UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

LICENCIATURA EN FILOSOFÍA E HISTORIA DE LAS IDEAS

Logicismo y analiticidad. El concepto de analiticidad en Frege (1879, 1884) y en Carnap (1935, 1947)

TRABAJO RECEPCIONAL
PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADO EN
FILOSOFÍA E HISTORIA DE LAS IDEAS

PRESENTA
SACRAMENTO ORDAZ JUÁREZ

Director del Trabajo Recepcional

Dr. Jesús Jasso Méndez

México, D.F. junio de 2015.

Índice

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi director de tesis y tutor Dr. Jesús Jasso Méndez, quien tuvo la paciencia para guiar y corregir este trabajo. Muchas gracias por ese excelente trato y la exigencia tan profesional.

Agradezco a todos aquellos que me apoyaron moral y económicamente.

Agradezco a todos y cada uno de los sinodales por leer y aprobar este trabajo.

Finalmente agradezco a mi familia, con todo mi cariño y mi amor, a mis padres que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr esto, gracias por motivarme y darme la mano, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

Dedico este trabajo a mi papá y a mi mamá,

Eulogio Ordaz, Juana Juárez.

Introducción

La explicación del concepto semántico de analiticidad, ha representado un problema central para diferentes filósofos, quienes se han propuesto desde distintos programas de investigación, *ex. gr*. Filosofía del Lenguaje, Filosofía de la Lógica, Filosofía de las Matemáticas, Filosofía de la Ciencia, Epistemología, esclarecer la dicotomía analítico/sintético. En particular esta distinción ha sido importante para filósofos como Kant (1787)[1], Bolzano (1837)[2], Frege (1879-1884) [3], Russell (1910)[4], Carnap (1935-1947) [5], Quine (1951-61)[6] solo por mencionar algunos casos, debido a la aspiración por mantener un sistema ordenado de conocimiento y, en particular, por mantener la idea sobre la *existencia*[7] de enunciados verdaderos cuyo significado subsiste ante cualquier cambio de hechos.

Mi interés por el tema de la analiticidad se ancla precisamente en la última idea anterior y en su cuestionamiento. Expliquemos. Por una parte, me interesa la caracterización semántica y epistemológica de los enunciados matemáticos y, al tiempo, me interesa explicar los compromisos filosóficos adquiridos cuando aceptamos la opinión de que los enunciados lógicos y

---

[1] Kant, I. (1787). *Kritik der reinen Vernunft* (1998). (Hamburg: Felix Meiner) References are in the customary way via the pagination of the first (*A*) or second printing (*B*)

[2] Bolzano, B. (1837). *Wissenschaftslehre.* (In L. Winter et al. (Eds.) (1969-). *Bernard Bolzano Gesamtausgabe*. Reihe1. Vol. 11-14. (Stuttgart-Bad Canstatt: Frommann-Holzboog.) Where possible quotations from J. Berg (Ed.), B. Terrell (Transl.) (1973). *Theory of science*. (Dordrecht: Reidel)

[3] Frege, G. (1879) (1972) *Conceptografía*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM. México. Y Frege, G. [1884] (1968), *Die Grundlagen der Arithmetik*. *Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Veerlag von Wilhelm Koebner; en edición bilingüe, Frege, G., *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concepto of number*, Trad. J.L. Austin, M.A., Oxford: Basil Blackwell.

[4] Whitehead, Alfred North and Bertrand Russell (1910, 1912, 1913) (1962) "*Principia Mathematica"*, 3 vols, Cambridge: Cambridge University Press. Segunda edición, 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2, 3). Abreviado como "*Principia Mathematica" 56* , Cambridge: Cambridge University Press, 1962

[5] Carnap, Rudolf. (1935) (1998). *Filosofía y sintaxis lógica*. Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM. México. Y Carnap, R. (1947), *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago: University of Chicago Press.

[6] Quine, Willard van Orman (1951, 1961), "*Two Dogmas of Empiricism*", Philosophical Review, 60: 20–43; reprinted in *From a Logical Point of View*, pp. 20–46. Hylton, Peter, "Willard van Orman Quine", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/quine/>.

[7] En este sentido, no pretendo hacer algún compromiso ontológico, ya que la palabra *existencia* solo la utilizo para señalar lo que tales autores intentan defender con esta idea.

matemáticos son analíticos. Por otra parte, mi interés es poner en la mesa de discusión la forma lógica de establecer la definición de enunciado analítico.

Un camino claro para satisfacer mis intereses es identificar por una parte algún programa filosófico cuya definición de analiticidad sea de carácter eminentemente lógico y, por otra parte, analizar dos programas logicistas que me permitirán identificar la caracterización de la noción de analiticidad. Frege (1879, 1884) y Carnap (1935, 1947) satisfacen estas condiciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, ésta tesis tiene como objetivo principal analizar al concepto semántico y sintáctico-semántico de analiticidad propuesto por el logicismo, particularmente a las definiciones formuladas por Gottlob Frege (1879, 1884) y Rudolf Carnap (1935, 1947).

Mi estrategia expositiva será la siguiente. La tesis la he dividido en dos capítulos: I. “Logicismo”, “La analiticidad de acuerdo con Gottlob Frege (1879), (1884)”, y II. “La analiticidad de acuerdo con Rudolf Carnap (1935), (1947)”.

El capítulo I. “Logicismo” tiene un doble objetivo. Por una parte, clarificar en qué consiste el logicismo como una alternativa en la discusión sobre los fundamentos del conocimiento matemático. Por otra, identificar cómo el concepto semántico de analiticidad surge aparentemente de manera natural con el esfuerzo logicista por llegar a dicha fundamentación. En consecuencia, éste capítulo lo he dividido en dos secciones: I.1 “Algunos aspectos centrales del logicismo”. En esta sección, en primer lugar, contestaré a la pregunta ¿qué es el logicismo?, apoyándome en los artículos de Jaakko Hintikka (2009)[8], Rudolf Carnap (1964) y Bertrand Russell (1984), señalando las implicaciones filosóficas que éste programa tiene al intentar caracterizar exhaustivamente al conocimiento matemático. En segundo lugar, a partir del análisis anterior, señalaré las condiciones desde las cuales surge la noción de analiticidad como una forma particular de explicar las propiedades de los enunciados matemáticos. En la sección I.2. “La analiticidad desde Gottlob Frege”, mi propósito es no sólo ofrecer la definición logicista de Frege respecto a la analiticidad, sino adicionalmente considerar las implicaciones filosóficas que tiene tal propuesta.

---

[8] Hintikka, Jaakko (2009). “*Logicism*” en <u>*Handbook of the Philosophy of Mathematics*</u>, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam.

En la sección I.2.1 “Frege y la analiticidad” señalaré las condiciones en las cuáles Frege define a los enunciados analíticos como aquellos que son y sólo pueden ser consecuencia lógica de leyes lógicas generales y definiciones. Para ello, identificaremos algunos pasajes del “Prologo” de Frege (1879) y algunos pasajes incluidos en la “Introducción” y las secciones 1-4, 14 y 89 de Frege (1884).

En el capitulo II, “Carnap y la analiticidad; la sintaxis” indicaré la definición logicista propuesta por Carnap para los enunciados a partir de dos niveles. El primer nivel será en referencia a la propuesta sintáctica de Carnap (1935). Aquí, presentaré y analizaré los compromisos sintácticos de la definición carnapiana de analiticidad desde algunos pasajes de “*La Sintaxis lógica del lenguaje*” en su “Filosofía y Sintaxis Lógica” (1935) *ex, gr*. “1. La teoría “formal””, 2. “Reglas de formación”, 3. “Reglas de transformación” 4. “Términos sintácticos” y 5.Términos *L*”. En el segundo nivel de exposición haré referencia al concepto semántico de analiticidad realizado por Carnap, a partir de algunos pasajes más de *Meaning and Necessity* (1947) *ex. gr*. lo referente a la sección 2. “*L-Concepts*” apartados 2.1 “*Convention*”, 2.2 “*Definition*”, así como algunas consideraciones en torno a la noción semántica de L-verdad, F-verdad y descripciones de estado. Con estos dos niveles –sintáctico y semántico- no solo pretendo dar una caracterización más completa de la definición carnapiana de los enunciados analíticos.

En la actualidad, la tradición analítica ofrece en su literatura clásica y contemporánea una gran variedad de acercamientos al problema de la analiticidad, *ex. gr*. Quine (1951-61), Hilary Putnam (1962/75), Saúl Kripke (1971/72), Paul Boghossian (1990) y Philip Kitcher (1980) y (2000) solo por mencionar algunos casos. Por ahora, no es mi interés ahondar en estas propuestas por cuestiones de espacio y de restricción temática de éste trabajo. Espero en algún momento cercano ampliar mi investigación considerando tales contribuciones u otras relevantes, en las que la propuesta logicista ha sido el blanco conceptual, *ex. gr*. las críticas realizadas por Quine (1951-61), así también, considerar algunos otros acercamientos contemporáneos al problema de la analiticidad.

CAPÍTULO I

LOGICISMO

Capítulo I

Logicismo

Introducción

El propósito de este primer capítulo es doble. Por una parte, señalar cómo va surgiendo el concepto de analiticidad de forma natural desde el esfuerzo logicista por llegar a una fundamentación del conocimiento matemático. Por otra parte, explicar el concepto de analiticidad de acuerdo con Frege (1879 y 1884).

Objetivos particulares, Sección (I.1):

1. Contestar a la pregunta ¿qué es el logicismo? a partir de Jaakko Hintikka (2009, pp. 271-290), Rudolf Carnap (1964, pp. 31-36), Bertrand Russell ([1919] (1984), p. 173) y al tiempo señalar las implicaciones filosóficas del logicismo al intentar distinguir el conjunto de enunciados que constituyen al conocimiento matemático.
2. Señalar cómo nace la noción de analiticidad en tanto una forma particular de explicar las propiedades de los enunciados matemáticos.

I.1 Algunos aspectos centrales del logicismo

Desde el punto de vista del logicismo todos los enunciados matemáticos pueden ser probados únicamente por medio de principios y leyes lógicas generales. El programa logicista surge de la necesidad conceptual de fundamentar el conocimiento matemático *i. e*. por una parte, explicar en qué términos es posible decir que una proposición matemática sea verdadera –consideraciones epistemológicas- y, en segundo lugar, señalar si sus contenidos proposicionales refieren o no a una realidad específica –consideraciones ontológicas. El vínculo entre el rasgo epistemológico y ontológico está en conceder o no una propiedad descriptiva a los enunciados matemáticos. Si los enunciados matemáticos son descriptivos, podemos decir entonces que estos hablan de una realidad. En este caso, la realidad de la que hablan los enunciados, son sus objetos y las relaciones entre ellos, la cual constituirá los portadores de sus términos y la descripción de tal estado de cosas. Así pues, al considerar el carácter descriptivo de los enunciados en el logicismo, lo que se hace es vincular el problema epistemológico de cómo una realidad abstracta funciona como un marcador de verdad, con el problema ontológico de cuales son los portadores de sus términos y la naturaleza de teles objetos.

El desafío logicista respecto a la fundamentación del conocimiento matemático, era la posibilidad genuina de axiomatizar la matemática desde la lógica. Ellos consideraban que al desarrollar un lenguaje lógico lo suficientemente sofisticado *i. e* constituido por un vocabulario específico, reglas y principios lógicos específicos y definiciones lógicas específicas, se adquirían las condiciones suficientes y necesarias para *interpretar* o definir cualquier concepto matemático y adicionalmente *deducir* cualquier enunciado matemático desde la lógica.

Para comprender la fundamentación matemática en la lógica es preciso explicar las dos tesis base del proyecto logicista. Siguiendo a Hintikka (2009)[9]:

> (a) All concepts of mathematics, *i. e.*, of arithmetic, algebra, and analysis, can be defined in terms… of pure logic. (Hintikka, 2009, p 271)
>
> Todos los conceptos de las matemáticas, *i. e.*, de la aritmética, algebra y análisis se pueden definir en términos… de lógica pura.). (Hintikka, 2009, p. 271)[10]
>
> (b) All the theorems of mathematics can be deduced from those definitions by means of principles of logic (including the axioms of infinity and choice)". (Hintikka, 2009, p. 271)
>
> Todos los teoremas de las matemáticas se pueden deducir de estas definiciones por medio de los principios de la lógica (incluyendo los axiomas de infinitud y elección). (Hintikka, 2009, p. 271)[11]

[9] Hintikka, Jaakko (2009). "*Logicism*" en Handbook of the Philosophy of Mathematics, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam.
[10] La traducción es responsabilidad mía
[11] La traducción es responsabilidad mía.
Es interesante considerar que las dos tesis expuestas por Hintikka (2009) son consistentes – de acuerdo con su propia versión (2009)- con la definición del logicismo que aparece en Hempel (1945), "*On the Nature of Thuth, The American Mathematical Monthly*", Vol.52, pp. 543-556.

Usualmente uno podría pensar al encontrarse con éstas tesis, que ambas expresan exactamente lo mismo. Pero esto es falso. Cada una de estas tesis hace énfasis en aspectos diferentes sobre la reducción de la matemática a la lógica. Si bien, la primera de ellas enfatiza sobre el aspecto de la interpretación de conceptos y términos, la segunda, refiere a una reducción en términos de derivabilidad.

Expliquemos (a) y (b).

La tesis (a) la llamaré: semántica o conceptual. Esta tesis refiere a la posibilidad de definir los conceptos matemáticos en términos exclusivamente lógicos. ¿Qué quiere decir esto? De acuerdo con Rudolf Carnap (1964)[12] se puede interpretar una semántica matemática si se consideran los siguientes términos lógicos:

> :..the negation of a sentence p, 'not-p' (symbolized '~p'); the disjunction of two sentences, 'p or q' ('p v q'); the conjunction, 'p and q' ('p ^ q'); and the implication, 'if p, then q' ('p → q'). The concepts of functional calculus are given in the form of functions, *e.g.*, '*ƒ* (a)' (read '*ƒ* of a')… The most important concepts of functional calculus are universality and existence '(x) *ƒ*(x)'…'(∃x)*ƒ*(x)' … Finality there is the concepts of identity: '*a* = *b*' means that 'a' and 'b' are names of the same object (Carnap, 1964, p. 32)..
>
> It is the logicist thesis, then, that the logical concepts just given suffice to define all mathematical concepts, that over and above them no specifically mathematical concepts are required for the construction of mathematics (Carnap, 1964, p. 32).

> …: la negación de una oración p, 'no-p' (simbolizada '~p'), la disyunción de dos oraciones, 'p o q' ('p v q'); la conjunción, 'p y q' ('p ^ q'); la implicación material, 'si p, entonces q' ('p → q'). Los conceptos del cálculo funcional se dan en la forma de funciones, *e. g*., *ƒ*(a) (se lee *ƒ* de a)… Los conceptos más importantes del cálculo funcional son la universalidad y la existencia: '(x) *ƒ*(x)'…' (∃x) *ƒ*(x)'… Finalmente aquí es el concepto de identidad: '*a* = *b*' que significa que '*a* y *b*' son nombres de un mismo objeto (Carnap, 1964, p. 32).
>
> Es la tesis logicista, entonces, aquella que [considera] a los conceptos lógicos que acabamos de dar suficientes para definir todos los conceptos matemáticos necesarios para la construcción de las matemáticas" (Carnap, 1964, p. 32).

Curiosamente, las observaciones de Carnap respecto a la interpretación de los términos y conceptos matemáticos en términos y conceptos lógicos coincide con las observaciones fregeanas

[12] Carnap, Rudolf (1964). "*The logicist Foundations of Mathematics*", en Paul Benacerraf and Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*: Select Readings Oxford, Basil Blackwel.

en tanto la construcción de un lenguaje lógicamente perfecto que sirva como base para la interpretación de todo término matemático. Al respecto, Frege señala en su *Conceptografía*:

> Mi procedimiento fue éste: primero, busqué retrotraer el concepto de ordenación en una serie al de consecuencia lógica y de aquí progresar hasta el concepto de número. Además, para que no pudiera introducirse inadvertidamente algo intuitivo, se debió llegar a suprimir toda laguna en la cadena de inferencias. Al procurar cumplir lo más rigurosamente posible con este requerimiento, me encontré, junto a todas las dificultades que surgen de la expresión, un obstáculo en la inadecuación del lenguaje: cuanto más complicadas eran las relaciones tanto menos podía alcanzar la exactitud requerida por mi propósito. (…). La semejanza, que he indicado en el título, con *lenguaje de formulas*[13] (las cursivas son mías) de la aritmética se refiere más a las ideas fundamentales que a conformaciones particulares. (…). El más inmediato contacto de mi lenguaje de fórmulas con el de la aritmética consiste en el modo de utilizar las letras. (Frege, 1879, p. 8)

Así pues, las observaciones de Frege y Carnap indican que tal reducción en términos de (a) radica en interpretar cada término de la matemática en conceptos lógicos, esto para establecer un lenguaje lógicamente prefecto *i*. *e*. un lenguaje de formulas análogo al lenguaje de formulas de la aritmética, a partir del cual el segundo se complementa definible en términos del primero.

La tesis (b) la denominaré: una tesis tipo lógica o sintáctica. Esta tesis especifica la posibilidad de probar las verdades matemáticas a través de las condiciones de derivación de la sintaxis lógica. Es en este sentido que, una vez interpretados los conceptos matemáticos en términos lógicos, las verdades matemáticas (enunciados matemáticos) han de derivarse desde los principios lógicos convenientes. Así, toda verdad matemática, puede en principio ser un teorema lógico. En palabras de Carnap (1964) tenemos que:

> Therefore , as every sentence of mathematics can be translated into a sentence which contains only the primitive logical predicates already mentioned, this second thesis can be restated thus: Every provable mathematical sentence is translatable into a sentence which contains only primitive logical symbols and which is provable in logic. (Carnap, 1964, p. 34)
>
> Por lo tanto, ya que cada frase de las matemáticas se puede traducir en una frase que contiene sólo los predicados lógicos primitivos ya mencionados, esta segunda tesis puede reformularse así: todo enunciado matemático es demostrable es

[13] Cuando Frege nos habla de su lenguaje de formulas hace referencia a su *Conceptografía* donde él establece el mecanismo general con el cual las proposiciones abran de analizarse mediante la lógica de primer orden, la teoría cuantificacional e identidad. *Cfr*., Valdivia, L. (1998) *Palabras y Cosas*, UNAM, México. p. 47.

> traducible en un enunciado que contiene únicamente símbolos lógicos primitivos y que es demostrable en la lógica. (Carnap, 1964, p. 34)

Es así que, de acuerdo con la reducción (b) los enunciados matemáticos necesarios en la elaboración y desarrollo de las matemáticas, pueden ser derivados a partir de una prueba formal en la que participan única y exclusivamente axiomas lógicos, reglas lógicas, teoremas lógicos y definiciones lógicas.

Un aspecto muy importante de la tesis (b) es el vínculo directo con la definición de enunciado analítico. Esto es, si sólo los aspectos lógicos son relevantes para la derivación de las verdades aritméticas, entonces, cualquier verdad aritmética es consecuencia lógica de leyes lógicas generales y definiciones únicamente. Éste último punto, como veremos en la sección (I.2) expresa el criterio para distinguir a los enunciados analíticos del resto de los enunciados científicos. De otra manera, al parecer, la noción de analiticidad está recargada en la tesis (b) del reduccionismo de las matemáticas a la lógica.

Las características de las tesis (a) y (b) que señalamos más arriba, no sólo nos explican el ejercicio reduccionista entre las matemáticas y la lógica sino nos aclaran explícitamente la forma logicista de fundamentar el conocimiento matemático. En suma, las tesis (a) y (b), nos señalan las condiciones en las cuales la matemática puede ser reducida a la lógica, ya sea por un caso de *interpretación* de términos, ya sea por la posibilidad de *derivar* enunciados matemáticos en términos lógicos.

De acuerdo con Bertrand Russell (1984[14]), las motivaciones logicistas por reducir la matemática a la lógica pueden también explicarse en términos de la imposibilidad de demarcar una ciencia de la otra. Esto es:

> But both [mathematics and logic] have developed in modern times: logic has become more mathematical and mathematics has become more logical. The consequence is that it has now become wholly impossible to draw a line between the two; in fat, the two are one. They differ as boy and man: logic is the youth of

[14] Russell, Bertrand [1919] (1984). "*Selections from Introduction to Mathematical Philosophy*" en, *Philosophy of Mathematics*: Select Readings. Paul Benacerraf and Hilary Putnam. Cambridge University Press.

> mathematics and mathematics is the manhood of logic. This view is resented by logicians who, having spent their time in the study of classical texts, are incapable of following a piece of symbolic reasoning, and by mathematicians who have learnt a technique without troubling to inquire into its meaning or justification. (Russell, 1983, p. 173)
>
> Pero ambas [matemáticas y lógica] se han desarrollado en los tiempos modernos: la lógica se ha hecho más matemática y la matemática se ha hecho más lógica. La consecuencia es que ahora se ha hecho totalmente imposible dibujar una línea entre estas dos; en realidad las dos son una. La diferencia en ellas es la de un muchacho y un hombre: la lógica es la juventud de las matemáticas y las matemáticas son la madurez de la lógica. Este punto de vista es resentido por los lógicos quienes, habiendo gastado su tiempo en el estudio de los textos clásicos, son incapaces de seguir un razonamiento simbólico, y los matemáticos que han aprendido una técnica sin molestarse en investigar su significado o justificación. (Russell, [1919] (1984), p. 173)

Si bien, hasta aquí hemos explicado lo que trataba de hacer el logicismo a través de su pretendido reduccionismo, aún queda abierta la posibilidad de su genuina viabilidad. Hintikka (2009) hace ver cuáles son los problemas que imposibilitan desarrollar con éxito la motivación logicista. Siguiendo a este autor, tenemos que tal reducción en términos generales, implica una conmensurabilidad entre verdades matemáticas y verdades lógicas, no obstante, de acuerdo con Hintikka (2009), siguiendo la matemática actual esto no es posible, debido que lo que tenemos es una inconmensurabilidad entre ambos sistemas. Esta inconmensurabilidad se debe en parte a la naturaleza del tipo de verdades que ambos sistemas tienen, pues estas suelen ser de diferente índole:

> Hempel’s formulation speaks of a deduction of mathematical theorems from the principles of logic. This presupposes that mathematical theorems and logical principles are commensurate at least to the extent that the former can be deduced from the latter. But mathematical and logical systems are not in fact commensurate in a natural and widely accepted perspective. Mathematical theorems deal with what is true in a certain structure, for instance, in the structure of the natural numbers or in that of real numbers. In contrast, logical principles deal with logical truths. These are not a subclass of truths simpliciter, that is truths in some one structure. They are Truths in every possible structure. They can be considered empty or “tautological”, just because they do not exclude any possibilities”. (Hintikka, 2009, p. 271)
>
> La formulación de Hempel habla de una deducción de los teoremas matemáticos desde los principios de la lógica. Esto presupone que teoremas matemáticos y principios lógicos son conmensurables al menos en la medida en que el primero se puede deducir desde el último. Pero los sistemas matemáticos y lógicos no son, en realidad conmensurables en una perspectiva natural y ampliamente aceptada. Los

> teoremas matemáticos se ocupan de lo que es verdadero en una cierta estructura, por ejemplo, en la estructura de los números naturales o en la estructura de los números reales. Por el contrario, los principios lógicos se relacionan con verdades lógicas. Estas no son una subclase de verdades simpliciter, es decir verdades para una cierta estructura. Ellas son verdaderas en todas las estructuras posibles. Ellas pueden ser consideradas vacías o "tautológicas", justo porque ellas no excluyen alguna posibilidad. (Hintikka, 2009, p. 271)[15]

Como podemos percatarnos una consecuencia de la cita anterior, es que el campo de aplicación de la lógica a la matemática se reduce, ya que la axiomatización de la lógica debe ser diferente para distintas estructuras y por lo tanto, resultarían axiomatizaciones lógicas *simpliciter*. Esto es, que habrá verdades lógicas respecto a ciertas estructuras matemáticas y será posible que tales verdades no se sostengan en todas las estructuras. En este sentido, vemos que o no hay una axiomatización lógica para alguna estructura matemática, o no hay una axiomatización general para las estructuras matemáticas. Si bien, este aspecto de la inconmensurabilidad no es central para mi investigación, me es relevante hacer esta observación para dar constancia del hecho de las críticas existentes alrededor de las motivaciones fundacionistas de la matemática en la lógica. Es así que, podemos darnos cuenta que encontramos fuertes argumentos que ponen en entre dicho la viabilidad del proyecto logicista al considerarse verdades matemáticas *simpliciter*, las cuales requieren diferentes axiomatizaciones lógicas, dicho de otra manera, las axiomatizaciones lógicas estarían dentro de cada estructura matemática. Por lo tanto, dado que la subclase de verdades *simpliciter* de la matemática sólo son válidas en determinada estructura, y dado que las verdades empleadas en las matemáticas no suelen tener necesariamente un factor común, resultaría inadecuada tal reducción.

Para ejemplificar lo anterior, Hintikka considera la clase de los números naturales y los números reales. En los primeros encontramos que no hay números negativos y positivos, mientras que en los segundos si los hay, estos se encuentran determinados en una línea recta con un punto fijo, a saber, cero. En contraste a esto, tenemos que, para la lógica no hay verdades *simpliciter* que hagan frente a las distinciones estructurales de las matemáticas, dado que las verdades lógicas tienen la propiedad de ser verdaderas en cualquier estructura posible. Si el estado de inconmensurabilidad entre las verdades matemáticas y las verdades lógicas es correcta ¿cómo puede ser posible que las verdades matemáticas puedan ser fundadas en la lógica?

---

[15] La traducción es responsabilidad mía.

En este caso, todo lo anterior sirve como una buena crítica al programa fundacionista del logicismo. Sin embargo, no es de mi interés ahondar en este problema *i. e*. sobre la corrección o incorrección de los contra-argumentos que pudiesen ofrecerse acerca del proyecto logicista. Como he señalado anteriormente solo quiero dar constancia de este hecho y con esto hacer notar principalmente como es que independientemente del logro del proyecto logicista, se va estableciendo una explicación de las características de los enunciados matemáticos desde su reducción a los enunciados lógicos. De tal suerte que para el logicismo los enunciados lógicos serán aquellos que guarden mayor generalidad, tal que, estos se encuentran en el grado más alto de la clasificación de los enunciados científicos.

En términos históricos, lo que hoy en día es conocido como logicismo fue previamente defendido por Gottfried Leibniz en el siglo XVII, aunque, no fue sino hasta el siglo XIX y principios XX, cuando algunos filósofos – matemáticos como, Gottlob Frege (1948-1925), R. Dedekind (1831-1916), Bertrand Russell (1872-1970) y Rudolf Carnap (1891-1970) buscaron clarificar la fundamentación del conocimiento general basándose en la reducción de la matemática a la lógica definiendo tal reducción a los términos de las tesis (a) y (b) que señalamos arriba.

Cabe señalar, que la reducción de la matemática a la lógica consideraba a la primera, como la ciencia del número y el espacio (propios de la aritmética y la geometría), aún cuando esta forma de entender la matemática no correspondía a la forma en como los matemáticos en activo en ese mismo momento la definían como: "un estudio de las estructuras". Hintikka al respecto señala:

> The study of number and space was transformed into a study of structures which may be instantiated in arithmetic as well as in algebra and geometry, and, perhaps, altogether outside the realms of number and space. (Hintikka, 2009, p.272)
>
> El estudio de los números y el espacio se transformó en un estudio de las estructuras que quizá crea instancias en aritmética, así como en el álgebra y la geometría, y, tal vez, totalmente fuera de los dominios del número y el espacio. (Hintikka, 2009, p.272)[16]

Así,

> …philosophically the new role of mathematics as a tool of conceptual analysis is a more interesting one. In fact, one service that an abstract mathematics could render

[16] La traducción es responsabilidad mía.

> was to analyze and different concepts originally formed intuitively rather than logically. (Hintikka, 2009, p.273)
>
> … filosóficamente el nuevo papel de las matemáticas como una herramienta de análisis conceptual es más interesante. De hecho, un servicio que la matemática abstracta podría hacer era analizar y definir los diferentes conceptos originalmente formulados intuitivamente en lugar de la lógica. (Hintikka, 2009, p.273)[17]

No obstante, logicistas como Frege, Carnap y Russell formularon su proyecto a la base de las matemáticas como la ciencia del número y el espacio.

De tal forma y con todo, Frege consideraba que el concepto de número podía ser axiomatizable en términos lógicos, pues pensaba que el número se encontraba a la base de toda la matemática. Frege observaba que la generalización del concepto de número lo hacia ideal para poder llegar al análisis más alto, ya que "cuando esta definición de número se tiene en cuenta, todas las verdades matemáticas se convierten en verdades lógicas" (Hintikka, (2009) p. 273). Así pues, visto de esta manera, el concepto de número podía ser expresado en términos lógicos, y por tanto toda la matemática podía ser axiomatizada en términos puramente lógicos.

Así, el paso crucial del logicismo es la interpretación de la matemática a la lógica. Adicionalmente, podemos darnos cuenta que la forma en que los enunciados tanto matemáticos como lógicos son consecuencia de leyes lógicas generales y definiciones *i. e.* la analiticidad para los logicistas. Para constatar esta idea que al parecer surge de manera natural en el proyecto, veamos como Frege se pronuncia al respecto.

[17] La traducción es responsabilidad mía.

I.2 La analiticidad de acuerdo con Gottlob Frege

Objetivos particulares, sección (I.2):

3. Identificar y explicar la definición de analiticidad de Frege.

I.2.1 Frege y la analiticidad

En la sección anterior hemos indicado algunos de los aspectos centrales del logicismo y las implicaciones de cada una de sus tesis centrales –reduccionistas- *i*. *e*. a. cada término y definición matemática es interpretable en términos lógicos y b. cada verdad matemática es demostrable a partir de leyes lógicas generales y definiciones. En esta sección veremos cómo la tesis (b) se relaciona directamente con un criterio lógico-semántico para distinguir una proposición aritmética -analítica- del resto de los enunciados científicos. Veremos que, la noción de prueba lógica es crucial para explicar la analiticidad. También veremos como las propiedades semánticas y epistémicas del conjunto de premisas que intervienen en la prueba para deducir un teorema matemático, determinarán la condición semántica –analítica- y epistémica –*a priori*- del enunciado aritmético probado. La finalidad entonces de ésta sección es señalar cuáles son las condiciones que debe cumplir, de acuerdo con Frege un enunciado para ser considerado analítico. Para esto identificaré algunos pasajes del "Prólogo" en Frege (1879) y consideraré la "Introducción" y las secciones 1-4, 14 y 89 en Frege (1884).

Si bien, el logicismo es un proyecto de fundamentación del conocimiento matemático, parte de su programa consiste en determinar las propiedades de los enunciados matemáticos y lógicos y, con ello, establecer dos cosas. i. explicar la justificación del carácter general del conocimiento matemático y ii. considerar la viabilidad de la reducción de los enunciados aritméticos a enunciados lógicos, en términos de las tesis (a) y (b) examinadas más arriba. Respecto a éste último punto Willem R. de Jong (2010)[18] señala:

[18] Willem R. De Jong: [Frege] (2010). "*The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege*". En <u>*Synthese*</u>.

> Frege is very interested in the foundations of mathematics, especially in the relation between arithmetic and logic. He accepts Kant's thesis that geometrical truths are synthetic *a priori* judgments (cf. Frege 1884, pp. 101–102). But he denies that arithmetical truths are in the same box as geometrical ones, as Kant had argued. On the contrary, he seriously asks himself whether arithmetical truths are really different from logical truths… (de Jong, 2010, p. 256)

> Frege está muy interesado en los fundamentos de las matemáticas, particularmente en la relación entre aritmética y lógica. Frege aceptaba la tesis de Kant de que las verdades geométricas son juicios sintéticos *a priori* (cf. Frege, 1884, pp. 101-102). Pero él niega que las verdades aritméticas se encuentren en la misma caja que las verdades geométricas, como Kant había argumentado. Contrariamente, Frege se preguntaba si las verdades aritméticas realmente son distintas de las verdades lógicas… (De Jong, 2010, p. 256)[19].

El éxito del logicismo dependía de la reducción de los enunciados matemáticos a lógicos. *i*. *e*. si los enunciados matemáticos compartían las mismas características semánticas y epistemológicas que los enunciados lógicos, entonces tal reducción podía llevarse a cabo. ¿Cuáles son las propiedades que comparten los enunciados matemáticos con los enunciados lógicos?

En su artículo De Jong (2010), nos brinda tres aspectos que el logicismo toma en consideración para la viabilidad del programa logicista, a saber: a. los enunciados aritméticos son verdades lógicas o se pueden demostrar lógicamente; b. las reglas utilizadas en las pruebas de los enunciados aritméticos son también reglas lógicas y c. los conceptos aritméticos son definibles en conceptos lógicos:

> a The fundamental propositions of arithmetic are logically provable or logical truths. (De Jong, 2010, p. 257).

> a Las proposiciones fundamentales de la aritmética son verdades lógicas o lógicamente demostrables. (De Jong, 2010, p. 257).

> b Any rule in the Proof Postulate of arithmetic is also a rule of logic (i.e. the methods of proof used in arithmetic are logically sound). (de Jong, 2010, p. 257).

> b Cualquier regla en la Prueba Postulado en aritmética es también una regla de la lógica (*i*. *e*. los métodos de prueba usados en aritmética, son lógicamente sólidos). (De Jong, 2010, p. 257).

> c The fundamental concepts of arithmetic are definable in terms of logical concepts. (de Jong, 2010, p. 257).

[19] La traducción es responsabilidad mía.

> c Los conceptos fundamentales de la aritmética son definibles en términos de conceptos lógicos. (De Jong, 2010, p. 257).[20]

Si los aspectos (a), (b) y (c) están en lo correcto debemos entender que, cuando hablamos de un enunciado matemático, hablamos, en última instancia de un enunciado lógico *i. e.* un enunciado matemático lógicamente interpretable y demostrable. Dicho de otra manera, de acuerdo con el logicismo, todo enunciado aritmético es un enunciado lógico. Al respecto, Frege señala:

> The basis of arithmetic lies deeper, it seems, than that of any of the empirical sciences, and even than that of geometry. The truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for to it belongs not only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable. Should not the laws of number, then be connected very intimately with the laws of thought? (Frege, 1884, p. 21)
>
> La base de la aritmética es más profunda, al parecer, que cualquiera de las otras ciencias empíricas, y aún incluso que esas de la geometría. Las verdades de la aritmética gobiernan todo lo que es numerable. Este es el dominio más amplio de todo, pues a esta no solo pertenece lo actual, no solo lo intuible, sino todo lo pensable. ¿No deberían las Leyes del número, luego, relacionarse muy íntimamente con las Leyes del pensamiento?[21] (Frege, 1884, p. 21)

Ahora bien, lo dicho anteriormente nos explica en qué sentido el logicismo considera la supuesta posibilidad genuina de la reducción de los enunciados aritméticos a enunciados lógicos. La pregunta: "Should not the laws of number, then be connected very intimately with the laws of thought?[22]" no es una expresión retórica sino, que toca el compromiso teórico más profundo del logicismo fregeano, esto es, que hay una correspondencia entre la generalidad de las verdades matemáticas y la generalidad de las verdades lógicas o dicho de otra forma que toda verdad matemática se considera una verdad lógica. Así pues, con la anterior cita podemos percatarnos de la firme creencia que Frege tiene sobre las distintas propiedades que comparten los enunciados

[20] La traducción es responsabilidad mía. Como podemos darnos cuenta, el señalamiento que hace de Jong es consistente con las dos tesis dadas por Hintikka, que ya hemos comentado en la sección anterior a propósito de explicar la motivación reduccionista del programa logicista.

[21] Evidentemente, para Frege las leyes del pensamiento son las leyes lógicas.

[22] ¿No deberían las leyes del número, luego estar muy íntimamente conectadas con las leyes del pensamiento? Mi traducción.

aritméticos y lógicos, en particular sobre su carácter general.[23] Sin embargo, aún con esto no se dice explícitamente algo acerca de las propiedades particulares que satisfacen este programa los enunciados lógicos y aritméticos.

Una caracterización de orden semántico en estos enunciados se expresa en la tesis (b) explicada en el apartado anterior. De acuerdo con esta, la demostración de los enunciados matemáticos a partir de la lógica, se lleva a cabo desde leyes lógicas generales y definiciones. De acuerdo con Frege, todo enunciado que cumplía con estas cualidades tenía la propiedad de ser un enunciado analítico. En otras palabras, si lo anterior es correcto, la manera en que se satisface la reducción de las verdades matemáticas a verdades lógicas según lo señalado en la tesis (b), coincide con el criterio fregeano para fundamentar cuándo un enunciado es analítico y cuándo no lo es: a partir de estas circunstancias lógicas. En palabras de Frege:

> …la pregunta debe apartarse del campo de la psicología y adscribirse al de la matemática, cuando se trata de una verdad matemática. El problema es el de encontrar su prueba y seguirla hasta las verdades más primitivas. Si en este camino sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales, entonces se trata de una verdad analítica… (Frege, [1884] (1972), secc. 3. P. 117).

Lo anterior no sólo sirve para demostrar en que términos un enunciado matemático es lógicamente demostrable y además analítico (condición semántica), sino que adicionalmente será provechoso para poder, atribuirle una propiedad epistemológica al enunciado. Esto es, el criterio de analiticidad propuesto por Frege puede relacionarse con un criterio que nos permita identificar el tipo de justificación de los contenidos de tales enunciados *i. e.* si se trata de verdades justificadas *a priori* o verdades justificadas *a posteriori*: [24]

---

[23] Al igual que Frege, De Jong también ve que la aritmética y la lógica comparten ciertas características que le permiten decir que: [t]he domain of logic is "the widest domain of all; for it belongs not only to the actual, not only to the intuitable, but everything thinkable" (Frege 1884, p. 21).

[24] Como podremos darnos cuenta, la definición epistemológica de *a prioricidad* que a continuación Frege nos ofrece es coextensional con la de analiticidad. Sin embargo, en el caso de la analiticidad esta hace énfasis en la decibilidad de las verdades matemáticas a partir de definiciones y leyes lógicas generales, por otro lado para el caso de la *a prioricidad* esta hace énfasis en la prueba como una estructura lógica que funciona como evidencia de la legalidad de sostener las verdades matemáticas. Así pues, de lo anterior podemos decir que para Frege no hay una reducción de lo analítico a lo *a priori* o a la inversa, en todo caso él considera que la caracterización de los enunciados matemáticos se debe más a su condición analítica, la cual nos permite su justificación *a priori*.

> ...si es imposible llevar a cabo la prueba sin utilizar verdades que no sean de naturaleza lógica general, sino que pertenezcan a un campo especial del conocimiento, entonces se trata de una proposición sintética. …para que una verdad sea *a posteriori*, se exigirá que su prueba no pueda producirse sin apelar a situaciones fácticas, esto es, a verdades que no se puedan probar y que no sean generales, a verdades que contengan asertos sobre objetos determinados. Si, por el contrario es posible producir la prueba totalmente en base a leyes generales, que por su parte ni necesitan ni admiten prueba, entonces la verdad es *a priori*. (Frege, [1884] (1972), secc. 3. P. 117)

Frege pensaba que al dar una explicación de los enunciados aritméticos y lógicos se estaba en condiciones de clasificar mejor el campo del conocimiento en general. Como se ha indicado más arriba, según Frege, la base sobre la que descansa la aritmética es mucho más profunda que cualquiera de las otras ciencias empíricas e incluso matemáticas como la geometría (*Cfr*., Frege, 1879, p. 9). Con esto último no sólo se consideraba una relación entre lógica y aritmética –como analíticamente dos campos constituidos por verdades generales- sino que además se pensaba que al distinguir de forma rigurosa la manera en que se probaban las verdades matemáticas y lógicas, las verdades aritméticas eran diferentes de los enunciados menos generales en cuyas pruebas se tenían compromisos particulares.

En consecuencia el mundo empírico no es importante al momento de brindar una explicación de las propiedades semánticas y epistemológicas de los enunciados matemáticos, pues tales enunciados no se relacionan tampoco con impresiones sensoriales o algún hecho psicológico. El significado de las verdades matemáticas es meramente técnico *i*. *e*. está dado tan sólo por la estructura formal de su prueba y su interpretación lógica (veritativa funcional):

> …la aritmética no tiene absolutamente nada que ver con las sensaciones. Tampoco con las imágenes mentales que confusamente surgen de impresiones sensoriales anteriores. Lo indeciso e indeterminado que ostentan todos estos desarrollos entra en fuerte contraste con la determinación y solidez de los conceptos y objetos matemáticos. (Frege, [1884] (1972), p. 110).

Para Frege la validez de la aritmética es independiente de los sucesos mentales y de la experiencia. ¿Qué es lo que le da validez entonces al conocimiento matemático, al conjunto de pruebas matemáticas? Como hemos señalado, de acuerdo con Frege, la justificación de las verdades aritméticas se encuentra en la prueba lógica. Esta prueba o demostración sirve como un medio formal para establecer las propiedades del conjunto de enunciados que constituyen el conocimiento científico en general y al conocimiento matemático en particular. En otras palabras, a partir de la prueba lógica pueden distinguirse las propiedades más básicas, lógicas y epistemológicas que satisfacen los enunciados matemáticos y el resto de los enunciados científicos:

> (P)or una parte se puede preguntar gradualmente por el modo en que se gana una proposición y, por la otra, por la manera en que finalmente se la fundamenta con máxima firmeza. … la primera cuestión sea contestada de modo diferente por diferentes hombres; la última es más definida y su respuesta se conecta con la naturaleza interna de la proposición considerada. Es patente que la más firme es la prueba lógica pura, la cual prescindiendo de las características particulares de la cosa, sólo se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento. Por tanto dividimos en dos clases todas las verdades que requieren fundamentación. (Frege, 1879, p. 7)

Al respecto, de Jong comentando el proyecto de Frege nos señala: “[t]he context is that of a critical reflection on the way in which proposition are proved in mathematics” (de Jong, 2010, p. 256)[25]. Frege considera a la prueba lógica como el único mecanismo fundacional para demarcar los rasgos cualitativos de los enunciados científicos, pues “la prueba no sólo propone poner a salvo de dudas la verdad de una proposición, sino que también pretende proporcionar la comprensión de unas verdades con respecto a otras”. (Frege, [1884] (1972), p. 116)

Si bien hasta aquí, hemos hecho notar la importancia de la prueba lógica para la determinación de la analiticidad y la *a prioricidad* de las verdades matemáticas, no obstante, es importante delimitar específicamente qué es lo que Frege está entendiendo por prueba lógica, de tal suerte que podamos también conceder la coextensionalidad entre el predicado “ser analítico” y la *a prioricidad*, pues tal coextensionalidad no implica una reducción entre ambos casos.

[25] El contexto es el de una reflexión crítica sobre la forma en que la proposición es demostrada en las matemáticas. La traducción es responsabilidad mía.

¿Qué entiende Frege por prueba lógica? Una prueba debe entenderse como una finita ordenación de pasos, "such that each statement in the sequence either is an axiom or follows from previous members by a valid rule of inference".[26] Para Frege una prueba lógica es entonces un sistema formal, un método de decidibilidad proposicional, el cual esta constituido por axiomas, proposiciones matemáticas que se tienen por verdaderas y la aplicación de reglas de inferencia para obtener nuevas proposiciones en el sistema. Justo como se ha indicado más arriba, con este método finito de prueba, es posible determinar si una proposición esta expresando una verdad matemática o una verdad científica de diferente naturaleza, gracias al conjunto de premisas que constituyen la prueba especifica se puede inferir el tipo de enunciado con el que se trabaja. En otras palabras, si en la demostración de un enunciado sólo se incluyen como parte de su antecedente formal enunciados que son estrictamente lógicos: axiomas, teoremas generales, definiciones lógicas y reglas de inferencia, entonces dicho enunciado es considerado semánticamente analítico. Por otro lado, si en la prueba encontramos enunciados que no son de naturaleza general por hacer referencia a particulares, entonces, su propiedad semántica será sintética. Ahora bien, el contenido de un enunciado en el marco de una prueba lógica estará justificado *a priori* sólo si se infiere exclusivamente desde leyes lógicas generales y premisas generales. Asimismo, los contenidos proposicionales en cuya prueba no sea posible llevar a cabo sin a pelar a situaciones de carácter factico serán entonces considerados *a posteriori i. e.* enunciados cuyo contenido proposicional no es general por depender de hechos no lógicos, dado que su justificación también dependerá de la experiencia.

Dicho lo anterior, podemos decir, que la forma en la que identificamos los enunciados analíticos resulta ser coextensional con la manera en que se define la justificación *a priori* de las verdades aritméticas. Si bien esto es correcto dado que: si en la prueba "…sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales,… se trata de una verdad analítica" (Frege, [1884] (1972), secc. 3, p. 117) y "[s]i,… es posible producir la prueba totalmente en base a leyes generales,… entonces la verdad es *a priori*" (Frege, [1884] (1972), secc. 3, p.117); esto no implicará una reductibilidad entre una propiedad semántica o una propiedad epistemológica ni viceversa. ¿Qué es lo que nos hace pensar lo anterior?

[26] "de tal manera que cada instrucción en la secuencia o bien es un axioma o se sigue de los miembros anteriores por una regla válida de inferencia". Zalta, Edward N., "Gottlob Frege", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/frege/. Mi traducción.

Cuando Frege habla de analiticidad asume a la prueba lógica como una forma de determinar el significado de una proposición *i. e.* la prueba funciona como un medio de interpretación técnica del teorema demostrado y no sólo como un componente sintáctico de decidibilidad. En otras palabras, el significado del teorema probado está contenido composicionalmente en el significado técnico general de las partes que constituyen su prueba. Ahora bien, se dice que este enunciado además será *a priori* por el hecho de que su justificación no depende en lo absoluto de un elemento del mundo no lógico, pues su prueba se ofrece de manera independiente al mundo. Por lo tanto, en este caso, la prueba lógica funciona como una evidencia técnica -análoga a la evidencia empírica en el caso de enunciados cuya justificación es *a posteriori*-, una evidencia lógica de justificación proposicional. Entonces, si lo anterior es correcto debemos entender que la analiticidad y la *a prioricidad* si bien son coextensionales no son reducibles pues hacen énfasis en cuestiones diferentes sobre el carácter de los enunciados matemáticos. Así pues, tenemos que la analiticidad se enfoca en la decibilidad de las verdades matemáticas a partir de premisas, leyes lógicas generales y definiciones. Y por otra parte tenemos que la aprioricidad se refiere a la prueba lógica como una estructura formal, la cual funciona como evidencia para justificar la verdad de un enunciado matemático y lógico sin apelar a la experiencia.

Como consecuencia de lo anterior, de acuerdo con Frege en términos generales será suficiente establecer el carácter semántico de un enunciado matemático para determinar su propiedad epistemológica, *i. e.* será suficiente demostrar la definición de los enunciados matemáticos en términos lógicos, para declarar que la prueba puede realizarse sin necesidad de recurrir a la experiencia. En otras palabras, en términos particulares, será suficiente identificar la analiticidad de un enunciado matemático para determinar la justificación *a priori* de su verdad. Así pues, en este caso, la analiticidad será una propiedad más básica (anterior) que la *a prioricidad* y, esto será consistente, no sólo con la coextensionalidad de sus definiciones sino con la dos formas, señaladas arriba, de entender la prueba lógica –la prueba como un medio para definir un teorema y la prueba como un medio de evidenciar su carácter general atendiendo a su independencia con el mundo.

En suma, cuatro son los aspectos que nos permiten indicar los resultados obtenidos de acuerdo con el análisis de Frege (1879, 1884):

a. Si un enunciado encontramos únicamente, leyes lógicas generales y definiciones, entonces tal enunciado será semánticamente analítico.

b. Si no es posible preservar la verdad de un enunciado a partir de una prueba lógica sin atender a enunciados de naturaleza no lógica (general) y que además forme parte de un campo científico particular, entonces estamos frente a un enunciado sintético.

c. Si en la justificación de un enunciado mediante una prueba lógica, no se puede seguir adelante sin tener que apelar a situaciones de carácter fáctico, entonces estamos frente a un enunciado cuya justificación su prueba, será *a posteriori* (*i*. *e*. son enunciados menos generales cuyo estatus epistemológico esta basado en la contrastabilidad empírica).

d. Si en la justificación de un enunciado mediante una prueba lógica tan sólo se utilizan leyes lógicas generales, que por su parte no necesitan ni admite prueba, y en ningún caso la justificación de sus pasos apela a una evidencia empírica, entonces estamos frente a un enunciado analítico y además una verdad a *priori*, una verdad independiente a la experiencia.

Como podemos darnos cuenta, estas cuatro formas de distinguir los enunciados científicos nos permite decir (siguiendo el logicismo de Frege), que sólo la prueba es el medio capaz de analizar y evidenciar el tipo de enunciados que en ella participan, esto es desde el conjunto de premisas hasta el conjunto de conclusiones, en tanto estos enunciados sean de naturaleza general o particular *i. e*. enunciados que caen bajo la extensión de las distinciones analítico/sintético (distinción semántica) y *a priori* /*a posteriori* (distinción epistemológica). Por tanto, la prueba funciona como un medio de definición semántico proposicional, y también como un medio epistemológico que evidencia el carácter general de las verdades matemáticas.

CAPÍTULO II

EL LOGICISMO CARNAPIANO

Capítulo II

El logicismo carnapiano

Introducción

Este capítulo tiene como objetivo, presentar la definición logicista de analiticidad propuesta por Rudolf Carnap de acuerdo con "*La Sintaxis lógica del Lenguaje"* (1935)[27] y "*Meaning and Necessity"* (1947) [28]. En esta sección me enfocaré en señalar dos aspectos. El primero de estos aspectos refiere a la caracterización sintáctica de la analiticidad de acuerdo con Carnap (1935). El segundo de ellos refiere a la caracterización semántica de la analiticidad considerando Carnap (1947).

2. I Carnap y la analiticidad: la sintaxis.

Objetivos particulares, sección (2. I)

1. Presentar y analizar los compromisos sintácticos de la propuesta carnapiana sobre la definición de analiticidad desde algunos pasajes de "*La Sintaxis lógica del lenguaje*"

Rudolf Carnap al igual que Frege está muy interesado no sólo en las matemáticas y la lógica, sino también en cómo se constituye el conocimiento científico en general. Así pues, de manera similar a Frege (1879 y 1884), Carnap (1935) intenta caracterizar al conjunto de enunciados que constituyen a la lógica y al conjunto de enunciados científicos no lógicos ni matemáticos. Asimismo, Carnap pretende demostrar la posibilidad de cómo la lógica y las matemáticas pueden ser explicadas a partir de una rigurosa distinción entre la verdad formal y la verdad de hecho,

---

[27] Carnap, R. [1935] (1998), <u>*Filosofía y sintaxis lógica*</u>, traducción de César Molina, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, D.F.
[28] Carnap, R. (1947), <u>*Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*</u>. University of Chicago Press. Chicago.

distinción análoga a la verdad analítica y sintética (*Cfr*., Friedman, 1988, p. 82). De esta forma, Carnap procura dar una clara explicación de la distinción entre la lógica y las cuestiones de hecho, pues considera que dicho análisis es necesario para dar cuenta de la constitución de teorías científicas y del desarrollo general de la ciencia. Al respecto, Michael Friedman (1988)[29] señala:

> an explication for the distinction between logical and descriptive signs and that between logical and factual truth, because it seems to me that without these distinction a satisfactory methodological analysis of science is not possible. (Carnap en Friedman, 1988, p. 82)[30].

> una explicación para la distinción entre signos lógicos y descriptivos y, entre verdades lógicas y verdades de hecho [es importante], porque me parece que sin esta distinción un análisis metodológico satisfactorio de la ciencia no es posible. (Carnap en Friedman, 1988, p. 82)[31].

Lo anterior, nos permite constatar no sólo el interés de Carnap por demarcar el límite entre los enunciados constitutivos de la lógica y de la ciencia empírica, del resto de los enunciados no científicos, sino adicionalmente identificar y explicar las propiedades que tienen los enunciados al interior del dominio de la ciencia. Por otra parte, el análisis carnapiano coincide con un punto paradigmático del programa logicista fregeano. Me refiero no sólo a la tesis reduccionista supuesta por el logicismo entre matemáticas y lógica[32] sino a la aspiración de explicar la naturaleza de tales enunciados lógicos como enunciados cuyas propiedades semánticas y epistemológicas difieren de los enunciados científicos en general.

De acuerdo con Carnap (1935) es posible demarcar la lógica y la ciencia empírica a partir de la categorización sintáctica de los enunciados constitutivos para cada uno de estos casos. De acuerdo con "*La* S*intaxis lógica del lenguaje"* el análisis lingüístico considera diferentes

---

[29] [29] Friedman M. (1988) _*History and philosophy of modern mathematics*_. URL: http://www.mcps.umn.edu/philosophy/11_3friedman.pdf, citado el 28/11/13
[30] Friedman M. (1988) _*History and philosophy of modern mathematics*_. URL: http://www.mcps.umn.edu/philosophy/11_3friedman.pdf, citado el 28/11/13
[31] La traducción es responsabilidad mía.
[32] Al respecto de esta tesis, ver Capítulo I de esta investigación

aspectos: i. la teoría “formal”; ii. reglas de formación; iii. reglas de transformación; iv. términos sintácticos y v. términos *L*. La relación de dichos aspectos llevará a Carnap a una clasificación de corte sintáctico y epistemológico del conjunto de enunciados relevantes para la ciencia. Como veremos, a partir de esta clasificación y particularmente considerando los ‘L-conceptos’ la propiedad analítica de los enunciados será atribuible sólo a aquellos ejemplares constitutivos de la lógica.

A continuación explicaré cada uno de los aspectos arriba señalados.

2. I.I *La teoría “formal” de Carnap*

Para Carnap la *sintaxis lógica* es una teoría formal del lenguaje, cuyas consideraciones “se refieren a la expresión lingüística (términos) sin referencia alguna al sentido o a la significación que pudiera tener” (Carnap, [1935] (1998), p. 23), se trata entonces de una teoría lógica. Así pues, el objetivo principal de esta teoría “formal”, consiste en demostrar que este método funciona para diferentes propósitos. El primero, se trata de un contexto teórico-sintáctico, el cual nos permite simbolizar o traducir enunciados dados en los lenguajes científicos y cotidianos a partir de herramientas exclusivamente lógicas. Una teoría de esta clase lo que propone es expresar cuáles son las condiciones sintácticas de los lenguajes relevantes para la ciencia y la filosofía. [33] De esta forma, con este método se puede definir formalmente cualquier tipo de enunciado del lenguaje y con ello ir descartando cualquier otro enunciado que o bien no satisfaga cualquiera de las propiedades de la lógica (funciones proposicionales) exclusivamente, o bien no satisfaga tanto las propiedades lógicas de un enunciado, así como las condiciones constitutivas del principio verificacionista del significado. De acuerdo con Carnap:

---

[33] Es importante señalar que *Philosophy and Logical Syntax* muestra el carácter anti-metafísico de las propuestas en filosofía de la ciencia inscritas en el Circulo de Viena. Particularmente, Carnap considera que el análisis sintáctico (en conjunción con el método empirista del significado) es una forma clara de dejar fuera todos aquellos enunciados (pseudo-proposiciones) que no resistan el análisis formal de tal teoría: “de la proposición “El principio del mundo es agua” no podemos decir ningún enunciado que afirma algunas percepciones, sensaciones o experiencias cualesquiera que pudieran esperarse para el futuro. Por consiguiente, la proposición: “El principio del mundo es agua” no afirma nada” (Carnap, [1935] (1998), p. 11).

> Los metafísicos no pueden evitar elaborar proposiciones no verificables porque si las hicieran verificables la decisión acerca de la verdad o falsedad de sus doctrinas dependería de la experiencia y, por consiguiente, pertenecerá al campo de la ciencia empírica (Carnap, [1935] (1998), p. 11).

Así pues:

> Las proposiciones de la metafísica no son ni verdaderas ni falsas porque no aseveran nada, no contienen ni conocimiento ni error, permanecen completamente al margen del campo del conocimiento, de la teoría, fuera de la disyuntiva de la verdad o falsedad; son, sin embargo como la risa, la lirica y la música, expresivos (Carnap, [1935] (1998), p. 17).

En suma, desde esta primera consideración, la finalidad de aplicar este método sintáctico, será, "traducir estos problemas del modo material de hablar, comúnmente utilizado, al modo formal" (Carnap, [1935] (1998), p. 46).

En segundo lugar, la teoría formal funcionará como una manera de establecer las características de los enunciados que forman parte de la ciencia, *i. e.* poder llevar a cabo una distinción de las propiedades de los enunciados que sí pertenecen tanto al dominio lógico y matemático, como al dominio de la ciencias empíricas.

Carnap desarrolló la *sintaxis lógica* como una propuesta sintáctica para cualquier lenguaje desde una postura logicista, sin embargo, debemos considerar que él retoma partes importantes del formalismo hilbertiano. Siguiendo a Friedman (1998) vemos que tal teoría sintáctica se compromete con el formalismo donde en un principio-"*construction of mathematical systems exhibits none of the characteristic features of logicism*"[34] (Friedman, 1998, p. 83). Si embargo, esto no implicará un problema para la finalidad de la *sintaxis lógica*, pues la idea de Carnap

[34] [L]a construcción de los sistemas matemáticos no presenta ninguno de los rasgos característicos del logicismo. Mi traducción.

consiste en la unión de lo mejor del logicismo y el formalismo *i. e. -a combination of Frege and Hilbert that somehow captures the best of both positions*[35] (Friedman, 1998, p. 83)-, para sostener tanto la tesis reduccionista entre lógica y matemáticas, así como llevar a cabo la posibilidad de identificar las propiedades sintácticas y epistemológicas que deberán satisfacer los enunciados lógicos y no lógicos.

Así pues, Carnap construye su teoría sintáctica, en la cual, cierto lenguaje esta dado sólo por ciertos signos y términos que son conducidos por ciertas reglas, donde por ninguna razón se hace mención del significado o sentido de los enunciados que participan en dicho análisis formal.

2. I.II *El sistema de reglas de formación. Carnap (1935)*

Carnap entiende el término "lenguaje" como un *sistema de reglas*. Este sistema de reglas es distinto a los actos de habla o de hablar (*speech acts*)[36]. ¿Qué es lo que entiende Carnap por un sistema de reglas? De acuerdo con Friedman (1988): [f*or*] *Carnap, a language or linguistic framework is syntactically specified by its formation and transformation rules, where these latter specify both axioms and rules of inference*[37] (Friedman, 1988, p. 88). Aclaremos el punto anterior.

De acuerdo con Carnap las reglas de formación especifican la manera en la que un sistema de lenguaje (*SL*) debe funcionar *i. e.* cómo deben ser construidos los enunciados en dicho sistema para considerarse fórmulas bien formadas de este sistema. Así pues, los enunciados de un determinado sistema *SL* deberán estar constituidos por diferentes símbolos en lugar de palabras

---

[35] [U]na combinación de Frege y Hilbert que de alguna manera capta lo mejor de ambas posiciones
[36] Aquí hago referencia a las intenciones de un hablante, en este caso acciones, saludos, promesas o advertencias. En este sentido retomo la teoría de J. L. Austin acerca de los actos de habla. Estos aspectos no son considerados por Carnap (1935).
[37] "[P]ara Carnap, un lenguaje o una estructura lingüística se encuentra sintácticamente especificada por sus reglas de formación y transformación, donde éstas últimas se especifican tanto por axiomas como por reglas de inferencia." La traducción es responsabilidad mía.

como expresiones pertenecientes a idiolectos particulares. Estos símbolos son similares a los usados en las matemáticas. Igualmente debemos señalar, que las reglas de formación de la *sintaxis lógica*, son semejantes a las reglas gramaticales, más específicamente, a las reglas de la sintaxis gramatical de un lenguaje natural. Por otro lado, tenemos que considerar que el sistema de reglas de formación no tiene nada que ver con referencias empíricas, ya que este método sintáctico sólo puede ser aplicado a los sistemas de lenguaje formal. Asimismo, en la sintaxis lógica no se hace referencia al significado de las palabras que participan en los enunciados, pues el significado queda fuera y se enfatiza únicamente en la satisfacción de relaciones lógicas entre vocabulario, reglas y expresiones bien formadas.

El conjunto de reglas de formación de un sistema *SL* es equivalente al término sintáctico "oración de *S*", el cual puede establecerse también como "[u]na serie de palabras que constituye una oración del sistema *S* si y sólo si, tienen esta, esa o aquella otra forma" (Carnap, [1935] (1998), p.25). Con la definición de 'oración de *S*' Carnap determina un esquema que le permite enumerar y decidir cuándo la concatenación de los signos puede ser el resultado de una combinación finita entre los signos del vocabulario para construir enunciados apropiados en el sistema (fórmulas bien formadas).

La *sintaxis lógica* de Carnap incluye dos de las principales reglas de formación del lenguaje simbólico de Whitehead y Russell, las cuales fueron desarrolladas en su obra *Principia Mathematica*:

i. si una expresión tiene un predicado (esto es, alguna de las letras griegas minúsculas "ϕ", "ψ", etc.) y una o más variables individuales (las letras minúsculas romanas "x", "y", etc.) se le considerará que es un enunciado;

ii. si una expresión que tenga dos enunciados y un signo conectivo ("v", "·", "⊃", "≡") entre ellas, también se le considerará un enunciado (*Cfr.*, Carnap, [1935] (1998), p. 25).

Posteriormente a las anteriores reglas, podemos considerar otras dos reglas de formación no incluidas en la sintaxis lógica de Carnap (1935), pero consistentes:[38]

iii. una expresión que tenga el operador de la negación seguido de un enunciado, es también considerado un enunciado.

iv. Una expresión que este constituida por un cuantificador, universal o existencial, seguido de una variable individual, también será considerada un enunciado.

De lo anterior, podemos decir que las reglas de formación determinan a partir de predicados, variables, signos conectivos, operadores y cuantificadores, la forma lógica de los enunciados, así también, determinan cuándo una secuencia de signos son aceptados como expresiones de un lenguaje *i. e.* cuando se tiene una fórmula bien formada. De esta forma, podemos decir que una regla de formación en la *sintaxis lógica* de Carnap (1935), es la manera en que se establecen las condiciones técnicas para un vocabulario que determina la formación y las relaciones lógicas de los enunciados.

En síntesis, las reglas de formación de la *sintaxis lógica* de Carnap nos sirven para considerar: i. cuando se tiene una fórmula bien formada, ii. determinar la forma lógica y los constituyentes de un enunciado iii. determinar si las secuencias (enunciados) están bien formadas, iv. determinar la sucesión de signos que puede considerarse para la construcción de fórmulas bien formadas.

2. I.III *El sistema de reglas de transformación*

Para Carnap, las reglas de transformación son tan o más importantes que las reglas anteriores, pues "éstas determinan cómo determinadas oraciones pueden ser transformadas en otras" (Carnap, [1935] (1998), p. 25). Para comprender mejor lo anterior, Carnap considera el siguiente

[38] *Cfr.*, Jasso Méndez, J. (2003). *Analiticidad, aprioricidad y necesidad. Un análisis conceptual*. Tesis de maestro en filosofía. Universidad Nacional Autónoma de México. págs. 19, 20.

caso del lenguaje natural: si todos los *a* son *b* y si todos los *b* son *c*, se puede inferir que: todos los *a* son *c* (*Cfr*., Carnap, [1935] (1998), p. 25). A partir de este ejemplo, Carnap distingue entre esquemas de enunciados y ejemplares de enunciados. De acuerdo con lo anterior, este ejemplo refiere a un esquema de enunciado, mientras que una instanciación particular de tal esquema referirá a un enunciado como tal. Ahora bien, si la instanciación se restringe a una estructura sintáctica entonces disponemos de un enunciado lógico. Por otra parte, si la instanciación incluye enunciados con compromiso empírico entonces dispondremos de un enunciado particular y no lógico. Veamos los dos casos considerando el esquema anterior tal y como Carnap analiza el caso:

> "“todos los a son b”
>
> y “todos lo b son c”
>
> podemos inferir que: “todos los a son c”
>
> …a efecto de elaborar oraciones, tenemos que sustituir las letras “a”, “b” y “c” por tres sustantivos del español en forma plural…
>
> “todas las águilas son pájaros”
>
> y “todos los pájaros son animales”
>
> podemos inferir que: “todas las águilas son animales”. Carnap, [1935] (1998), p. 25).
>
> En el caso de la lógica:
>
> “De dos oraciones de la forma:
>
> “A”
>
> y “A $\supset$ B”, donde ‘$\supset$’ es el signo de implicación podemos inferir “B”” (Carnap, [1935] (1998), p. 26))

De acuerdo con Friedman, estos casos son altamente similares a los considerados en *Principia Mathematica* a propósito de las reglas de transformación. Un punto importante de acuerdo con Friedman es no sólo indicar que las instanciaciones de esquemas generales (de argumentos) pueden ser a partir de elementos lógicos o físicos –distinguiendo con ello tipos de enunciados y argumentos- sino que en el caso de las instanciaciones físicas, la relación de consecuencia supone elementos tanto físicos como lógicos, suponiendo adicionalmente reglas físicas y lógicas para la estructuración del análisis de enunciados y argumentos con compromiso empírico. En otras palabras, en el caso de analizar cómo se sigue un enunciado físico de otros enunciados físicos, se emplearán reglas lógicas las cuales señalan las condiciones correctas de la derivación y adicionalmente se obtienen consecuencias con particulares –los argumentos constituidos por enunciados físicos se encuentran estructurados en términos lógicos de tal suerte que la conclusión si bien tiene un compromiso empírico junto con las premisas, la relación que existe entre estos conjuntos de enunciados se encuentra clausurado bajo el concepto de consecuencia lógica. En términos de Friedman:

> The language in question is then characterized by its consequence-relation, which is defined in familiar ways from the underlying transformations rules. Now such a language or linguistic framework will contain both formal and empirical components, both "logical" and "physical" rules (Friedman, 1988, p. 88).

> El lenguaje en cuestión es entonces caracterizado por su relación-consecuencia, que se define en formas familiares de las fundamentales reglas de transformación. Ahora tal lenguaje o estructura lingüística contendrá tanto componentes formales y empíricos, como "reglas lógicas" y "físicas"[39] (Friedman, 1988, p. 88).

Ahora bien, de acuerdo con Carnap las condiciones básicas de derivabilidad se encuentran contenidas en su noción de "consecuencia directa". Para Carnap, la definición de dicha noción no es otra más que la totalidad de las reglas de transformación en un sistema de lenguaje específico. Carnap señala que estas reglas pueden ser formuladas de manera análoga al sistema de *PM*. Así pues, él nos dice que "[e]n el sistema *PM*, una oración se establece como consecuencia directa de oraciones pertenecientes a otra clase" (Carnap, [1935] (1998), p 26) *i. e.* que la consecuencia directa es el resultado de un enunciado probado, su conclusión. Asimismo, se dice que un enunciado es una *consecuencia directa*, si y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones

i. que el enunciado tenga la forma 'B' y el conjunto de premisas consista en 'A' y 'A $\supset$ B',

[39] La traducción es responsabilidad mía.

ii. …,

iii. …”

El uso de las reglas de inferencia o de transformación determina cuándo se infiere sintácticamente y correctamente un enunciado *i. e.* una conclusión, ya que “la transformación o inferencia dependen solamente del carácter formal de las oraciones, dependen sólo de su forma sintáctica” (Carnap [1935] (1998), p. 27). Así pues, podemos decir que, una regla de inferencia es la base sobre la que se fundamenta un enunciado mediante un proceso técnico, en el cual desde el conjunto de premisas es posible obtener la validez de una conclusión. Por otro lado, Carnap considera que los axiomas o enunciados primitivos, pueden explicarse o establecerse en términos de una regla de inferencia “y, por consiguiente en la forma de una parte de la definición de “Consecuencia directa”” (*Cfr*. Carnap, [1935] (1998), p. 26)[40]. En este caso, la única diferencia entre una regla de inferencia y un axioma es que éste último se obtiene directamente de la clase nula de premisas pues es consecuencia directa de la misma clase nula de premisas *i. e.* para un axioma la clase de premisas no es otra, que la clase nula.

De acuerdo con Carnap, la clase nula es aquella clase, que no contiene miembros, *i. e.* es la clase vacía que en cualquier caso sólo se contiene a sí misma. En este sentido, es por eso que se dice que un axioma es verdadero vacuamente o que expresa una verdad vacua –dado que el conjunto de premisas que lo justifican refiere a un conjunto vacío de premisas. De esta manera, debemos entender que la expresión “‘p $\supset$ (p v q)’ es una oración primitiva de un lenguaje específico” y debe comprenderse en los términos siguientes: “‘p $\supset$ (p v q)’ es una “consecuencia directa” de las premisas de la clase nula” (*Cfr.*, Carnap [1935] (1998), p. 26). Ahora bien, en este caso una consecuencia estará determinada por su forma sintáctica pues de acuerdo con Carnap:

[40] En este caso la definición de “consecuencia directa” quedaría como: la totalidad de las reglas de transformación y los axiomas en un sistema de lenguaje específico.

Si se conecta una clase P de premisas con determinada oración C mediante una cadena de oraciones, de tal manera que cada oración de la cadena sea una consecuencia directa de algunas oraciones precedentes en la cadena, llamamos a la oración C una *consecuencia* de la clase P de las premisas. (Carnap [1935] (1998), p. 26)

Así, Carnap considera que con el uso de las reglas tanto de formación y de transformación es posible considerar sintácticamente en qué sentido la justificación de un enunciado –siendo ésta una conclusión en el marco de una prueba- sea éste no sólo una consecuencia lógica de las premisas antecedentes sino también pueda clasificarse si se trata de enunciado estrictamente lógico o bien un enunciado con alguna consecuencia sobre particulares[41].

2. I.IV *Términos sintácticos*

"Enunciado" y "consecuencia directa", serán también términos de suma importancia para Carnap en su *sintaxis lógica*. Será a partir de estos dos términos que se podrán definir otros términos importantes para su propuesta sintáctica y clasificatoria. Veamos.

Los términos sintácticos son una consecuencia de la forma en que Carnap ha explicado su vocabulario, las reglas de formación y las reglas de transformación para *S*. Como lo hemos señalado, del conjunto de reglas de formación y transformación se puede construir un lenguaje

[41] Aquí, debemos considerar la distinción que existe entre consecuencia directa y consecuencia en general. Como vemos, con la noción de consecuencia directa Carnap intenta caracterizar los enunciados de la lógica, señalando que si un enunciado es consecuencia directa del conjunto vacio este será, entonces un enunciado lógico. Así pues, por una parte, analíticamente hablando un axioma será consecuencia directa del conjunto vacio, dadas sus propiedades lógicas, pues no necesita prueba *i. e*. premisas, ya que este es vacuamente verdadero. Por otra parte, también se dice que los enunciados de la lógica en general son considerados una consecuencia directa. Sin embargo, para llegar a decir que estos son también una consecuencia directa se debe identificar primero los pasos a seguir de su prueba. De tal suerte antes de decir que estos son una consecuencia directa, habrá que señalar que son consecuencia de otros enunciados y estos últimos a su vez de otros enunciados, hasta llegar a aquellos que son analíticos, una consecuencia directa. No obstante, en cualquiera de los dos casos se dice que los enunciados lógicos son consecuencia directa del conjunto vacio.

formalizado que pueda incluir enunciados cuyo carácter descriptivo refiera a hechos lógicos y algunos más que refieran a hechos de naturaleza no lógica:

> … el que una oración dada sea verdadera o falsa dependerá generalmente no solo de su forma sintáctica, sino de la experiencia, es decir de algo extra lingüístico; es posible, sin embargo que en determinados casos, una oración resulte verdadera o falsa simplemente en razón de las reglas del lenguaje (Carnap, [1935] (1998), p. 28).

A partir de esta observación Carnap se da a la tarea de distinguir los tipos de enunciados que ocurren en *S*. Para ello, Carnap introduce adicionalmente la distinción "válido/contraválido":

> Se llama válida a una oración si ésta es consecuencia de premisas de la clase nula. … se llama contraválida a una oración 'A' de un determinado sistema del lenguaje si cualquier oración del sistema es una consecuencia de 'A' (Carnap, [1935] (1998), p. 28).

La taxonomía anterior claramente distingue un tipo de enunciados en *S*. De acuerdo con Carnap *S* estará constituido en parte por enunciados de carácter eminentemente lógico, los cuales estarán determinados exclusivamente por aspectos sintácticos *i. e*. por el concepto de derivabilidad o consecuencia directa, por la aplicación exclusiva de leyes lógicas (reglas de transformación o de inferencia) y por la noción de prueba lógica. Para Carnap, siguiendo los *PM* una prueba "consiste en una serie de oraciones de tal género que cada una de las oraciones que la forman es una oración primitiva o está inferida de oraciones precedentes de esa oración" (Carnap, [1935] (1998), p. 28). Así pues, si en la prueba se encuentran solo enunciados lógicos, cuyo valor de verdad se encuentra determinado por el uso exclusivo de las reglas del lenguaje, se llamará a este enunciado *determinado*, esto independientemente si es un enunciado válido o contraválido, por otro lado, si en la prueba encontramos enunciados cuya naturaleza no sea de carácter lógico, los llamaremos *indeterminados*. De esta forma, en el marco de una prueba lógica será posible identificar cuándo estamos frente a enunciados de corte sintáctico o bien cuando se infiere algún teorema con compromiso descriptivo o empírico. Esto último se relaciona también con la expresión 'Términos-L'. Veamos.

2. IV *Términos L*

Carnap construye todo un aparato técnico y por consiguiente hace notar que el empleo de este método, al que ha denominado sintaxis lógica, "se caracteriza por limitarse a términos definidos de un modo estrictamente formal" (Carnap, [1935] (1998), p. 32). Este sistema formal nos ofrece un lenguaje con el cual se pueden obtener las características de cierto tipo de enunciados gracias a los términos sintácticos que aquí se emplean. Así pues, la caracterización de un enunciado C será *consecuencia* de una clase de premisas de P si en su demostración la cadena de premisas se encuentra constituida de acuerdo con las reglas de transformación que conecte la clase P con el enunciado C. Asimismo, Carnap señala que dentro de estos términos sintácticos es posible localizar, además de las reglas lógicas, reglas extralógicas. Carnap incluye tanto los enunciados primitivos como las reglas de transformación, las cuales señala "se suelen elegir de tal manera que parecen ser adecuadas por razones lógicas o matemáticas" (Carnap [1935] (1998), p. 29). De esta forma, Carnap llama *L*-reglas a las reglas de transformación, las cuales dice son de carácter lógico o matemático. Igualmente, llama *F*-reglas o reglas físicas a las reglas de carácter extralógico. Las reglas extralógicas, incluidas por Carnap son las provenientes de algunas leyes físicas, a las que él caracteriza como enunciados primitivos *ex. gr*. las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, los principios de la mecánica de Newton o los dos principios de la termodinámica. Así, las reglas de transformación del lenguaje *S* pueden constituirse tanto por *L*-reglas o *F*-reglas.

La distinción y la aplicación de este tipo de reglas, es un punto muy importante pues dependiendo del uso exclusivo o no, que de ellas se haga se determinará el carácter analítico o sintéticos de los enunciados de *S*. En esta línea, si sólo *L*-reglas se han empleado en una deducción, se llama a *C* una *L-consecuencia* de P. Si por el contrario, solo *F*-reglas se aplican a *C*, se llama a *C* una *F-consecuencia* de P.

Para demostrar lo antes dicho a estos dos casos, Carnap considera el siguiente ejemplo:

> P1: El cuerpo A tiene una masa de tres gramos.
>
> P2: El cuerpo B tiene una masa de seis gramos.
>
> Entre otras, podemos entonces deducir de P las dos consecuencias siguientes:
>
> C1: La masa de B es el doble de la masa de A
>
> C2: Si sobre A y sobre B actuaran fuerzas iguales, la aceleración de A sería el doble de la aceleración de B (Carnap [1935] (1998), p. 30).

En este sentido, de cuerdo con Carnap la derivación de C1 será exclusivamente a partir del uso de *L*- reglas. Por otra parte, para la derivación de C2 será necesario el uso tanto de *L*-reglas como de *F*-reglas, en este caso las leyes de la mecánica. Por tanto, C1 será una L-consecuencia, mientras que C2 será una F-consecuencia de premisas de la clase *P*.

Posteriormente, Carnap comienza la caracterización de los enunciados de acuerdo con los recursos sintácticos de su teoría:

i. "[U]na oración que es verdadera exclusivamente por razones L, la llamaremos válida-L o *analítica*" (Carnap, [1935] (1998), p. 30). Para Carnap la definición de 'válida' en un enunciado es completamente análoga al de **enunciado analítico**, ya que según él "una oración es analítica si es consecuencia L de premisas de la clase nula" o en otras palabras se trata de un enunciado L-Válido (Carnap [1935] (1998), p. 30). Por otra parte, Carnap llama "contraválida L o *contradictoria* a la oración que es falsa exclusivamente en razón de las reglas L" (Carnap, [1935] (1998), p. 30). De esta forma, para Carnap un enunciado es contradictorio si cualquier enunciado deducido del lenguaje es una L-consecuencia de ese enunciado *i. e*. si ('A' y '~A') se siguen de *S*: "…si 'B' y '~B' son consecuencia de 'A', cualquier oración es consecuencia de 'A', y 'A' es contraválida" (Carnap, [1935] (1998), p. 28). En consecuencia, de acuerdo con Carnap "se llama *determinada* L a una oración si ésta es analítica o contradictoria" (Carnap, [1935] (1998), p. 31) – *i. e*. se trata de enunciados determinados tan sólo por la sintaxis.

ii. "[S]i la oración no es determinada L, se denomina indeterminada *L* o *sintética*" (Carnap, [1935] (1998), p. 31). Los enunciados sintéticos serán aquellos cuya verdad no se asigna exclusivamente por la sintaxis lógica sino que intervienen reglas F. La distinción analítico sintético se sigue entonces del uso de ciertos términos incluidos en la sintaxis, de tal suerte que: [T] *he task of defining analytic-for-a-language then is to show how to distinguish these two components: in Carnap's technical terminology, to distinguish L-rules from P-rules, L-consequence from P-consequence*[42] (Friedman, 1988, p. 88).

En síntesis, la propuesta carnapiana para la definición estándar de analiticidad, queda determinada en forma sintáctica, mediante la noción de derivación o '*consecuencia lógica' y 'L – válido'*. Así pues, un enunciado que haya sido probado bajo las reglas de dicho lenguaje será no sólo una consecuencia lógica, ya que esta se sigue del conjunto de premisas que participan en su derivación, sino además satisface los aspectos que determinan su carácter analítico: será consecuencia sólo de leyes generales de la lógica y términos sintácticos. Como podemos ver, lo anterior es altamente consistente a la definición fregeana de analiticidad i. e. un enunciado es analítico si y solo si es consecuencia de leyes lógicas generales y definiciones.

No obstante, más adelante Carnap (1947), se verá obligado a complementar su teoría sintáctica, para llegar a definir los enunciados analíticos como aquellos que son teoremas bajo todas las situaciones posibles. En este caso, esto lo llevara a cabo a partir de compromisos conceptuales de

[42] La tarea de definir analítico-para-un-lenguaje, es entonces, mostrar cómo distinguir estos dos componentes: en la terminología técnica de Carnap, distinguir entre L-reglas de P-reglas, L-consecuencias de P-consecuencias. Mi traducción.

orden semántico a propósito de ofrecer una definición completa de la analiticidad y ser consistente con el esquema general del predicado ‘ser analítico’: un enunciado es analítico si y solo si es verdadero solo en virtud del significado de las partes que lo constituyen al margen de cualquier investigación de orden empírico. Carnap incorporará la noción de “postulados de significado” para satisfacer tal requisito semántico y desarrollar adicionalmente su teoría de la modalidad en *Meaning and Necessity* (1947). Así pues, el sistema semántico con el cual Carnap intenta ahora identificar las características de los enunciados analíticos estará caracterizado por los términos de descripciones de estado. De esta manera, el predicado ‘ser analítico’ será aplicable a todo enunciado que sea verdadero solo en todo mundo posible.

En el siguiente apartado me enfocaré en los compromisos semánticos que Carnap adquiere cuando explica un segundo tipo de analiticidad en términos de ‘descripciones-estado’ y ‘postulados de significado’.

2. II Analiticidad semántica

Objetivos particulares, sección (2.II)

1. Señalar cuales son los compromisos semánticos de analiticidad realizados por Carnap (1947).

Como vimos más arriba, el programa carnapiano se esfuerza en desarrollar un lenguaje sintácticamente correcto. Sin embargo, el mayor problema dentro de este sistema técnico se encuentra en el desarrollo de la definición de la verdad lógica y la verdad matemática (*Cfr*., Coffa, 2005, p. 492)[43]. Según Carnap la tarea principal de los fundamentos lógicos de las matemáticas:

> ““es establecer un criterio formal de validez, esto es, establecer las condiciones necesarias y suficientes que una oración debe cumplir para ser válida (correcta, verdadera) en el sentido que se entiende en las matemáticas clásicas” (Carnap en Coffa, 2005, p. 492).

De este modo, el criterio formal de validez para los enunciados se encontrará solo en una simple noción sintáctica, pues de cuerdo con Carnap: “se ha pensado generalmente que la noción válido o verdadero sobre bases lógicas puede explicarse en términos de procesos de derivación” (Carnap en Coffa, 2005, p. 492). Ahora bien, esta caracterización del lenguaje carnapiano que subyace en su definición estándar de analiticidad, de acuerdo con Coffa (2005), no es lo suficientemente fuerte, pues:

Carnap definió ‘analítico’ como las consecuencias de una clase vacía de enunciados, y las consecuencias de una clase de fórmulas eran concebidas como los superteoremas que podrían derivarse de esa clase empleando axiomas lógicos, reglas estándar de la inferencia deductiva, y algunas otras reglas cuya aplicación real excede el alcance de las capacidades humanas. (Coffa, 2005, p. 494)

En particular, Carnap creía que era viable establecer la verdad de todos los enunciados lógico-matemáticos, mediante un proceso formal. Él suponía que tal formalización (desde un contexto sintáctico) le ayudaría ha establecer la noción de consecuencia lógica y con ello dar claridad al predicado ‘ser analítico’. Así pues, la versión logicista de Carnap (1935) sugiere que un enunciado es analítico si este es consecuencia lógica de leyes lógicas generales, definiciones y axiomas lógicos, tal y como Frege lo consideró.

[43] Coffa, J. Alberto. (2005). *La tradición semántica. De Kant a Carnap*. *Vol. 2: Viena, 1925-1935*. Trad. Max Fernádez de Castro, Jorge Issa G. Cuauhtemoc Lara. UAM. México. p. 492.

Ahora bien, como vemos, las consideraciones para la verificación de los enunciados matemáticos son para Carnap un procedimiento lógico inferencial del que queda fuera cualquier compromiso empírico. En este sentido, según Friedman "[g]ive the distinction between logical and descriptive expressions, we then define the analytic (L-true) sentences of a language as those theorems (L- or P- consequences of the null set) that remain theorems under all possible substitutions of *descriptive expression*" (Friedman, 1998, p. 88)[44]. Sin embargo, en este punto el programa sintacticista de Carnap enfrenta complicaciones, las cuales se dan, cuando las expresiones descriptivas son demostrables o refutables, en virtud de las L-reglas de cierto lenguaje, pues en este caso no será verdadero para todas esas oraciones al atribuírseles valores de verdad a los enunciados particulares *ex*. *gr*. los enunciados del campo electromagnético o a determinados puntos del espacio-tiempo (*Cfr*., Friedman, 1998, p. 88). Sin duda alguna, Carnap era consiente de estas complicaciones que le obligaban a complementar su teoría sintáctica para la definición de los enunciados analíticos.

Posteriormente Carnap señalará a través de un análisis semántico la caracterización de un nuevo enfoque que permitirá establecer un segundo tipo de analiticidad. Aunque consistente con el primero. En todo caso se trata de un concepto ampliativo de la analiticidad en términos semánticos. Así pues, Carnap llevo a cabo el desarrollo de una nueva técnica muy similar "a la noción tarskiana de satisfacción, y sobre esta base introdujo caracterizaciones de consecuencia y verdad matemática que no eran del tipo de la teoría de la prueba, ambas definidas para una clase de lenguajes. (Coffa, 2005 p. 496). Asimismo, ambos proyectos aunados a la noción tarskiana, coincidirán en la identificación de los enunciados analíticos, como los enunciados que expresan verdades y satisfacen los requisitos sintácticos o semánticos-técnicos (interpretación de un enunciado a partir de su forma lógica) en un contexto de derivación al margen de una investigación empírica. En consonancia con lo anterior vemos que, "la naturaleza esencialmente semántica del nuevo enfoque se vuelve claro cuando notamos que la pieza central de la nueva

[44] Dar la distinción entre las expresiones lógicas y descriptivas, es entonces definir las oraciones analíticas (L-verdad) de un lenguaje como aquellos teoremas (L- o consecuencias P- del conjunto vacío) que siguen siendo teoremas bajo todas las posibles sustituciones de expresiones descriptivas.

noción de verdad no es una generalización de la noción inferencia sino la idea,…, de *valuación*." (Coffa, 2005, págs. 494-493).

El proyecto semántico de Carnap para la determinación de los enunciados analíticos se asemeja a la definición de L-validez (como un concepto sintáctico), donde un enunciado es analítico sólo si este ha sido probado a partir de la clase nula de premisas. No obstante, Thomas M. Simpson señala que el concepto de L-verdad, ya en (1947) o verdad lógica es considerado por Carnap a manera de lo que Leibniz determinaba como verdad necesaria y Kant como verdad analítica, así pues: "el concepto de verdad necesaria (…) "fue caracterizado a veces como una verdad basada en razones puramente lógicas, en el significado solamente", con independencia de los hechos empíricos" (Carnap en Simpson, 1975, p. 123). Ahora bien, Carnap nos dice que:

The concept of ***L-truth*** is here defined as an explicatum for what philosophers call logical or necessary or analytic truth. The definition leads to the result that a sentence in a semantical system is L-true if and only if the semantical rules of system suffice for establishing its truth (Carnap, 1947, p. 7).

El concepto de *L-verdad* es definido como un *explicatum* de lo que los filósofos llaman verdad lógica, necesaria o analítica. La definición conduce al resultado que una oración en un sistema semántico es *L*-verdad si y solo si las reglas semánticas del sistema son suficientes para establecer su verdad (Carnap, 1947, p. 7).

Así pues, la particularidad del concepto *L*-verdad apelara a la interpretación veritativa-funcional de todos los enunciados y no solo a la forma de derivarlos. De la misma forma, *L*-verdad será tomado como un concepto semántico, pues en este se incluye una interpretación lógica en términos de verdad o falsedad de un enunciado a partir de los diferentes posibles valores de verdad de las partes que le constituyen mundos posibles conceptuales, pues estas determinaran su condición final. De esta manera:

> 2-1. *Convention*. A sentence *S* is ***L-true*** in a semantical system *S* if and only if *S* is true in *S* in such a way that its truth can be established on the basis of the semantical rules of the system *S* alone, without any reference to (extra-linguistic) facts. (Carnap, 1947, p. 10)
>
> 2-I. *Convención*. Una oración A es ***L-verdadera*** en un sistema semántico *S* si y sólo si es verdadera en S de modo tal que su verdad puede establecerse sobre la base de las reglas semánticas de S solamente, sin ninguna referencia a hechos (extralingüísticos). (Carnap, 1947, p. 10)[45]

En este contexto, la consideración anterior se establece a partir de: “2-2, Definition. A sentence A is L-true (in S_1) =Df A_1 holds in every state-description (in S_1)”[46]. Así pues, la derivación de los enunciados no se vera restringida por la aplicación de reglas lógicas desde un conjunto de enunciados antecedentes. De tal forma, para determinar el estatus semántico de un enunciado en un sistema *S* será necesario identificar cuáles son las ***descripciones-estado*** posibles de tal enunciado. Las descripciones-estado según Jesús Jasso, “se refieren a la clase o conjunto de enunciados que contienen todos los enunciados atómicos, su verdad o su negación, pero no ambos, ni tampoco otro tipo de enunciado” (Jasso, 2003, p.96). Asimismo, las descripciones-estado darán una completa descripción de los posibles estados del universo, ya que de acuerdo con Carnap estas “representan mundos posibles” de forma similar a Leibniz o “estados posibles de cosas” (*Cfr*., Carnap, 1947, p. 9). Así pues, a partir de tales descripciones-estado, se podrá comprender el significado de los enunciados matemáticos del resto de los enunciados científicos.

A continuación presentaré los resultados obtenidos en esta investigación, sistematizando la noción de analiticidad y a prioricidad en el caso de Frege (1879), (1884) y la analiticidad en el caso de Carnap (1935), (1947).

---

[45] La traducción es responsabilidad mía.

[46] 2-2. Definición. Una oración A es L-verdadera (en S1) = Df A_1 se mantiene en toda descripción de estado (en S1)‖ (Carnap, 1947: 10). La traducción es responsabilidad mía.

CONCLUSIONES

Conclusiones

Algunas consideraciones criticas a la explicación logicista de analiticidad.

Hemos revisado dos programas semánticos primordiales para el logicismo. Estos programas son: Frege (1879), fundamentalmente (1884) y Carnap (1935), (1947).

De acuerdo con los resultados obtenidos en nuestra investigación, tenemos elementos suficientes que nos permiten afirmar que los proyectos logicistas aquí analizados Frege y Carnap, coinciden con el requisito formal para satisfacer la caracterización de los enunciados analíticos: un enunciado es analítico si y sólo si este es consecuencia lógica de leyes lógicas generales y definiciones.

Sintaxis y semántica

Según el capítulo I, sección I.1, la caracterización para la determinación de los enunciados analíticos se puede establecer en términos semánticos y sintácticos a partir de las dos tesis reduccionistas formuladas por el logicismo, donde por una parte, tenemos la posibilidad de definir todos los conceptos matemáticos a términos lógicos y por otra, la genuina posibilidad de probar las verdades matemáticas a partir de las condiciones de derivabilidad de la sintaxis lógica. De ahí que, los enunciados matemáticos pueden ser probados solamente desde principios y leyes lógicas generales.

Las propuestas logicistas aquí revisadas, intentan dar certeza a la noción de analiticidad bajo la caracterización del conjunto de leyes que constituyen el *corpus* tanto de los fundamentos de las matemáticas como de la lógica. En este punto, los fundamentos de las matemáticas y la lógica (para los logicistas) se consideraban compartían las mismas características objetivas y generales. El compartir características de generalidad entre estas dos, perecen ser el marco ideal para establecer un lenguaje apropiado que permita constituir de manera formal las particularidades de los enunciados. En este sentido, se trata entonces, de una formalización de corte lógico-semántico, que exclusivamente permite sostener el contenido general de cualquier enunciado mediante su justificación, *i. e.* la prueba.

De tal modo, el ejercicio reduccionista del logicismo plantea que de acuerdo con sus tesis, los enunciados analíticos pueden ser derivados a partir de una prueba formal, donde participan única y exclusivamente leyes lógicas generales y definiciones.

De igual suerte, en la sección I.2, hemos revisado la propuesta fregeana a fin de señalar las condiciones que debe cumplir un enunciado para ser considerado analítico. En este marco, Frege está muy interesado en saber de manera general, cual es la naturaleza de las proposiciones matemáticas y aritméticas (*i. e.* si estas son analíticas o sintéticas, *a priori* o *a posteriori*). Él piensa que la lógica es fundamental para explicar tanto las leyes de la matemática como de la aritmética. Para Frege la lógica es la única herramienta capaz de fundamentar las proposiciones aritméticas mediante la prueba o justificación. De esta forma, Frege determina, se deja fuera cualquier proceso psicológico que de lugar a una creencia en los enunciados. En este contexto, la prueba juega un papel primordial. Con la prueba se logra justificar cualquier tipo de conocimiento. Por otro lado, el carácter de la prueba es de tipo lógico-semántico. Así pues, en la prueba hay una conexión, una relación, entre el carácter epistemológico y lo lógico-semántico. Esta relación unitaria determina el carácter de los enunciados analíticos además de la naturaleza *a priori* de las verdades que se expresan en tales enunciados. En este sentido, si es posible determinar la justificación de un enunciado a partir de leyes lógicas generales y definiciones al margen de premisas, leyes o ambas de naturaleza no lógica, es entonces que se tiene una verdad generalizable, demostrable e inmune ante cualquier hecho empírico.

Así pues, el criterio de analiticidad que Frege propone, ofrece la identificación de la justificación para los contenidos de tales enunciados, a partir de la prueba, donde se establecen las propiedades más básicas, epistemológicas y lógicas que un enunciado debe satisfacer. De esta forma, un enunciado es analítico, si y sólo si este es consecuencia lógica de leyes lógicas generales y definiciones.

Por otra parte en el capítulo II, el proyecto logicista de Carnap (1935), propone una sintaxis lógica y una semántica técnica (1947) *i. e.* un proyecto riguroso de corte lógico-sintáctico y formal-semántico. Carnap lleva a cabo estos dos proyectos, para poder establecer bajo que criterios un enunciado puede ser considerado analítico. Como hemos visto, estos dos proyectos se encuentran relacionados, y con ellos se intenta dar una explicación al predicado “es analítico”. Así pues, en una primera instancia, Carnap determina una formalización sintáctica para un lenguaje *S*. Él define el vocabulario que servirá ha esta teoría sintáctica: reglas de formación, reglas de transformación, términos sintácticos y los términos- *L*, para este lenguaje artificial. De esta forma, Carnap define los rasgos de analiticidad como una consecuencia lógica donde: un enunciado es analítico, si este es consecuencia lógica de la clase nula o conjunto vacio. Asimismo, basta para Carnap esta sintaxis para definir la caracterización de un enunciado analítico como tal.

Carnap procura dar una clara explicación de la distinción entre la lógica y las cuestiones de hecho, pues considera que este análisis es necesario para establecer la formación y caracterización de teorías científicas que ayudan al desarrollo general de la ciencia. Con el análisis sintáctico Carnap pretende dejar fuera todos aquellos enunciados que no resistan el análisis formal de tal teoría. En este sentido, la extensión del predicado “es analítico” sugiere que: un enunciado es analítico si y sólo si este es consecuencia lógica del conjunto vacio. Si esto sucede nos permite establecer el tipo de verdad que los enunciados expresan. Así, un enunciado probado bajo las reglas de este lenguaje será no sólo una *consecuencia lógica*, que se sigue del conjunto de axiomas, premisas y la aplicación de reglas que participan en su derivación, que satisface los aspectos que determinan su carácter analítico: será consecuencia sólo de leyes generales de la lógica y términos sintácticos

En una segunda instancia, Carnap (1947) se plantea establecer un programa semántico que le ayude a determinar mejor el concepto de analiticidad, pues al parecer las particulares dadas anteriormente para la determinación de esta noción parecían ser insuficientes al momento de dar las distinciones entre las expresiones lógicas y las descriptivas, las cuales deben ser siempre las mismas ante cualquier cambio de hecho.

En su proyecto semántico Carnap incorpora el anterior lenguaje sintáctico, que se une a los *L-conceptos* para dar cuenta a la noción de analiticidad. Aquí, un enunciado es *L-verdadero* en un sistema semántico *S* si y sólo si las reglas semánticas del sistema son suficientes para establecer su verdad. Así pues, los enunciados analíticos se definen a partir de los *L-conceptos*, donde *L-verdad* es comprendida por Carnap como verdad necesaria o verdad analítica. Conjuntamente a lo anterior, Carnap introduce las *descripciones de estado*. Si bien las *descripciones de estado* son un concepto semántico, con estas se puede establecer la verdad de los enunciados a partir de enunciados atómicos, los cuales se presentan como mundos posibles o “estados de cosas posibles”.

Así, el significado de un enunciado analítico se establece a partir de las reglas semánticas del sistema *S* si y sólo si todos los enunciados de los mundos posibles o todas sus descripciones de estado son verdaderas.

Como podemos ver, los proyectos logicistas de estos dos filósofos se encuentran estrechamente vinculados, pues ambos señalan que la fundamentación de los enunciados de la matemática queda constituida mediante la prueba, pues este es el mejor camino para establecer el rango de generalidad de los enunciados ubicados en el conjunto de los enunciados que ocurren en la ciencia. Es entonces que, ambas propuestas proponen una caracterización para la identificación de los enunciados analíticos mediante la prueba.

Sistematización de resultados

Los programas establecidos por el logicismo sostienen una rigurosa fundamentación a la caracterización de los enunciados analíticos, sin embargo estas caracterizaciones han sido fuertemente criticadas, pues al parecer los criterios con los cuales se establece el carácter de analiticidad de los enunciados, recaen bajo ciertos paradigmas que impiden resolver por completo dicha noción. Una muestra de lo anterior, es el trabajo de Hintikka, quien señala cómo tales caracterizaciones dejan un buen número de cabos sueltos, pues la formalización lógico-semántica del logicismo nos permite derivar verdades generales y con ello enunciados analíticos. No obstante, Hintikka observa que no siempre se tiene la posibilidad de obtener una genuina viabilidad cuando se reduce el campo de aplicación de la lógica. En este caso, se habla de las estructuras matemáticas, las cuales tienen verdades que no pueden establecerse dentro de otras estructuras de la misma matemática, pues son verdades *simpliciter*. Aquí, el tipo de verdades obedece solo a una estructura y no ha otras. Como vemos, esto hace inconmensurable la reducción entre la matemática y la lógica, pues su axiomatización no es posible, ya que en la lógica no hay una axiomatización para cada estructura, caso contrario de las estructuras matemáticas donde si las hay. Ahora bien, si el logicismo aceptaba la tesis de la reducción de los conceptos matemáticos a conceptos puramente lógicos y la reducción de todos los teoremas matemáticos a principios lógicos. ¿Cómo pueden ser identificados genuinamente los enunciados analíticos desde la perspectiva del logicismo, si indudablemente la inconmensurabilidad corta de tajo la realización de este proyecto? ¿Acaso los proyectos logicistas han fracasado rotundamente?

Otro programa que pone en tela de juicio el problema de la noción de analiticidad, es Quine (1951-1961) desde "Dos dogmas del empirismo". Aquí, Quine realiza una fuerte crítica a estos proyectos desde su programa semántico naturalista, pues él rechaza la tesis central del logicismo donde: un enunciado es analítico si su prueba depende únicamente de leyes lógicas generales y definiciones o expresa una verdad lógica. De esta manera, él rechaza la forma en que los logicistas han interpretado la analiticidad, ya desde una sintaxis ya desde una semántica.

Pero esto será materia de una futura investigación, lo que se hizo entonces fue poner en la mesa de discusión el punto de partida sobre la manera en que los predicados 'ser analítico' y 'ser *a priori*' fueron explicados por el logicismo. Después de estos proyectos encontramos una rica reflexión hasta la actualidad de diversos filósofos como: Rabinowics (2010), Hofmann y Horvath (2008), y Beker (2012), sobre tales conceptos que para la Epistemología, la Filosofía de la Lógica entre otras, resulta un punto en discusión.

Bibliografía

Literatura primaria.

Carnap, R. [1935] (1998), *Filosofía y sintaxis lógica*, traducción de César Molina, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México, D.F.

Carnap, R. (1947), *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. University of Chicago Press. Chicago.

Frege, G. (1879) (1972) *Conceptografía*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM. México.

Frege, G. [1884] (1968), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Veerlag von Wilhelm Koebner; en edición bilingüe. Frege, G., *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concepto of number*, Trad. J.L. Austin, M.A., Oxford: Basil Blackwell.

Frege, G., [1892] (1972), *Los Fundamentos de la Aritmética*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Literatura secundaria.

Libros y artículos sobre Frege y Carnap.

Boghossian, P., (1997), "Analyticity", in B. Hale and C. Wright (eds.), *A Companion to the philosophy of language*, oxford: Blackwell.

Bocardo, Enrique F. (1998) *La definición de los numerales de Frege*, en THÉMATA, REVISTA DE FILOSOFÍA, Núm., 19, págs., 41-58.

Carnap, Rudolf (1964). "*The logicist Foundations of Mathematics*", en Paul Benacerraf and Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics*: Select Readings Oxford, Basil Blackwel.

Coffa, J., 1991, *The semantic Tradition from Kant to Carnap: to the Vienna Station*, Cambridge: Cambridge University Press.

Coffa, J. Alberto. (2005). *La tradición semántica. De Kant a Carnap*. *Vol. 1: Viena, 1925-1935*. Trad. Max Fernádez de Castro, Jorge Issa G. Cuauhtemoc Lara. UAM. México.

Coffa, J. Alberto. (2005). *La tradición semántica. De Kant a Carnap*. *Vol. 2: Viena, 1925-1935*. Trad. Max Fernádez de Castro, Jorge Issa G. Cuauhtemoc Lara. UAM. México.

Dummett, M., 1991, *Frege and Other Philosophers*, Oxford: Oxford University Press.

Hintikka, Jaakko (2009). "*Logicism*" en *Handbook of the Philosophy of Mathematics*, Andrew D. Irvine (edit.) Fisevier. Amsterdam

Harman, G., 1991, "Analyticity Regained?" *Noûs*, 30(3): 392-400.

Jasso, M. Jesús (2014), "LOGICISMO Y ANALITICIDAD: Frege y Carnap dos propuestas logicistas" en *Anadamios. Revista de Investigación Social del Colegio de Humanidades y Ciencias Sociales de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México*, No. 26, cuatrimestre septiembre-diciembre 2014 (ISSN-1870-0063).

Korte, Tapio (2010), *Frege's Begriffsschrift as a Lingua Characteristica*, en *Synthese*, Vol. 174, Número 2, pp. 283-294.

MacFarlane, J., (2002), "Frege, Kant and the Logic of Logicism", in *The Philosophical Review*, Vol. 111, No. 1, pp. 25-65.

Putnam, 1965 [1975], "The analytic and the Synthetic", in his *Philosophical Papers*, Vol. 2 Cambridge: Cambridge University Press.

Russell, Bertrand (1983). "*Selections from Introduction to Mathematical Philosophy*" en, *Philosophy of Mathematics*: Select Readings. Paul Benacerraf and Hilary Putnam. Cambridge University Press.

Valdivia D. L., (1998), *Palabras y cosas, una semántica cognitiva de los términos singulares*, Coordinación de Humanidades, Centro de Neurobiología, UNAM, México.

Willem R. de Jong: [Frege] (2010). "*The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege"*, en *Synthese*, Vol., 174:237-261.

Cuestiones especiales.

Jasso Méndez, J. (2003). *Analiticidad, aprioricidad y necesidad. Un análisis conceptual*. Tesis de maestro en filosofía. Universidad Nacional Autónoma de México.

Recursos de internet

Friedman M. (1988) *History and philosophy of modern mathematics*. URL: http://www.mcps.umn.edu/philosophy/11_3friedman.pdf, citado el 28/11/13

Rey, Georges, "Analytic/Synthetic The Diistincion", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2012 edition) Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/ analytic/synthetic/>.

Zalta, Edward N., "Gottlob Frege", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/frege/.