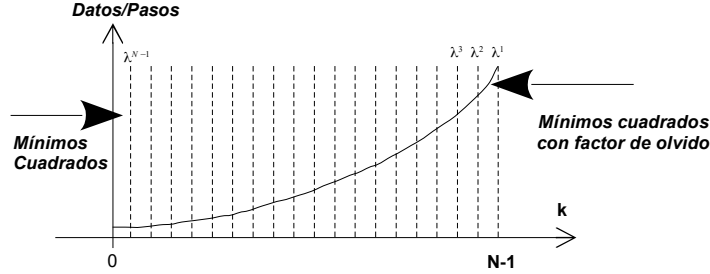


Figura 2.16: Representación gráfica del algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido.

con:

$$P_k = \frac{P_{k-1}}{\lambda} \left(I - \frac{P_{k-1} \phi_k^T \phi_k P_{k-1}}{\lambda + \phi_k P_{k-1} \phi_k^T} \right).$$

donde: λ se conoce como factor de olvido y típicamente se sitúa entre los valores $(0.9, 1]$.

2.3.3. Observador adaptable para sistemas lineales variantes con el tiempo de múltiple entrada y múltiple salida.

En algunas ocasiones en diversos tipos de sistemas no es posible acceder a todos los estados, pero es posible aproximar el valor que tienen estos al utilizar técnicas de observación. Estas técnicas estiman el valor que tiene cada uno de los estados desconocidos; esto es posible siempre que el sistema cumpla con la condición de la Ec. (2.26). Existen muchas técnicas para realizar la estimación de los estados desconocidos, en esta sección se describe un observador que permite reconstruir tanto valores de estados desconocidos como parámetros del sistema. Este algoritmo se describe a continuación.

Si se tiene un sistema representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

y puede ser descrito mediante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)\theta, \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \quad (2.53)$$

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

en donde la representación ahora cuenta con el término $\Psi\theta$ mediante el cual se estiman los valores de los parámetros que se desean reconstruir. Si se agrega un observador de estados al sistema, para obtener el valor de los estados desconocidos, se reescribe nuevamente el modelo como:

$$\dot{x}(t) = [A(t) - L(t)C(t)]x(t) + B(t)u(t) + L(t)y(t) + \Psi(t)\theta,$$

con $L(t)$ la matriz del observador. Al separar en dos el vector de estados $x(t)$ * de manera que tome la forma: $x(t) = x_u(t) + x_\theta(t)$ y cada una de las componentes tiene se representa mediante:

$$\begin{aligned}\dot{x}_u(t) &= [A(t) - L(t)C(t)]x_u(t) + B(t)u(t) + L(t)y(t), \\ \dot{x}_\theta(t) &= [A(t) - L(t)C(t)]x_\theta(t) + \Psi(t)\theta.\end{aligned}$$

Se realiza la estimación de x_u mediante el observador:

$$\dot{\hat{x}}_u(t) = [A(t) - L(t)C(t)]\hat{x}_u(t) + B(t)u(t) + L(t)y(t), \quad (2.54)$$

y la estimación de $x_\theta(t)$ se obtiene con:

$$\dot{\hat{x}}_\theta(t) = [A(t) - L(t)C(t)]\hat{x}_\theta(t) + \Psi(t)\hat{\theta} + \omega(t), \quad (2.55)$$

donde $\hat{\theta}$ es la estimación de los parámetros del sistema y $\omega(t) = \Upsilon(t)\dot{\hat{\theta}}(t)$ es un término extra para compensar el error de estimación.

Si se asume la existencia de una matriz variante con el tiempo $\Upsilon(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, donde l es el número de parámetros desconocidos, para obtener la estimación de $x_\theta(t)$ mediante:

$$\dot{\hat{x}}_\theta(t) = \Upsilon(t)\hat{\theta}(t),$$

para todo t .

Siguiendo este procedimiento, de la Ec. (2.55) se obtiene una estructura de la forma:

$$\hat{\Upsilon}(t)\hat{\theta}(t) + \Upsilon(t)\dot{\hat{\theta}}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\Upsilon(t)\hat{\theta}(t) + \Psi(t)\hat{\theta} + \omega(t),$$

*Se tienen dos diferentes excitaciones para generar el vector $B(t)u(t) + L(t)y(t)$ y $\Psi(t)\theta$.

como $\omega(t) = \Upsilon(t)\dot{\hat{\theta}}(t)$, entonces:

$$\dot{\Upsilon}(t) = [A(t) - L(t)C(t)]\Upsilon(t)\hat{\theta}(t) + \Psi(t), \quad (2.56)$$

al combinar $\hat{x}_u(t)$ y $\hat{x}_\theta(t)$, para estimar $x(t)$ mediante $\hat{x}(t) = \hat{x}_u(t) + \hat{x}_\theta(t)$, se obtiene el vector de estados estimados mediante:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & [A(t) - L(t)C(t)]\hat{x}_u(t) + B(t)u(t) + L(t)y(t) \\ & + \Psi(t)\hat{\theta} + \Upsilon(t)\dot{\hat{\theta}}(t). \end{aligned}$$

Para diseñar este observador se utilizan dos suposiciones:

- Para la matriz $(A(t), C(t))$ del sistema de la Ec. (2.52) existe una matriz acotada variante con el tiempo $L(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ tal que el sistema $\dot{\eta}(t) = [A(t) - L(t)C(t)]\eta$ sea exponencialmente estable.
- Si $\Psi(t)$ es excitada de manera persistente, $\Upsilon(t)$ se obtiene de la Ec. (2.56) y existen constantes positivas α, β, T y una matriz Σ acotada positiva definida tal que se cumplan las desigualdades:

$$\alpha I \leq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau)C^T(\tau)\Sigma(\tau)C(\tau)\Upsilon(\tau)d\tau \leq \beta I$$

Mediante la primera suposición se conoce cualquier parámetro θ al diseñar un observador mediante la matriz $L(t)$, la segunda suposición indica que debe haber una excitación persistente la cual es utilizada en la identificación de sistemas. Estas suposiciones llevan a la definición del siguiente teorema:

Teorema 2 *Si existe una matriz $\Gamma \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ simétrica > 0 , utilizando las suposiciones anteriores para cualquier constante θ entonces:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Psi(t)\hat{\theta} \\ & + [L(t) - \Upsilon(t)\Gamma\Upsilon^T(t)C^T(t)\Sigma(t)][y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = & \Gamma\Upsilon^T(t)C^T(t)\Sigma(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \end{aligned} \quad (2.57)$$

es un observador global exponencial del sistema de la Ec. (2.53) para cualquier condición

2. FUNDAMENTO TEÓRICO PARA EL MODELADO DE SISTEMAS Y TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO.

*inicial $x_0(t_0)$, $\hat{\theta}_0(t_0) \forall \theta \in \mathbb{R}^l$ y los errores $\hat{x}(t) - x(t)$ y $\hat{\theta}(t) - \theta$ tienden a cero de exponencialmente mientras el tiempo tienda a infinito.**

Por lo cual, se diseña el observador adaptable realizando una selección correcta de los valores $L(t)$, Γ y Σ .

Con la teoría descrita anteriormente es posible realizar los controladores, puesto que se cuenta con las herramientas necesarias para comenzar su diseño.

*La comprobación de este teorema se encuentra en [23].

Características, modelado y análisis del sistema de dos tanques en cascada.

El sistema utilizado a partir con el que se obtiene el modelo de tanques interconectados se muestra en la Fig. 3.1. Ésta es la plataforma en donde se realiza la parte experimental.

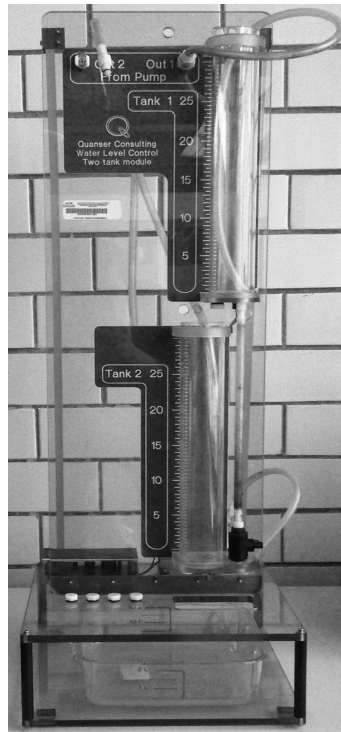


Figura 3.1: Sistema de tanques acoplados Quanser.

3. CARACTERÍSTICAS, MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

3.1. Descripción física del sistema.

El sistema cuenta con un depósito, donde se almacena el líquido que se utiliza, un par de tanques con área de sección transversal uniforme situados uno arriba del otro; una bomba que suministra el líquido al sistema mediante manguera plástica. El primer tanque recibe el líquido que proviene del depósito, su salida es la entrada para el segundo tanque y la salida del segundo tanque regresa al depósito [18]. En la Fig. 3.2 se muestra la configuración utilizada en el desarrollo de este trabajo.

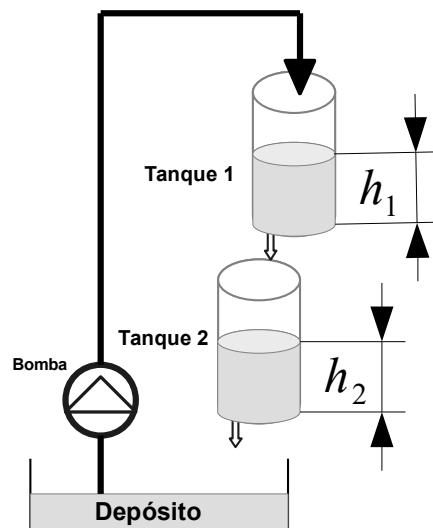


Figura 3.2: Configuración utilizada.

3.1.1. Características del sistema.

3.1.1.1. Bomba.

La bomba con la cual se lleva el líquido a los tanques tiene un diámetro en su orificio de entrada de 0.6350 cm y un diámetro en su orificio de salida de 0.4762 cm . Esta puede ser alimentada con un voltaje máximo de 12 V y puede soportar un voltaje pico de hasta 22 V . El flujo que entrega la bomba respecto al voltaje que recibe se obtiene mediante:

$$q_i = 3.3V_{bomba} [\text{cm}^3/\text{s}].$$

Con esta relación se tiene un flujo máximo de $39.6 \text{ cm}^3/\text{s}$ [17].

La gráfica que relaciona el voltaje aplicado a la bomba con el flujo introducido al sistema se muestra en la Fig. 3.3.

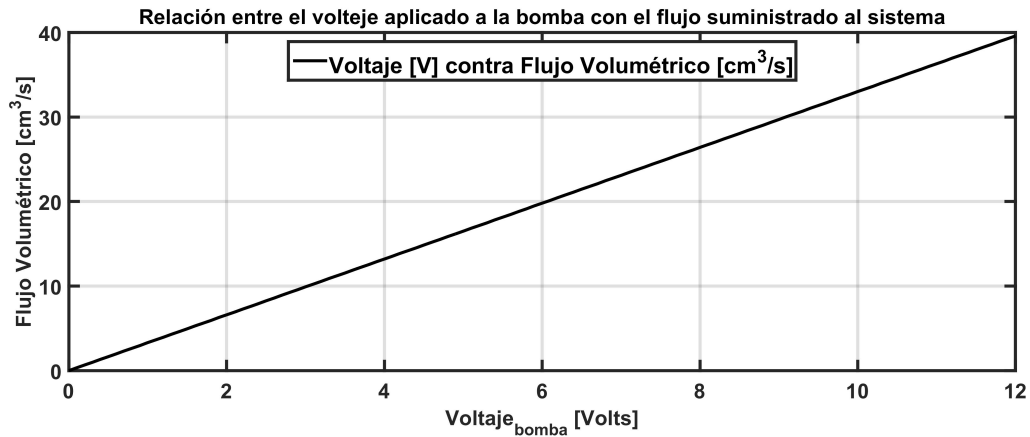


Figura 3.3: Relación entre el V_{bomba} con el flujo aplicado al sistema.

3.1.1.2. Tanques.

El tanque superior y el tanque inferior cuentan con las siguientes características:

- Altura: 30 cm
- Área de sección transversal: 15.5179 cm^2
- Diámetro interno: 4.4450 cm

En cuanto a los orificios de salida de cada uno de los tanques, el sistema cuenta con un conjunto de resistencias hidráulicas que pueden ser intercambiadas. Estas resistencias hacen que el flujo de salida sea mayor o menor dependiendo de su tamaño; los diámetros y las áreas de las resistencias se muestran en la tabla 3.1.

Resistencia	Diámetro [cm]	Área [cm^2]
Orificio de salida grande	0.5556	0.2424
Orificio de salida mediano	0.4762	0.1781
Orificio de salida pequeño	0.3175	0.0791

Tabla 3.1: Características de las resistencias de salida del sistema de tanques.

3. CARACTERÍSTICAS, MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

El sistema tiene dos resistencias con orificio de salida mediano, una resistencia con orificio de salida grande y una resistencia con orificio de salida pequeño (de esta manera se puede configurar el sistema de ocho formas distintas), las resistencias de salida utilizadas a lo largo de la experimentación son, en ambos tanques, las que cuentan con orificios de salida medianos.

Por otra parte, el sistema se encuentra instrumentado con una relación lineal de la salida de los sensores con la altura de los tanques y de la bomba con el flujo entregado al sistema.

Los sensores, con los cuales se realiza la medición de la columna del líquido miden presiones manométricas que van desde los 0 kPa hasta los 6.89 kPa ; entregando un voltaje máximo de $\pm 12\text{ V}$ a su salida. La relación de la salida de estos sensores con la altura de los tanques está dada por:

$$h = 6.25V_{\text{sensor}} [\text{cm}].$$

Con esta relación, el voltaje máximo entregado por el sensor es de $V_{\text{sensor}} = 4.6154\text{ V}$ [17].

La gráfica de la relación entre el voltaje del sensor con la altura del tanque se muestra en la Fig. 3.4.

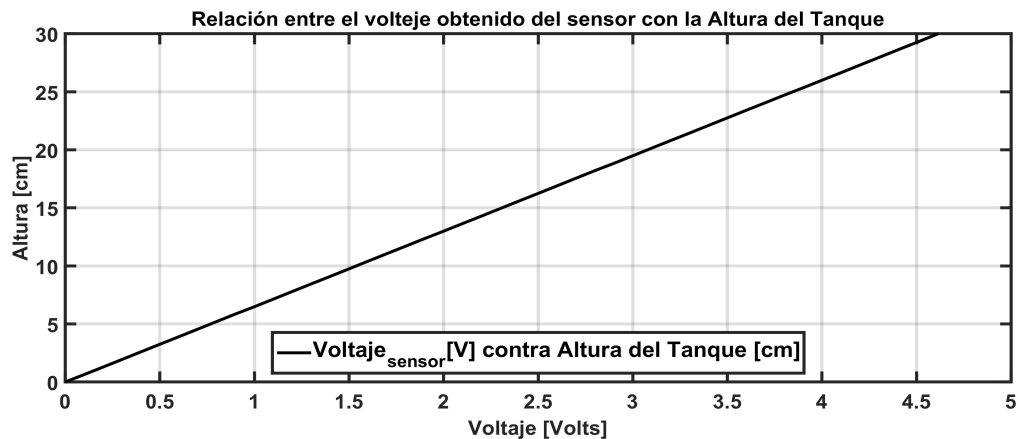


Figura 3.4: Relación entre el V_{sensor} con la altura del tanque.

Las conversiones de voltaje a altura y de voltaje a flujo se utilizan para conocer los valores de las variables deseadas. El sistema se describe completamente con el modelo matemático en función de las variables de flujo y altura.

3.2. Modelado del sistema.

Con el fin de desarrollar un modelo general del sistema con una configuración de tanques como la que se muestran en la Fig. 3.5 para poder realizar el control de éste, se utilizan conocimientos de mecánica de fluidos.

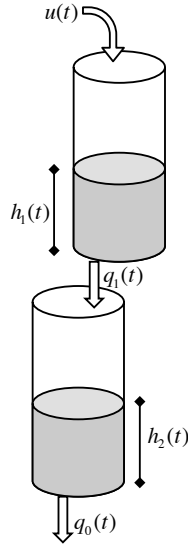


Figura 3.5: Esquema para la obtención del modelo.

Analizando el tanque superior, que tiene un área de sección transversal A_1 constante.

Para conocer como varia la altura del tanque con respecto del tiempo, se utiliza la *ecuación de Bernoulli*:

$$P_{inf} + \frac{1}{2}\rho_{inf}v_{inf}^2 + \rho_{inf}gh_{inf}(t) = P_{sup} + \frac{1}{2}\rho_{sup}v_{sup}^2 + \rho_{sup}gh_{sup}(t). \quad (3.1)$$

Si se considera que el orificio de salida del tanque es mucho menor que el área de sección transversal del mismo, es decir $A \gg a$ (al ser el área de sección transversal del tanque es tres órdenes de magnitud mayor que el área del orificio de salida de tamaño mediano), se puede suponer que el fluido está prácticamente en reposo, entonces la velocidad con la cual cambia la altura del tanque superior es: $v_{inf} = 0$. Puesto que, en ambos extremos del tanque, existe la misma presión (presión atmosférica), entonces $P_{inf} = P_{sup} = P_{atm}$. Por otra parte el líquido que entra al tanque es el mismo que sale, por lo cual no hay cambio en la densidad de éste y con ello $\rho_{inf} = \rho_{sup}$, por lo que la

3. CARACTERÍSTICAS, MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

Ec. (3.1) se simplifica a la forma:

$$\frac{1}{2}v_{inf}^2(t) + gh_{inf}(t) = gh_{sup}(t).$$

Al despejar $v_{inf}(t)$, se tiene:

$$v_{inf}(t) = \sqrt{2gh_1(t)},$$

con $h_1(t) = h_{sup}(t) - h_{inf}(t)$. Utilizando la *ecuación de continuidad*, para la parte inferior del tanque uno, donde:

$$q_0(t) = a_1v_{inf}(t), \quad (3.2)$$

con a_1 : área de salida del orificio inferior de la resistencia hidráulica.

Al sustituir el valor de $v_{inf}(t)$ en la Ec. (3.2) para obtener el flujo de salida, se tiene:

$$q_0(t) = a_1v_{inf}(t) = a_1\sqrt{2gh_1(t)}. \quad (3.3)$$

Por otra parte, el cambio de volumen se encuentra relacionado con el flujo que ingresa al tanque y con el flujo que sale del mismo mediante:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = q_i(t) - q_0(t), \quad (3.4)$$

además,

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt},$$

relaciona el cambio de volumen dentro del tanque con el cambio de altura del mismo, entonces la Ec. (3.4) toma la forma:

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_i(t) - q_0(t).$$

Considerando que el flujo de salida se determina con el uso de la Ec.(3.3), se tiene:

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_i(t) - a_1\sqrt{2gh_1(t)}. \quad (3.5)$$

Finalmente despejando el cambio de altura de la Ec. (3.5), el comportamiento del

tanque superior se describe mediante:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{A_1}q_i(t) - \frac{1}{A_1}a_1\sqrt{2gh_1(t)}. \quad (3.6)$$

Siguiendo un análisis similar para el tanque inferior, se deduce que éste tiene un comportamiento como el de la Ec. (3.6), sólo que el flujo de entrada a este tanque es igual al flujo de salida de tanque superior, por lo tanto el segundo tanque tiene el comportamiento descrito por:

$$\dot{h}_2(t) = \frac{1}{A_1}a_1\sqrt{2gh_1(t)} - \frac{1}{A_2}a_2\sqrt{2gh_2(t)} \quad (3.7)$$

Entonces el modelo no lineal del sistema de dos tanques interconectados, utilizando las Ecs. (3.6) y (3.7), se encuentra representado mediante:

$$\dot{h}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1\sqrt{2g}}{A_1}\sqrt{h_1(t)} + \frac{1}{A_1}q_i(t) \\ \frac{a_1\sqrt{2g}}{A_1}\sqrt{h_1(t)} - \frac{a_2\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{h_2(t)} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

En el modelo se aprecia que el sistema no puede tener alturas negativas, y a partir de éste se realiza su análisis.

3.2.1. Variables del sistema y notación.

La representación del sistema de tanques descrito por la Ec. (3.8) solamente cuenta con una variable de entrada, que es:

$$q_i(t),$$

e indica el flujo volumétrico administrado por la bomba.

Las variables de salida del sistema coinciden, en este caso, con la variables de estado del mismo, éstas son:

$$h_1(t),$$

que indica la altura de la columna del líquido presente en el tanque superior (denominada a partir de ahora altura del tanque superior) y

$$h_2(t),$$

3. CARACTERÍSTICAS, MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

indica la altura de la columna del líquido presente en el tanque inferior (llamada solamente altura del tanque inferior). En particular, la variable de estado de mayor interés es: $h_2(t)$.

Finalmente se utiliza la notación:

- $h_1(t) = h_1$, $h_2(t) = h_2$, para representar las variables de estado del sistema.
- $q_i(t) = q = u$, para indicar el valor de la variable de entrada.

3.3. Análisis del modelo.

Al conocer el modelo que describe el comportamiento dinámico del sistema, se debe analizar qué tipo de respuesta presenta ante diferentes señales de entrada. En esta sección, se analiza el comportamiento del sistema ante diversas señales de entrada, utilizando el modelo no lineal. Además, se analiza la respuesta del sistema si se utiliza una aproximación lineal del modelo mediante la función de transferencia que lo representa.

3.3.1. Modelo no lineal.

En el modelo del sistema representado por la Ec. (3.8) las variables de estado se encuentran dentro de una raíz cuadrada, este hecho causa que el sistema sea no lineal al no cumplir con el principio de superposición. Se analiza el comportamiento de las salidas de este modelo utilizando distintos valores de la entrada y diferentes condiciones iniciales con la ayuda del software Matlab y el programa *pplane7*.

Se obtiene el comportamiento de las alturas del tanque superior y el tanque inferior con flujos de entrada que tiene valores de:

- $10 \text{ cm}^3/\text{s}$ mostrado en la Fig. 3.6.
- $25 \text{ cm}^3/\text{s}$ el cual se puede observar en la Fig. 3.7.
- $39.6 \text{ cm}^3/\text{s}$ indicado en la Fig. 3.8.

Se observa que, para estas señales de entrada, la altura de cada uno de los tanques converge a un valor constante de altura y estos son los mismos para cada uno de los tanques, al contar estos con las resistencias hidráulicas del mismo tipo.

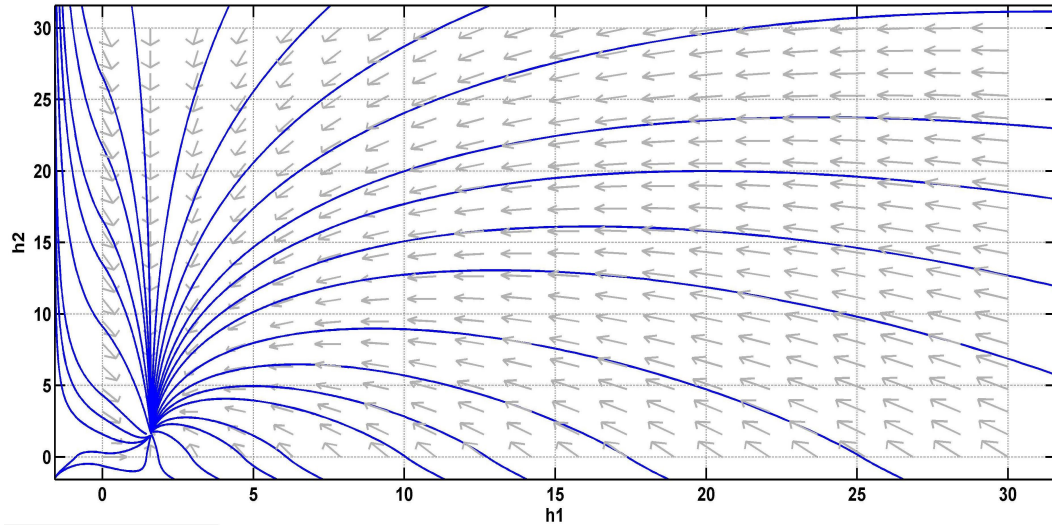


Figura 3.6: Comportamiento de diversas trayectorias de las variables de salida del sistema con un flujo de entrada $u = 10 \text{ cm}^3/\text{s}$.

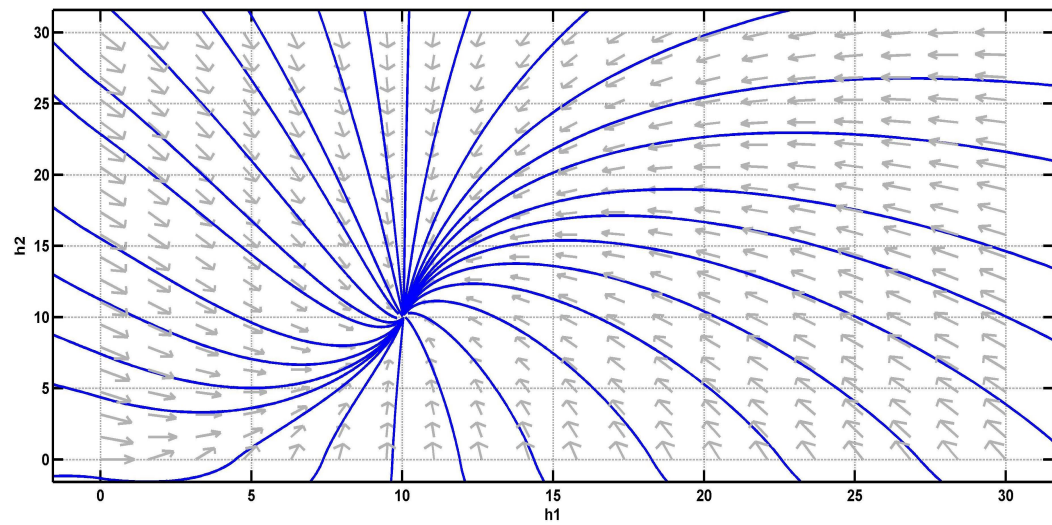


Figura 3.7: Comportamiento de diversas trayectorias de las variables de salida del sistema con un flujo de entrada $u = 25 \text{ cm}^3/\text{s}$.

3. CARACTERÍSTICAS, MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

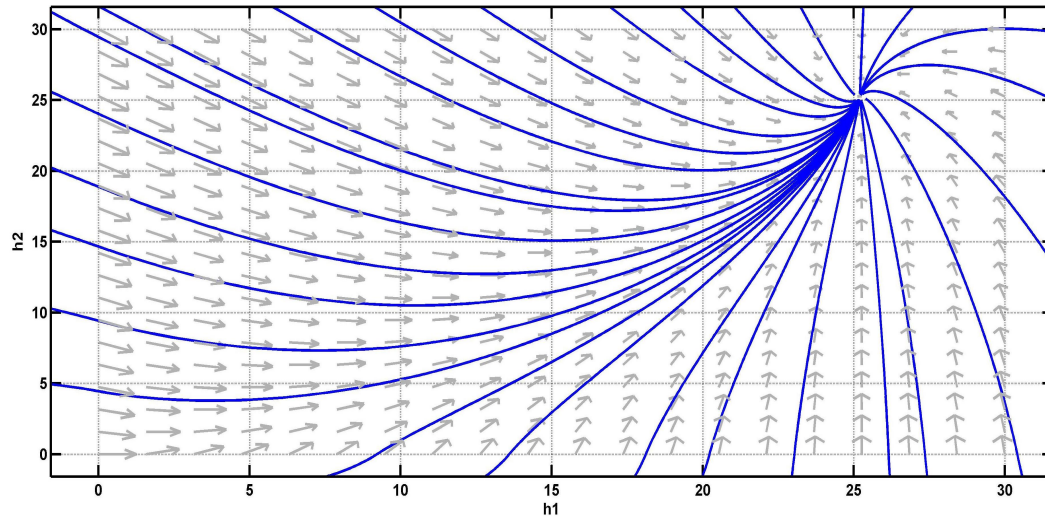


Figura 3.8: Comportamiento de diversas trayectorias de las variables de salida del sistema con un flujo de entrada $u = 40 \text{ cm}^3/\text{s}$.

3.3.2. Modelo lineal.

En el caso de la representación lineal del sistema, utilizando la función de transferencia en tiempo discreto, se analizan dos puntos de operación:

- $H_1 = 10 \text{ cm}$, $H_2 = 5 \text{ cm}$, $Q_0 = 20 \text{ cm}^3/\text{s}$,
- $H_1 = 10 \text{ cm}$, $H_2 = 10 \text{ cm}$, $Q_0 = 20 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Se utilizan estos puntos de equilibrio, el primer de ellos representa una linealización que solamente existe en la teoría, dado que al utilizar el sistema con dos orificios de salida iguales ambos tanques tienen que llegar a la misma altura. Otra de las razones para usar este punto de equilibrio es que se desea comprobar si con esta linealización se puede controlar al sistema aún si se controla una altura mayor a la utilizada al realizar la linealización. Para el segundo punto de equilibrio se toma en cuenta que ambos orificios de salida son iguales y se obtiene una linealización que describe la dinámica del sistema alrededor del valor de salida que se desea controlar. Además, en ambos casos, el tanque superior no se desborde al realizar el llenado del sistema.

Para el primer punto de operación, se realiza la linealización del sistema de la Ec. (3.8) usando las Ecs. (2.10), (2.11) y (2.12), éste se encuentra representado por el modelo:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0804 & 0 \\ 0.0804 & -0.1137 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0645 \\ 0 \end{bmatrix} Q_i,$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Calculando la función de transferencia, mediante el uso de la Ec. (2.14), se obtiene:

$$G(s) = \frac{0.0051}{s^2 + 0.1941s + 0.0091}.$$

Obteniendo la función de transferencia en tiempo discreto, con un tiempo de muestreo de $T_s = 1$ segundo, utilizando un retén de orden cero, se obtiene el modelo descrito mediante:

$$G(z) = \frac{0.0024z + 0.0022}{z^2 - 1.8150z + 0.8236} = \frac{0.0024z + 0.0022}{(z - 0.9227)(z - 0.8925)}. \quad (3.9)$$

Si se analizan las raíces del denominador se sabe que el sistema tiene un comportamiento acotado. El lugar geométrico de la raíces se muestra en la Fig. 3.9 y la respuesta del sistema bajo este modelo se indica en la Fig. 3.10.

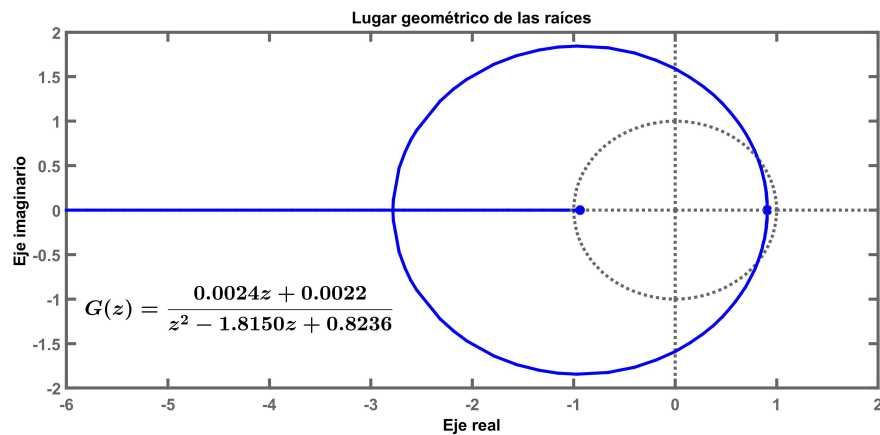


Figura 3.9: Lugar geométrico de las raíces para el primer punto de equilibrio.

3. CARACTERÍSTICAS, MODELADO Y ANÁLISIS DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

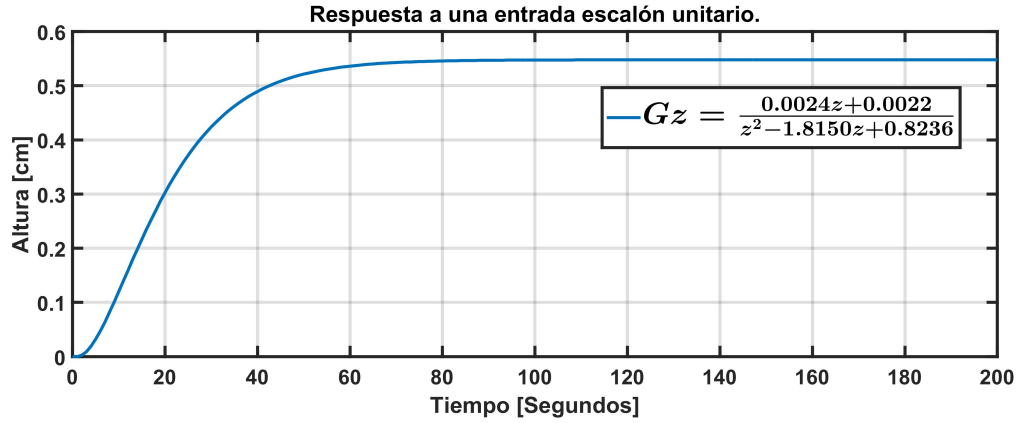


Figura 3.10: Respuesta del sistema en el primer punto de equilibrio.

Para el segundo punto de operación ($Q_0 = 20 \text{ cm}^3/\text{s}$, $H_1 = 10 \text{ cm}$, $H_2 = 10 \text{ cm}$) el modelo lineal, utilizando las Ecs. (2.10), (2.11) y (2.12), en variables de estado está representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0804 & 0 \\ 0.0804 & -0.0804 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0645 \\ 0 \end{bmatrix} Q_i,$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix},$$

la función de transferencia, utilizando la Ec. (2.14), es:

$$G(s) = \frac{0.0051}{s^2 + 0.1608s + 0.0064}$$

la función de transferencia en tiempo discreto, con un tiempo de muestreo $T_s = 1$ segundo utilizando un retén de orden cero, se representa mediante:

$$G(z) = \frac{0.0024z + 0.0023}{z^2 - 1.8450z + 0.8514} = \frac{0.0024z + 0.0023}{(z - (0.9225 \pm 0.0198j))}. \quad (3.10)$$

Estas raíces hacen que el sistema tenga un comportamiento acotado en este punto.

El lugar geométrico de las raíces y el comportamiento ante una entrada escalón del sistema se muestran en las Figs. 3.11 y 3.12.

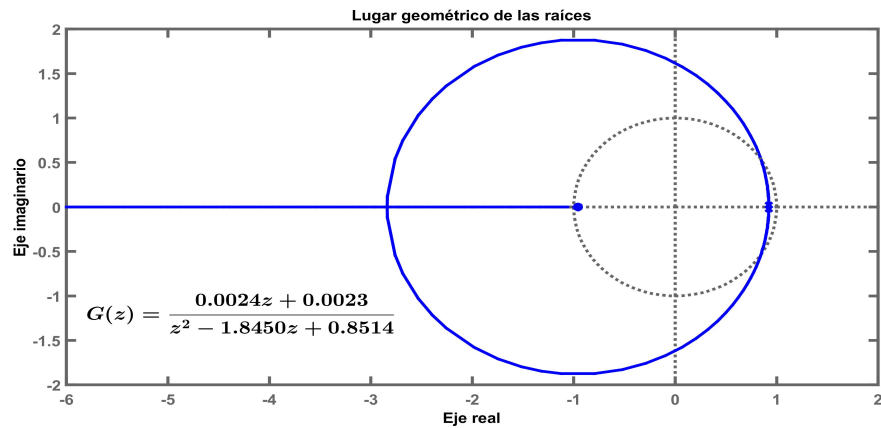


Figura 3.11: Lugar geométrico de las raíces para el segundo punto de equilibrio.

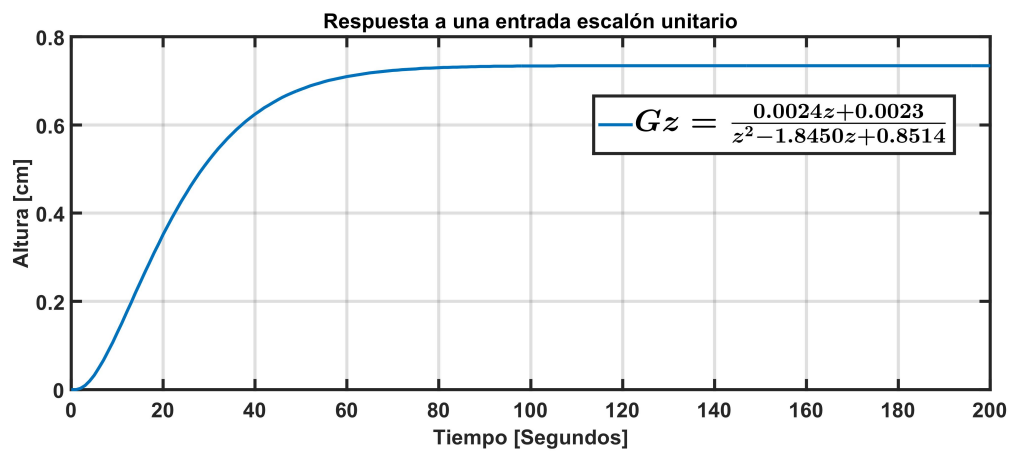


Figura 3.12: Respuesta del sistema en el segundo punto de equilibrio.

Con la descripción del sistema, el modelo y en vista que tiene un comportamiento acotado (tanto en su forma lineal como en su forma no lineal), se desarrollan diversos controladores para lograr distintos comportamientos deseados y verificar si su funcionamiento es correcto.

Diseño de controladores para el sistema de dos tanques en cascada.

Al desarrollar controladores se busca que los sistemas controlados presenten el desempeño deseado aún y que alrededor de éste existan incertidumbres en los sistemas de medición y perturbaciones externas. En este capítulo se diseñan controladores utilizando diversas técnicas, éstas son: sintonización mediante curva de reacción, lugar geométrico de las raíces, óptimo, de equivalencia, difuso, linealizante entrada-salida y adaptable, además del diseño de un observador adaptable.

4.1. Controladores lineales.

4.1.1. Sintonización PI con predictor de Smith.

Si no se cuenta con el modelo del sistema y se toma en cuenta el retraso que presenta la respuesta del segundo tanque al introducir un flujo deseado, se utiliza la aproximación de la planta usando el método de Smith. Para hacer esto es necesario colocar una entrada guardando los datos tanto de la entrada como de la salida.

La aproximación de la planta se realiza utilizando la respuesta del sistema a una entrada escalón, al aplicar un escalón de $20 \text{ cm}^3/\text{s}$ al sistema, éste tiene la respuesta que se muestra en la Fig. 4.1.

Con esta respuesta se obtienen los valores de la aproximación del sistema, mediante los cuales se realiza el diseño, estos valores son:

- $Y_{ss} = 9.6$

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

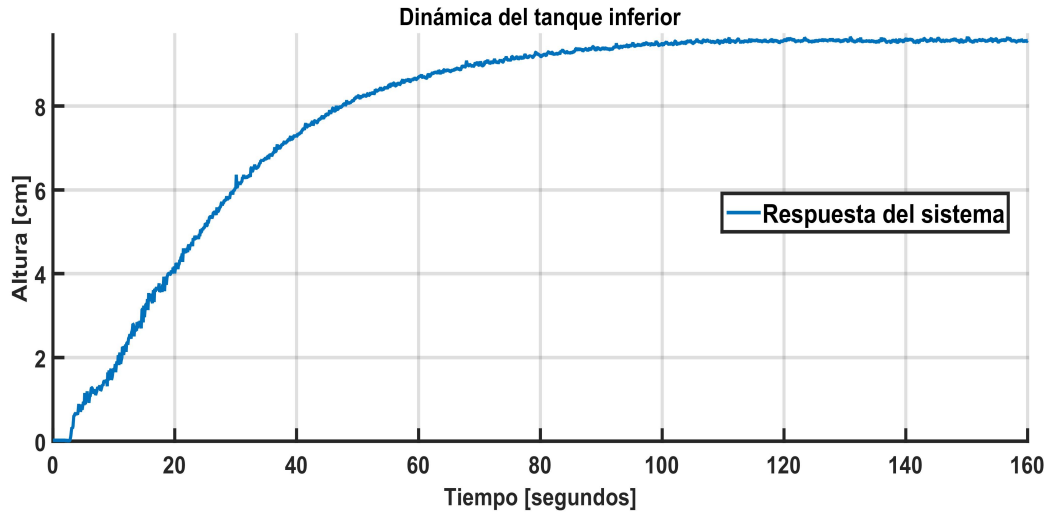


Figura 4.1: Respuesta del sistema a una entrada escalón.

- $0.283Y_{ss} = 2.71$ con lo cual el tiempo en que se obtiene este valor es: $t_1 = 14s$.
- $0.632Y_{ss} = 6.06$, por lo cual: $t_2 = 30s$.

utilizando la Ec. (2.50) y las Ecs. (2.51) se obtienen los valores:

$$\alpha = \frac{3}{2}(30 - 14) = 24, \quad \tau = 30 - 24 = 6, \quad K = \frac{9.6}{20} = 0.48,$$

entonces, la función de transferencia aproximada descrita por la Ec. (2.49) es:

$$G_p(s) = \frac{0.48}{24s + 1} e^{-6s}.$$

La aproximación del sistema y la respuesta de éste se muestra en la Fig. 4.2.

Al utilizar el predictor de Smith, un controlador tipo PI es una opción con la cual se puede realizar la compensación de la planta de manera rápida.

Para realizar la sintonización del controlador se utiliza el método de la curva de reacción, la respuesta del sistema con al cual se realiza la sintonización del control se indica en la Fig. 4.3.

Los datos obtenidos mediante esta gráfica son: $u_0 = 20 \text{ cm}^3/s$, $u_f = 22 \text{ cm}^3/s$, $t_0 = 200 \text{ s}$, $t_0 = 205 \text{ s}$, $t_0 = 320 \text{ s}$, $Y_{ss} = 12.7 \text{ cm}$ y $Y_0 = 9.6 \text{ cm}$, utilizando las Ecs. (2.24), usando estos datos se obtiene los siguientes parámetros de la planta:

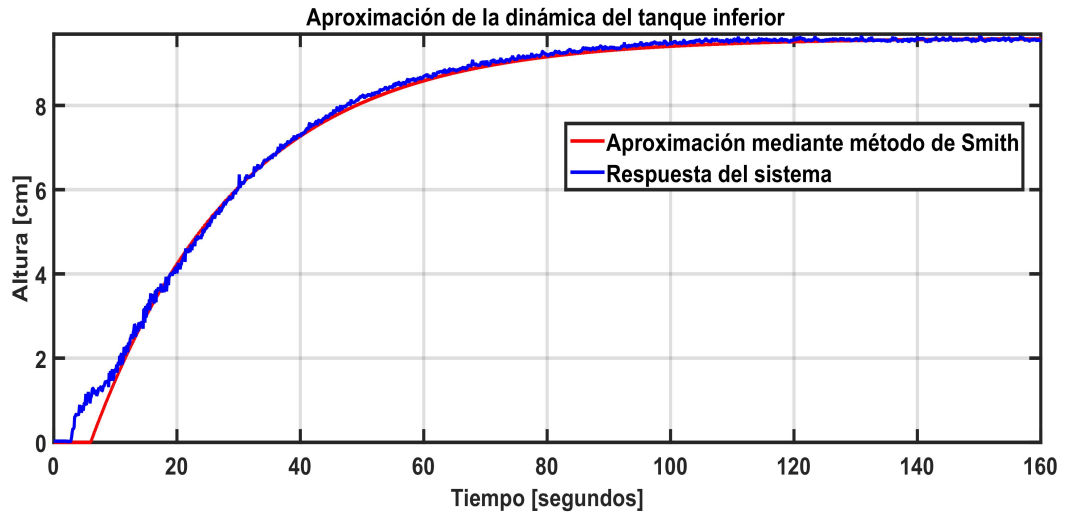


Figura 4.2: Respuesta del sistema y aproximación realizada mediante el método de Smith.

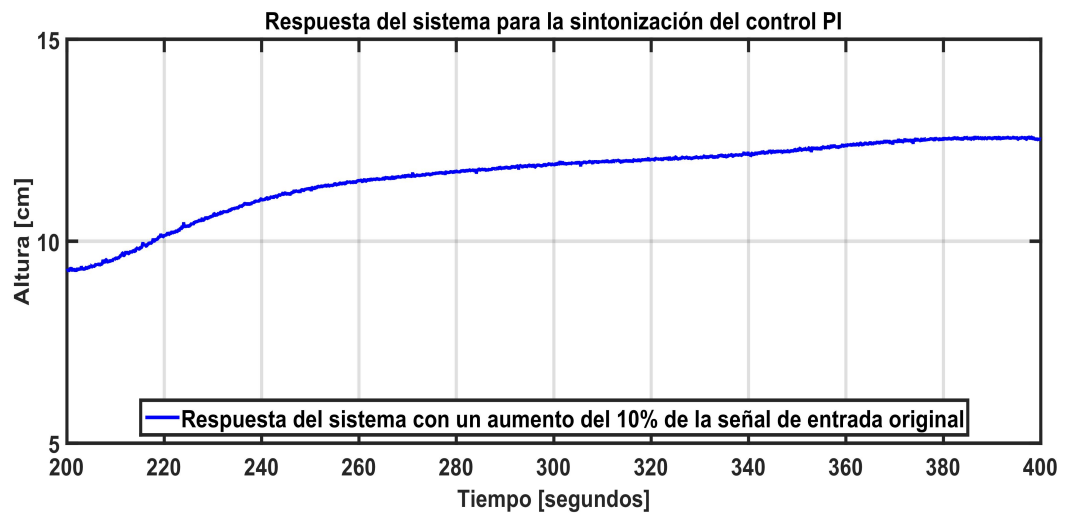


Figura 4.3: Respuesta del sistema para realizar la sintonización de un control PI.

$$K = \frac{12.7 \text{ cm} - 9.6 \text{ cm}}{22 \text{ cm}^3/\text{s} - 20 \text{ cm}^3/\text{s}} = 1.55,$$

$$\theta = 205 \text{ s} - 200 \text{ s} = 5,$$

$$\tau = 320 \text{ s} - 205 \text{ s} = 115.$$

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

La sintonización del controlador PI se logran con los valores calculados mediante el uso de la tabla 2.3, éstos son:

$$k_p = \frac{0.9(115)}{1.55(5)} = 13.55$$

$$T_i = 15$$

Finalmente, se obtiene el valor de la constante integral para el controlador por medio de:

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{13.355}{15} = 0.8903,$$

con lo cual las ganancias del controlador PI sintonizado tienen el valor:

$$\mathbf{K_p = 13.355, \quad K_i = 0.8905.} \quad (4.1)$$

La respuesta del sistema controlado se muestra en la Fig. 4.4.

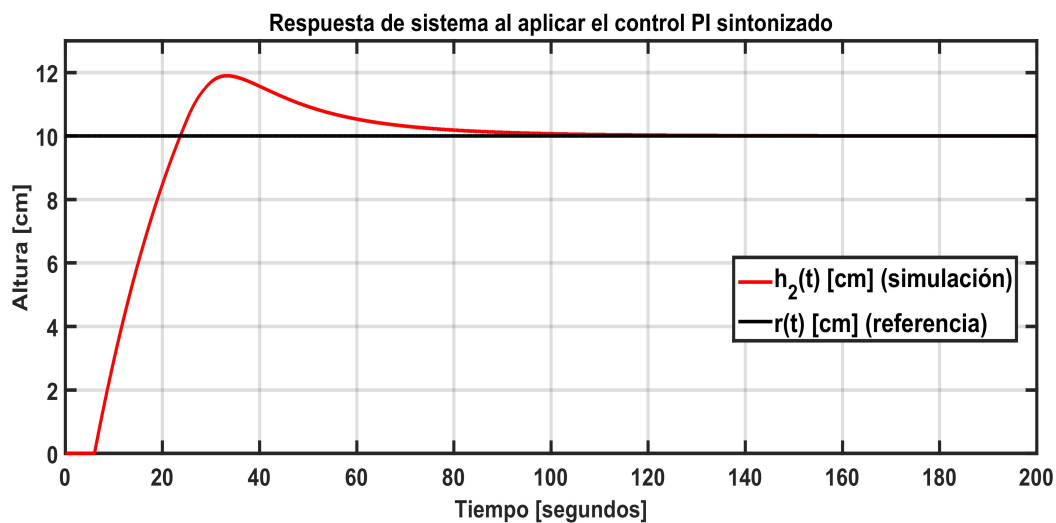


Figura 4.4: Respuesta del sistema al aplicar el control PI sintonizado.

La sintonización del control PI logra controlar al sistema al valor deseado, la señal de control generada para lograr esta respuesta se muestra en la Fig. 4.5.

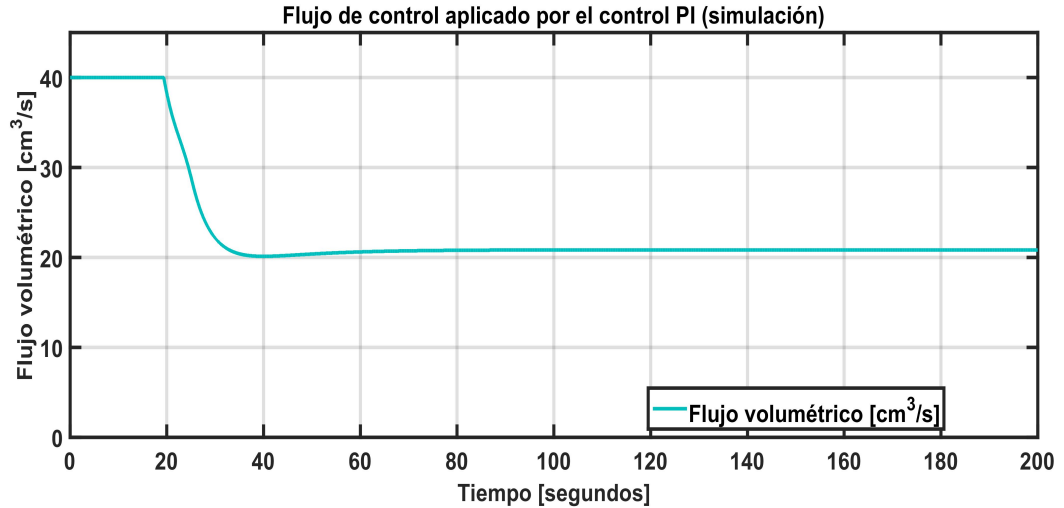


Figura 4.5: Flujo de control PI.

4.1.2. Control PD.

Este control se diseña en tiempo discreto, para esto se utiliza la función de transferencia en tiempo discreto del sistema de tanques, obtenida a partir del modelo no lineal alrededor del punto de equilibrio $H_1 = 10 \text{ cm}$, $H_2 = 5 \text{ cm}$ y $Q = 20 \text{ cm}^3/\text{s}$.

El sistema se encuentra representado mediante función de transferencia de la Ec. (3.9), que es:

$$G(z) = \frac{0.0024z + 0.0022}{z^2 - 1.8150z + 0.8236}$$

La nueva dinámica deseada, al observar que el sistema en lazo abierto llega a la altura de 10 cm en un tiempo cercano a los 20 s aplicando el flujo máximo, tiene un tiempo de asentamiento de 20 segundos y un porcentaje de sobrepaso del 20% . Utilizando un tiempo de muestreo de 1 segundo , las características para esta respuesta son:

- El factor de amortiguamiento deseado es: $\xi = 0.4559$.
- La frecuencia natural no amortiguada es: $\omega_n = 0.4387$.
- La frecuencia natural amortiguada sería: $\omega_d = 0.3905$.

Con estos valores los polos deseados en z son:

$$Z_{1,2} = -0.7567 \pm 0.3115j.$$

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

Se diseña un control PD que presenta la estructura:

$$C(z) = k_p + k_d(1 - z^{-1}) = K \frac{z - c_c}{z}, \quad (4.2)$$

donde:

$$K = (k_p + k_d), \quad (4.3)$$

$$c_c = \frac{k_d}{k_p + k_d}. \quad (4.4)$$

Se sabe que $F(z) = G(z)C(z)$, por ello:

$$F(z) = \left(\frac{K(z - c_c)}{z} \right) \left(\frac{0.0024z + 0.0022}{z^2 - 1.8150z + 0.8236} \right),$$

para diseñar el control se busca que cumpla con las condiciones de magnitud y de fase.

4.1.2.1. Condición de fase.

La condición de fase señala que la suma de los ángulos que forman los polos y los ceros debe cumplir la condición:

$$\sum \theta_{polos} - \sum \theta_{ceros} = 180^\circ(2n + 1). \quad (4.5)$$

Al calcular cada uno de los ángulos correspondientes a los polos y ceros de la planta junto con el controlador, obtenemos cuál es el ángulo que hace falta para colocar el cero y así obtener la dinámica deseada. Usando la Ec. (4.5):

$$110.763^\circ + 119.828^\circ + 22.375^\circ - 10.431^\circ - 180^\circ - \theta_{cc} = 0,$$

$$\theta_{cc} = 62.535^\circ.$$

Entonces al controlador le hace falta un ángulo de 62.535° para cumplir la condición de fase. Calculando la posición en donde se debe de ubicar el cero del controlador, ésta se encuentra en:

$$c_{cpd} = 0.6038.$$

4.1.2.2. Condición de magnitud.

Para cumplir con la condición de magnitud, se necesita que:

$$|KC(z)G(z)| = 1. \quad (4.6)$$

Obteniendo el valor de K :

$$\left| K \left(\frac{z - 0.6038}{z} \right) \left(\frac{0.002016z + 0.001885}{z^2 - 1.81z + 0.8182} \right) \right| = 1.$$

Evaluando el valor del polo deseado ($z = -0.7562 \pm 0.3115j$), se obtiene el valor de la ganancia K , que es:

$$K = 77.653.$$

Finalmente utilizando las Ecs. (4.3) y (4.4) se obtienen k_p y k_d requeridos para que el controlador tenga la respuesta deseada, entonces:

$$\begin{aligned} k_p + k_d &= 77.635, \\ c_{cpd}k_p + (c_{cpd} - 1)k_d &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{k_p = 36.766, \quad k_d = 46.88.} \quad (4.7)$$

Con estos valores, el controlador PD diseñado representado por la Ec. (4.2) es:

$$C(z) = 36.766 + 48.88(1 - z^{-1}).$$

La Fig. 4.6 muestra el nuevo lugar geométrico de las raíces, donde se puede apreciar el cambio en la dinámica del sistema, que ahora pasa por el punto deseado.

Si se desea una altura en el tanque inferior de 10 *cm*, con el controlador diseñado se obtiene la respuesta mostrada en la Fig. 4.7, se puede observar que el sistema tiene un comportamiento parecido al deseado en razón de que se diseña un control PD que no elimina el error en estado estable y eso se nota en la respuesta del sistema compensado.

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

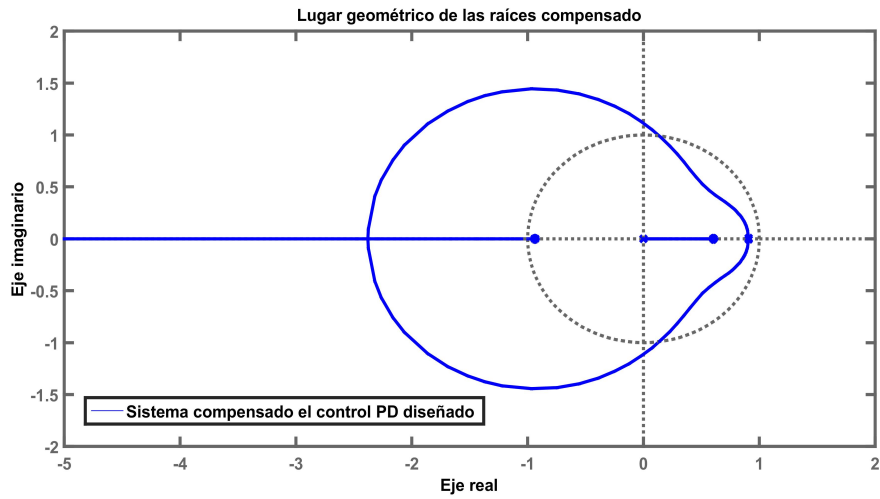


Figura 4.6: LGR compensado.

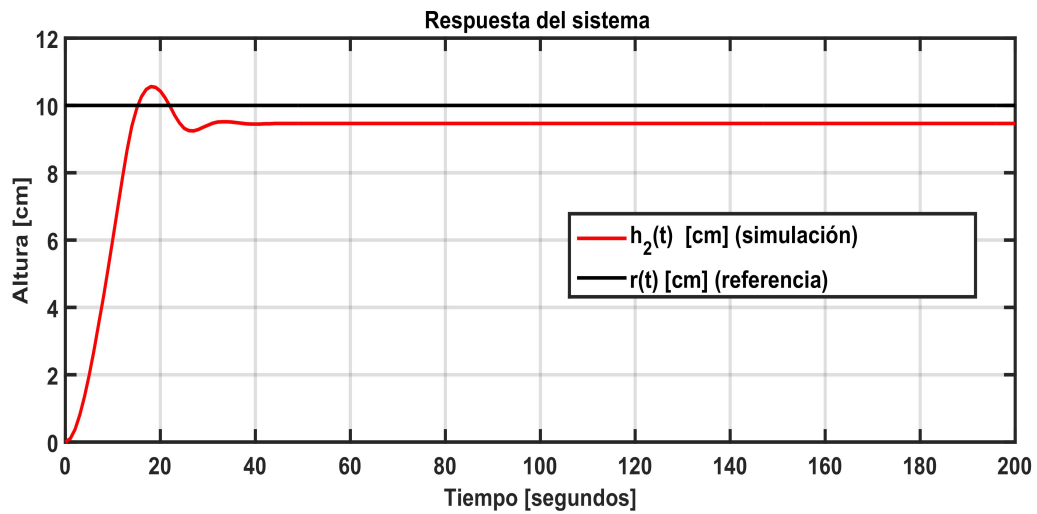


Figura 4.7: Respuesta del sistema con el control PD diseñado.

Para generar esta dinámica se debe de aplicar una señal de control como la mostrada en la Fig. 4.8.

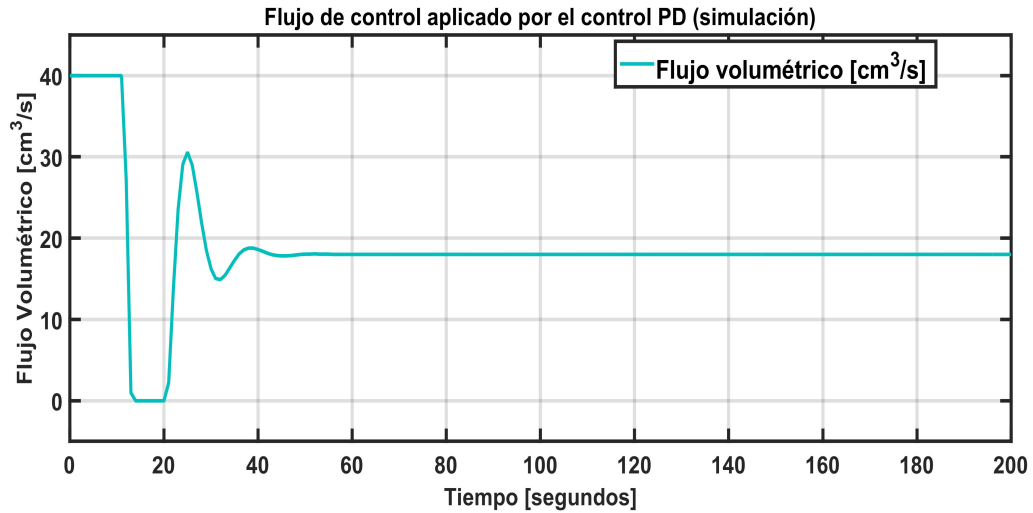


Figura 4.8: Señal generada por el controlador PD.

4.1.3. Control LQR.

Se desea controlar la altura de cada uno de los tanques para el punto de equilibrio donde: $H_1 = 10.2 \text{ cm}$, $H_2 = 10 \text{ cm}$ y un flujo de $U = 19.7 \text{ cm}^3/\text{s}$. Al conocer el valor máximo de flujo que puede ser ingresado al sistema mediante el actuador, se realiza el diseño de un control LQR, cumpliendo con las condiciones de la Ec. (2.30), entonces se proponen los valores:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = [1]. \quad (4.8)$$

estos valores evitan la saturación del actuador, y con ello se garantiza un desempeño óptimo de este. Al resolver la Ec. (2.31) y obtener las ganancias del control LQR mediante la Ec. (2.32) para lograr el desempeño deseado, se tiene que:

$$k = [0.9206, \quad 0.3239]. \quad (4.9)$$

En la Fig. 4.9 se muestra los valores de salida para cada uno de los tanques. Se aprecia que ambos llegan al valor de equilibrio estipulado.

El flujo introducido al sistema mediante el actuador es el indicado en la Fig. 4.10,

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

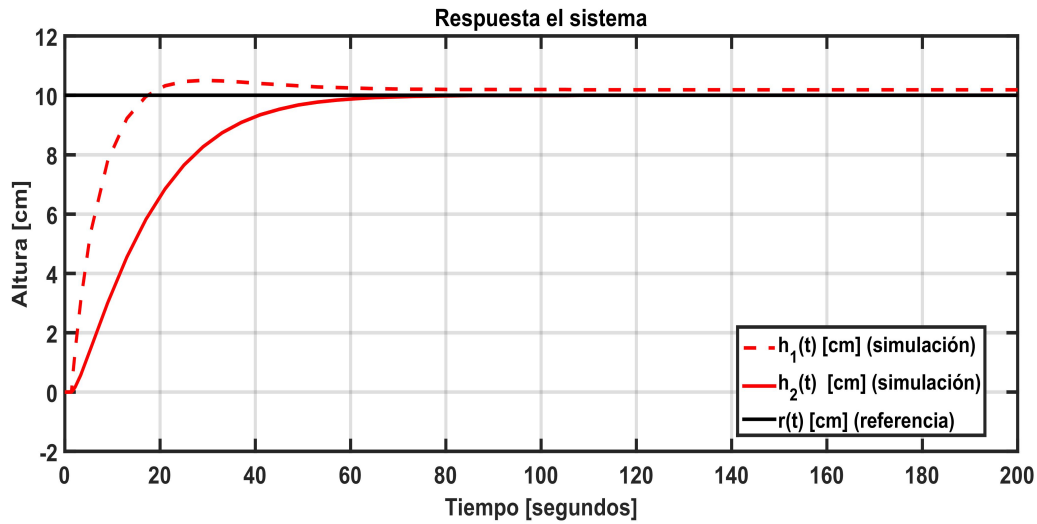


Figura 4.9: Altura de los tanques utilizando el control LQR diseñado.

se observa que el actuador no presenta saturación.

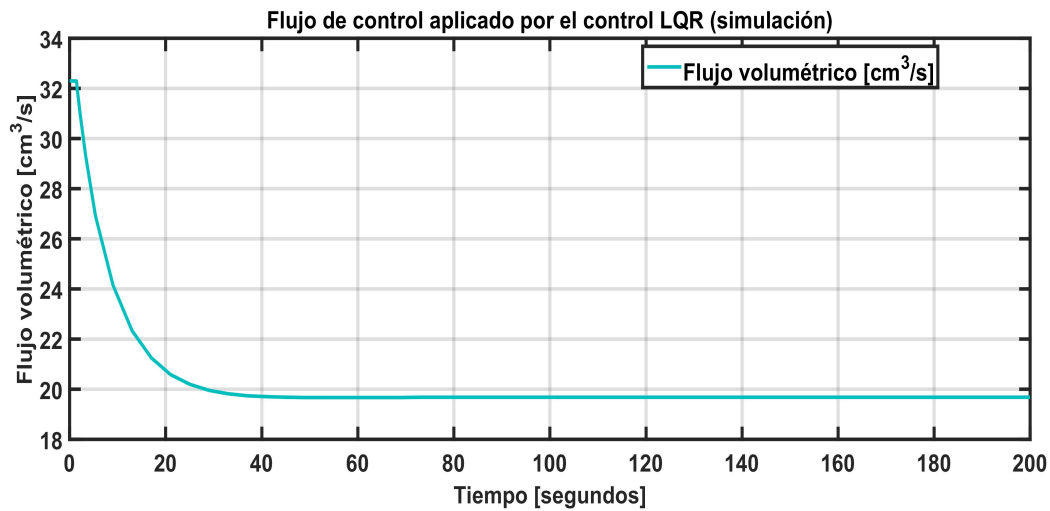


Figura 4.10: Flujo suministrado al sistema por el control LQR.

4.1.4. Control de equivalencia cierta.

Si se tiene un sistema en tiempo discreto representado mediante la Ec.(2.33), y se realiza la “cancelación” del modelo, se diseña un control de equivalencia cierta definido mediante:

$$u[k] = \frac{1}{b} \left(-f[\bar{y}] + y_d[k+1] + K^T e[k] \right), \quad (4.10)$$

donde:

- $e[k] = y[k] - y[k]_d$: error entre el valor deseado y el valor de salida.
- b : constante positiva.
- $f[\bar{y}]$: dinámica del sistema.
- K^T : vector de constantes del controlador.

La nueva dinámica impuesta mediante el uso de la Ec. (4.10) debe contar con un sobrepaso del 20% y un tiempo de asentamiento de 50s.

Se diseña el controlador utilizando la función de transferencia en tiempo discreto del sistema de la Ec (3.10), que es:

$$G(z) = \frac{0.0024 + 0.0023z^{-1}}{1 - 1.8450z^{-1} + 0.8514z^{-2}}.$$

En este caso se necesitan dos retrasos de la señal de salida, por lo tanto es necesario utilizar el error actual y el retraso de éste. Los valores del vector de constantes del controlador son:

$$K^T = [-0.89, 0.55],$$

que generan las raíces del polinomio de la Ec. (2.34) $z_{1,2} = 0.4450 \pm 0.5933j$ y éstas hacen al sistema estable. Finalmente el control de equivalencia está representado por:

$$u[k] = \frac{1}{0.002456} \left(-0.002328u[k-1] - 1.845y[k] + 0.8514y[k-1] + y_d + [-0.89, 0.55]^T [e[k], e[k-1]] \right). \quad (4.11)$$

La respuesta, en simulación, en lazo cerrado del sistema se observa en la Fig. 4.11. La señal de control para obtener esta respuesta se muestra en la Fig. 4.12. Se observa que se obtienen los valores de desempeño impuestos.

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

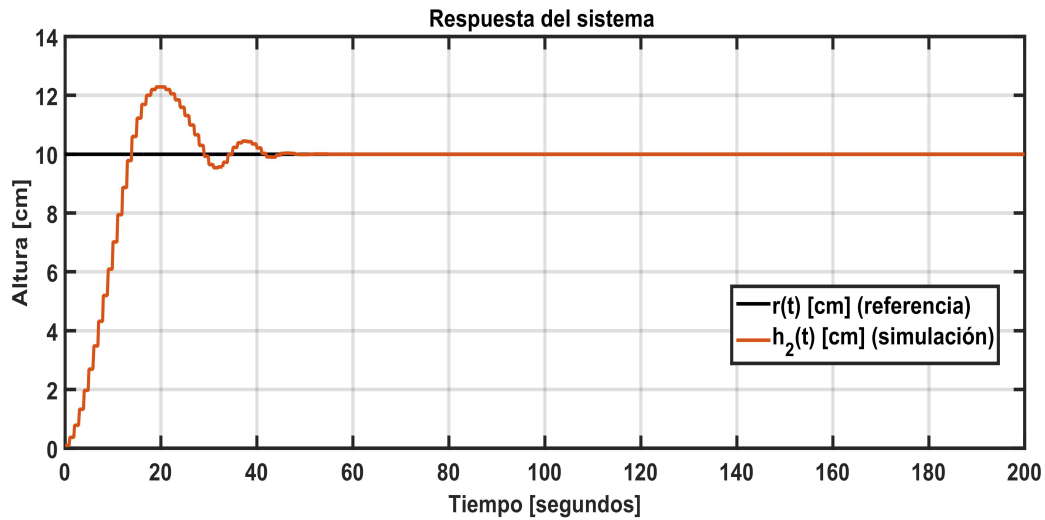


Figura 4.11: Altura del tanque inferior, aplicando el control de equivalencia cierta.

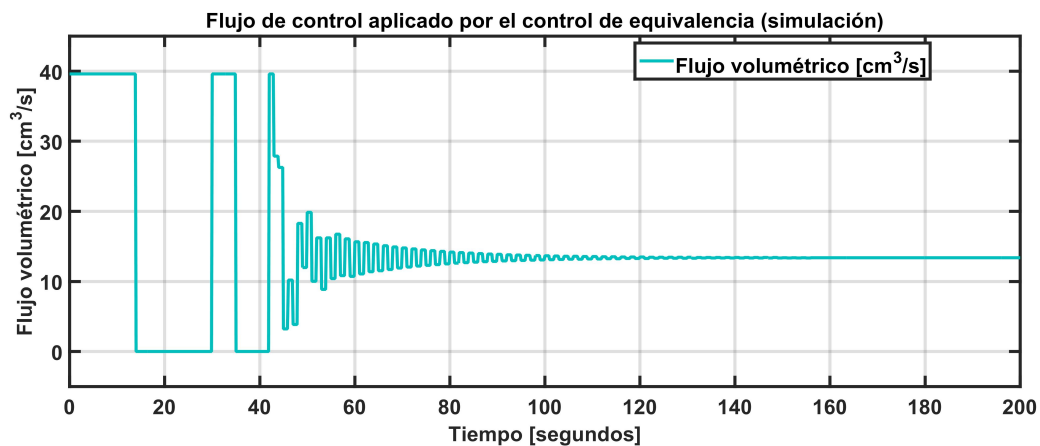


Figura 4.12: Señal aplicada al sistema por el control de equivalencia cierta.

4.2. Controladores no lineales.

Con los controladores no lineales propuestos se busca realizar la regulación de un intervalo de alturas mayor que el que se consigue con un controlador lineal. Además, de un control de seguimiento que se adapte al cambio en uno de los parámetros del sistema.

4.2.1. Control difuso.

Para desarrollar el control difuso, se utiliza la herramienta Fuzzy de Matlab, con la cual se diseñan las funciones de membresía requeridas. Las variables que se utilizan para el diseño del control difuso son: la altura actual del sistema y la altura deseada; ambas se dividen en tres intervalos que representan las funciones de membresía deseadas. Los intervalos se definen de acuerdo a lo mostrado en la tabla 4.1. y las funciones de

Altura actual	[<i>cm</i>]	Altura deseada	[<i>cm</i>]
baja	0-10	baja	0-10
media	10-20	media	10-20
alta	20-30	alta	20-30

Tabla 4.1: Definición de los intervalos para la altura actual y la altura deseada.

membresía se realizan utilizando la forma Gaussiana:

$$A(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.12)$$

Para cada una de las seis funciones de membresía, el valor de σ y el centro en donde se encuentran se indican en la tabla 4.2:

Función de membresía	σ	centro
AAb	4.3360	0.0000
AAm	2.4940	10.0000
AAa	4.1471	20.0000
ADb	5.1911	0.0000
ADm	2.0000	10.0000
ADa	5.6850	20.0000

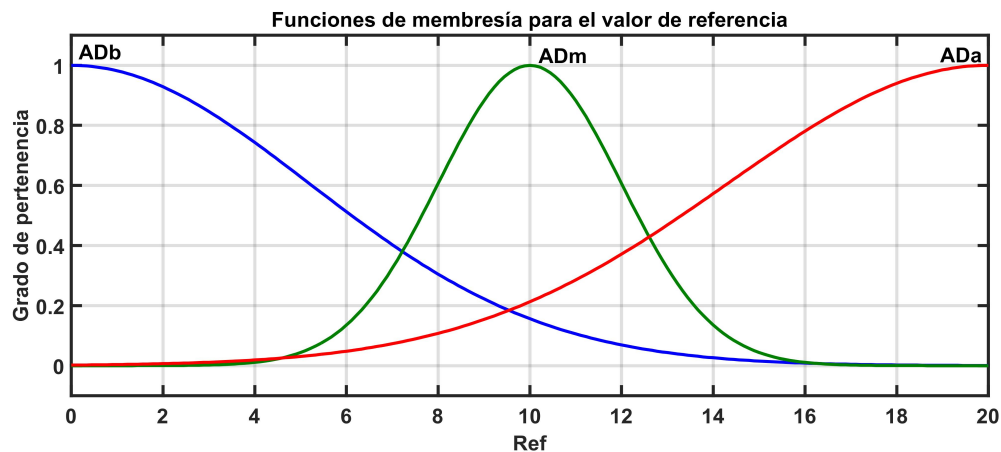
Tabla 4.2: Valores de las características de cada función de membresía.

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

Las funciones de membresía de cada una de las dos señales tomadas como entradas al control difuso, se muestran en la Fig. 4.13.



(a) Funciones de membresía para h_2



(b) Funciones de membresía para la referencia

Figura 4.13: Funciones de membresía usadas en el diseño del control difuso.

El flujo de salida mediante el cual se alimenta al sistema, toma los valores de salida que se encuentran descritos en la tabla 4.3, utilizando conjuntos Singleton para ello.

Flujo	nulo	poco	medio	alto	muy alto	máximo
$[cm^3]$	0.0000	12.0000	20.0000	27.0000	34.0000	39.6000

Tabla 4.3: Flujos de salida.

Con estas características, realizando cada una de las combinaciones posibles, se definen nueve reglas para el controlador difuso, estas reglas son las siguientes:

- *si el valor deseado es pequeño y la altura actual es pequeña, entonces: el flujo es pequeño.*
- *si el valor deseado es pequeño y la altura actual es mediana, entonces: el flujo es nulo.*
- *si el valor deseado es pequeño y la altura actual es alta, entonces: el flujo es nulo.*
- *si el valor deseado es mediano y la altura actual es pequeña, entonces: el flujo es muy alto.*
- *si el valor deseado es mediano y la altura actual es mediana, entonces: el flujo es alto.*
- *si el valor deseado es mediano y la altura actual es alta, entonces: el flujo es nulo.*
- *si el valor deseado es alto y la altura actual es pequeña, entonces: el flujo es máximo.*
- *si el valor deseado es alto y la altura actual es mediana, entonces: el flujo es muy alto.*
- *si el valor deseado es alto y la altura actual es alta, entonces: el flujo es mediano.*

Cabe señalar que estas reglas no son únicas.

De esta forma la superficie de control obtenida mediante estas reglas se muestra en la Fig. 4.14.

Aplicando el control al sistema, se obtienen la respuesta que se mostrada en la Fig. 4.15. Se observa que el sistema se comporta de la manera en la cual se realiza el diseño, mostrando un error en estado permanente de alrededor del 5%.

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

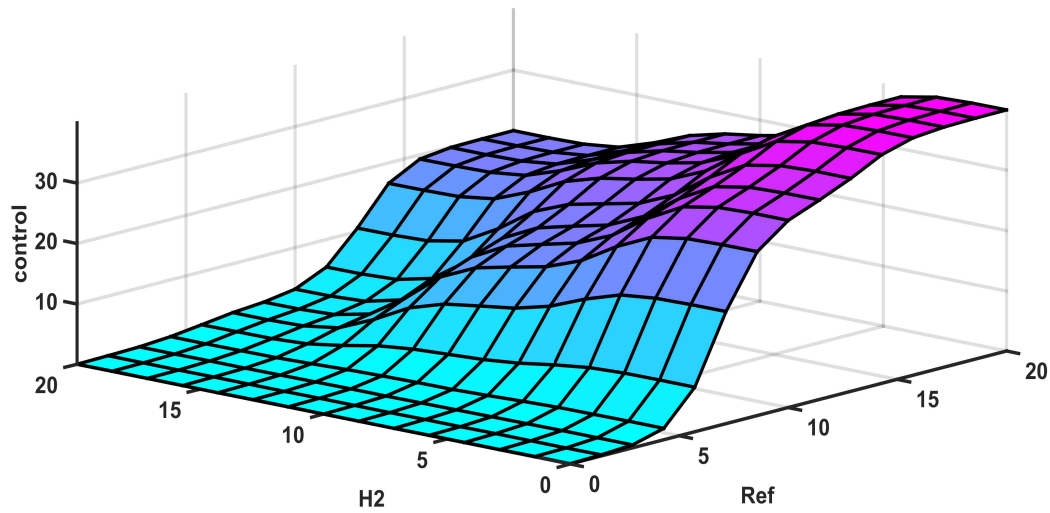


Figura 4.14: Superficie de control.

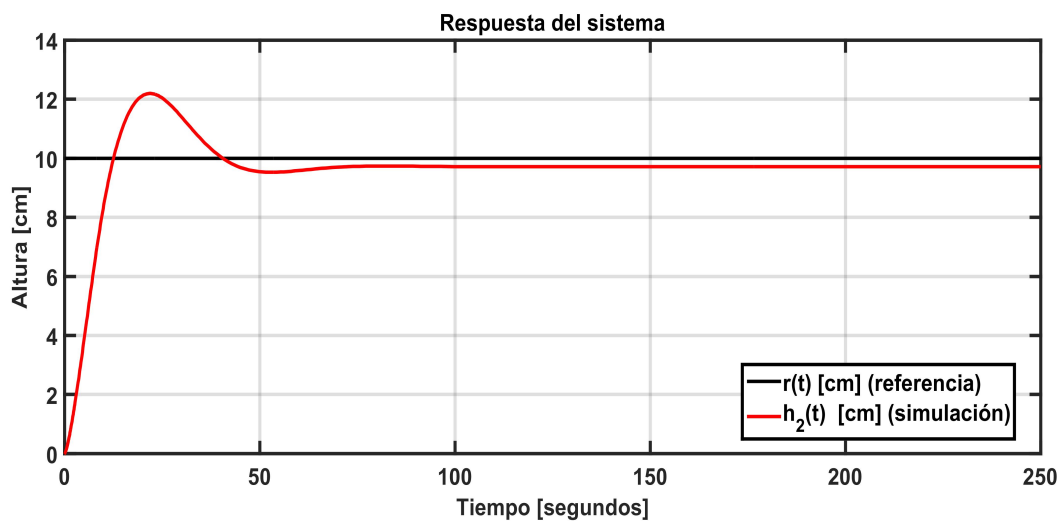


Figura 4.15: Altura del tanque inferior utilizando el control difuso diseñado.

La señal generada por el control difuso para obtener esta altura se muestra en la Fig. 4.16

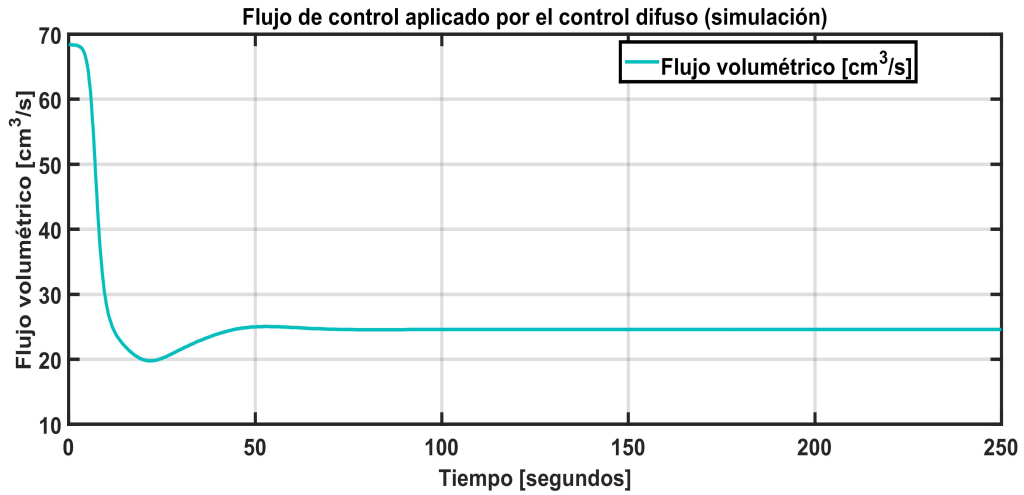


Figura 4.16: Señal de control difuso.

4.2.2. Control por linealización por realimentación de estados.

Se diseña un control por linealización por realimentación de estados. En este caso se representa el modelo del sistema de tanques mediante:

$$\dot{h}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{A} \sqrt{|h_1(x)|} + \frac{1}{A} u \\ \frac{c_1}{A} \sqrt{|h_1(x)|} - \frac{c_2}{A} \sqrt{|h_2(x)|} \end{pmatrix}, \quad y = h_2, \quad (4.13)$$

donde $h_1(x) = h_1$ y $h_2(x) = h_2$ son las alturas de los tanques, $c_1 = a_1 \sqrt{2g}$, $c_2 = a_2 \sqrt{2g}$ con a_1 y a_2 las áreas de los orificios de salida de cada tanque y g la aceleración asociada a la gravedad.

Se busca obtener una linealización de la forma de la Ec. (2.40), por lo cual se calculan las derivadas de Lie hasta obtener la salida en términos de la entrada. La primera derivada de la salida es:

$$\frac{dy}{dt} = L_f m(x) + L_g m(x) u,$$

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

con:

$$L_f m(x) = \frac{c_1}{A} \sqrt{|h_1|} - \frac{c_1}{A} \sqrt{|h_2|},$$

$$L_g m(x) = 0.$$

Al obtener la segunda derivada de la salida, en vista de que no se ha obtenido la salida en términos de la entrada, se tiene:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = L_f^2 m(x) + L_f L_g m(x) u,$$

$$L_f^2 m(x) = -\frac{c_1 c_2}{2A^2} \sqrt{\left| \frac{h_1}{x_2} \right|},$$

$$L_f L_g m(x) = \frac{c_1}{2A^2 \sqrt{|h_1|}} \neq 0,$$

en donde la salida se encuentra representada en términos de la entrada, utilizando la Ec. (2.41) se tiene el control ideal:

$$u^* = \frac{1}{L_f L_g m(x)} (-L_f^2 m(x) + v) = \frac{c_1 h_1}{\sqrt{|h_2|}} + \frac{2A^2 \sqrt{|h_1|}}{c_1} v,$$

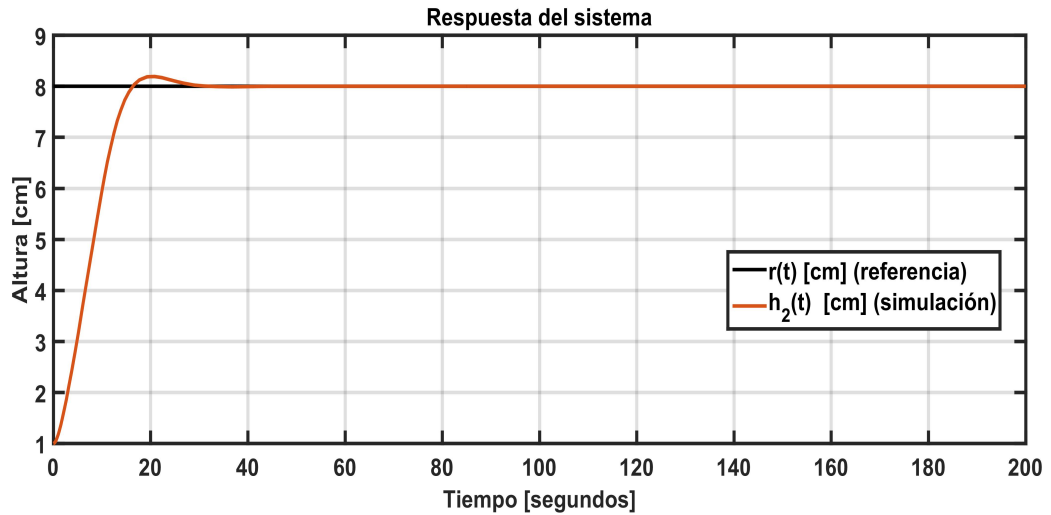
con el control v :

$$v = -k_1 \dot{y} - k_2 y + r(t), \quad (4.14)$$

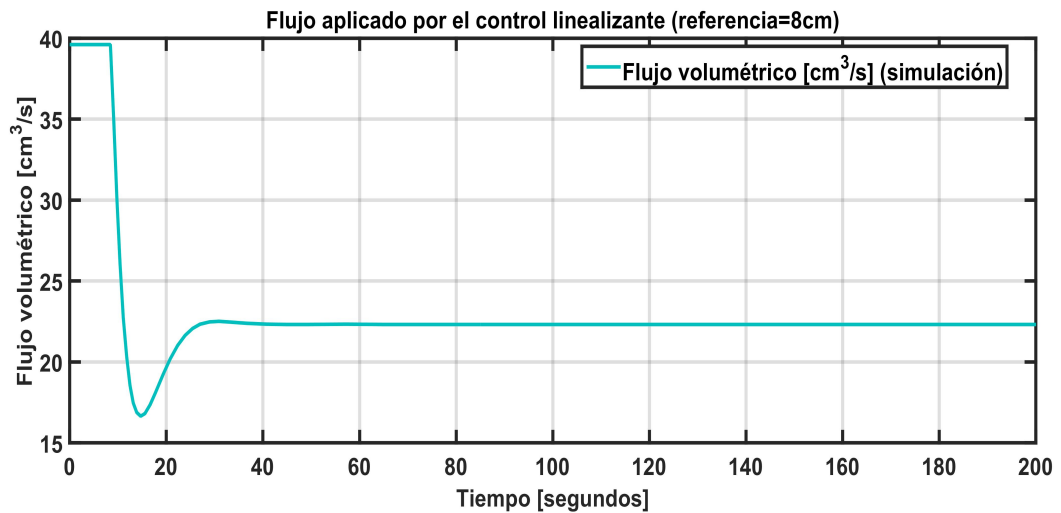
donde: $r(t) = R \forall t \geq 0$, y el punto de equilibrio:

$$R = k_2 Y_d, \quad (4.15)$$

Con este diseño se regula la altura del sistema en el valor deseado. La respuesta del sistema y la señal de control correspondiente para una referencia de 8 cm se muestra en la Fig. 4.17.



(a) Respuesta del sistema.

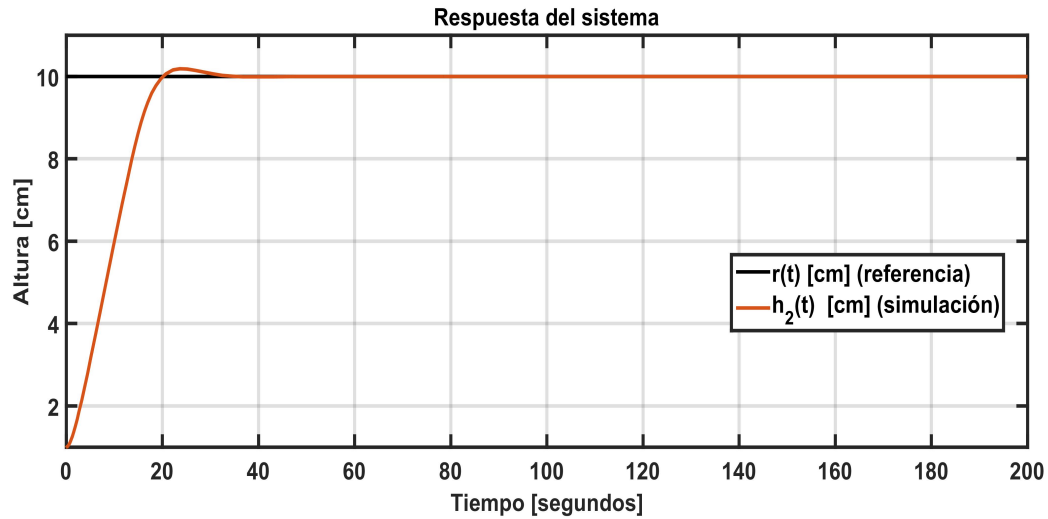


(b) Señal de control.

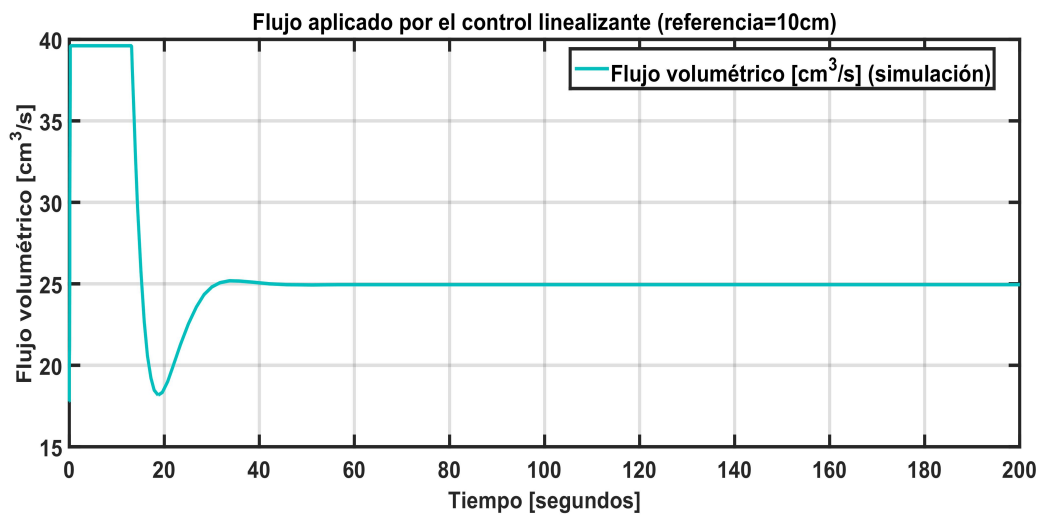
Figura 4.17: Regulación mediante el control por linealización por realimentación de estados para una referencia de 8 cm.

La respuesta del sistema y la señal de control correspondiente para una referencia de 10 cm se muestra en la Fig. 4.18.

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.



(a) Respuesta del sistema.



(b) Señal de control.

Figura 4.18: Regulación mediante el control por linealización por realimentación de estados para una referencia de 10 cm.

La respuesta del sistema y la señal de control correspondiente para una referencia de 12 cm se muestra en la Fig. 4.19.

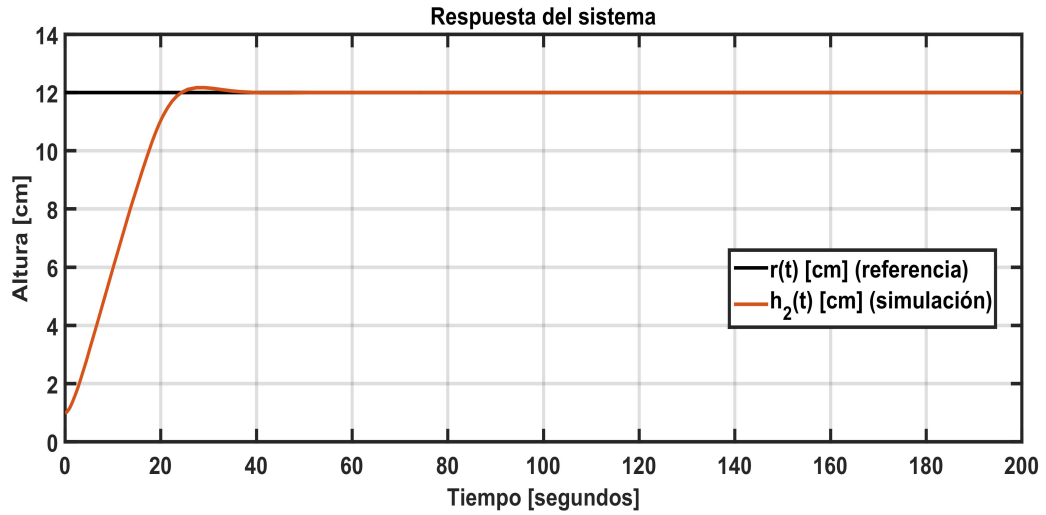
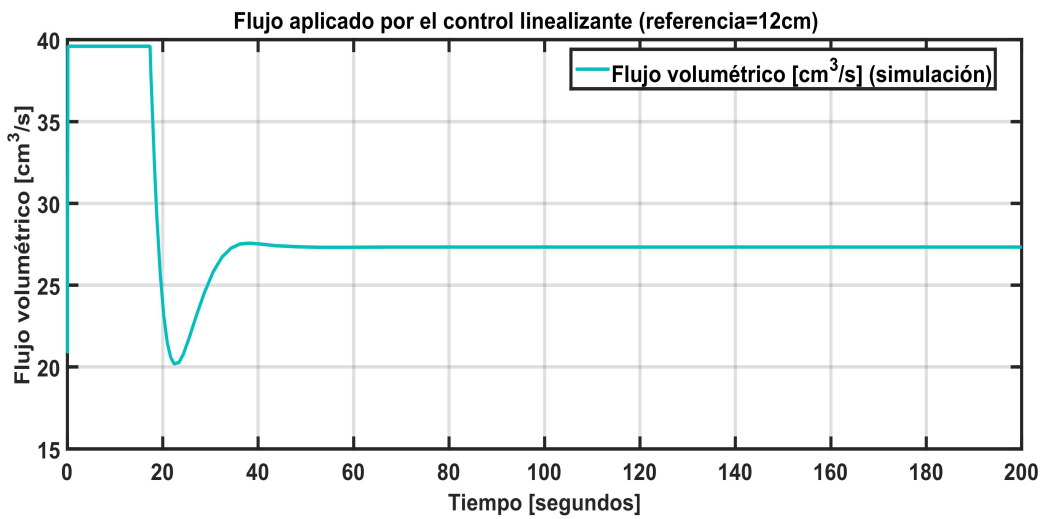
(a) *Resposta del sistema.*(b) *Señal de control.*

Figura 4.19: Regulación mediante el control por linealización por realimentación de estados para una referencia de 12 cm.

Las respuestas se obtienen con el valor de las constantes de control:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0.2.$$

4.2.3. Control adaptable pasivo con algoritmo PI.

Mediante este control se realiza el seguimiento de una señal senoidal y se estimar un parámetro del sistema, en este caso el parámetro que cambia es el área del orificio de salida del tanque inferior. Se considera el sistema representado por la Ec.(4.13), con la parametrización:

$$\theta_1 = \frac{c_1}{A}, \quad \theta_2 = \frac{c_2}{A},$$

con θ_2 el parámetro que presenta el cambio. Entonces el sistema tiene la forma:

$$\dot{h}(x) = \begin{pmatrix} -\theta_1 \sqrt{|h_1(x)|} \\ \theta_1 \sqrt{|h_1(x)|} - \theta_2 \sqrt{|h_2(x)|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad (4.16)$$

para lograr la linealización entrada-estado, se define a la salida como:

$$y = \sqrt{|h_2(x)|},$$

con $h_1(x) = h_1$ y $h_2(x) = h_2$ son las alturas de los tanques. Utilizando la estructura del control por linealización entrada-estado, se define el difeomorfismo $z = T(x)$, con:

$$z_1 = m(x) = \sqrt{|h_2|}, \quad z_2 = L_f m(x) = -\frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_1}{2} \sqrt{\frac{|h_1|}{|h_2|}},$$

de esta manera, el sistema transformado resultante es:

$$\dot{z} = A_c z + B_c z \gamma(x)(u(t) - \alpha(x)),$$

con la salida definida:

$$y(t) = \sqrt{|h_2|} = m(x),$$

donde:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(x) = -\theta_2 A \frac{|h_1|}{\sqrt{|h_2|}} + \theta_1 A \left(\frac{|h_1|^{3/2}}{|h_2|} + \sqrt{|h_1|} \right),$$

$$\gamma(x) = \frac{\theta_1}{4A\sqrt{|h_1||h_2|}}$$

Se define la realimentación de estados *ideal*, asumiendo todos los parámetros conocidos:

$$u^*(t) = \theta_2 \phi_1(x) + \phi_2(x) + \frac{1}{\gamma(x)} v(t).$$

Sin embargo, al desconocer el valor del parámetro θ_2 , se define el controlador mediante la estimación $\hat{\theta}_2$ como:

$$u(t) = \hat{\theta}_2 \phi_1(x) + \phi_2(x) + \frac{1}{\gamma(x)} v(t),$$

con los valores de:

$$\phi_1 = -A \frac{|h_1|}{\sqrt{|h_2|}},$$

$$\phi_2 = \theta_1 A \left(\frac{|h_1|^{3/2}}{|h_2|} + \sqrt{|h_1|} \right),$$

$$v(t) = -k_s s + \ddot{y}_r.$$

Finalmente, con este control agregado, el sistema en lazo cerrado tiene la forma:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \tilde{\theta}_2 \gamma(x) \phi_1(x) - k_s s + \ddot{y}_r \end{pmatrix}$$

donde:

$$\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2, \quad s = \dot{y} - \dot{y}_r, \quad y_r \text{ es la señal de referencia, } \dot{y}_r = \dot{y}_d - \lambda e, \quad \lambda > 0, \quad k_s > 0,$$

$$e = y(t) - y_d(t) \text{ y } \dot{s} = \tilde{\theta}_2 \gamma(x) \phi_1(x) - k_s s.$$

Se busca la existencia de un algoritmo pasivo desde $s \rightarrow -\gamma(x) \phi_1(x) \hat{\theta}_2$ [5], que

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

cumpla con la condición:

$$-\int_0^t s\gamma(x)\phi_1(x)\tilde{\theta}_2 d\tau > -\beta; \quad t > 0, \beta > 0. \quad (4.17)$$

En este caso, definiendo la función positiva definida:

$$V(s, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{2}s^2 + \beta - \int_0^t s\gamma(x)\phi_1(x)\tilde{\theta}_2 d\tau > 0,$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V} = -k_s s^2 \leq 0,$$

que cumple con la condición de la Ec. (2.47) y con esto ser acotada.

Uno de los algoritmos que cumple con la condición dada por la Ec. (4.17), es el *algoritmo adaptable proporcional-integral*, que se basa en el algoritmo de Tyukin et. al [2007], el cual está dado por la descomposición de $\hat{\theta}_2$ en un término *proporcional* y otro *integral*, ambos dependientes de s .

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_{2-I}(t) + \hat{\theta}_{2-P}(s),$$

donde:

$$\hat{\theta}_{2-I} = -\delta_I \gamma(x)\phi_1(x)s, \quad \hat{\theta}_{2-P} = -\delta_P \gamma(x)\phi_1(x)s,$$

con error de parámetros:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_2 &= \tilde{\theta}_{2-I} + \tilde{\theta}_{2-P}, \\ \tilde{\theta}_{2-I} &= \hat{\theta}_{2-I} - \theta_2, \\ \tilde{\theta}_{2-P} &= \hat{\theta}_{2-P}. \end{aligned}$$

El controlador se diseña empleando:

$$k_s = 1, \lambda = 0.1, \delta_I = 10, \delta_P = 10,$$

considerando una altura deseada:

$$h_{2d} = 2 \sin 0.1t + 6 \text{ [cm]}. \quad (4.18)$$

Con las características del sistema físico, el parámetro θ_2 tiene un valor de: $\theta_2 = 0.5083$. Si el parámetro cambia en el segundo 250 a un valor igual a $\theta_2 = 1.2(0.5083)$ el control adaptable con algoritmo pasivo PI tiene una respuesta que se muestra en la Fig. 4.20.

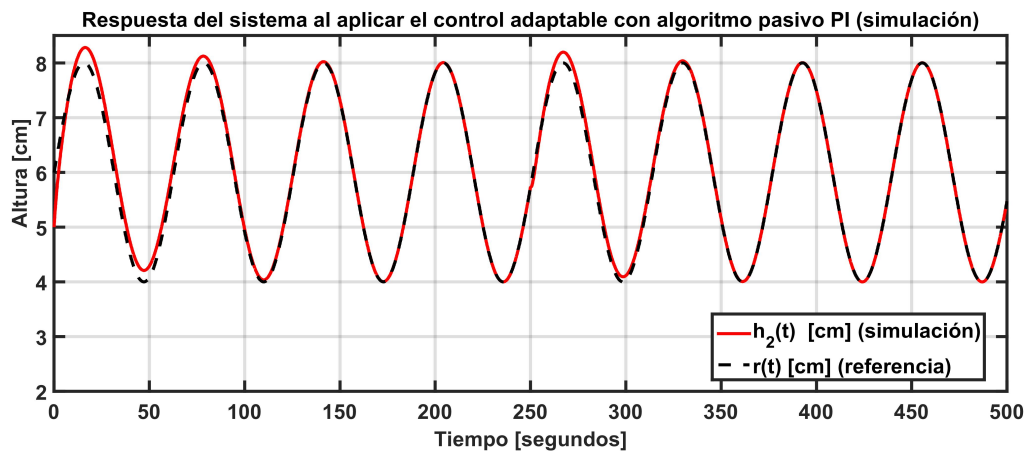


Figura 4.20: Altura del tanque inferior con el control adaptable pasivo PI.

La señal de control generada se muestra en la Fig. 4.21.

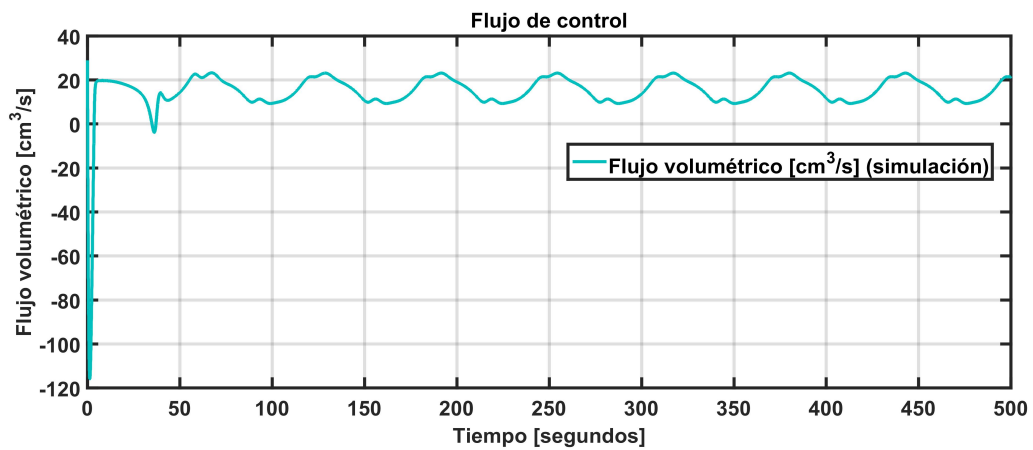


Figura 4.21: Señal control adaptable pasivo PI.

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

El cambio de parámetro se observa en la Fig. 4.22.

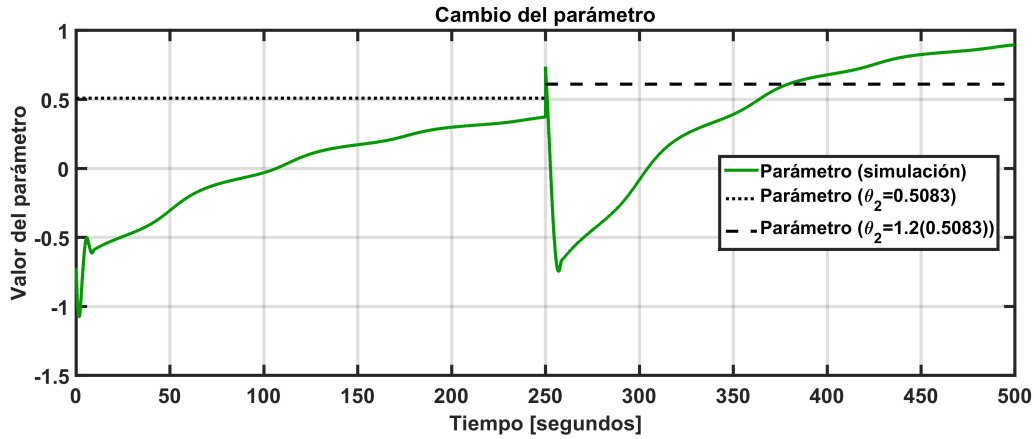


Figura 4.22: Cambio en el parámetro θ_2 en el sistema.

4.3. Observador adaptable.

En la mayoría los controladores diseñados anteriormente solamente se mide el valor de la altura del tanque inferior, es decir el valor del tanque superior es desconocido; por otra parte el control adaptable se diseñó para adaptarse a un pequeño cambio en el área del orificio del flujo de salida. Por estas razones si se desconoce el estado del tanque superior y también el valor del parámetro de salida del tanque inferior se diseña un observador adaptable que pueda reconstruir tanto el valor del estado y estimar el valor del parámetro desconocido. Además, se desea obtener el valor del parámetro que afecta al flujo de entrada.

Se tiene el sistema representado por las ecuaciones

$$\dot{h}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1\sqrt{2g}}{A_1} & 0 \\ \frac{a_1\sqrt{2g}}{A_1} & -\frac{a_2\sqrt{2g}}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}.$$

Este puede reescribirse de la forma:

$$\dot{h}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_2 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

con $\alpha_1 = \frac{a_1\sqrt{2g}}{A_1}$, $\alpha_2 = \frac{a_2\sqrt{2g}}{A_2}$ y $\beta = \frac{1}{A_1}$. De esta forma la representación de la Ec. (2.53) para el sistema es:

$$\dot{h}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(t) & 0 \\ 0 & y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{h}(t) = \begin{bmatrix} -0.3976 & 0 \\ 0.3976 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(t) & 0 \\ 0 & y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Con la nueva matriz A , la matriz C y los polos deseados $[-8, -18]$ se diseña el observador $L(t)$, el cual tiene los valores:

$$L_1 = \mathbf{336.6161}, \quad L_2 = \mathbf{25.6024}. \quad (4.19)$$

Finalmente se diseñan las matrices Γ y Σ , para implantar el observador de la Ec. (2.57), estas matrices tienen el valor de:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{1000} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1000} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Utilizando estos valores, el vector de parámetros aproximados es:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0644 \\ -0.4013 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

que se acercan de manera correcta a los valores reales del sistema, éstos son: $\theta_1 = 0.0645$, y $\theta_2 = -0.4013$. El estado estimado $\hat{h}_1(t)$ tiene un valor final de 6.3245 igual al valor final del estado $h_1(t)$ en simulación 6.3245.

La Fig. 4.23 muestra la estimación del estado $h_1(t)$, que se asume desconocido,

4. DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA DE DOS TANQUES EN CASCADA.

mientras que la Fig. 4.24 muestra la aproximación de los parámetros que también se asumieron desconocidos.

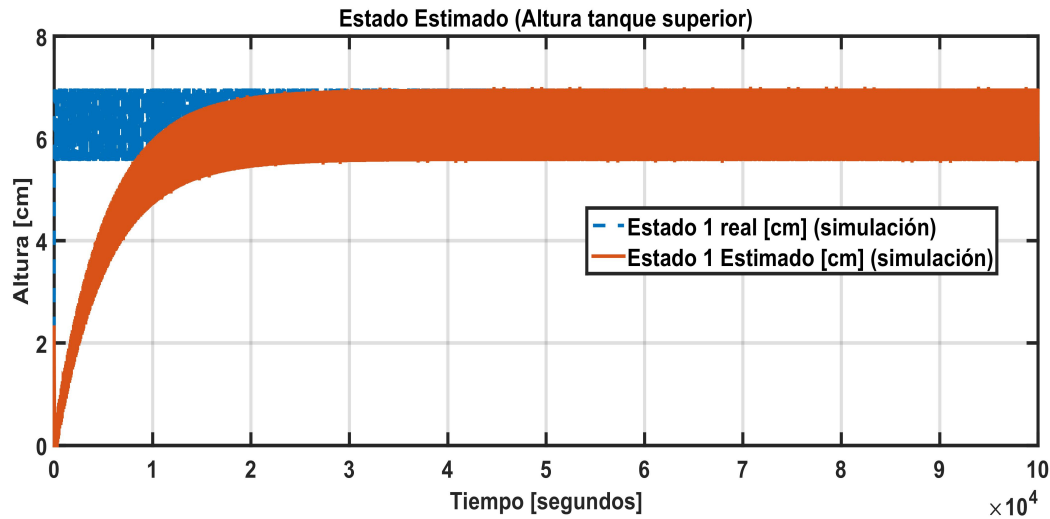


Figura 4.23: Estimación del estado h_1 .

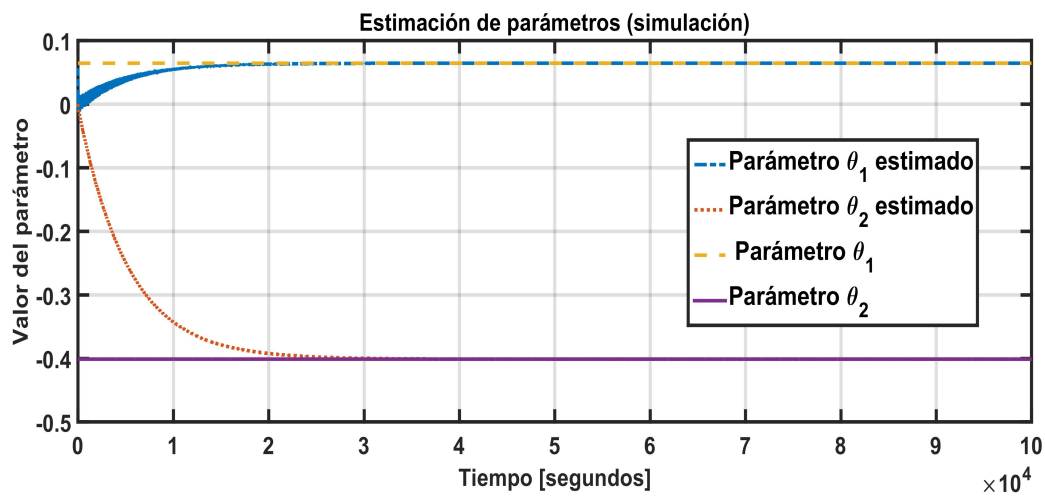


Figura 4.24: Aproximación de los parámetros desconocidos estados θ_1 , θ_2 .

Resultados experimentales.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos al realizar la implantación de cada uno de los controladores, y el observador, diseñados en el capítulo 4. Cada una de las secciones describe la respuesta que tiene el sistema y el flujo que se aplica para conseguirla, el orden en que aparecen es el siguiente: sintonización PI, PD, LQR, equivalencia cierta, difuso, por linealización por realimentación de estados, adaptable con algoritmo pasivo PI y observador adaptable. Finalmente, se muestra la comparativa de los controles de regulación para una altura de 10 [cm] en el tanque inferior.

La configuración con la que se implantan los controladores es mostrada en la Fig. 5.1.

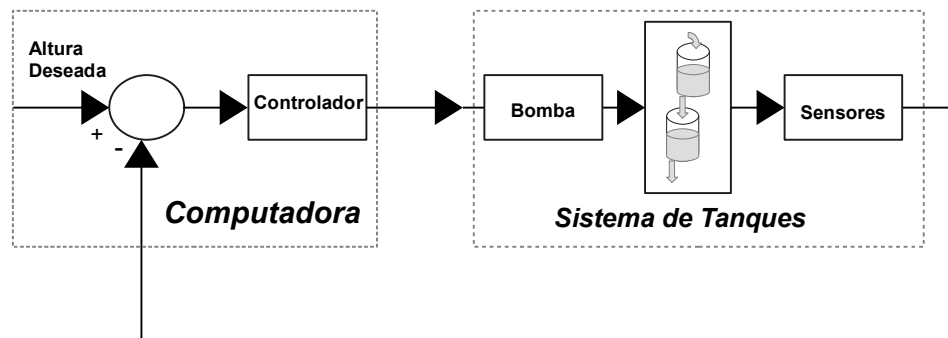


Figura 5.1: Configuración utilizada en la implantación de los controladores.

Los tanques acoplados, la bomba y los sensores son en conjunto el sistema de tanques, por otra parte el control y la señal de referencia se implantan mediante una computadora personal.

5.1. Sintonización PI con predictor de Smith.

Se implantó el control PI con predictor de Smith diseñado con un tiempo de muestreo de 0.1 segundos, las constantes de este control son: $K_p = 13.355$, $K_i = 0.8905$.

En la Fig. 5.2 se muestra la respuesta del sistema con condición inicial $h_2(0) = 0$ [cm], acompañado con los resultados obtenidos en simulación para validar el modelo..

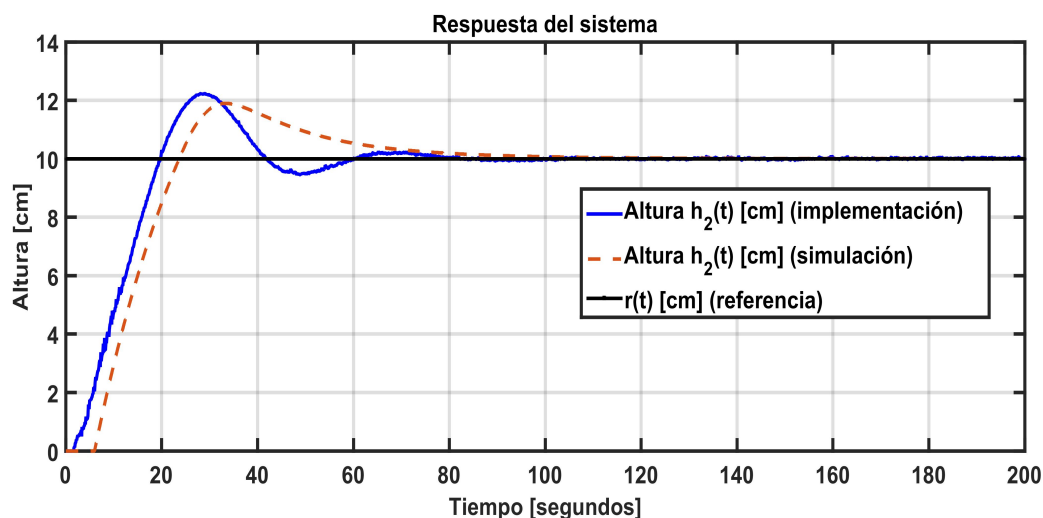


Figura 5.2: Respuesta del control PI implantado.

La respuesta presenta un par de oscilaciones y cumple con la condición de sintonización en la que el primer sobrepaso es cuatro veces mayor que el segundo, obteniendo un sobrepaso máximo del 22.00%. Además, el tiempo de respuesta es de 13.72 [s], el tiempo de asentamiento es 80.00 [s] y presenta un error en estado permanente de 0.10 [cm].

El flujo de control aplicado se indica en la Fig. 5.3. Se observa que el flujo tiene pequeñas oscilaciones en torno al valor en estado estacionario de 20.00 [cm³/s], además se aplica el flujo máximo por 11.90 [s].

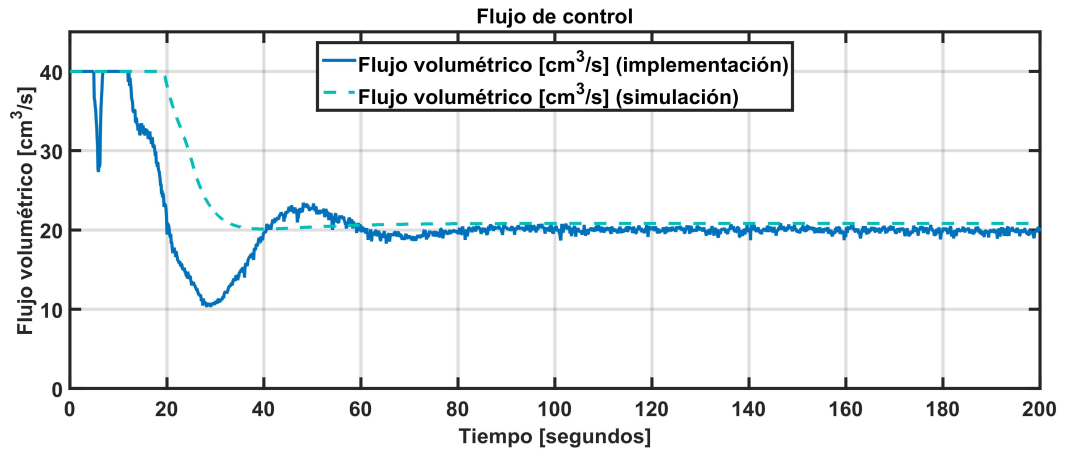


Figura 5.3: Flujo del control PI con predictor de Smith implantado.

5.2. Control PD.

Se implantó el control PD diseñado con los valores de: $k_p = 36.766$, $k_d = 46.88$, y un tiempo de muestreo de 1 segundo, la simulación con la que se valida el modelo y la respuesta del sistema con condición inicial $h_2(0) = 0$ [cm] se muestran en la Fig. 5.4.

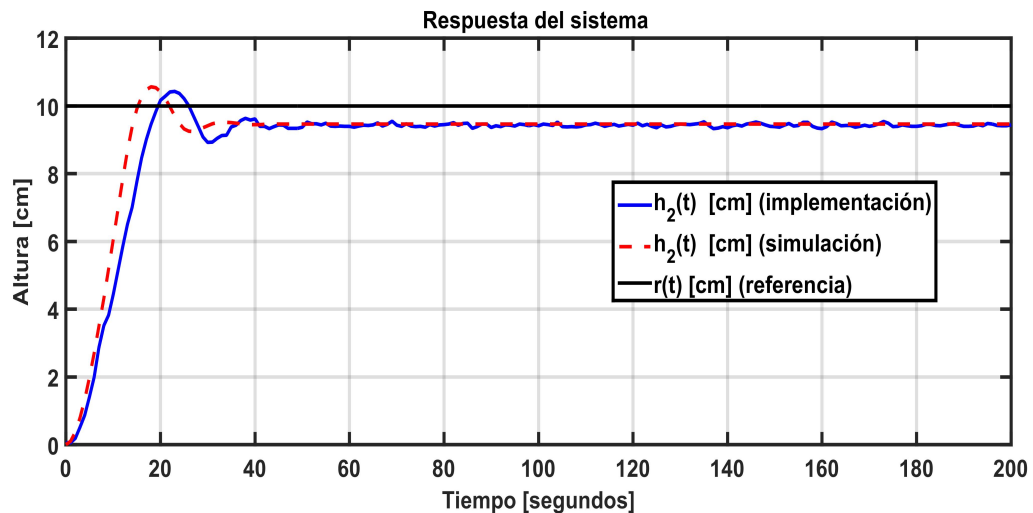


Figura 5.4: Respuesta del control PD implantado.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Esta respuesta tiene un comportamiento con un tiempo de respuesta de 12.80 [s], un sobrepaso de 4.18 %, un tiempo de asentamiento de 51.00 [s] y presenta un error en estado permanente de 0.55 [cm].

En la Fig. 5.5 se observa el comportamiento del flujo de control aplicado.

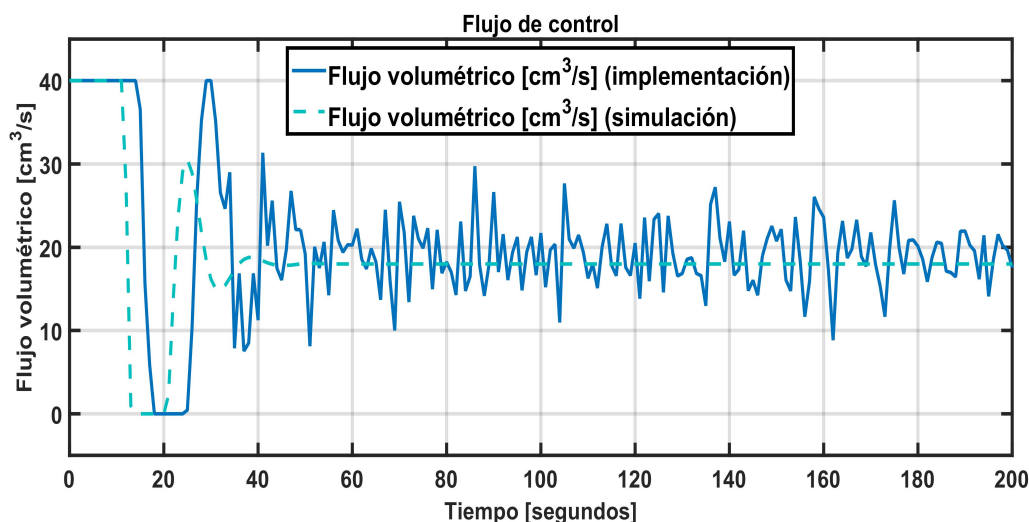


Figura 5.5: Flujo del control PD implantado.

Este flujo presenta cambios en su estado estacionario, con valores máximos de 30.00 [cm³/s] y mínimos de 8.84 [cm³/s], cuyo promedio es 18 [cm³/s].

5.3. Control LQR.

En este control no se debe saturar al actuador y se obtiene la regulación de la altura de cada uno de los tanques en un valor de 10.00 [cm], las ganancias del controlador son:

$$k = [0.9206, 0.3239].$$

El desempeño del sistema partiendo de la condición inicial $h_1(0) = h_2(0) = 0$ [cm] con un tiempo de muestreo de 0.1 segundos, se muestra en la Fig. 5.6.

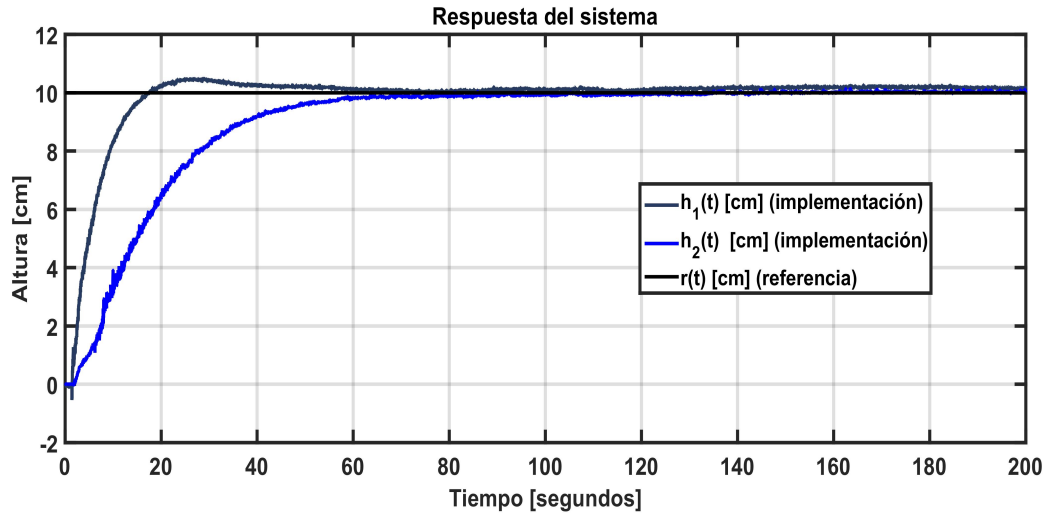


Figura 5.6: Respuesta del control LQR implantado.

En la Fig. 5.7 se muestra la respuesta obtenida para el tanque superior que tiene las siguientes características: tiempo de levantamiento de 10.00 [s], sobrepaso de 0.45 %, tiempo de asentamiento de 60.00 [s] y un error en estado permanente de 0.20 [cm] .

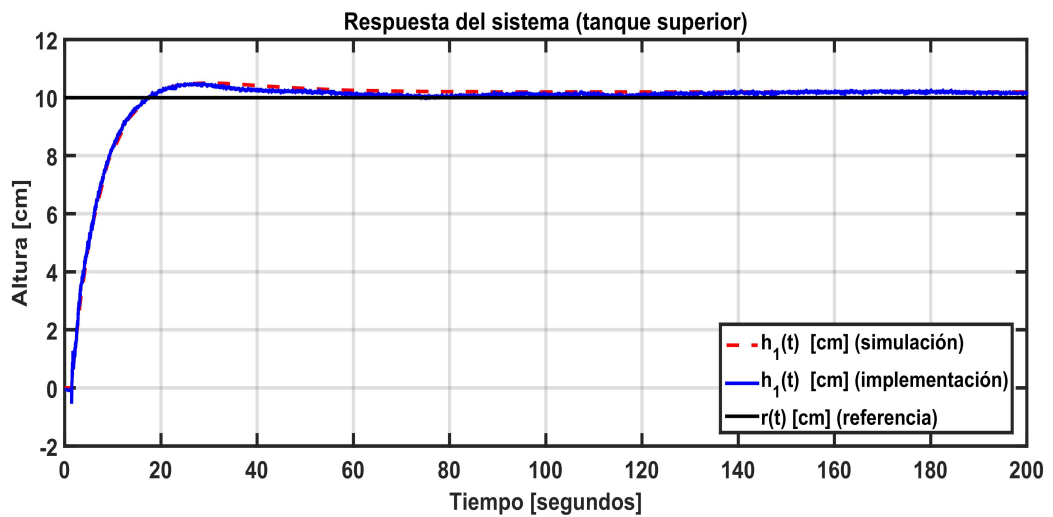


Figura 5.7: Altura del tanque superior.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

La respuesta del tanque inferior se aprecia en la Fig. 5.8, cuyo tiempo de respuesta es de 32.00 [s] y tiempo de asentamiento con valor igual a 60.00 [s], esta respuesta no presenta sobrepaso ni error en estado permanente.

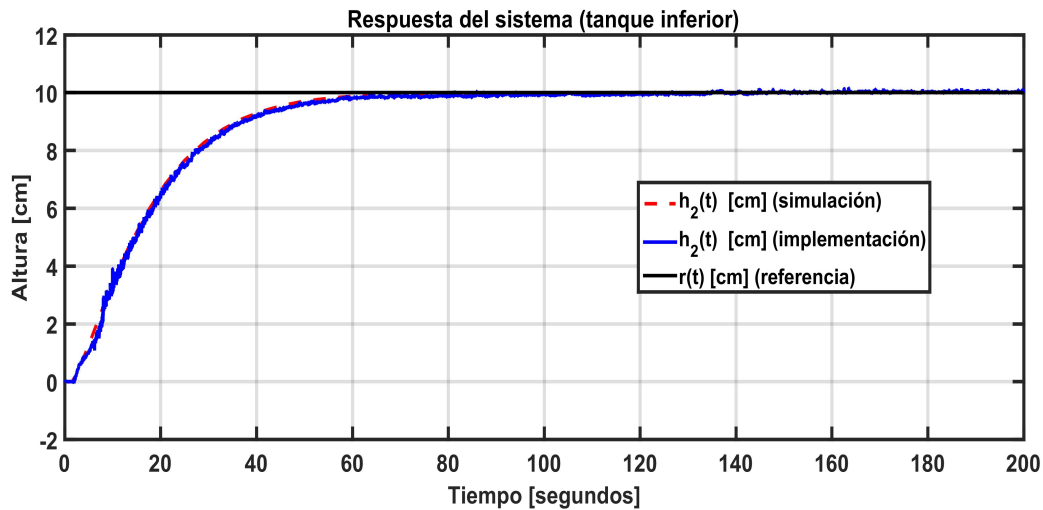


Figura 5.8: Altura del tanque inferior.

El flujo de control se muestra en la Fig. 5.9, se observa que este flujo tiene un valor máximo de 32.40 [cm³/s], presenta un pico de 32.80 [cm³/s] en el segundo 1.44 y un valor en estado estacionario de 19.68 [cm³/s].

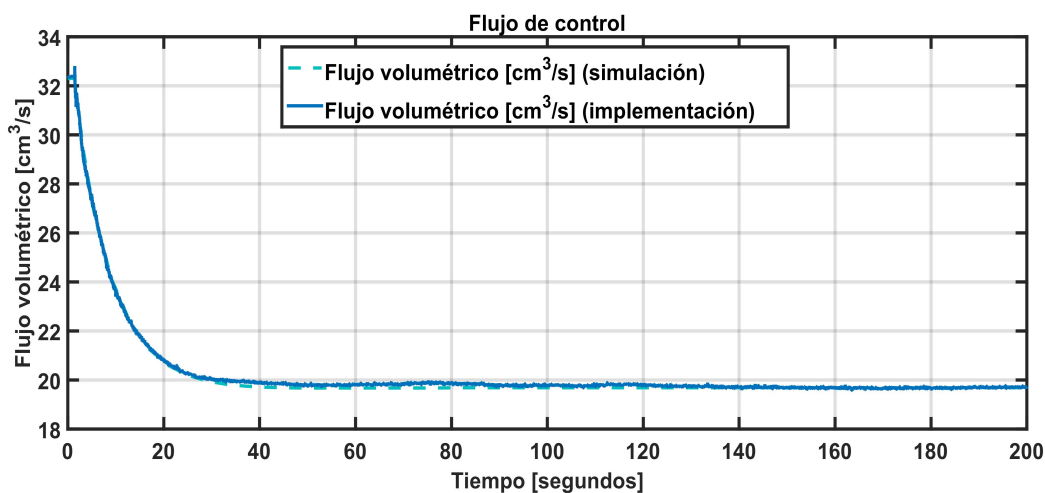


Figura 5.9: Flujo del control LQR implantado.

5.4. Control de equivalencia cierta.

Con base en la Ec. (4.11), los valores del vector de constantes del controlador son:

$$K^T = [-0.89, 0.55].$$

El sistema tiene la respuesta mostrada en la Fig. 5.10 (con la simulación para la validación del modelo) al tener una condición inicial $h_2(0) = 0$ [cm], ésta llega al valor deseado con un tiempo de respuesta de 11.50 [s], un sobrepaso de 14.40 %, un tiempo de asentamiento de 55.00 [s] y un error en estado permanente de 0.20 [cm].

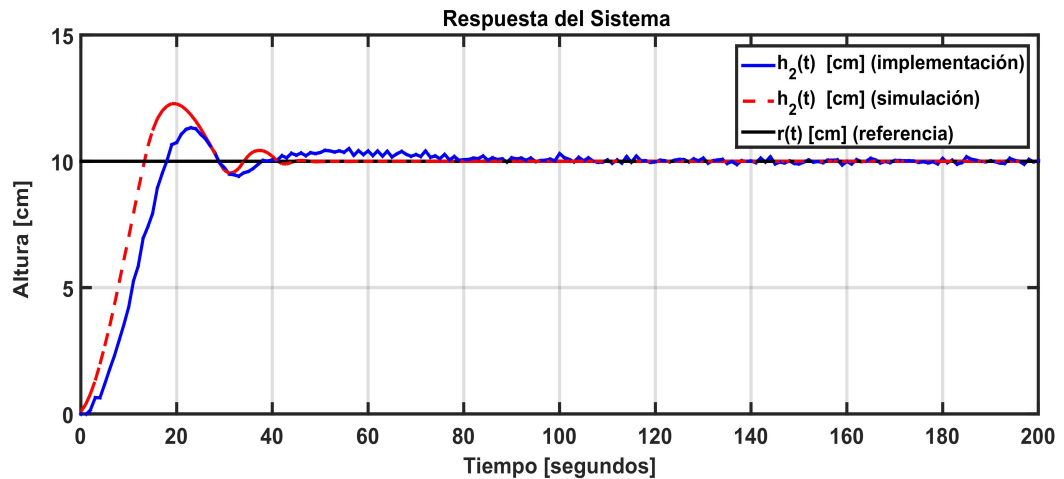


Figura 5.10: Respuesta del control de equivalencia cierta implantado.

Este controlador satura al actuador, desde el valor de máximo (39.60 [cm^3/s]) al mínimo (0.00 [cm^3/s]), en cada uno de los tiempos de muestreo, por lo que se realiza el filtrado para obtener el valor promedio del flujo de control, que es de 20.00 [cm^3/s], en la Fig. 5.11 se aprecia este flujo.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

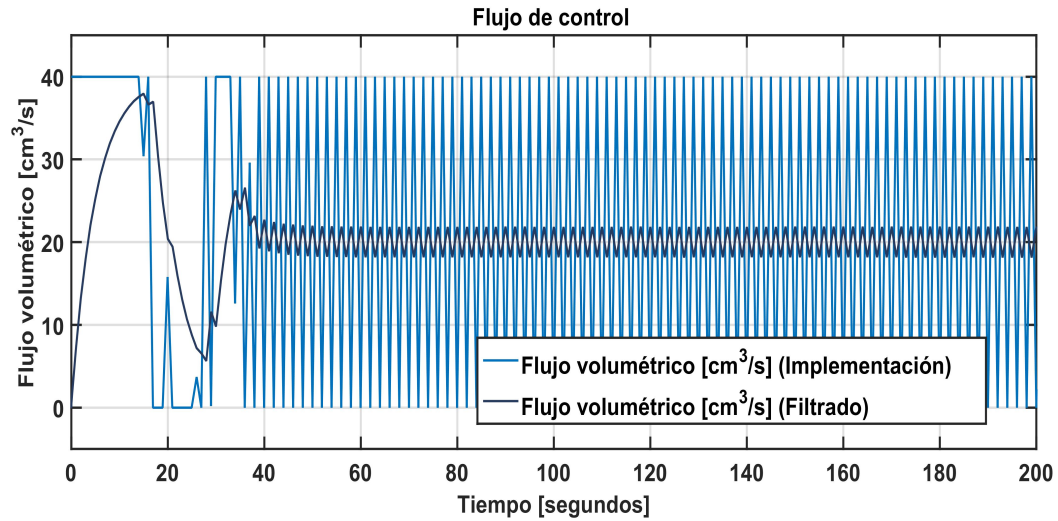


Figura 5.11: Flujo entregado por el control de equivalencia cierta implantado.

5.5. Control difuso.

Con el diseño de la superficie de control de la Fig. 4.14, se obtiene un control con el cual se pueden regular diversas alturas, éstas son mostradas en la Fig. 5.12.

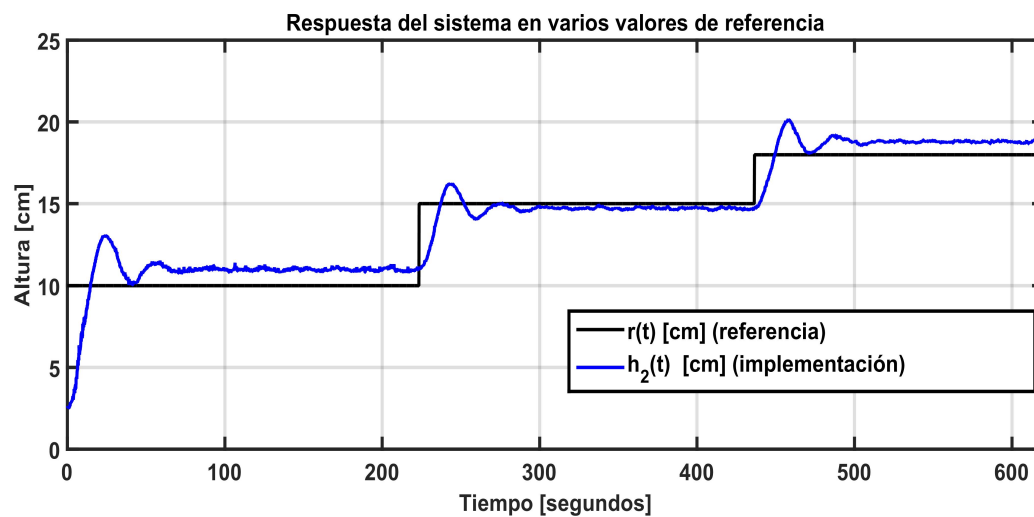


Figura 5.12: Respuesta del control difuso para varias alturas.

Partiendo de la condición inicial $h_2(0) = 2.5 \text{ [cm]}$ para conseguir una altura de 10.00 [cm] , se tiene un tiempo de respuesta de 10.35 [s] , un sobrepaso del 30% , un tiempo de asentamiento de 80 [s] y un error en estado permanente de 1.00 [cm] .

Para el segundo punto de regulación, que es $h_2 = 15 \text{ [cm]}$ se tiene la condición inicial $h_2(223.3) = 11.00 \text{ [cm]}$, un tiempo de respuesta con valor de 9.10 [s] , un sobrepaso del 12.00% , un tiempo de asentamiento de 97.00 [s] y un error en estado permanente de 0.20 [cm] .

Finalmente, el tercer punto de regulación $h_2 = 18 \text{ [cm]}$ partiendo de la condición inicial $h_2(436.4) = 14.8$, presenta un tiempo de respuesta igual a 9.86 [s] , un sobrepaso del 21% , un tiempo de asentamiento de 83.60 [s] , con error en estado permanente de 0.8 [cm] .

En la Fig. 5.13 se muestra el flujo de control para obtener las alturas antes mencionadas.

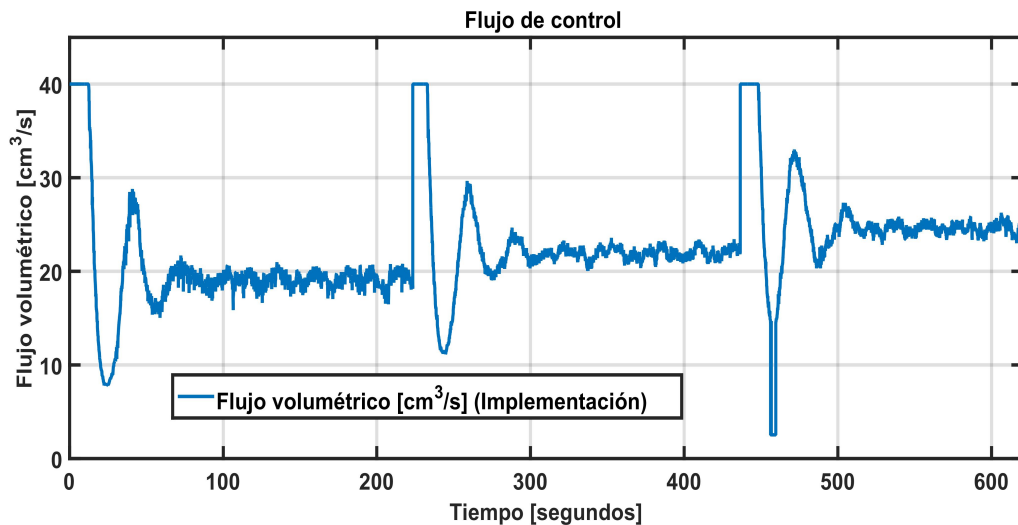


Figura 5.13: Flujo de control generada.

El flujo de control máximo aplicado es de $40 \text{ [cm}^3/\text{s]}$. Para el primer punto de regulación el valor del flujo en estado estacionario, en promedio, de $19.00 \text{ [cm}^3/\text{s]}$, en el segundo punto de regulación el flujo de control promedio es $22.00 \text{ [cm}^3/\text{s]}$ y en el tercer punto el flujo es de $24.50 \text{ [cm}^3/\text{s]}$ en promedio.

5.6. Control por linealización por realimentación de estados.

Se regula el rango de valores de tanque mediante el control realizado con la Ec. (4.14) y cuyas constantes son:

$$k_1 = 1, k_2 = 0.2,$$

la implantación para los valores representados en las Figs. 4.17, 4.18 y 4.19 se muestran en la Fig. 5.14, utilizando un tiempo de muestreo de 1 [s].

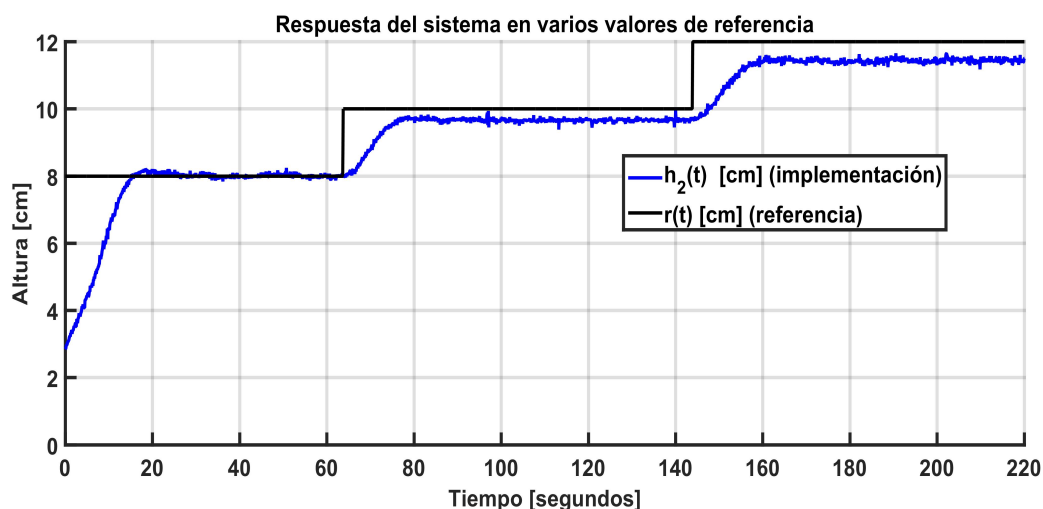


Figura 5.14: Control por linealización por realimentación estados implantado.

En la primera condición inicial, $h_2(0) = 2.85$ [cm], las características de la respuesta son: tiempo de respuesta 8.60 [s], con un sobrepaso del 10.18 %, un tiempo de asentamiento de 22.00 [s], sin error en estado permanente para una altura de 8 [cm]. En la segunda condición inicial donde $h_2(63.62) = 8$ [cm] y la altura deseada son 10 [cm], el tiempo de respuesta es de 8.58 [s], tiempo de asentamiento de 21.38 [s], error en estado permanente de 0.3 [cm], sin sobrepaso. En el último valor de regulación, 12 [cm], partiendo de la condición inicial $h_2(143.82) = 9.7$ [cm] el tiempo de respuesta es de 9.18 [s], el tiempo de asentamiento es 26.18 [s] y error en estado permanente de 0.6 cm.

El flujo de control se muestra en la Fig. 5.15. Se tiene flujo máximo de 39.60 [cm³/s], y para cada uno de los valores de altura deseados el flujo en estado estacionario es: 21.00 [cm³/s], 23.50 [cm³/s] y 25.55 [cm³/s] respectivamente.

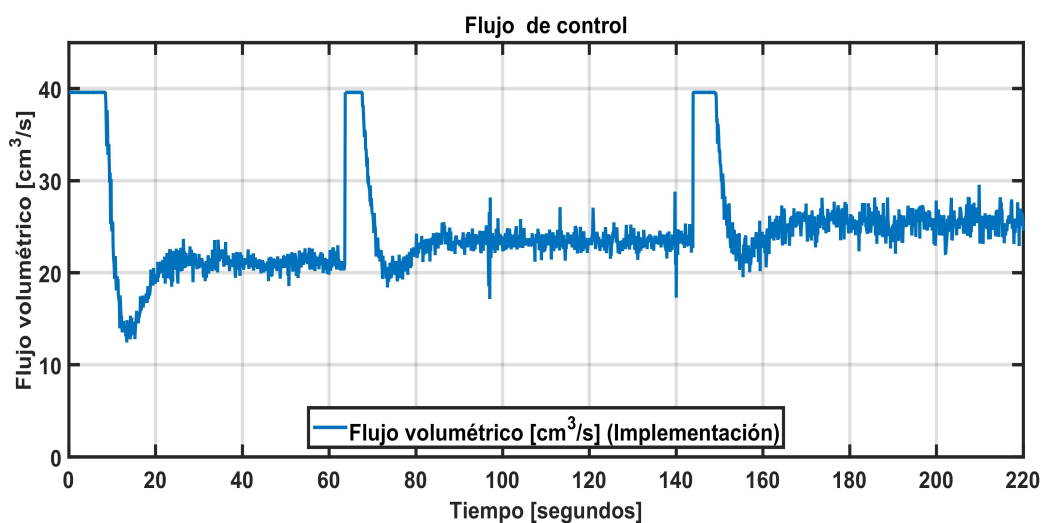


Figura 5.15: Señal de control generada.

Para todo el rango de valores partiendo de la condición inicial $h_2(0) = 5.40$ [cm], mostrado en la Fig. (5.16), se aprecia que la respuesta del sistema presenta una dinámica sobreamortiguada evitando el desborde del tanque superior, que es una de las condiciones necesarias al tener un intervalo de alturas tan amplio. Además, se tiene un error en estado permanente máximo del 5%.

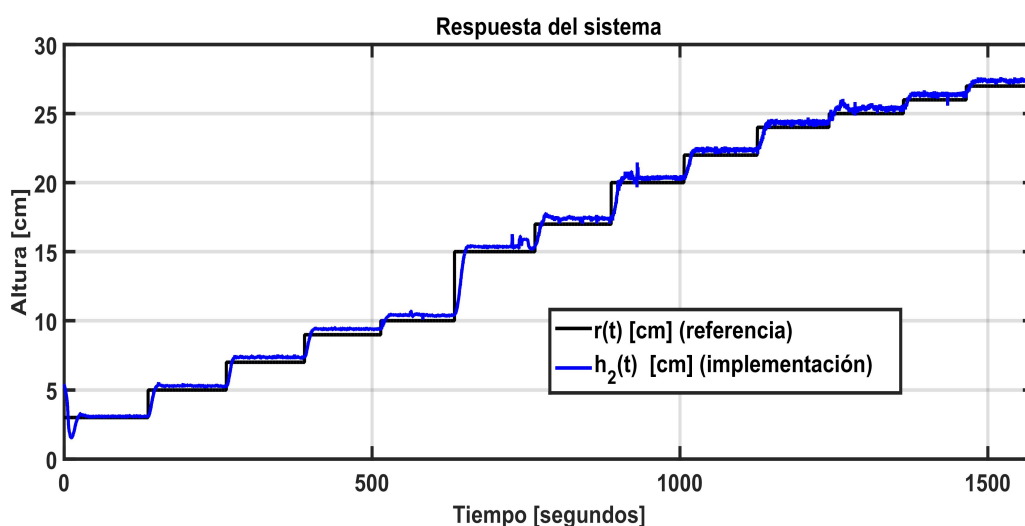


Figura 5.16: Control del rango de alturas del tanque inferior.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

En la Fig. 5.17 se observa el flujo de control para este intervalo de alturas.

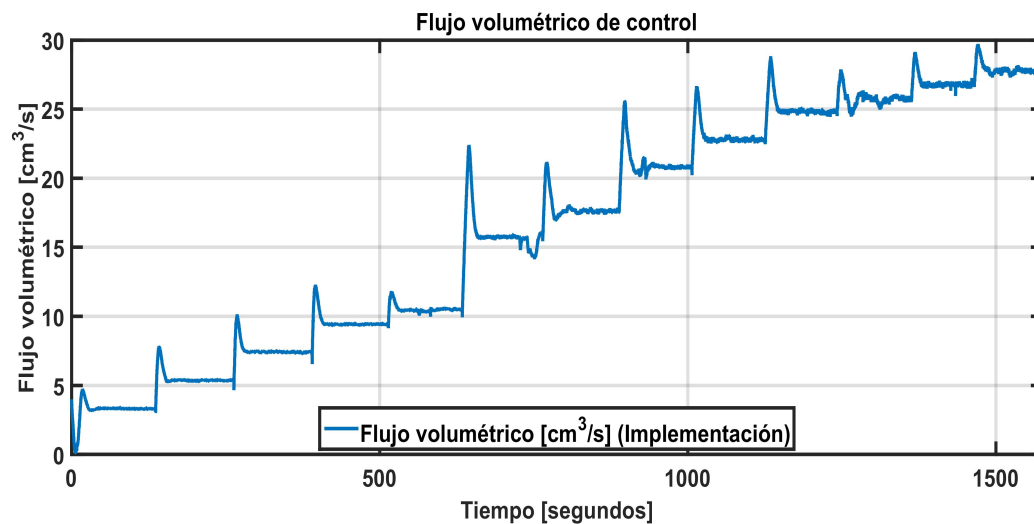


Figura 5.17: Señal de control para el rango de alturas del tanque inferior.

5.7. Control adaptable pasivo con algoritmo PI.

Para este controlador se realiza una modificación en el área del orificio de salida del tanque inferior, cerca del segundo 250, el control debe regular nuevamente y de manera adecuada al sistema tomando en cuenta el cambio de este parámetro.

En la Fig. 5.18 se muestra la respuesta del sistema al seguir una señal senoidal, con condición inicial $h_2(0) = 10.5 [cm]$, tiempo de muestreo de 0.05 segundos y valores del controlador son:

$$k_s = 1, \lambda = 0.1, \delta_I = 10, \delta_P = 10.$$

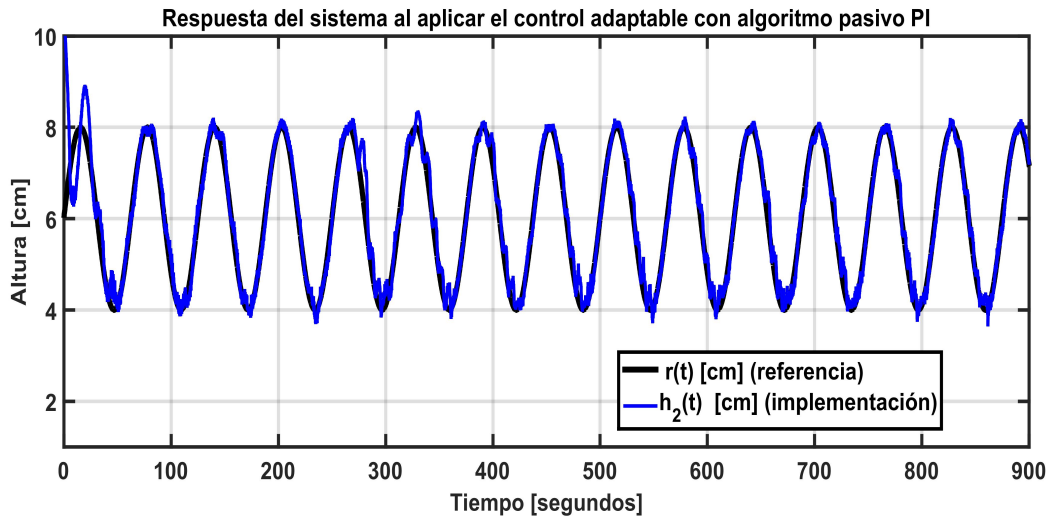


Figura 5.18: Control adaptable con algoritmo pasivo PI de seguimiento.

En ésta se puede observar que el sistema se regula de manera adecuada, sin error en estado permanente y vuelve a obtener la dinámica deseada después del cambiar de parámetro.

El flujo de control satura a la bomba, y se observar que esta señal contiene componentes de alta frecuencia. Al filtrar esta señal, se obtiene la señal de control mostrada en la Fig. 5.19, teniendo oscilaciones entre los valores de $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ y $20 \text{ cm}^3/\text{s}$.

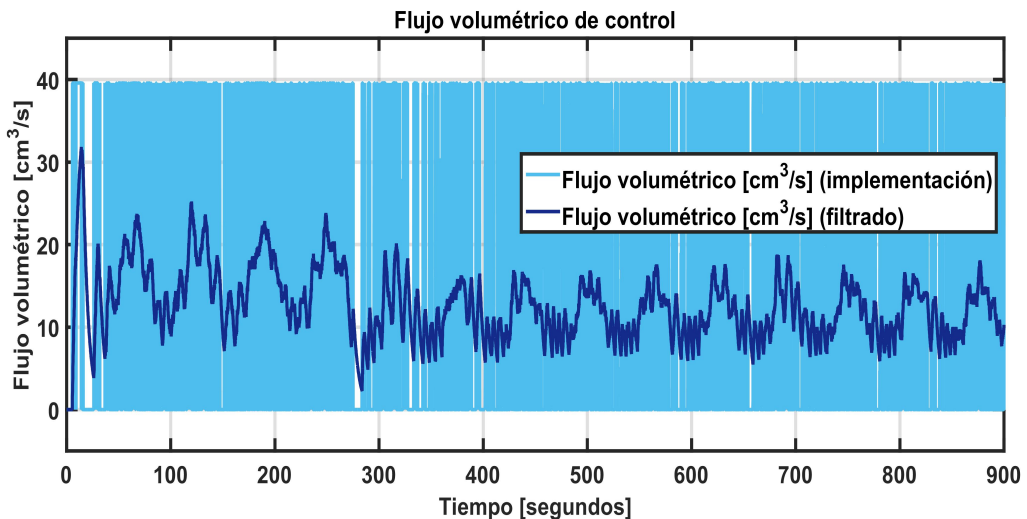


Figura 5.19: Señal de control adaptable con algoritmo pasivo PI implantado.

El parámetro estimado se muestra en la Fig. 5.20.

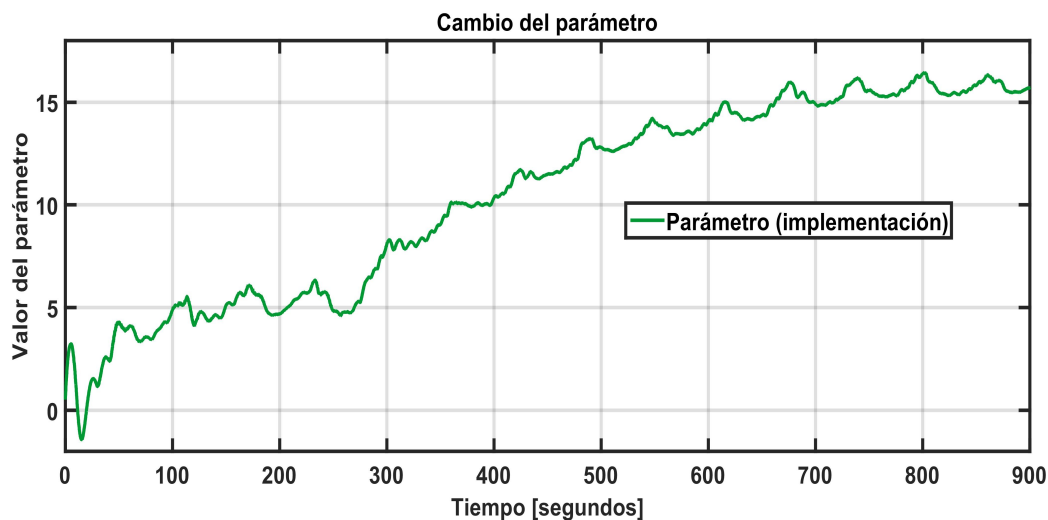


Figura 5.20: Valor del parámetro del orificio de salida del tanque inferior.

El valor del parámetro intenta converger a un valor constante, pero por el ruido en las mediciones no logra converger del todo, aproximándose a un valor de 16.

5.8. Observador adaptable.

Al implantar este observador, con los valores $L_1 = 336.6161$, $L_2 = 25.6024$, condiciones iniciales $h_1(0) = 0$ [cm], $h_2(0) = 0$ [cm], utilizando un tiempo de muestreo de 0.01 segundos, se obtiene la estimación del estado desconocido h_1 mostrada en la Fig. 5.21, en la que se observa una aproximación aceptable del cambio de estado, logrando hacer que los valores de los parámetros desconocidos se aproximen a los valores:

$$\hat{\theta}_1 = 0.2136, \quad \hat{\theta}_2 = -0.4293.$$

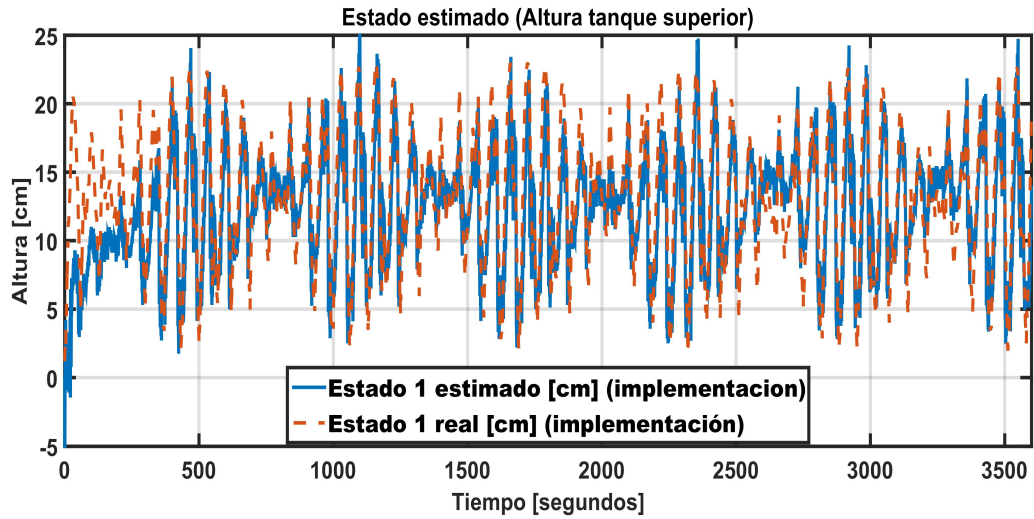


Figura 5.21: Estimación del estado desconocido h_1 .

La dinámica de los parámetros alcanzados se muestra en la Fig. 5.22, que los valores no terminan en un valor único, en virtud de que el ruido afecta a la medición del estado mediante el que se reconstruye tanto estos parámetros como el estado desconocido.

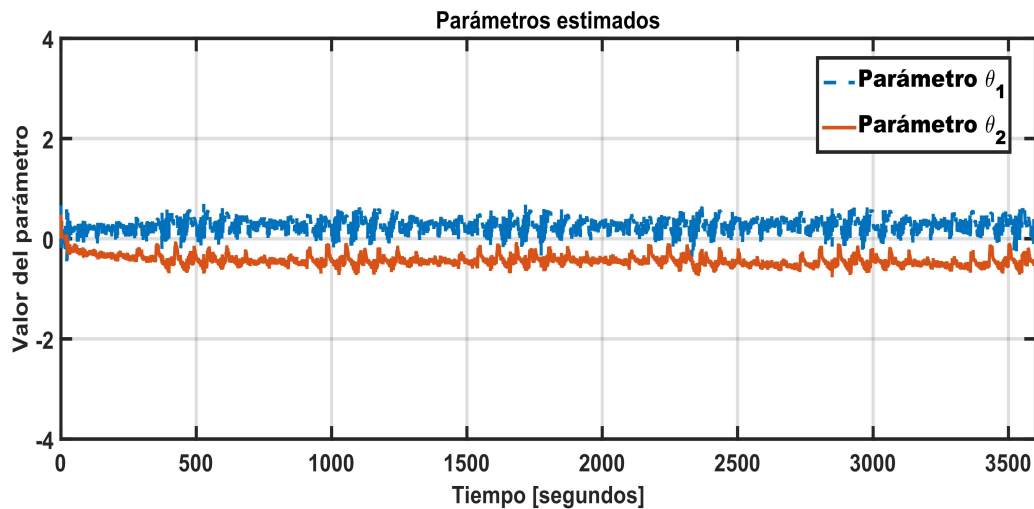


Figura 5.22: Aproximación de los parámetros desconocidos θ_1 y θ_2 .

5.9. Comparación de desempeño entre los controles de regulación.

En esta sección se muestra una comparación del desempeño de los controladores diseñados para regulación, éstos son:

- Sintonización PI con predictor de Smith.
- Control PD.
- Control LQR.
- Control de equivalencia cierta.
- Control difuso.
- Control por realimentación de estados.

Deseando regular la altura del tanque inferior del sistema en 10 [cm] partiendo de la condición inicial $h_2(0) = 0$ [cm]), en la mayoría de los casos (sólo el control por linealización por realimentación de estados parte de una condición inicial $h_2(0) = 0.1$ [cm]). Los parámetros de comparación son:

- tiempo de respuesta,
- tiempo de asentamiento,
- el porcentaje de sobrepaso,
- el error en estado permanente.

En la tabla 5.1 se muestra la comparación de dichos valores.

5.9 Comparación de desempeño entre los controles de regulación.

Control	Tiempo de respuesta [s]	Tiempo de asentamiento [s]	Máximo Sobrepaso [%]	Error en estado permanente [cm]
Sintonización PI con predictor de Smith	13.72	80.00	22.00	0.10
PD	12.80	51.00	4.18	-0.55
LQR	32.00	60.0	0.00	0.00
Equivalencia Cierta	11.50	55.00	14.40	0.20
Difuso	17.70	73.00	0.90	-0.10
por linealización por realimentación de estados	14.37	40.00	4.00	0.40

Tabla 5.1: Comparativa de desempeño de los controles de regulación aplicados.

Se observa que en el apartado del tiempo de respuesta, el control de equivalencia cierta tiene el mejor desempeño, seguido del control PD, el control mediante sintonización, el control por linealización, el control difuso y el control LQR que tiene el comportamiento más lento.

El menor tiempo de asentamiento lo tiene el control por linealización, después se encuentra el control PD, el control de equivalencia cierta, el control LQR, el control difuso y, finalmente el control mediante sintonización es el que tarda más tiempo en llegar al valor final.

Respecto a el sobrepaso se enumeran del menor al mayor de la siguiente forma: control LQR, control difuso, control por linealización, control PD, el control de equivalencia y el control mediante sintonización.

Finalmente, el menor error estado permanente lo tiene el control LQR, seguido del control difuso y el control mediante sintonización, el control de equivalencia, el control por linealización y el mayor error lo presenta el control PD.

En la Fig. 5.23 se muestra la respuesta al aplicar cada uno de los controladores.

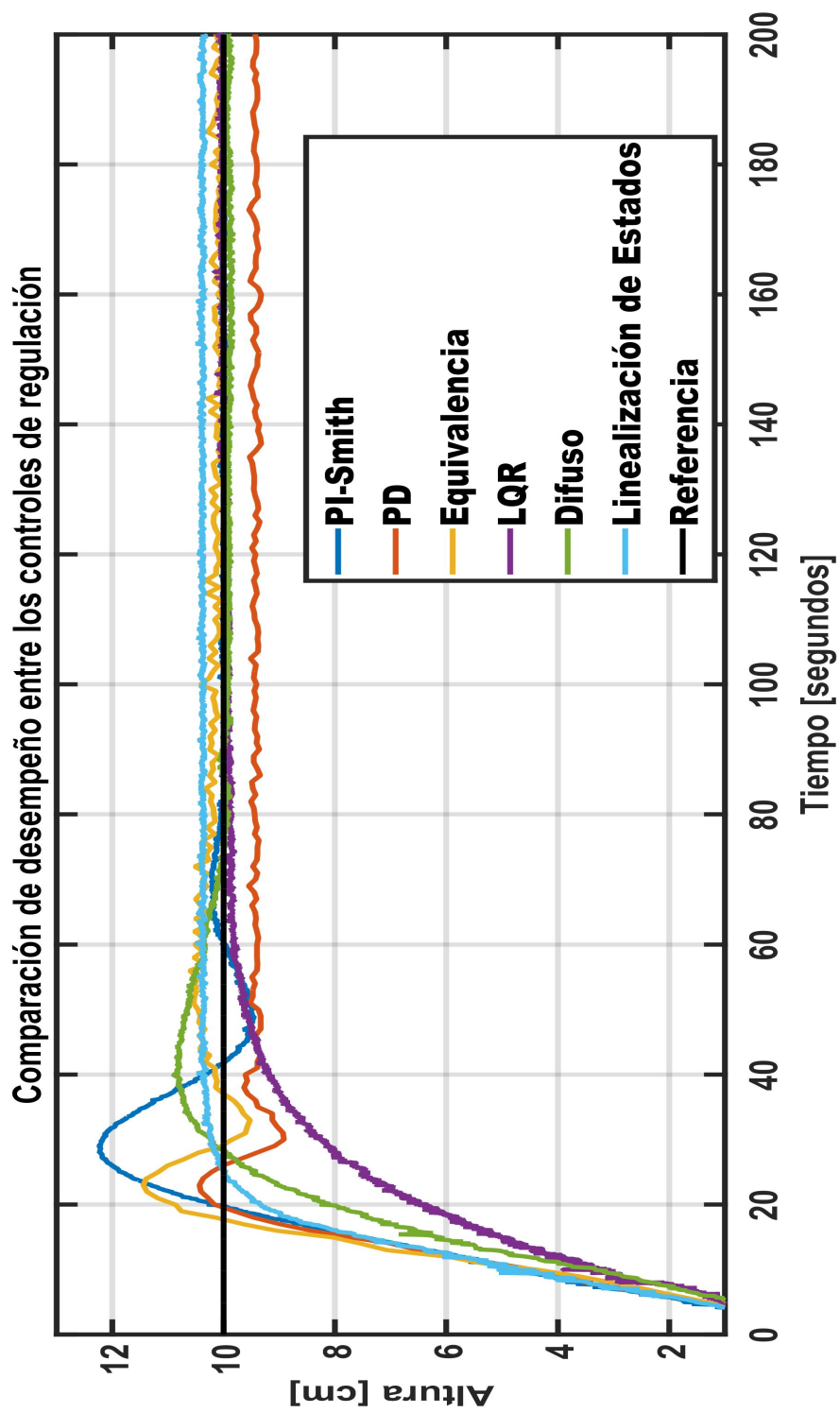


Figura 5.23: Respuesta del sistema a los diversos controladores de regulación aplicados.

Conclusiones.

A lo largo de este trabajo se diseñaron e implantaron diversas técnicas de control en un sistema de tanques acoplados. Los controladores sintonizado, PD, de equivalencia, difuso, por linealización entrada-salida y adaptable se diseñaron para regular la altura del tanque inferior. Por otra parte el control LQR regula la altura de ambos tanques, en cuanto al observador adaptable identifica dos parámetros del sistema (el término $1/A_1$ que afecta el flujo de entrada y el parámetro del orificio de salida del tanque inferior) y reconstruye la altura del tanque superior.

Sintonización PI con predictor de Smith.

Se muestran los resultados en simulación y experimentales de este control. Esta sintonización, se comprueba que el sistema puede ser aproximado como un sistema de primer orden con retraso usando para ello el método de Smith. Se sintoniza un controlador mediante la técnica de la curva de reacción para conseguir una respuesta con sobrepaso. Por otra parte, el sistema presenta un retraso en su respuesta, por ello, se realiza la compensación de éste mediante el uso de un predictor de Smith.

Se aprecia que logra un desempeño en el que el tiempo de asentamiento es el mayor de todos los controladores implantados. Además, el flujo de control muestra una baja entre los segundos 4.9 y 6.9 que no es esperado. El sistema de control logra eliminar el error en estado estable al contar con un acción de control integral.

Control PD.

Se muestran los resultados en simulación y la implantación en una plataforma experimental comparando el diseño que se obtiene con los objetivos de diseño planteados. En este control el desempeño no cubre las características esperadas, dado que el porcentaje de sobrepaso (20%) y el tiempo de asentamiento (20 [s]) no se cumplen. En cambio, el sistema presenta uno de los menores sobrepasos de los controladores implantados. Además, el control no elimina el error en estado estable, al no contar con una acción integral como lo indica la teoría. El flujo de control no presenta una forma suave, al no tener información de manera constante por el tiempo de muestreo con el que fue diseñado.

Control LQR.

En este caso se diseñó el controlador utilizando el modelo no lineal del sistema y se implantó en la plataforma experimental.

Se obtienen los resultados deseados al regular ambos tanques llegando al valor especificado. Se cumplió de manera correcta el objetivo del controlador, que es no saturar el actuador y así obtener un desempeño que satisfaga los requerimientos de manera óptima. Se observa que el comportamiento diseñado cumple de una manera satisfactoria el llenado de cada uno de los tanque al llegar al valor deseado con la dinámica diseñada teniendo un error en estado permanente mínimo en el tanque superior y 0 en el tanque inferior, sobresaliendo de los demás controladores.

Control de equivalencia cierta.

Se muestran los resultados en simulación y experimentales de este control. Se logra realizar la “cancelación” del modelo, pero éste afecta la respuesta dinámica, el máximo sobrepaso que presenta es más pequeño del que se esperaba y el tiempo de asentamiento es mayor por 5 [s] al solicitado en el diseño. Este control destaca sobre los demás al conseguir un tiempo de respuesta de 11.50 [s], que es el mejor de todos los controles de regulación. El flujo de control en este caso satura al actuador y en ningún momento presenta un comportamiento suave.

Control difuso.

En este control las funciones de membresía se traslapan unas con otras, porque se requiere de valores específicos para generar las señales de control basadas en las reglas diseñadas. Con este control se puede obtener un rango de alturas que van desde los 8.00 [cm] hasta los 18.00 [cm], logrando un intervalo de 10.00 [cm] en donde el control se comporta de manera adecuada, aunque presenta un errores en estado permanente que no se esperaban. El flujo de control presenta un comportamiento suave, pero en algunos instantes satura al actuador. Se mostraron la experimentación y el comportamiento deseado basado en un diseño mediante simulación.

Control por linealización por realimentación de estados.

Esta técnica de control permite regular al sistema en un intervalo de valores de 25 cm (de 3 cm hasta 28 cm), al obtener el control con el que se realiza la regulación del sistema se encuentran singularidades teniendo que utilizar condiciones iniciales que no sean el origen para iniciar la operación. Este control destaca al no realizar en ningún momento la saturación del actuador y presentar comportamientos suaves. En cuanto a su respuesta, con este control se generan dinámicas sobreamortiguadas en todo el intervalo de valores. Finalmente, teniendo cambios de altura pequeños, el tanque superior no se desborda, cumpliendo con una condición para alcanzar un buen desempeño. Se muestran resultados experimentales y de simulación, destacando el rango de altura que logra controlar y la corrección a perturbaciones que presenta.

Control adaptable pasivo con Algoritmo PI.

En este control se comprobó el algoritmo proporcional-integral y que éste es pasivo desde una variable que depende del error de seguimiento hasta una función dependiente de los parámetros. Se muestra la adaptación del sistema al cambio del área de sección transversal del orificio de salida de tanque inferior y esta adaptación se realiza de manera correcta demostrando la efectividad del algoritmo.

Además, se muestran resultados en simulación y experimentales. También se aprecia que las mediciones de ruido que presentan los sensores afectan de manera importante al controlador haciendo que la señal de salida llegue a tener picos al controlar el sistema, pero logrando aún con estas señales de ruido el desempeño deseado. EL flujo de control

6. CONCLUSIONES.

satura al actuador, algo que no se esperaba a lo largo del diseño, realizando un gasto energético considerable.

Observador adaptable.

Se muestran resultados en simulación y experimentales de este algoritmo, logrando reconstruir un estado y dos parámetros desconocidos. El parámetro que no se aproximó de manera adecuada ($1/A_1 = 0.0645$) tiene un valor tres veces mayor, aún con esto el observador tiene un desempeño aceptable, puesto que reconstruye de manera adecuada el valor de la altura del tanque superior y el parámetro del orificio de salida del tanque inferior, partiendo de la medición de la altura del tanque inferior.

En este observador, el ruido de medición afecta de manera considerable el comportamiento del mismo, por lo que al intentar estimar el estado, el ruido provoca cambios significativos en el cálculo de esta reconstrucción, afectando también las aproximaciones de los parámetros. Cabe señalar que, el flujo que se introduce al sistema, debe contener una gran cantidad de frecuencias, de manera que se logre una mejor estimación tanto del estado como de los parámetros.

Comparación de controladores.

De manera general se puede decir que los controladores lineales realizan un control apropiado llevando al sistema al valor de diseño deseado, mientras que los controladores no lineales, pueden ampliar su intervalo de regulación logrando el desempeño deseado, en ambos casos. Analizando la respuesta de cada uno de ellos, el control PD y el control de equivalencia tienen respuestas similares al tener parámetros de diseño parecidos. En el caso de lograr el desempeño deseado sobresalen el control por realimentación de estados, por su rango de valores de control, el control LQR al obtener el valor final sin errores.

Si se desea implantar alguno de estos controladores en algún sistema similar, se recomienda utilizar el control de equivalencia cierta, puesto que presenta el comportamiento más equilibrado en todos los aspectos evaluados, pero con un gasto de energía mayor al saturar el actuador, seguido del control por linealización por realimentación, aunque su diseño es más complicado. Si no se cuenta con mucho tiempo para realizar un diseño analítico, y el sobrepaso junto con el tiempo de asentamiento no presentan un problema, el control sintonizado mediante curva de reacción es un buen método para

controlar de forma rápida al sistema.

Trabajo futuro.

En este trabajo se analizan varias técnicas de control en las que la respuesta del sistema es la parte fundamental del desarrollo. En el futuro se debe realizar un análisis del gasto energético que representa cada una de estas técnicas, en virtud de mejorar el desempeño del sistema; evitando afectar el actuador y así alargar la vida de éste. Además de comprobar otros algoritmos de identificación y control.

Equipo utilizado.

A.1. Tarjeta de adquisición de datos.

Para realizar la implementación de los controladores diseñados, se utilizó el software *Matlab*[®] de la compañía **Mathworks** en su versión 2015, *LabVIEW*[®] de la compañía **National Instruments** en su versión 2013 y una tarjeta de adquisición de datos **PCI-Express 6321**, ésta se muestra en la Fig. A.1 y tiene las características que se indican en la tabla A.1.

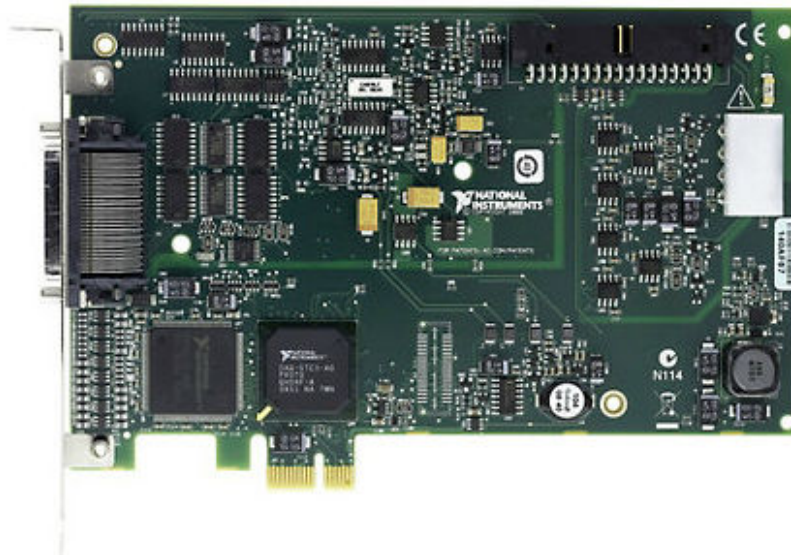


Figura A.1: N.I PCI-621. Imagen obtenida de: <http://www.ni.com/es-mx.html>.

A. EQUIPO UTILIZADO.

Característica	Valor
Entradas Analógicas	
Cantidad	16 simples, 8 diferenciales
Resolución ADC	16 bits
Tiempo de resolución	10 ns
Rango de entrada	± 10 V, ± 5 V, ± 1 V, ± 0.2 V
Acoplamiento de entrada	DC
Máximo voltaje de entrada	± 11 V de AI a GND
CMRR (DC a 60 Hz)	100 dB
Impedancia de entrada (encendido)	AI+ a AI GND >10 $G\Omega$
Impedancia de entrada (encendido)	AI- a AI GND >10 $G\Omega$
Impedancia de entrada (apagado)	AI+ a AI GND 1200 Ω
Impedancia de entrada (apagado)	AI- a AI GND 1200 Ω
Corriente de polarización	± 100 pA
Tamaño de entrada FIFO	4,095 muestras
Protección de sobrevoltaje (encendido)	± 25 V para dos AI
Protección de sobrevoltaje (apagado)	± 15 V para dos AI
Corriente de entrada en condición de sobrevoltaje	± 20 mA por AI
Número de muestras máximo	250 kS/s
Salidas Analógicas	
Cantidad	2
Resolución DAC	16 bits
Velocidad de salida analógica máxima	840 kS/s
Tiempo de resolución	10 ns
Acoplamiento de salida	DC
Impedancia de salida	0.2 Ω
Corriente de salida	± 5 mA
Protección del dispositivo	± 15 V
Protección de corriente	± 15 mA
Tamaño de salida FIFO	8,191 muestras compartidas entre los AO utilizados

Tabla A.1: Característica de la tarjeta de adquisición de datos *PCIE-6321* a 25°C.

El sistema de tanques utilizado para la realización de este trabajo se encuentra instrumentado por el fabricante y para realizar el uso correcto de éste se utilizan los elementos de acoplamiento que el fabricante recomienda; estos son: *Analog Sensors Adapter* y *VoltPAQ-X2/X4* ambos de la compañía *Quanser*, los cuales se describen a continuación.

A.2. Analog sensors adapter.

Para utilizar los sensores de presión disponibles en el sistema, se utiliza la fuente de alimentación y distribuidor de señales mostrado en la Fig. A.2.



Figura A.2: Adaptador de sensores analógicos. Obtenida de <http://www.quanser.com/>

Este adaptador alimenta a los circuitos de acondicionamiento de los sensores con un voltaje de $\pm 12 V$, el cual es generado por una fuente de alimentación interna y entrega la señal de voltaje, la cual relaciona de manera lineal la presión de la columna de agua con la altura del tanque correspondiente, mediante un par de conectores RCA hembras (denominados S1 y S2 en la figura), los cuales son conectados a los convertidores Analógico/Digital de la tarjeta de adquisición de datos.

A.3. VoltPAQ-X2/X4.

El *VoltPAQ* es un amplificador lineal que entrega el voltaje de alimentación (mediante un conector tipo DIN) necesario a la bomba con la cual se generará el flujo deseado, el circuito se muestra en la Fig. A.3.

A. EQUIPO UTILIZADO.



Figura A.3: Amplificador Lineal. Imagen obtenida de <http://www.quanser.com/>

Las principales características del amplificador lineal se muestran en la tabla A.2.

Especificaciones del Amplificador	Valor
Voltaje de Salida	Sin Carga: -23.3 V a $+21.8\text{ V}$, Con 2A de carga: -22.3 V a $+20.8\text{ V}$
Corriente continua de salida por canal	$\pm 4\text{ A}$
Ganancia de Voltaje	3 V/V
Rango de voltaje de mando del amplificador	$\pm 10\text{ V}$

Tabla A.2: Características del Amplificador Lineal.

En este equipo se conecta el canal analógico de salida mediante el cual se indica el valor de voltaje necesario para generar el flujo deseado. Se destaca que el amplificador lineal tiene una ganancia de voltaje de 3 V/V , con lo cual no se pueden aplicar el voltaje máximo a la bomba (el cual es de 12 V) sino que éste tiene que ser dividido entre 3, además el amplificador entrega la corriente necesaria para hacer funcionar la bomba, pues la tarjeta de adquisición de datos genera una corriente de salida máxima de $\pm 5\text{ mA}$.

Bibliografía

- [1] Alberto Aguado Behar and Miguel A Martínez Iranzo. *Identificación y control adaptativo*. Pearson Educación, SA, 2002. 46
- [2] Paolo Bolzern, Riccardo Scattolini, Nicola Schiavoni, and Antonio Jesús Martínez Pleguezuelos. *Fundamentos de control automático*. McGraw-Hill/Interamericana de España, 2009. 2
- [3] Sergio Dominguez, JM Sebastián, and P Campoy. *Control en el espacio de estado*. Universidad Politécnica de Madrid, 2000. 2
- [4] Ricardo Fernández. *Análisis y Diseño de Sistemas de Control Digital*. Prentice Hall, México, 2013. 23
- [5] A Flores-Pérez, Ileana Grave, and Yu Tang. Comparative analysis of passive algorithms in adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 28(10):1043–1053, 2014. 42, 44, 45, 89
- [6] Marcos A. González Olvera. *Identificación de Sistemas No Lineales Mediante Redes Neurodifusas Recurrentes*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería., 2009. 32
- [7] Elbert Hendricks, Ole Jannerup, and Paul Haase Sørensen. *Linear systems control: deterministic and stochastic methods*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [8] Hassan K Khalil. *Nonlinear control*. Prentice Hall, 2014. 40, 41, 45
- [9] Benjamin C Kuo. *Sistemas de control automático*. Pearson Educación, 1996. 10, 18, 19, 22
- [10] Ioan Doré Landau, Rogelio Lozano, Mohammed M'Saad, and Alireza Karimi. *Adaptive control*, volume 51. Springer Berlin, 1998. 36

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Oliver Nelles. *Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [12] Hung T Nguyen, Nadipuram R Prasad, Carol L Walker, and Elbert A Walker. *A first course in fuzzy and neural control*. CRC press, 2002. 35
- [13] Norman S Nise. *Sistemas de control para ingeniería*. 2002. 10, 12, 18, 20, 21, 22
- [14] Katsuhiko Ogata. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Pearson educación, 1996. 11, 23
- [15] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003. 2, 7, 9, 22
- [16] Alan V Oppenheim, Alan S Willsky, and S Hamid Nawab. *Señales y sistemas*. Pearson Educación, 1998. 10, 11
- [17] Quanser Consulting Inc. *Coupled-Tanks User Manual*. 55, 56
- [18] Quanser Consulting Inc. *Coupled Water Tank Experiments*,. 54
- [19] Herbertt Sira-Ramírez, Richard Márquez, Francklin Rivas-Echevarría, and Orestes Llanes-Santiago. *Control de sistemas no lineales: linealización aproximada, extendida, exacta*. Pearson Prentice Hall, 2005. 2, 7
- [20] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice-hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. 39, 45
- [21] Li-Xin Wang. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 1(2):146–155, 1993.
- [22] Peter E Wellstead. *Introduction to physical system modelling*. Academic Press London, 1979.
- [23] Qinghua Zhang. Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(3):525–529, 2002. 52