

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

**Interacción de variables económicas en el crecimiento urbano
y la gentrificación: aplicación de una variante
del modelo de Lotka-Volterra**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

PRESENTA

Sara Ines Islas Fortiz

Director de la Tesis

M.C. José Luis Gutiérrez Sánchez

Ciudad de México, diciembre 2025.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

Me complace expresar en esta página mi agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis.

En primer lugar, a mi director de tesis, el M. en C. José Luis Gutiérrez Sánchez, por su guía paciente y su rigor intelectual, su disposición para explorar conmigo los puentes entre la teoría de sistemas dinámicos y los fenómenos urbanos, en conjunto con sus acertadas observaciones y su confianza en este proyecto, todo ello fue clave para dar forma y dirección a esta investigación.

A la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) y al programa de la Maestría en Ciencias de la Complejidad, por brindarme el espacio académico y la perspectiva interdisciplinaria necesarios para abordar un tema tan polifacético como la gentrificación. Agradezco al Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo financiero otorgado a través del programa de Becas Nacionales para estudios de Posgrado 2024-1, sin el cual no habría sido posible la dedicación exclusiva a mi formación en este posgrado y la elaboración de esta investigación.

Asimismo, extiendo mi gratitud a los sinodales de esta tesis, Dr. Fernando Ramírez Alatraste, Dr. Juan Antonio Nido Valencia, Dr. Carlos Islas Moreno, por sus valiosas observaciones y críticas constructivas que enriquecieron significativamente la versión final de este documento. Al Dr. Jorge Fernando Camacho Pérez, por sus comentarios durante las sesiones de Seminario de investigación y Seminario de tesis que orientaron la elaboración de este documento.

A Eduardo, por su paciencia infinita, fue un hombro en el que me subí para lograr ver un horizonte más extenso, gracias por celebrar cada pequeño avance a mi lado.

A mis padres, Micaela y Noé, por su amor incondicional, su confianza en mis capacidades y por haberme inculcado el valor del esfuerzo y la perseverancia. Este logro es tan suyo como mío.

A mis hermanos, Dulce y Alfredo, que han cuidado de mi y defendido mi causa; a mis sobrinos que son quienes me aterrizan de mis ensoñaciones.

A quienes luchan por un lugar justo en la ciudad.

Resumen

Esta investigación analizó la dinámica de la gentrificación en la Ciudad de México mediante un modelo matemático de tres variables: población (P), ingreso (Y) y renta (r). Se partió de la revisión crítica de un modelo dinámico preexistente, cuyas inconsistencias fundamentales fueron identificadas y corregidas, resultando en un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, matemáticamente robusto.

La metodología combinó un análisis de estabilidad, donde se calcularon los siete puntos de equilibrio del sistema y se determinó su naturaleza a través de la matriz Jacobiana y sus eigenvalores, con un análisis de bifurcaciones. En este último, se utilizó la tasa intrínseca de decaimiento de la renta (c) como parámetro de control para modelar el clima de inversión de un área.

Los hallazgos revelaron la existencia de un único punto de equilibrio económicamente viable y localmente estable, caracterizado como un foco estable. Esto implicó una convergencia hacia un estado de coexistencia mediante oscilaciones amortiguadas. Adicionalmente, el análisis de bifurcaciones demostró que este equilibrio estable solo existió dentro de un rango acotado y crítico del parámetro c . El estudio concluyó que la gentrificación puede ser entendida como un fenómeno de umbral o una transición de fase, donde el cruce de dicho umbral desata bucles de retroalimentación positiva que consolidan la transformación urbana.

Abstract

This research analysed the dynamics of gentrification in Mexico City through a three-variable mathematical model comprising population (P), income (Y), and rent (r). The study began with a critical review of a pre-existing dynamic model, whose fundamental inconsistencies were identified and corrected, resulting in a new, mathematically robust system of non-linear differential equations.

The methodology combined a stability analysis, where the system's seven equilibrium points were calculated and their nature determined via the Jacobian matrix and its eigenvalues, with a bifurcation analysis. In the latter, the intrinsic decay rate of rent (c) was used as a control parameter to model an area's investment climate.

The findings revealed the existence of a single, economically viable, and locally stable equilibrium point, characterised as a stable focus. This implied a convergence towards a state of coexistence through damped oscillations. Furthermore, the bifurcation analysis demonstrated that this stable equilibrium existed only within a bounded, critical range of the parameter c . The study concluded that gentrification can be understood as a threshold phenomenon or a phase transition, where crossing said threshold unleashes positive feedback loops that consolidate the urban transformation.

Índice general

1. Introducción	10
2. Marco Teórico	14
2.1. ¿De qué se trata la gentrificación?	14
2.1.1. La gentrificación como un fenómeno emergente dentro de un sistema complejo urbano	17
2.2. Modelo de crecimiento poblacional logístico	18
2.3. Modelo Lotka-Volterra	19
2.4. Análisis de bifurcación	20
2.5. Detalles del modelo propuesto	21
2.5.1. Aplicación del análisis de bifurcación en el modelo	25
3. Metodología y análisis del sistema dinámico	28
3.1. Análisis cualitativo del sistema propuesto	30
3.1.1. Puntos de equilibrio	31
3.1.2. Linealización del sistema: matriz jacobiana	31
3.2. Análisis de estabilidad del sistema con parámetros exploratorios	32
3.2.1. Puntos de equilibrio dentro del primer octante	32
3.2.2. Simulación generada en Maple de dos curvas solución	36
3.3. Análisis de bifurcación	38

3.3.1. Síntesis del análisis de bifurcaciones	38
3.3.2. Determinación del rango de viabilidad económica	39
3.3.3. Caso 1: equilibrio estable dentro del rango ($c = 0.0031$)	39
3.3.4. Caso 2: bifurcación en el límite inferior ($c = 0.00023$)	40
3.3.5. Caso 3: bifurcación en el límite superior ($c = 0.089$)	41
4. Conclusiones	43

Índice de figuras

2.1. Gráfica de crecimiento logístico, extraída de una simulación en NetLogo. Elaboración propia	19
3.2. Curva solución con condiciones iniciales en $P(0) = 0.0001, Y(0) = 0.0001, r(0) = 0.0001$ con $c = 0.00023$. Elaboración propia.	40
3.3. Curva solución con condiciones iniciales en $P(0) = 0.0001, Y(0) = 0.0001, r(0) = 0.0001$ con $c = 0.089$. Elaboración propia.	41

Índice de tablas

2.1. Tabla de interacción del modelo, basado en ([Siddiqui and Alam, 2019, p. 120])	23
2.2. Interpretación de los parámetros del modelo.	25
3.1. Tabla de parámetros calculados por Siddiqui and Alam [2019] para ciudades como Ciudad de México. Variables exploratorias para estudiar la dinámica general del modelo.	32

Capítulo 1

Introducción

La gentrificación constituye un fenómeno socioeconómico complejo que transforma intensamente el paisaje de innumerables ciudades a nivel global. Caracterizado por procesos de revalorización urbana, su dinámica, si bien revitaliza ciertas áreas, a menudo culmina en el desplazamiento de sus habitantes originales. Este proceso no es lineal ni uniforme, sino que emerge de una intrincada red de retroalimentaciones entre la demografía, el ingreso y el mercado inmobiliario.

Un ejemplo es la Ciudad de México, la cual no fue planeada como una ciudad que pudiera ser densamente poblada. Dado que alberga a una gran cantidad de personas, buena parte de ella se ha transformado en un lugar con gran oferta de entretenimiento y de carácter cultural, con una imagen abierta y plural. Esa oferta ha modificado el mercado de vivienda y la inversión pública y privada en numerosos barrios y colonias, las ha renovado para atraer a nuevos residentes con mayor poder adquisitivo que el de los habitantes originarios, asentados ahí durante varias generaciones, los cuales pueden resultar expulsados por los primeros. Típicamente, esto genera que las zonas adquieran el carácter de gentrificadas, es decir, atraigan a nacionales o extranjeros que buscan lugares donde su nivel de ingresos les permite disfrutar de comodidades y servicios que, en sus lugares de origen o no existen o les son inaccesibles.¹

¹Los residentes extranjeros que buscan, como en la gentrificación clásica, ser peregrinos y buscar lugares más rentables para su nivel de ingresos en divisas extranjeras o nacionales, pueden ver en la Ciudad de México, un lugar en el cual habiten disfrutando de las comodidades brindadas.

La gentrificación, término que acuña Ruth Glass en la década de 1960 ² para nombrar un relevante fenómeno urbano vigente, es ahora uno de los temas más llamativos en los estudios de urbanismo y políticas públicas. Muchas investigaciones de distintas disciplinas se han llevado a cabo a lo largo de las siguientes décadas por lo que el presente trabajo se suma a este acumulado siendo una participación desde el paradigma de las ciencias de la complejidad. En las ciencias de la complejidad ³ se tiene como principal objeto de estudio sistemas abiertos, es decir, sistemas que interactúan con otros sistemas de manera no lineal. Estas interacciones antes mencionadas son cruciales para el análisis por ser generadores de comportamientos emergentes que añaden capas de complejidad al estudio de estos mismos. Además de que esta materia reconoce la integración de agentes que son de distintos tipos en cuanto a su naturaleza se refiere y pueden tener conductas adaptativas.

Yendo con más detenimiento en la breve explicación que se acaba de dar, se mencionaron algunos conceptos que es importante entender. Uno es la no linealidad y esta se refiere a que son procesos con las causas que pueden (o no) generar efectos desproporcionados y el entendimiento de estos entes no lineales es totalmente contraria a la idea de que el todo es igual a la suma de sus partes, lo cual denota complejidad. Se nombró tanto el concepto de “comportamientos emergentes” como de “conductas adaptativas” y es que de la primera se sabe que son características impredecibles por lo regular y éstas son propiedades del *hólos* -todo- ; a diferencia de las características adaptativas les pertenecen a los componentes de este entero y que son resultado de la no linealidad.

Acerca de la relación que hay entre el tema del presente trabajo con la complejidad y los sistemas de dinámica no lineal, es plausible pensar la gentrificación como un fenómeno emergente. Su procedencia viene de la interacción endógena de una ciudad, una colonia o un barrio, ello sin tener de por medio un ente que dirija las acciones de los demás agentes (en particular se habla de los habitantes), lo que se conoce como autoorganización. Estas acciones son de una naturaleza tal que pequeñas decisiones individuales podrían conducir a este cambio urbano inesperado. Desde la física se entiende que un sistema puede cambiar de estado cuando las condiciones llegan a un umbral crítico, que se puede entender como una transición de fase. Así, en la gentrificación, puede

²([Vollmer, 2019, p. 24])

³A modo de breviarío al respecto, véase el ensayo Fernández [2016]

ser que en el área afectada se alcance este umbral en tanto que la presencia de la nueva población y los cambios en la infraestructura hacen que las rentas y los servicios ya no sean asequibles para los residentes originales. Lo cual resulta en un desplazamiento que implica un cambio socioeconómico y cultural del vecindario, ello marca una transición de fase.

La gentrificación no ocurre de manera uniforme. En realidad, afecta a diferentes áreas de una región de manera dispar, puesto que la gentrificación emerge de la desigualdad de condiciones espaciales y condiciones sociales y económicos de aquellos interesados en residir en un lugar específico. Factores como la proximidad al centro de alguna ciudad, la accesibilidad al transporte, y las políticas locales son variables que pueden ser más susceptibles ciertas zonas. A medida que aumentan la cantidad de personas de mayor poder adquisitivo se mudan a dicho vecindario, los negocios, los servicios y mejoras del gobierno en infraestructura funcionan como un atractor, ello crea una retroalimentación positiva.

Una vez entendida esta perspectiva en que se entiende un sistema socioeconómico complejo como lo podría ser la vida dentro de una colonia (por ejemplo), es posible notar que si se busca generar un modelo de este hecho, se requiere de una selección de variables para realizar la simulación de la dinámica que se busca estudiar. La presente tesis se inscribe en la tradición del modelado dinámico urbano que adapta la analogía ecológica de Lotka-Volterra. El antecedente directo de este trabajo es el modelo tridimensional propuesto por Siddiqui y Alam (2019), el cual, a pesar de su enfoque innovador para estudiar ciclos urbanos, presentaba inconsistencias matemáticas. Por tanto, una contribución central de este trabajo es la formulación de un modelo corregido matemáticamente que sirve como una propuesta teórica para el análisis de la dinámica de la gentrificación.

La metodología empleada fue de carácter analítico y cualitativo, centrada en un sistema de ecuaciones diferenciales (SED) no lineales. Dicho modelo es de tipo Lotka-Volterra, que parte de un SED que analiza la forma en que se interrelacionan el crecimiento de dos o más poblaciones biológicas. En este caso en lugar de las poblaciones de seres biológicos, se usarán las variables económicas antes mencionadas y cada una puede tomar el papel depredador o presa de otra. Cabe mencionar que el trabajo se inició con la corrección y reformulación del modelo base, dando lugar a un nuevo sis-

tema que define las interacciones entre Población (P), Ingreso per cápita (Y) y Renta (r). Posteriormente, se realizó un análisis de estabilidad: se calcularon los siete puntos de equilibrio del sistema y se determinó su naturaleza local mediante la linealización y el análisis de los eigenvalores de la matriz jacobiana. Finalmente, se exploró la sensibilidad del sistema a través de un análisis de bifurcaciones, utilizando la tasa intrínseca de decaimiento de la renta (c) como parámetro de control para representar el “clima de inversión” de un área. Todos los cálculos simbólicos y simulaciones se llevaron a cabo con el software Maple.

Si bien la gentrificación es, en esencia, un fenómeno emergente que surge de las decisiones individuales de agentes heterogéneos y adaptativos —como residentes, inversores y planificadores urbanos—, su modelado completo a través de los modelos basados en agentes (ABM), presenta desafíos significativos. Estos modelos requieren datos granulares sobre el comportamiento, las preferencias y las interacciones de los agentes, los cuales son a menudo escasos, difíciles de obtener o de calibrar con rigor empírico. Por esta razón, en el presente trabajo se opta por un modelo de grano grueso, como es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Este tipo de modelo, si bien trata a las variables de población, ingreso y renta como agregados homogéneos, ofrece una ventaja crucial: permite analizar la estructura dinámica fundamental de las interacciones macroscópicas entre estas variables. Se considera, por tanto, como un primer paso de abstracción necesario para identificar las retroalimentaciones clave, los posibles estados de equilibrio del sistema y las condiciones de estabilidad que gobiernan el fenómeno a gran escala. Este enfoque nos permite sentar las bases para futuros modelos más detallados, en los que se ocupen datos agregados accesibles para una aproximación cuantitativa al problema.

Para desarrollar este análisis, el documento se estructura de manera progresiva. El segundo capítulo establece el marco teórico, donde se discuten las teorías de la gentrificación —contextualizando con ejemplos de la Ciudad de México para ilustrar la relevancia del problema— y se presentan los fundamentos de los modelos dinámicos. El tercer capítulo detalla la metodología analítica seguida. Los resultados matemáticos se exponen en el cuarto capítulo. Finalmente, el capítulo de conclusiones sintetiza la investigación, discute las implicaciones de los hallazgos para el entendimiento de la gentrificación como fenómeno complejo y propone direcciones para futuros trabajos.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. ¿De qué se trata la gentrificación?

Este concepto se refiere al proceso de revalorización estratégica de carácter económico e inmobiliario de una zona urbana que, para su efectividad, implica cambios en su población, afirma Andrej Holm, y que, añade el mismo, la expulsión es medular para el proceso gentrificador. ¹ En este proceso, el gobierno tiene una participación importante y hay dos razones con las que intenta justifica ese aumento de precios en esas colonias las cuales son 1) la de mejorar la calidad de vida de los barrios populares y 2) captar residentes nuevos y diversificar las actividades que se puedan llevar acabo ahí. ²

Existen dos tipos de teorías muy conocidas dentro del tema de gentrificación. Por una parte están las teorías del lado de la demanda que se consideran lideradas por geógrafos como David Ley, argumentan que la gentrificación es impulsada por cambios en la cultura y las preferencias de una nueva clase de profesionales y creativos (la “nueva clase media”). Estos grupos buscan estilos de vida urbanos, proximidad al trabajo, y consumen la “autenticidad” de los barrios antiguos. Después, se tiene a las teorías del lado de la oferta que están impulsadas por Neil Smith y su teoría de la “brecha de renta” (rent gap). Dicho autor argumenta que la gentrificación es un proceso puramente económico impulsado por el capital. Ocurre cuando la diferencia entre la renta actual de

¹([Vollmer, 2019, p. 24])

²([Giroud, 2019, p. 297])

una propiedad deteriorada y la renta potencial que podría obtenerse si fuera remodelada es lo suficientemente grande como para atraer inversión. Es un movimiento de capital, no de personas.

Integrando lo anterior, el fenómeno de la gentrificación se origina en la transformación socioeconómica y cultural de áreas urbanas, a menudo generada por inversiones en infraestructura, comercio y vivienda. En la economía de la localidad, su efecto puede verse en el incremento en la inversión y la llegada de nuevas actividades comerciales y culturales tiende a elevar los precios de la vivienda y el costo de vida en el área. Esto puede generar la expulsión de los residentes de bajos ingresos. Se suma además la llegada de nuevos residentes con mayor poder adquisitivo, lo que puede cambiar la composición demográfica y cultural del área, impactando en las tradiciones y dinámicas comunitarias. A menudo, esto lleva a la renovación urbana y a la mejora de la infraestructura, modificando la estética y funcionalidad del vecindario.

Sin embargo, se generan una serie de conflictos debido a los intereses de los involucrados, entre los cuales están los desarrolladores inmobiliarios³ que tratan de maximizar beneficios económicos a través de la inversión en la renovación y construcción de propiedades. Los nuevos residentes que alimentan positivamente a la gentrificación son personas de mayor poder adquisitivo que buscan vivir en áreas revitalizadas, apreciando su estética y comodidades.

Este proceso puede tener efectos profundos en el bienestar de los pobladores oriundos. En primer lugar, el aumento de los costos de vivienda puede resultar en el desplazamiento de residentes originales, forzándolos a buscar alojamiento en áreas periféricas. Seguido de que la llegada de nuevos residentes con diferentes estilos de vida puede erosionar la cohesión social y debilitar la red de apoyo comunitario. Puede llevar a la pérdida de espacios culturales y tradiciones locales, afectando la conexión de los residentes con su entorno. Aumenta el costo de vida y limitar el acceso a servicios esenciales como salud, educación y transporte. Los residentes originarios pueden enfrentar

³Es importante tener en cuenta que la tarea de un desarrollador inmobiliario es la de actuar como un estratega financiero y no se debe confundir con la ocupación de una empresa constructora o con aquella que vende inmuebles. Su función es identificar oportunidades de inversión, diseñar modelos de negocio rentables y gestionar los recursos de manera eficiente. Desde la estructuración de esquemas de financiamiento hasta la optimización de los costos de construcción, el desarrollador pretende impulsar la rentabilidad de un proyecto inmobiliario. (We City [2022])

barreras para participar en la toma de decisiones que afectan sus comunidades.

En México, particularmente en la Ciudad de México (CDMX), la gentrificación es un proceso que ha ganado atención, especialmente desde la década de 1990.⁴ Los procesos en Latinoamérica, incluyendo México, a menudo tienen la particularidad de estar intrínsecamente ligados a la renovación de los centros históricos⁵. La gentrificación en la CDMX se enmarca en quince años de *políticas públicas de desarrollo urbano intensivo* promovidas bajo el modelo neoliberal, que buscan hacer la ciudad más compacta, renovar el entorno urbano y detener la pérdida de población en las zonas centrales. Estas políticas, que han tenido continuidad a pesar de los cambios de gobierno, han sido criticadas por reforzar las desigualdades socio-espaciales históricas al crear un paisaje urbano más exclusivo y excluyente.⁶ Entre las características más llamativas de la gentrificación en el contexto de México:

1. A diferencia de la gentrificación clásica, en Latinoamérica, y específicamente en México, el Estado asume un rol protagónico. Las administraciones han implementado políticas neoliberales urbanas de corte empresarial (como el “Bando 2” entre 2000 y 2006) que fomentan el desarrollo privado, la densificación y la mercantilización del suelo. Esto se hace bajo discursos de “desarrollo urbano sustentable” o “regeneración”.
2. El proceso se concentra en áreas populares declaradas “decadentes”. Un ejemplo es el Centro Histórico de la Ciudad de México (declarado patrimonio mundial en 1987), cuyo “rescate” implicó la articulación de actores públicos y privados que se beneficiaron de esa centralización propia del sitio.
3. De manera que sea más ilustrativo, es necesario hacer una mención breve de algunos casos de gentrificación en México que destaca Delgadillo [2016]:
 - Roma–Condesa y Polanco: Experimentaron una revalorización y la llegada de nuevos residentes jóvenes, de ingresos medios a altos, atraídos por la apertura de negocios lucrativos como bares, restaurantes, galerías de arte y departamentos de lujo (lofts).

⁴[Contreras et al., 2016, p. 25]

⁵[Cruz Flores, 2022, pp. 17,24]

⁶Delgadillo [2016]

- Nuevo Polanco (Colonias Granada y Ampliación Granada): Es un caso de gentrificación simbólica donde el cambio de nombre de colonias populares a “Nuevo Polanco” se utiliza para atraer consumidores con estilos de vida de élite y fomentar el desarrollo inmobiliario en gran escala.
- Tacubaya: Los estudios recientes indican un proceso de gentrificación moderada, impulsado por políticas urbanas (Regeneración Tacubaya) y manifestado en cambios de perfiles socioeconómicos (presencia de clase alta), nuevos desarrollos inmobiliarios (como “Condesa Sur”) y un aumento de unidades económicas del sector terciario (ocio).⁷

2.1.1. La gentrificación como un fenómeno emergente dentro de un sistema complejo urbano

Al igual que en los sistemas físicos, en los sistemas sociales el todo (que sería el barrio gentrificado) adquiere propiedades nuevas y únicas que no estaban presentes en las partes individuales (los individuos, las viviendas, los negocios). La gentrificación es un ejemplo de cómo la interacción entre estos elementos crea un nuevo orden social y espacial. Dichas áreas afectadas pueden mostrar diversas adaptaciones, si una buena parte de los residentes del sitio se organizan en oposición a sus efectos, pueden encontrar formas de resistir el desplazamiento, con el propósito de proteger sus intereses y derechos, mientras que otra facción puede verse forzada a adaptarse a nuevas realidades económicas y sociales. El desarrollo de este fenómeno depende en gran medida del contexto anterior del barrio por factores como la historia económica, la demografía y las políticas urbanas. Esto significa que cada caso de gentrificación es único y debe ser analizado dentro de su propio contexto histórico y social.

La gentrificación por ser un fenómeno emergente, ocurre en sistemas abiertos donde múltiples factores externos (por ejemplo: las políticas gubernamentales, las inversiones privadas y los cambios económicos) interactúan con las dinámicas locales. Esto implica que las decisiones tomadas en un nivel pueden tener repercusiones significativas en otros niveles, creando una red compleja de causas y efectos. No es un proceso lineal puesto que las interacciones entre los diferentes actores (nuevos residentes, antiguos residentes,

⁷Delgadillo [2016]

desarrolladores y autoridades locales) generan efectos emergentes. Puede darse lugar a cambios inesperados en el tejido social y cultural de un área. Estas transformaciones emergen no solo por las acciones individuales, sino también por las interacciones colectivas entre los actores involucrados. La transformación de un barrio puede resultar en una nueva identidad cultural que no estaba presente antes del proceso. Lo anterior puede provocar que se de lugar a formas de organización espontánea entre los residentes que buscan preservar su comunidad. Estas formas de autoorganización son características clave de los sistemas complejos, donde el orden puede surgir sin una planificación centralizada.

2.2. Modelo de crecimiento poblacional logístico

El modelo logístico, desarrollado por Pierre François Verhulst en el siglo XIX, ofrece una visión más acertada del crecimiento poblacional al incorporar el hecho de que muchos de los recursos necesarios para la subsistencia colectiva se encuentran limitados. Este modelo se caracteriza por una variable llamada capacidad de carga, K . Ello acentúa la diferencia con el modelo malthusiano, el modelo logístico considera esta capacidad de carga igual a un límite máximo al tamaño de la población que un entorno puede soportar. A medida que la población se acerca a este límite, la tasa de crecimiento disminuye (Zárate [2009], StudySmarter [2019]). La ecuación del modelo logístico se expresa en la ecuación (2.1), donde K es la capacidad de carga del entorno. En esta ecuación, N representa el tamaño actual de la población y r sigue siendo la tasa de crecimiento per cápita. Al graficar este modelo, se obtiene una curva sigmoidea como la que se observa en la figura 2.1. Inicialmente, cuando N es pequeño, el crecimiento es rápido; luego, a medida que N se aproxima a K , el crecimiento se ralentiza y eventualmente se estabiliza cerca del valor de K .

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2.1)$$

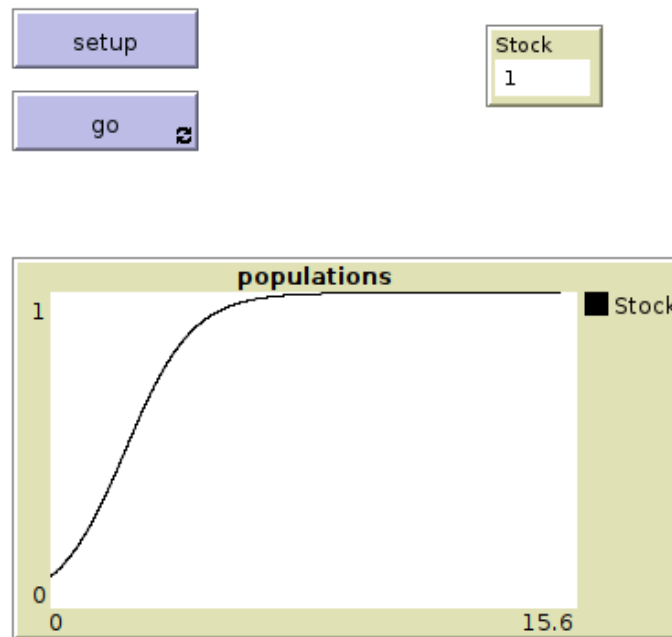


Figura 2.1: Gráfica de crecimiento logístico, extraída de una simulación en NetLogo. Elaboración propia

Este recorrido histórico revela patrones de crecimiento, crisis y reconfiguración que han preparado el terreno para los procesos de gentrificación actuales. Las migraciones, los cambios económicos y la densificación de áreas centrales como Cuauhtémoc y Benito Juárez son precisamente los fenómenos macroscópicos que nuestro modelo dinámico busca capturar a través de las variables agregadas de Población (P), Ingreso (Y) y Renta (r)

2.3. Modelo Lotka-Volterra

Este modelo hace uso de ecuaciones diferenciales para explicar como es que dos poblaciones interactúan, las cuales pueden ser conjuntos de la misma especie o distintas. La forma clásica de este sistema de ecuaciones diferenciales es posible verla en la expresión (2.2). El comportamiento entre estas dos puede corresponder a algún tipo de relación ecológica y para describir esta relación, es a través de los parámetros (y

sus signos). Las ecuaciones de Lotka-Volterra describen una interacción cíclica entre la presa y el depredador. Cuando la población de presas es abundante, la población de depredadores crece debido al aumento de alimento. Sin embargo, al aumentar la población de depredadores, la población de presas disminuye debido a la mayor presión de depredación. A su vez, la disminución de presas provoca una disminución en la población de depredadores, lo que permite que la población de presas se recupere, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(cx - d)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Tanto $\frac{dx}{dt}$ como $\frac{dy}{dt}$ representan las tasas de cambio instantáneas de las poblaciones de presa y depredador, respectivamente; a es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa en ausencia de depredadores, representa la tasa a la que crecería la población de presas si no hubiera depredación; b indica la tasa a la que los depredadores consumen presas, Cuanto mayor sea este valor, mayor será el impacto de la depredación sobre la población de presas; c es la tasa de mortalidad natural de los depredadores en ausencia de presas, representa la tasa a la que morirían los depredadores si no hubiera presas para alimentarse; d es lo mismo que la tasa de interacción de la población de las presas con los depredadores, en el caso de haber una relación de depredación, cuanto mayor sea este valor, significa que es más eficiente la generación de depredadores a partir de las presas consumidas.

2.4. Análisis de bifurcación

Dentro de la teoría de sistemas dinámicos, un análisis de bifurcaciones investiga cómo cambios en un parámetro del sistema pueden inducir transformaciones cualitativas en el comportamiento a largo plazo. Una bifurcación ocurre cuando una pequeña variación en un parámetro de control cruza un umbral crítico, cambiando cualitativamente el comportamiento del sistema, es decir, la alteración de la estabilidad de los eigenvalores.

⁸[Jiménez, 2013, p. 63-65]

2.5. Detalles del modelo propuesto

El modelo de Siddiqui and Alam [2019] al ser analizado, evidencia no contar con suficiente rigor matemático, al mismo tiempo que hay errores de edición que son de peso y que lo hacen poco legible. Sirviendo de base el sistema de ecuaciones del trabajo de Siddiqui and Alam [2019], es oportuno plantear un sistema de ecuaciones no lineales que expresen adecuadamente las interacciones entre las variables de población, ingreso per cápita y renta. A continuación, se mostrará la lógica que se siguió para plantear el sistema de ecuaciones que se analizará. Para empezar, si se plantea por separado que la población y el ingreso crece de manera logística, entonces se desarrollan las ecuaciones (2.3) y (2.5). Tanto a_1 y a_2 son las tasas de crecimiento inicial de población y del ingreso, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{dt} &= a_1 \cdot P \left(1 - \frac{P}{K_P} \right) \\
 &= a_1 P - \frac{a_1}{K_P} \cdot P^2 \\
 &= a_1 \cdot P - f_1 \cdot P^2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde $f_1 = a_P/K_P$ y de esta expresión se puede despejar la fórmula para obtener la capacidad de carga de la población:

$$f_1 = a_1/K_P \quad \rightarrow \quad K_P = a_1/f_1 \tag{2.4}$$

El caso del crecimiento aislado de la variable de ingreso per cápita se puede ver en la expresión (2.5).

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dt} &= a_Y \cdot Y \left(1 - \frac{Y}{K_Y} \right) \\
 &= a_Y \cdot Y - \frac{a_Y}{K_Y} \cdot Y^2 \\
 &= a_2 \cdot Y - f_2 \cdot Y^2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

La capacidad de carga del ingreso per cápita como se observa en 2.6.

$$f_2 = a_Y/K_Y \quad \rightarrow \quad K_Y = a_2/f_2 \tag{2.6}$$

Partiendo de lo anterior, es que podemos plantear las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 en las cuales se incorporan los signos que expresan las interacciones de las variables entre sí.

$$\dot{P} = P(a_1 - f_1 \cdot P + e_1 \cdot Y - b_1 \cdot r) \quad (2.7)$$

$$\dot{Y} = Y(a_2 - f_2 \cdot Y - e_2 \cdot P - b_2 \cdot r) \quad (2.8)$$

$$\dot{r} = r(-c + d_1 \cdot P + d_2 \cdot Y) \quad (2.9)$$

De este modelo se necesita analizar su estabilidad y posteriormente hacer el análisis de bifurcaciones. Los parámetros del modelo $(a_1, b_1, e_1, f_1, a_2, b_2, e_2, f_2, c, d_1, d_2)$ representan las tasas de crecimiento iniciales y los efectos de interacción entre las variables. Sus unidades de medida se derivan de la necesidad de mantener la consistencia dimensional en las ecuaciones del modelo Lotka-Volterra. Dado que los términos dependientes en las ecuaciones diferenciales $(\frac{dP}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dr}{dt})$ representan tasas de cambio de las variables, y en la forma empírica discreta $(\frac{\Delta P}{P}, \frac{\Delta Y}{Y}, \frac{\Delta r}{r})$ son tasas de cambio porcentual (adimensionales), cada término dentro de los paréntesis debe ser también una tasa de cambio. Por lo tanto, parámetros como a_1 , a_2 y c son **adimensionales** (o $1/\text{tiempo}$ si consideramos la forma continua), indicando una tasa de crecimiento o decaimiento inicial. Los parámetros que representan interacciones $(b_1, e_1, f_1, b_2, e_2, f_2, d_1, d_2)$ tienen unidades recíprocas a las variables con las que interactúan ($1/\text{monetario}$ o $1/\text{individuos}$), asegurando que, al multiplicarse por la variable correspondiente, el resultado sea un término de tasa, consistente con el resto de la ecuación. A modo de resumen y para un adecuado entendimiento de las interacciones de las variables que aparecen en el sistema de las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9), véase la tabla 2.1.

Variable	Rol en el Sistema	Efectos de Interacción
Población (P)	Depredado de Renta	(↓) Depreda el Ingreso (Y) (↑) Impulsa la Renta (r)
Ingreso (Y)	Presa de Población	(↓) Es depredado por Población (P) y Renta (r) (↑) Atrae nueva Población (P) (↑) Impulsa la Renta (r)
Renta (r)	Depredador Generalizado	(↓) Depreda la Población (P) (↓) Depreda el Ingreso (Y)

Tabla 2.1: Tabla de interacción del modelo, basado en ([Siddiqui and Alam, 2019, p. 120])

La estructura de interacciones presentada en las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) y la tabla 2.1 se fundamenta en otros trabajos de modelado dinámico urbano que adapta la analogía ecológica de depredador-presa de Lotka-Volterra para conceptualizar las relaciones entre variables socioeconómicas. Este modelo tridimensional también se basa en la versión que sintetiza varias de estas dinámicas bidimensionales propuestas en la literatura, el rol y el signo de cada interacción:

1. La Renta (r) es propuesto como el principal depredador del sistema, afectando negativamente tanto a la población como al ingreso.
 - Renta sobre Población ($-b_1r$): En línea con el modelo de Orishimo ⁹, un aumento en la renta actúa como un mecanismo de retroalimentación negativo que limita el crecimiento poblacional o induce su declive. Este término captura la esencia del desplazamiento en procesos de gentrificación, donde el encarecimiento del coste de vida expulsa a los residentes originales. La renta, por tanto, “depreda” a la población.
 - Renta sobre Ingreso ($-b_2r$): Siguiendo la interpretación de Camagni, la renta urbana es un coste de producción fundamental. Un aumento en los alquileres comerciales reduce los márgenes de beneficio de las empresas, disminuyendo

⁹([Orishimo, 1987, p. 205]), ([Siddiqui and Alam, 2019, p. 118])

así el ingreso per cápita generado en el área.¹⁰ De esta forma, la renta también “depreda” al ingreso.

2. El doble rol de la Población (P): La población actúa simultáneamente como un estímulo para la renta y como un depredador para el ingreso.

- Población sobre Renta ($+d_1P$): Un aumento en la población incrementa la demanda de vivienda y suelo urbano. Esta mayor demanda, como señala Orishimo¹¹, impulsa la inversión y la intensidad de uso del suelo, lo que se traduce en un aumento de los precios y la renta. La población, en este sentido, “alimenta” a su depredador, la renta.
- Población sobre Ingreso ($-e_2P$): De acuerdo con el enfoque de Dendrinós y Mullally, una vez que la población supera ciertos umbrales, genera desventajas de escala. La congestión, la presión sobre la infraestructura y la fricción urbana pueden reducir la productividad y, por ende, el ingreso per cápita¹². Bajo este supuesto, la población “depreda” al ingreso.

3. El doble rol del Ingreso (Y): El ingreso es conceptualizado como la “presa” principal del sistema, pero también como un factor de atracción y de aumento de la capacidad de pago.

- Ingreso sobre Renta ($+d_2Y$): Un mayor ingreso per cápita refleja una mayor prosperidad y capacidad de pago en la población. Esto permite a los propietarios e inversores capturar una mayor plusvalía a través del aumento de las rentas, un mecanismo central en la teoría de la gentrificación y modelado por Camagni. Así, el ingreso “alimenta” a la renta.
- Ingreso sobre Población ($+e_1Y$): Las oportunidades económicas son un motor clave de la migración y el crecimiento urbano. Un ingreso per cápita elevado, como lo exponen Dendrinós y Mullally, actúa como un potente factor de atracción que estimula la llegada de nueva población al área.¹³

¹⁰([Camagni, 2016, p. 91]), ([Siddiqui and Alam, 2019, p. 118])

¹¹([Orishimo, 1987, pp. 204,205])

¹²[Dendrinós, 1981, p. 329]

¹³[Camagni, 2016, p. 111,112]

En la tabla 2.2 se recapitula la interpretación de los parámetros del sistema de ecuaciones del modelo.

Parámetro	Signo	Interpretación
a_1	+	Tasa de crecimiento inicial de la población
a_2	+	Tasa de crecimiento inicial de los ingresos
b_1	+	Tasa de efecto de interacción de la renta urbana en el crecimiento de la población
b_2	+	Tasa de efecto de interacción de la renta urbana en el crecimiento de los ingresos,
c	-	Tasa de decrecimiento inicial de renta urbana
d_1	+	Tasa de efecto de interacción de la población en la tasa de crecimiento urbano
d_2	+	Tasa de efecto de interacción de los ingresos en el crecimiento de la renta urbana
e_1	+	Tasa de efecto de interacción de los ingresos en el crecimiento de la población,
e_2	+	Tasa de efecto de interacción de la población en el crecimiento de los ingresos,
f_1	-	Coefficiente del término cuadrático de la población para la función logística
f_2	-	Coefficiente del término cuadrático de los ingresos para la función logística.

Tabla 2.2: Interpretación de los parámetros del modelo.

2.5.1. Aplicación del análisis de bifurcación en el modelo

Para el estudio de la gentrificación mediante el modelo propuesto, el parámetro c (la tasa intrínseca de decrecimiento de la renta) se postula como el parámetro de control idóneo, debido a su papel económico, que encapsula las condiciones precursoras del fenómeno de la gentrificación. Matemáticamente, si la población (P) y el ingreso (Y) fueran nulos, la dinámica de la renta se reduciría a $\dot{r} = -cr$, describiendo un decaimiento

miento exponencial. Económicamente, c representa el estado natural de depreciación y desinversión de un área urbana. Un valor positivo y significativo de c modela un entorno donde, en ausencia de estímulos externos, la infraestructura va erosionándose, la percepción del área se deteriora y es así que la falta de demanda especulativa permite que el valor de las propiedades y las rentas disminuya de forma natural. En esencia, c parece cuantificar una tendencia inherente de un barrio hacia la decadencia o el estancamiento si se le deja a su propia suerte.

El parámetro c como indicador agregado de inversión y atractividad

El proceso de gentrificación se inicia cuando las fuerzas que impulsan la depreciación (representadas por un c elevado) se debilitan o revierten. Por lo tanto, la variación de c en el modelo es análoga a la introducción de los catalizadores exógenos que desencadenan la gentrificación en la realidad. Las fuerzas económicas que modulan c incluyen que intervención gubernamental a través de proyectos de revitalización urbana (mejoras en parques, transporte, seguridad) y la inversión de capital privado (desarrolladores inmobiliarios, nuevos comercios) contrarrestan directamente la depreciación natural. Estas acciones aumentan el valor intrínseco del área, lo que se traduce matemáticamente en una reducción del valor de c . Ahora bien, cuando un barrio adquiere prestigio cultural o se percibe como "de moda" por su ubicación, arquitectura o escena social, su atractividad fundamental aumenta. Esta deseabilidad intrínseca puede detener o incluso revertir la tendencia a la baja de las rentas. Un cambio de este tipo equivale a que c disminuya drásticamente, pudiendo llegar a ser cero o negativo. Un valor de $c \leq 0$ implicaría que la renta posee una tendencia inherente al crecimiento, incluso en ausencia de presión demográfica o de ingresos.

De este modo, c funciona como un indicador agregado¹⁴ del clima de inversión y de la atractividad fundamental de un barrio.

¹⁴En este contexto, un "indicador agregado" es una variable medible que no es la causa directa del fenómeno en estudio, pero que se correlaciona fuertemente con él y sirve como una representación simplificada y cuantificable de un conjunto complejo de factores.

La bifurcación: transición de la estabilidad a la dinámica de gentrificación

La conexión entre el parámetro c , la estabilidad del sistema y el surgimiento de la gentrificación se manifiesta a través de un cambio en la naturaleza de los puntos de equilibrio.

A medida que las inversiones y los cambios de percepción reducen el valor de c , este freno se debilita. El punto de equilibrio de baja renta pierde robustez y su cuenca de atracción se contrae. El sistema se aproxima a un punto de inflexión crítico.

La bifurcación ocurre cuando c cruza este umbral crítico. El antiguo equilibrio de baja renta pierde su estabilidad y se convierte en un punto inestable. En este nuevo régimen, el sistema ya no puede persistir en un estado asequible. La más mínima perturbación es suficiente para que el término $(-c + d_1P + d_2Y)$ se vuelva positivo, lo que desencadena un bucle de retroalimentación positiva (runaway feedback loop). El aumento de la renta atrae a residentes con mayores ingresos, cuyo poder adquisitivo impulsa aún más la renta, acelerando el proceso de transformación del barrio.

Este comportamiento explosivo expulsa al sistema de su antiguo estado y lo conduce hacia un nuevo atractor: el punto de equilibrio de coexistencia, caracterizado por altos niveles de población, ingreso y renta, que representa el barrio gentrificado consolidado. Por consiguiente, c es el parámetro de control que permite modelar la transición fundamental de un sistema con retroalimentación negativa sobre la renta (que garantiza la asequibilidad) a uno con retroalimentación positiva (que desata la dinámica de la gentrificación).

Capítulo 3

Metodología y análisis del sistema dinámico

El enfoque metodológico empleado en esta investigación corresponde al análisis cualitativo de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. El objetivo es caracterizar la dinámica del modelo de gentrificación propuesto, identificando sus estados a largo plazo y las condiciones bajo las cuales estos estados cambian de naturaleza. Dado que las variables del sistema poseen significado económico únicamente para valores no negativos, el análisis se restringe al primer octante del espacio de fases, $\mathbb{R}_+^3 = \{(P, Y, r) \in \mathbb{R}^3 \mid P \geq 0, Y \geq 0, r \geq 0\}$. Este dominio constituye el conjunto de todos los estados económicamente viables del sistema.

El procedimiento analítico se desarrolló en dos etapas fundamentales: un análisis de estabilidad para un conjunto de parámetros fijos y un análisis de bifurcaciones para explorar la sensibilidad del sistema a cambios en un parámetro de control clave. La base de este estudio reside en la exploración de un modelo analítico. Para la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas y diferenciales, así como para el cálculo de eigenvalores y la simulación numérica de trayectorias, se empleó el software Maple.

■ Análisis de estabilidad local

Para un conjunto de parámetros exploratorios fijos, se caracterizó la dinámica local del sistema siguiendo un procedimiento estándar de tres pasos:

1. Obtención de los Puntos de Equilibrio: Se identificaron todos los estados estacionarios del sistema resolviendo el conjunto de ecuaciones algebraicas propuesto que resulta de igualar las tasas de cambio a cero: $\dot{P} = \dot{Y} = \dot{r} = 0$. Solo aquellos puntos de equilibrio que residen en el primer octante fueron considerados para el análisis posterior debido a su relevancia económica.
2. Linealización del Sistema: Para examinar el comportamiento del sistema en la vecindad de cada punto de equilibrio viable, se procedió a su linealización. Esto se logró mediante el cálculo de la matriz Jacobiana J , la cual representa la aproximación lineal de la dinámica cerca de un estado estacionario.
3. Clasificación de la estabilidad: La estabilidad local de cada punto de equilibrio \mathbf{y}_0 se determinó a través del análisis de los eigenvalores (λ) de la matriz Jacobiana, $\sigma(J)$, evaluada en dicho punto. Las condiciones son las siguientes ([Polking et al., 2006, p. 470]):

- Estabilidad: Si la parte real de todos los eigenvalores es estrictamente negativa, el punto de equilibrio es un atractor local.

$$\forall \lambda \in \sigma(J), \quad \text{Re}(\lambda) < 0 \quad \implies \quad \mathbf{y}_0 \text{ es asintóticamente estable.} \quad (3.1)$$

- Inestabilidad: Si la parte real de al menos un eigenvalor es positiva, el punto de equilibrio es un repulsor o un punto de silla, y por lo tanto, inestable.

$$\exists \lambda \in \sigma(J) \text{ tal que } \text{Re}(\lambda) > 0 \quad \implies \quad \mathbf{y}_0 \text{ es inestable.} \quad (3.2)$$

■ Análisis de bifurcaciones

Para investigar cómo la estructura cualitativa del sistema se transforma en respuesta a cambios en las condiciones económicas subyacentes, se realizó un análisis de bifurcaciones. Esta etapa se centró en explorar la sensibilidad del modelo a variaciones en un parámetro de control, utilizando el conjunto de datos exploratorios como base.

El parámetro c , que representa la tasa intrínseca de decrecimiento de la renta, fue seleccionado como el parámetro de control. La elección se justifica por su rol económico como indicador de la desinversión o, inversamente, de la atractividad y el clima de inversión de un área. Se realizó una variación sistemática de c para

identificar umbrales críticos en los que la estabilidad de los puntos de equilibrio económicamente relevantes cambia, con un enfoque particular en la detección de bifurcaciones de tipo silla-nodo. Este tipo de bifurcación es de especial interés, ya que implica la creación o aniquilación de puntos de equilibrio, lo que económicamente se traduce en la aparición o desaparición de posibles destinos a largo plazo para el sistema urbano.

3.1. Análisis cualitativo del sistema propuesto

El análisis del sistema dinámico propuesto se desarrolla en tres etapas fundamentales. Primero, se realiza un análisis cualitativo completo, identificando los puntos de equilibrio del sistema y determinando su estabilidad local mediante la linealización y el cálculo de la matriz Jacobiana. Segundo, se complementa el análisis de estabilidad con simulaciones numéricas del campo vectorial en el primer octante, el dominio de relevancia económica, para visualizar las trayectorias del sistema. Finalmente, se lleva a cabo un análisis de bifurcaciones para investigar cómo la estructura de los equilibrios cambia en respuesta a variaciones en un parámetro de control económicamente significativo.

3.1.1. Puntos de equilibrio

Se hace uso de la herramienta de Maple para obtener los puntos de equilibrios, que son siete en total:

1. $\{P = 0, Y = 0, r = 0\}$
2. $\{P = 0, Y = \frac{a_2}{f_2}, r = 0\}$
3. $\{P = 0, Y = \frac{c}{d_2}, r = -\frac{cf_2 - a_2d_2}{b_2d_2}\}$
4. $\{P = \frac{a_1}{f_1}, Y = 0, r = 0\}$
5. $\{P = \frac{c}{d_1}, Y = 0, r = -\frac{cf_1 - a_1d_1}{b_1d_1}\}$
6. $\{P = \frac{a_1f_2 + a_2e_1}{e_1e_2 + f_1f_2}, Y = -\frac{a_1e_2 - a_2f_1}{e_1e_2 + f_1f_2}, r = 0\}$
7. $\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{cb_1f_2 + cb_2e_1 + a_1b_2d_2 - a_2b_1d_2}{b_1d_1f_2 - b_1d_2e_2 + b_2d_1e_1 + b_2d_2f_1}, \\ Y = -\frac{cb_1e_2 - cb_2f_1 + a_1b_2d_1 - a_2b_1d_1}{b_1d_1f_2 - b_1d_2e_2 + b_2d_1e_1 + b_2d_2f_1}, \\ r = -\frac{ce_1e_2 + cf_1f_2 - a_1d_1f_2 + a_1d_2e_2 - a_2d_1e_1 - a_2d_2f_1}{b_1d_1f_2 - b_1d_2e_2 + b_2d_1e_1 + b_2d_2f_1} \end{array} \right\}$

3.1.2. Linealización del sistema: matriz jacobiana

Una vez identificados los puntos de equilibrio, se procede a la linealización del sistema en la vecindad de cada uno. Este paso es crucial para determinar la estabilidad local y se logra mediante el cálculo de la matriz Jacobiana (J), como se muestra en la ecuación 3.3.

$$J = \begin{bmatrix} a_1 - 2f_1P + e_1Y - b_1r & e_1P & -b_1P \\ -e_2Y & a_2 - 2f_2Y - e_2P - b_2r & -b_2Y \\ d_1r & d_2r & -c + d_1P + d_2Y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.2. Análisis de estabilidad del sistema con parámetros exploratorios

Para realizar un análisis numérico y explorar la dinámica del modelo, se adoptó el conjunto de parámetros propuesto por Siddiqui and Alam [2019] para ciudades en vías de desarrollo, categoría en la que los autores incluyen a la Ciudad de México. Estos valores, presentados en la Tabla 3.1, sirven como un punto de partida exploratorio para caracterizar el comportamiento general del sistema.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
a_1	0.0417	c	0.0031
b_1	0.0004	d_1	0.0002
e_1	0.0005	d_2	0.0468
f_1	0.0029	a_2	0.0285
b_2	0.0085	e_2	0.0103
f_2	0.0055		

Tabla 3.1: Tabla de parámetros calculados por Siddiqui and Alam [2019] para ciudades como Ciudad de México. Variables exploratorias para estudiar la dinámica general del modelo.

3.2.1. Puntos de equilibrio dentro del primer octante

A continuación, se presentan las matrices Jacobianas evaluadas en cada uno de los puntos críticos y sus correspondientes eigenvalores (valores propios), calculados mediante Maple. Solo se consideran los puntos de equilibrio que no tengan alguna coordenada negativa, por lo que de los 7 equilibrios, solo se tienen en cuenta 6.

3.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA CON PARÁMETROS EXPLORATORIOS 33

Punto 1: $\{P = 0, Y = 0, r = 0\}$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto (E_1) es:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0.00417 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0285 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0031 \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz es diagonal, los eigenvalores son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 0.00417, \quad \lambda_2 = 0.0285, \quad \lambda_3 = -0.0031$$

Como hay dos eigenvalores con parte real positiva ($\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$), este punto de equilibrio es inestable.

Punto 2: $\{P = 0, Y \approx 5.1818, r = 0\}$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto (E_2) es:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0.0068 & 0 & 0 \\ -0.0533 & -0.0285 & -0.0440 \\ 0 & 0 & 0.2394 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores correspondientes son:

$$\lambda_1 = 0.0068, \quad \lambda_2 = -0.0285, \quad \lambda_3 = 0.2394$$

Dado que hay dos eigenvalores con parte real positiva ($\lambda_1 > 0$ y $\lambda_3 > 0$), este punto de equilibrio es inestable.

Punto 3: $\{P = 0, Y \approx 0.0662, r \approx 3.3101\}$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto (E_3) es:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0.00288 & 0 & 0 \\ -0.00068 & -0.00036 & -0.00056 \\ 0.00066 & 0.15491 & 0 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores correspondientes son:

$$\lambda_1 = 0.00288, \quad \lambda_{2,3} = -0.00018 \pm 0.00934i$$

Como el primer eigenvalor tiene una parte real positiva ($\lambda_1 > 0$), este punto de equilibrio es inestable. La presencia de eigenvalores complejos indica un comportamiento oscilatorio (espiral divergente).

Punto 4: $\{P \approx 1.4379, Y = 0, r = 0\}$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto (E_4) es:

$$J_4 = \begin{pmatrix} -0.00417 & 0.00072 & -0.00058 \\ 0 & 0.01369 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00281 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores correspondientes son:

$$\lambda_1 = -0.00417, \quad \lambda_2 = 0.01369, \quad \lambda_3 = -0.00281$$

Con un eigenvalor positivo ($\lambda_2 > 0$), este punto de equilibrio también es inestable.

Punto 5: $\{P \approx 1.7623, Y \approx 1.8815, r = 0\}$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto (E_5) es:

$$J_5 = \begin{pmatrix} -0.00511 & 0.00088 & -0.00070 \\ -0.01938 & -0.01035 & -0.01599 \\ 0 & 0 & 0.08531 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores correspondientes son:

$$\lambda_{1,2} = -0.00773 \pm 0.00320i, \quad \lambda_3 = 0.08531$$

Como el tercer eigenvalor tiene una parte real positiva ($\lambda_3 > 0$), este punto de equilibrio es inestable. El sistema se alejará de este estado.

Punto 6: $\{P \approx 1.1904, Y \approx 0.0612, r \approx 1.8709\}$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto (E_6) es:

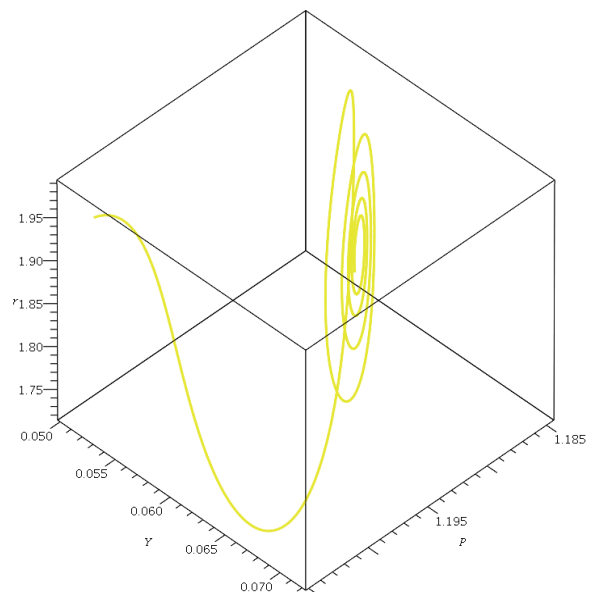
$$J_6 = \begin{pmatrix} -0.00345 & 0.00060 & -0.00048 \\ -0.00063 & -0.00034 & -0.00052 \\ 0.00037 & 0.08756 & 0 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores correspondientes son:

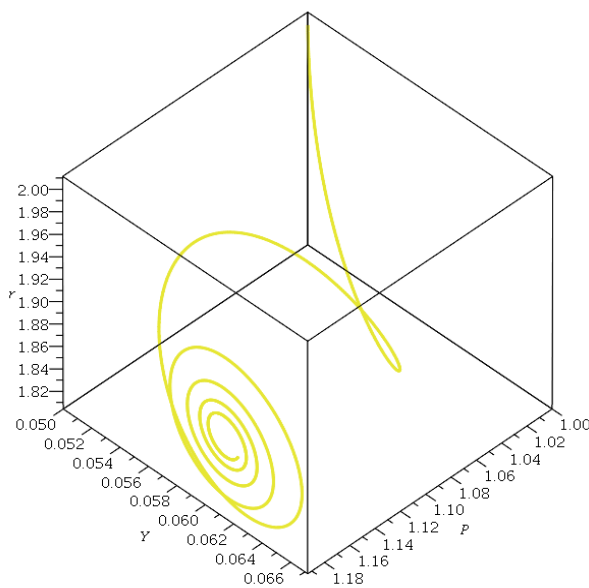
$$\lambda_1 = -0.00293, \quad \lambda_{2,3} = -0.00043 \pm 0.00667i$$

Todos los eigenvalores tienen parte real estrictamente negativa ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$). Por lo tanto, este punto de equilibrio es localmente estable. La presencia de eigenvalores complejos indica que el sistema se aproximará a este equilibrio de manera oscilatoria (una espiral que converge).

3.2.2. Simulación generada en Maple de dos curvas solución



(a) Condiciones iniciales en
 $P(0) = 1.2, Y(0) = 0.05,$
 $r(0) = 1.9.$



(b) Condiciones iniciales en
 $P(0) = 1, Y(0) = 0.05, r(0) =$
 $2.$

Las imágenes presentadas en 3.1a y 3.1b son una forma de visualizar de manera tridimensional de dos distintas trayectorias en el espacio de fases del modelo de gentrificación, generado mediante la función “DEplot3d” de Maple. Estas trayectorias ilustran cómo evolucionan conjuntamente las variables de Población (P), Ingreso (Y) y Renta (r) a lo largo del tiempo, partiendo de unas condiciones iniciales específicas. En cada imagen es posible ver los ejes que representan las tres variables del modelo: población (P), ingreso (Y) y renta (r). Cada punto en este espacio (P, Y, r) corresponde a un estado particular del sistema urbano en un momento dado. Por ejemplo, un punto puede indicar una población de 1.2 unidades, un ingreso de 0.05 unidades y una renta de 1.9 unidades.

Cada una de las curvas amarillas de ambas imágenes son una solución específica de tu sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Representan la evolución temporal del sistema a partir de las condiciones iniciales dadas: $P(0) = 1.2$, $Y(0) = 0.05$, $r(0) = 1.9$ en la figura 3.1a y $P(0) = 1$, $Y(0) = 0.05$, $r(0) = 2$ para 3.1b. El tiempo en la simulación ($t = -50 \dots 5000$) abarca un periodo amplio, permitiendo observar el comportamiento a largo plazo del sistema.

Lo más notorio de las trayectorias son su forma de espiral que converge hacia un punto central. Este patrón es propio de un atractor estable, especialmente cuando los eigenvalores de la matriz Jacobiana en un punto de equilibrio son complejos con parte real negativa. Las imágenes corroboran visualmente este hallazgo en el análisis de estabilidad), en específico en el punto 6 $\{P \approx 1.1904, Y \approx 0.0612, r \approx 1.8709\}$ como un punto de equilibrio localmente estable, con eigenvalores complejos cuya parte real es negativa ($\lambda_{1,2} = -0.00773 \pm 0.00320i$, $\lambda_3 = 0.08531$).

Interpretación de la simulación

La espiral que converge implica que, a partir de las condiciones iniciales elegidas (y presumiblemente, para un rango de condiciones iniciales en la cuenca de atracción de este punto), el sistema urbano tiende a estabilizarse en un estado donde coexisten niveles de población, ingreso y renta. Ese punto de convergencia parece cercano a $P \approx 1.19$, $Y \approx 0.06$, $r \approx 1.87$. Esto puede sugerir un escenario donde la gentrificación, una vez iniciada, alcanza un estado de relativa estabilidad. La población, el ingreso per cápita

y la renta se asientan en valores constantes. Las oscilaciones (la forma espiral) antes de la convergencia indican que el sistema no se ajusta directamente a su equilibrio. Esto podría interpretarse como periodos de ajuste en el barrio: quizás la renta sube, la población se ajusta, el ingreso es afectado, y estas interacciones causan pequeñas fluctuaciones antes de que todo se asiente. En un contexto de gentrificación, esto podría reflejar fases de especulación y ajuste del mercado antes de que el barrio alcance una nueva normalidad.

3.3. Análisis de bifurcación

Para investigar la dependencia estructural del sistema a las condiciones económicas subyacentes, se realizó un análisis de bifurcaciones utilizando el parámetro c como variable de control. Como se justificó en la sección metodológica, c encapsula la atraktividad intrínseca y el clima de inversión de un área. El análisis se centró en el punto de equilibrio de coexistencia (E_6).

3.3.1. Síntesis del análisis de bifurcaciones

El análisis numérico demuestra de manera concluyente que la existencia de un estado de gentrificación estable depende críticamente del valor del parámetro c . Dentro del rango viable $c \in [0.000234, 0.088405]$, el sistema posee un atractor estable que representa un barrio gentrificado consolidado. Sin embargo, al cruzar los límites de este rango, ya sea por un clima de inversión extremo (bajo c) o por una alta tasa de depreciación (alto c), el sistema sufre una bifurcación. El atractor estable es aniquilado, y la dinámica del sistema cambia fundamentalmente. Esto proporciona una base matemática sólida para entender la gentrificación como un fenómeno de umbral, donde cambios en las condiciones subyacentes pueden provocar una transformación irreversible en el destino a largo plazo de un barrio.

3.3.2. Determinación del rango de viabilidad económica

$$\dot{P} = P(-0.0029P + 0.0005Y - 0.0004r + 0.0417) \quad (3.4)$$

$$\dot{Y} = Y(-0.0103P - 0.0055Y - 0.0085r + 0.0285) \quad (3.5)$$

$$\dot{r} = r(0.0002P + 0.0468Y - c) \quad (3.6)$$

El primer paso consistió en determinar el intervalo de valores de c para el cual el punto de equilibrio de coexistencia es económicamente significativo, es decir, reside en el primer octante del espacio de fases ($P \geq 0, Y \geq 0, r \geq 0$). Resolviendo el sistema de desigualdades $P^*(c) \geq 0, Y^*(c) \geq 0$, y $r^*(c) \geq 0$, se encontró que el equilibrio de coexistencia solo es viable dentro del siguiente rango acotado del parámetro de control:

$$\begin{aligned} P^*(c) &\geq 0 \\ Y^*(c) &\geq 0 \\ r^*(c) &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

La resolución de este sistema de desigualdades revela que el punto de equilibrio de coexistencia solo es económicamente viable (es decir, todas sus coordenadas son positivas) dentro del intervalo $c \in [0.000234, 0.088405]$.

3.3.3. Caso 1: equilibrio estable dentro del rango ($c = 0.0031$)

Este valor corresponde al parámetro de referencia y representa un escenario de estabilidad. Los eigenvalores del punto de equilibrio

$$\lambda(c = 0.0031) = \begin{pmatrix} -0.002930609321 \\ -0.0004289676894 + 0.006672866718i \\ -0.0004289676894 - 0.006672866718i \end{pmatrix}$$

Todas las partes reales de los eigenvalores son estrictamente negativas. Por lo tanto, el punto de equilibrio es un foco estable. Esto confirma que para este valor del parámetro, el sistema converge de manera oscilatoria hacia un estado de gentrificación consolidada.

3.3.4. Caso 2: bifurcación en el límite inferior ($c = 0.00023$)

Este valor se sitúa en el umbral inferior del rango viable, donde se espera un cambio cualitativo en la dinámica. Las partes imaginarias diminutas (10^{-12} y 10^{-13}) son artefactos numéricos y se consideran cero.

$$\lambda(c = 0.00023) = \begin{pmatrix} +0.000218345312 \\ -0.003345621302 \\ -0.000268636140 \end{pmatrix}$$

La aparición de un eigenvalor con parte real positiva ($\lambda_1 > 0$) indica que el punto de equilibrio ha perdido su estabilidad. El sistema ha experimentado una bifurcación y el atractor estable ha desaparecido, transformándose en un punto inestable. Puede verse en la figura 3.2 una curva solución que ilustra el comportamiento explicado.

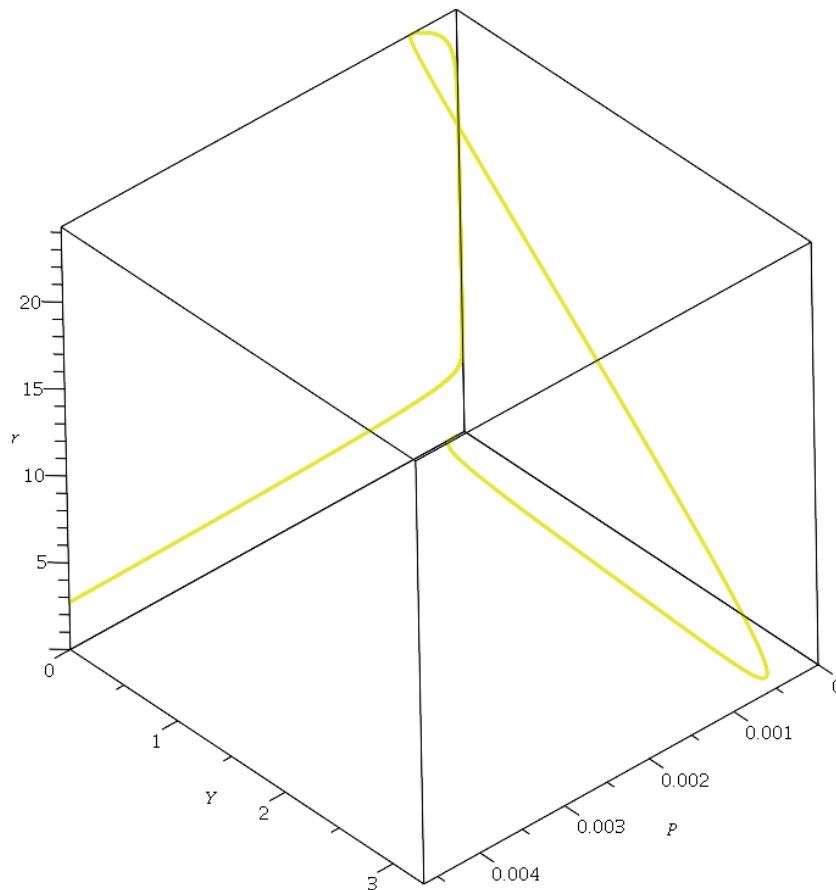


Figura 3.2: Curva solución con condiciones iniciales en $P(0) = 0.0001, Y(0) = 0.0001, r(0) = 0.0001$ con $c = 0.00023$. Elaboración propia.

3.3.5. Caso 3: bifurcación en el límite superior ($c = 0.089$)

Este valor se ubica justo por encima del umbral superior de viabilidad, marcando otra transición crítica. Los eigenvalores correspondientes son:

$$\lambda(c = 0.089) = \begin{pmatrix} +0.000596563416 \\ -0.008068362047 + 0.002300180456i \\ -0.008068362047 - 0.002300180456i \end{pmatrix}$$

Nuevamente, la presencia de un eigenvalor con parte real positiva ($\lambda_1 > 0$) confirma la inestabilidad del punto de equilibrio. En este umbral, el sistema ha sufrido otra bifurcación, y el punto de equilibrio se ha convertido en punto inestable, tal como se ilustra en la figura 3.3.

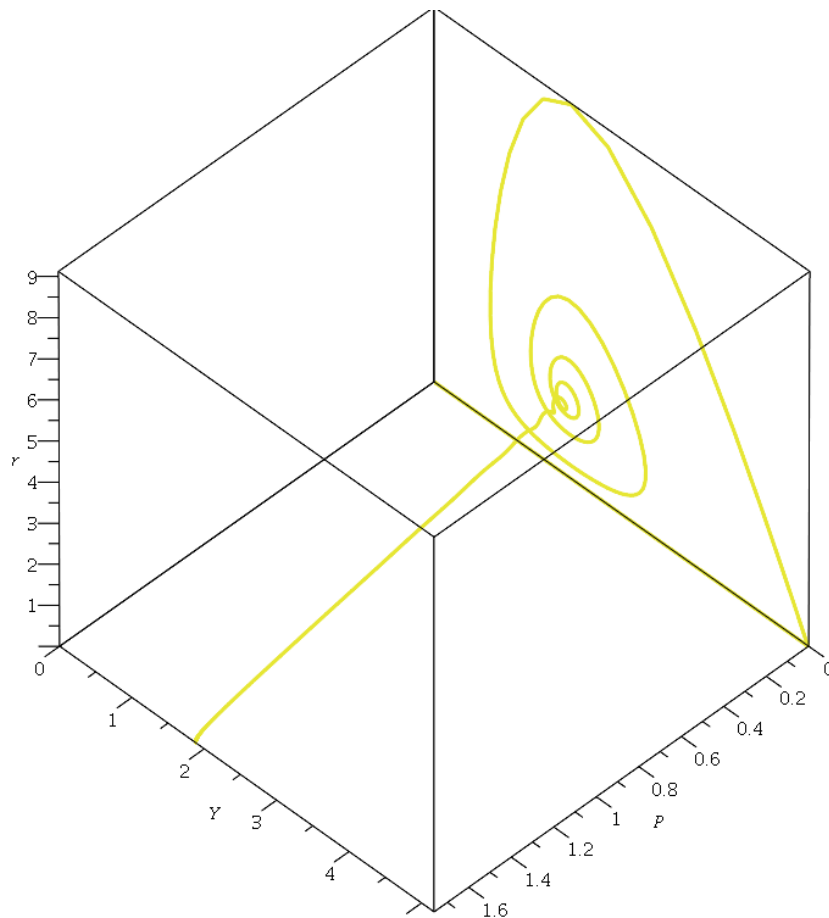


Figura 3.3: Curva solución con condiciones iniciales en $P(0) = 0.0001, Y(0) = 0.0001, r(0) = 0.0001$ con $c = 0.089$. Elaboración propia.

El análisis numérico demuestra de manera concluyente que la existencia de un estado de gentrificación estable depende críticamente del valor del parámetro c . Dentro del rango viable $c \in [0.000234, 0.088405]$, el sistema posee un atractor estable que representa un barrio gentrificado consolidado. Sin embargo, al cruzar los límites de este rango, ya sea por un clima de inversión extremo (bajo c) o por una alta tasa de depreciación (alto c), el sistema sufre una bifurcación. El atractor estable es aniquilado, y la dinámica del sistema cambia fundamentalmente. Esto proporciona una base matemática sólida para entender la gentrificación como un fenómeno de umbral, donde cambios en las condiciones subyacentes pueden provocar una transformación irreversible en el destino a largo plazo de un barrio.

Capítulo 4

Conclusiones

La presente investigación se propuso analizar el fenómeno de la gentrificación desde el paradigma de las ciencias de la complejidad, utilizando como herramienta principal un sistema dinámico no lineal inspirado en el modelo ecológico de Lotka-Volterra. El objetivo central no fue predecir el futuro de barrios específicos, sino desentrañar, en la medida de lo posible, la estructura de interacciones y retroalimentaciones que subyacen a esta compleja transformación urbana. Al adoptar un enfoque de “arriba hacia abajo”, se buscó caracterizar la dinámica macroscópica que emerge de la interacción entre tres variables agregadas fundamentales: población (P), ingreso per cápita (Y) y renta (r).

El punto de partida de este trabajo fue la identificación de inconsistencias matemáticas y de edición en el modelo tridimensional propuesto por (Siddiqui and Alam [2019]). La primera tarea consistió en reformular dicho modelo, resultando en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales robusto y matemáticamente consistente, que integra términos logísticos para el crecimiento de la población y el ingreso, y captura las interacciones de depredador-presa fundamentadas en la teoría económica urbana.

El análisis cualitativo de este sistema corregido, utilizando un conjunto de parámetros exploratorios basados en el estudio original, reveló una estructura dinámica interesante:

1. De los siete puntos de equilibrio matemáticamente posibles, solo uno demostró ser localmente estable y económicamente viable (residiendo en el primer octante). Este punto, $E_6 \approx \{P = 1.19, Y = 0.06, r = 1.87\}$, representa un estado de

coexistencia donde la población, el ingreso y la renta se estabilizan en valores positivos y constantes. El análisis de eigenvalores lo caracterizó como un foco estable, indicando que el sistema converge hacia este atractor de manera oscilatoria.

2. Todos los demás puntos de equilibrio económicamente viables, incluyendo el estado trivial y los estados donde alguna de las variables es nula, resultaron ser inestables. Esto sugiere que los escenarios de crecimiento de una sola variable (solo población o solo ingreso) no son sostenibles a largo plazo; el sistema tiende a evolucionar hacia una dinámica donde las tres variables interactúan.
3. El análisis de bifurcaciones identificó el parámetro c (tasa intrínseca de decrecimiento de la renta) como un parámetro de control fundamental. Se demostró que el equilibrio estable de coexistencia solo existe dentro de un rango acotado y específico de c . Fuera de este intervalo, el estado gentrificado consolidado deja de ser una solución viable del modelo, sugiriendo la existencia de un “espacio de parámetros” para la gentrificación.

Lo siguiente es mencionar que la principal contribución de esta tesis es de naturaleza metodológica y conceptual. Al corregir y analizar rigurosamente un modelo existente, se ofrece al conglomerado de estudios urbanos existentes un prototipo matemático dinámico para pensar cuantitativamente sobre la gentrificación. Las contribuciones específicas son:

- Se proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales validado matemáticamente que puede servir como base para futuras investigaciones empíricas. La explicitación de la matriz Jacobiana y el análisis de estabilidad ofrecen una guía para que cualquier otro investigador interesado aplique este modelo a diferentes contextos urbanos.
- Se formaliza la gentrificación no como un estado, sino como una trayectoria dinámica dentro de un espacio de fases. El modelo se construye a partir de las teorías económicas de autores como Orishimo y Camagni, asignando a la renta el rol de “depredador generalizado” y al ingreso el de “presa”, mientras que la población juega un doble rol, generando demanda pero también diseconomías de escala, como sugieren Dendrinos y Mullally.

- La identificación de c como un parámetro de bifurcación es una aportación clave. Traduce el concepto cualitativo de “clima de inversión” o “atractividad” de un barrio a una variable cuantitativa cuyo valor puede determinar un cambio de régimen en el sistema. Esto alinea el análisis de la gentrificación con la teoría de las transiciones de fase y los fenómenos críticos, pilares de las ciencias de la complejidad.

El modelo, a pesar de su abstracción, arroja luz sobre la naturaleza económica de la gentrificación ya que el hallazgo de un único atractor estable sugiere que, bajo las condiciones modeladas, la gentrificación no es un proceso de crecimiento explosivo e infinito, sino una transición de un estado de bajo costo (potencialmente inestable) a un nuevo estado de equilibrio de alto costo y exclusión social. Las oscilaciones hacia este equilibrio pueden interpretarse como los periodos de ajuste especulativo que a menudo se observan en los mercados inmobiliarios de barrios en transformación.

El análisis de bifurcaciones tiene implicaciones profundas para la política pública. Si se considera que un barrio permanece en un estado asequible durante décadas, pero el parámetro c se reduce más allá de un punto crítico —debido a inversión pública, cambios en la percepción cultural o incentivos fiscales—, el sistema puede cruzar un punto de no retorno. A partir de ahí, las retroalimentaciones positivas se apoderan de la dinámica, y revertir el proceso se vuelve exponencialmente más difícil. Esto advierte que las intervenciones de política urbana, si bien intencionadas, pueden tener consecuencias no lineales y drásticas si se aplican cerca de estos umbrales críticos.

La honestidad académica exige reconocer las limitaciones de este trabajo, las cuales despliegan vías para futuros trabajo

1. Una limitación importante es el uso de parámetros exploratorios. El siguiente paso crucial es calibrar el modelo con datos empíricos de series de tiempo para alcaldías o colonias específicas de la Ciudad de México. Esto permitiría validar el modelo y obtener parámetros que reflejen la realidad local, transformando el modelo de uno explicativo a uno potencialmente predictivo.
2. Un ABM complementario permitiría explorar cómo las interacciones a nivel micro (bottom-up) generan los patrones macroscópicos observados. El enfoque de

este modelo de grano grueso, como es un sistema de ecuaciones diferenciales, no puede capturar la heterogeneidad de los actores (residentes de distintos ingresos, pequeños propietarios, grandes desarrolladores) ni sus estrategias adaptativas.

3. Una extensión natural sería desarrollar un modelo espacialmente explícito (ej. mediante autómatas celulares o ecuaciones de reacción-difusión) para analizar cómo la gentrificación se difunde geográficamente de una calle a otra o de un barrio a otro, ya que el modelo actual trata al barrio como un punto.

La gentrificación es, en última instancia, un hecho social que involucra un conflicto entre la pertenencia y el desplazamiento. Si bien un sistema de ecuaciones diferenciales puede aparentemente ser distante de esta realidad, su valor reside en la facultad de abstraer y revelar la lógica subyacente que gobierna el fenómeno. Este trabajo ha demostrado que la dinámica de la gentrificación puede ser entendida como un sistema complejo con equilibrios e inestabilidades. Al identificar las retroalimentaciones que pueden llevar a un barrio a una transición de fase irreversible, el modelo no ofrece soluciones absolutas, pero sí un mapeo que puede aclarar la dinámica en juego. La esperanza es que, al comprender mejor esta estructura, se puedan diseñar políticas públicas más matizadas, particulares y efectivas que busquen mitigar los “efectos nocivos de la gentrificación”.

Bibliografía

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. Oecd data explorer, 2025. URL <https://data-explorer.oecd.org/vis?lc=en&tm=houses&pg=0&snb=108&isAvailabilityDisabled=false&vw=ov&df>.

Minhaj Uddin Siddiqui and Shaista Alam. Empirical estimation of urban life cycle using the three dimensional lotka-volterra model. *Business Review*, 14:116–127, 07 2019. doi: 10.54784/1990-6587.1020.

Lisa Vollmer. *Estrategias contra la gentrificación*. Katakarak Liburuak, 2019. URL https://katakarak.net/sites/default/files/estrategias_contra_la_gentrificacion_web.pdf.

Miguel Fernández. Dinámica no lineal, teoría del caos y sistemas complejos: una perspectiva histórica. *Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)*, 109:107–126, 2016. URL <https://rac.es/ficheros/doc/01213.pdf>.

Matthieu Giroud. Mezcla, control social y gentrificación. *Territorios*, pages 295–304, 2019. URL <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7227856>.

We City. ¿qué es el desarrollo inmobiliario? - wecity, 10 2022. URL <https://wecity.com.mx/que-es-el-desarrollo-inmobiliario/>.

Yasna Contreras, Thierry Lulle, and Óscar Figueroa. *Cambios Socio-Espaciales en las Ciudades Latinoamericanas: ¿Proceso de Gentrificación?* Universidad Externado de Colombia, 11 2016.

Alfredo Cruz Flores. *Impactos socioeconómicos y territoriales de las políticas para el desarrollo urbano: ¿gentrificación en la zona de Tacubaya CDMX 2010-2021?* PhD

- thesis, 2022. URL <https://posgrado.colef.mx/wp-content/uploads/2022/10/TESIS-Cruz-Flores-Alfredo-MDR.pdf>.
- Víctor Delgadillo. Ciudad de México, quince años de desarrollo urbano intensivo: la gentrificación percibida. *Revista INVI*, 31:101–129, 11 2016. doi: 10.4067/s0718-83582016000300004.
- Paulin Luis. “*Lo que sobraba era agua*”. *La historia de la transformación socio-cultural del pueblo de San Juan Ixtayopan: el impacto de la urbanización y la desecación de los manantiales 1950-2000*. PhD thesis, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2016. URL <https://1library.co/document/yr3ee7xo-colegio-humanidades-ciencias-sociales-licenciatura-historia-sociedad-contenC3%A1nea.html>.
- Colaboradores de Wikipedia. Historia territorial de la ciudad de México, 08 2010. URL https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_territorial_de_la_Ciudad_de_M%C3%A9xico.
- CDMX. Densidad de población por delegación (habitantes por km²), a. URL <http://data.salud.cdmx.gob.mx/portal/media/Agenda2012/Paginas/1.11.pdf>.
- CDMX. Densidad de población por delegación, b. URL http://data.salud.cdmx.gob.mx/portal/media/agenda_2016/Paginas/1.12.pdf.
- Viviana Zárate. *APÉNDICE A Modelo de crecimiento logístico*. PhD thesis, 2009. URL https://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lec/zarate_m_ve/apendiceA.pdf.
- StudySmarter. Crecimiento poblacional logístico: Modelos, ejemplos — studysmarter, 2019. URL <https://www.studysmarter.es/resumenes/biologia/ecologia/crecimiento-poblacional-logistico/>.
- Jesús Jiménez. *Análisis de bifurcaciones*, pages 63–65. Modelado, análisis y control de sistemas biológicos biestables. 2013. URL <https://ereding.etsi.us.es/bibing/proyectos/abreproy/5266/>.
- Isao Orishimo. An approach to urban dynamics. *Geographical Analysis*, 19:200–210, 09 1987. doi: 10.1111/j.1538-4632.1987.tb00125.x.

Roberto Camagni. Afterthoughts on urban economic theory and its focus. © *Investigaciones Regionales -Journal of Regional Research*, 36, 2016. URL <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5819474.pdf>.

Henry Dendrinis, Dimitrios S. y Mullally. Optimum control in nonlinear ecological dynamics of metropolitan areas, 04 1981. URL https://www.academia.edu/122701573/Optimum_Control_in_Nonlinear_Ecological_Dynamics_of_Metropolitan_Areas.

John C Polking, Albert Boggess, and David Arnold. *Differential Equations*. Prentice Hall, 2006.