

# UACM

Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD**

**Propiedades de transporte en sistemas descritos por ecuaciones  
de onda fraccionarias en el tiempo**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD**

PRESENTA

**Irvin Manelick Hernández Román**

Director de la Tesis

**Dr. Francisco Javier Sevilla Pérez**

Codirección

**Dr. Huitzilin Yépez Martínez**

Ciudad de México, noviembre 2025.

## SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

### RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

### DERECHOS RESERVADOS<sup>©</sup>

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.



# Agradecimientos

En primera instancia agradezco a la institución, a la UACM por permitirme continuar una formación académica que requiere dedicación y tiempo, por brindarme la oportunidad de estar más cerca de mi objetivo. A las Dra's Myriam Mondragón y Catalina Espinoza, porque la distancia no fue obstáculo de permitirme su apoyo y sabio consejo. Mismas por las que pude progresar y llegar a mi actual tutor. Al Dr. Francisco Sevilla por recibirme externamente, sin un tema claro pero que prometía, había interés y se logró con el compromiso de ambas partes. A mis profesores del posgrado, los Doctores Damián Hernández, Jorge Camacho y Fernando Alariste. Particularmente al Dr. Jorge Fujioka del IFUNAM por su consejo que permitió progresar el avance de la presente investigación. A los lectores el Dr. Huitzilín y el Dr. Gabriel, que por sus observaciones y consejos permitieron mejorar la presentación del trabajo. A todos ellos, por el conocimiento, consejo y motivación que lograron transmitir. Al ahora SECIHTI, por el apoyo económico brindado para poder realizar y concluir el posgrado de manera óptima.

A mi familia, que su apoyo y motivación se mantienen más allá del deber. A las amistades que han perdurado por la calidad y no la cantidad. A todo aquel que directa o indirectamente ha estado, gracias.

# Resumen

Muchos estudios en fenómenos de transporte se han enfocado en el análisis de propagación, descritos por la ecuación de onda. Teniendo a la ecuación de onda fraccionaria en el tiempo englobando los fenómenos descritos por las ecuaciones de orden entero “extremas” (en cuanto al valor del orden de la derivada), ecuación de difusión y de onda. El hecho de englobar fenómenos en un solo operador fraccionario da pie a poder estudiar distintos sistemas. La ecuación de Klein-Gordon es similar a la ecuación de onda, salvo un término de masa. Lo que permite introducir una derivada fraccionaria en el tiempo y estudiar el comportamiento resultante.

Se hallaron resultados mediante Fourier-Laplace, tales como soluciones analíticas, aproximaciones y resultados numéricos, relación de dispersión y el desplazamiento cuadrático medio; de orden entero y fraccionario. El caso conocido con la ecuación de onda se recupera de estos resultados al tomar límite de masa cero. Al contrario del caso de la ecuación de onda fraccionaria, no se mantienen las propiedades de disipación junto con propagación, únicamente se halló disipación a tiempos cortos, para posteriormente haber propagación confinada. Además se estableció la emergencia de un régimen de dispersión anómala en el sector fraccionario.

El cambio por orden fraccionario en la parte temporal dista de representar difusión, siendo el término masivo el encargado de tal diferencia. Se considera viable agregar directamente otro término fraccionario para considerar disipación directamente y ver como lo modela. Así como permitir establecer una región positiva donde las funciones se puedan seguir considerando funciones de distribución de probabilidad.

## Abstract

Many studies on transport phenomena have focused on propagation analysis, described by the wave equation. The time-fractional wave equation encompasses the phenomena described by the “extreme” integer-order equations (in terms of the order of the derivative), the diffusion equation, and the wave equation. The fact that these phenomena are encompassed within a single fractional operator allows for the study of different systems. The Klein-Gordon equation is similar to the wave equation, except for a mass term. This allows for the introduction of a fractional time derivative and the study of the resulting behavior.

Results were found using Fourier-Laplace, such as analytical solutions, approximations and numerical results, the dispersion relation, and the mean square displacement; both integer and fractional order. The familiar case with the wave equation is recovered from these results by taking the mass limit as zero. Unlike the case of the fractional wave equation, the properties of dissipation are not maintained alongside propagation; dissipation was only found at short times, followed by confined propagation. Furthermore, the emergence of an anomalous dispersion regime was established in the fractional sector.

The change in fractional order in the temporal portion is far from representing diffusion, and the mass term is responsible for this difference. It is considered feasible to directly add another fractional term to directly consider dissipation and see how it models it. This also allows for the establishment of a positive region where the functions can still be considered probability distribution functions.

# Índice de figuras

2.1. Ejemplo de comportamiento para la función Mittag-Leffler para argumento con potencias enteras y fraccionarias. El caso $\alpha = 1$ recupera exponencial positiva y negativa respectivamente. . . . .	13
2.2. Comportamiento de la función $G_{\alpha, \alpha-1, 1/2}[a, t]$ para el parámetro $\alpha \in [1, 2]$ y fijando $a = -1$ (superior izquierda), $a = -5$ (superior derecha), $a = 1$ (inferior izquierda), $a = 5$ (inferior derecha). . . . .	14
3.1. Solución de d'Alembert (3.3) para diferentes tiempos y considerando unidades naturales para $c = \hbar = 1$ . Cabe mencionar que el comportamiento mostrado es una ejemplificación, ya que la delta de Dirac es una función de distribución, por lo que solo tiene sentido al ser evaluada. Es meramente con el propósito de ilustrar como se da la propagación en este caso. . . . .	32
3.2. Comportamiento de solución a Klein-Gordon de orden entero (3.7), considerando unidades naturales para $c = \hbar = 1$ , $m = 1$ (izquierda) y $m = 5$ (derecha). . . . .	33
3.3. Comportamiento de la parte real de las soluciones a la ecuación de Dirac (3.10) y (3.11), considerando unidades naturales para $c = \hbar = 1$ . Parte superior para $\psi_1$ con $m = 1$ (izquierda) y $m = 5$ (derecha). Parte inferior $\psi_2$ con $m = 0.1$ (izquierda) y $m = 1$ (derecha). . . . .	36
3.4. Comportamiento a la solución de Klein-Gordon con disipación (3.14), considerando unidades naturales para $c = \hbar = 1$ , con $\alpha = 5$ y $\chi = 1$ (superior izquierda), $\alpha = 1$ y $\chi = 5$ (superior derecha). $\alpha = 10$ y $\chi = 1$ (inferior izquierda), $\alpha = 1$ y $\chi = 10$ (inferior derecha). . . . .	38

- 3.5. Comportamiento de la solución de la ecuación del telegrafista (3.15) a diferentes tiempos, considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$  y  $\alpha = 0.5$  (superior izquierda),  $\alpha = 1$  (superior derecha),  $\alpha = 5$  (inferior izquierda) y  $\alpha = 25$  (inferior derecha). . . . . 39
- 3.6. Comportamiento de relación de Dispersión de Klein-Gordon de orden entero (3.20) para distintos valores de la masa. Considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 40
- 3.7. Comportamiento de la velocidad de fase (3.21) y grupo (3.22) de la relación de Dispersión de Klein-Gordon de orden entero, para distintos valores de  $m$  y considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 41
- 3.8. Comportamiento de relación de dispersión para Klein-Gordon con disipación (3.23), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . En línea continua se representa parte real, mientras que línea punteada para parte imaginaria. Se fija la masa y varía el término de disipación ( $\alpha$ ).  $m = 1$  (superior),  $m = 5$  (inferior). 42
- 3.9. Comportamiento de relación de dispersión para Klein-Gordon con disipación (3.23), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Se fija la masa y varía el término de disipación ( $\alpha$ ).  $m = 10$  (izquierda),  $m = 15$  (derecha). . . . . 43
- 3.10. Comportamiento de velocidades de fase (3.24) y de grupo (3.25) para la ecuación de Klein-Gordon con disipación. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Se dan distintos valores a la masa al variar el término de disipación. Velocidad de fase con  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha) y  $m = 10$  (central izquierda), velocidad de grupo con  $m = 1$  (central derecha),  $m = 5$  (inferior izquierda) y  $m = 10$  (inferior derecha). . . . . 44
- 3.11. Desplazamiento cuadrático medio de ecuaciones de orden entero, se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Difusión 3.26 y ecuación de onda (3.27) (izquierda), Klein-Gordon (3.28) y Dirac (3.29) parte real, el comportamiento oscilatorio, se indica la cota lineal correspondiente con las rectas (derecha). . . 45

4.1. Comportamiento de la solución a la ecuación de onda con derivada fraccionaria en la parte temporal (4.6). Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$  y  $t = 1$ , mientras se varía el orden de la derivada. . . . . 50

4.2. Comportamiento de la solución a la ecuación de onda fraccionaria (4.6) a distintos tiempos considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ ,  $t = 5$  (superior izquierda),  $t = 10$  (superior derecha),  $t = 25$  (inferior izquierda) y  $t = 50$  (inferior derecha). . . . . 50

4.3. Desplazamiento de los máximos en la solución a la ecuación de onda fraccionaria (4.6) para distintos órdenes de derivada (izquierda), con su respectiva pendiente (derecha). . . . . 51

4.4. Comportamiento de solución numérica a Klein-Gordon fraccionario, aplicado a Laplace (4.10). Se fija  $t = 1$  y varía la masa,  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  (inferior izquierda) y  $m = 25$  (inferior izquierda) y consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 53

4.5. Comportamiento de solución numérica a Klein-Gordon fraccionario, aplicado a Laplace (4.10). Se fija  $t = 5$  y varía la masa,  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  (inferior izquierda) y  $m = 25$  (inferior izquierda), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 54

4.6. Comportamiento de solución numérica a Klein-Gordon fraccionario, aplicado a Laplace (4.10). Se fija  $t = 10$  y varía la masa,  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  (inferior izquierda) y  $m = 25$  (inferior izquierda), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 55

4.7. Comportamiento de solución a la ecuación fraccionaria de Klein-Gordon mediante transformada de Fourier numérica. Se consideran unidades naturales y se fija  $m = 1$  para variar el tiempo.  $t = 1$  (superior izquierda),  $t = 5$  (superior derecha),  $t = 10$  (inferior izquierda) y  $t = 25$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 56

- 4.8. Comportamiento de solución numérica a la ecuación fraccionaria de Klein-Gordon. Se consideran unidades naturales y se varía el orden de la derivada ( $1 < \mu < 2$ ).  $m = 5$  y  $t = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  y  $t = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  y  $t = 1$  (inferior izquierda),  $m = 25$  y  $t = 1$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 57
- 4.9. Comportamiento de aproximación de Klein-Gordon fraccionario a tiempos grandes (4.12), obtenido con los Teoremas Tauberianos. Se consideran unidades naturales.  $m = 1$  y  $t = 25$  (superior izquierda),  $m = 1$  y  $t = 100$  (superior derecha),  $m = 5$  y  $t = 25$  (inferior izquierda) y  $t = 100$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 58
- 4.10. Comportamiento de solución aproximativa para Klein-Gordon fraccionario a tiempos cortos (4.14). Se consideran unidades naturales.  $t = 0.01$  y  $m = 1$  (superior izquierda),  $t = 0.01$  y  $m = 5$  (superior derecha),  $t = 0.1$  y  $m = 1$  (inferior izquierda),  $t = 0.1$  y  $m = 1$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 60
- 4.11. Comportamiento de solución aproximativa para Klein-Gordon fraccionario a tiempos largos (4.15). Se consideran unidades naturales.  $t = 10$  y  $m = 1$  (superior izquierda),  $t = 25$  y  $m = 1$  (superior derecha),  $t = 50$  y  $m = 1$  (inferior izquierda),  $t = 100$  y  $m = 1$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 61
- 4.12. Comportamiento de aproximaciones realizadas en el espacio de Fourier a tiempos largos ((4.20) parte superior) y cortos ((4.21) parte inferior) de la ecuación fraccionaria de Dirac. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 64
- 4.13. Parte Real e Imaginaria de la Relación de Dispersión fraccionaria (4.24), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ ,  $m = 5$ ,  $t = 1$  y distintos valores de  $\mu$ . . . . . 65

4.14. Comportamiento de la parte real (4.25) e imaginaria (4.26) de la relación de dispersión para Klein-Gordon fraccionaria. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Parte real columna izquierda con  $m = 0$  (superior),  $m = 1$  (central) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior). Parte imaginaria columna derecha con  $m = 0$  (superior),  $m = 1$  (central) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior). . . . . 68

4.15. Comportamiento de la velocidad de fase fraccionaria para Klein-Gordon (4.27). Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior izquierda),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha). 69

4.16. Comportamiento de la velocidad de grupo fraccionaria para Klein-Gordon (4.28). Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior izquierda),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha). 70

4.17. Regiones donde se tiene dispersión anómala (parte con color) en la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionaria en el tiempo, según el valor del orden de la derivada temporal y la relación entre  $\kappa$  con  $m$  (4.29). . . . . 71

4.18. Comportamiento de la velocidad de fase de Klein-Gordon fraccionario (4.34), obtenida mediante el índice de refracción complejo. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior derecha),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior izquierda),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha). . . . . 72

4.19. Comportamiento de la coeficiente de atenuación obtenido de Klein-Gordon fraccionario (4.35), mediante el índice de refracción complejo. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior derecha),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior izquierda),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha). . . . . 73

4.20. Comportamiento de la velocidad de grupo de Klein-Gordon fraccionario (4.36), obtenida mediante el índice de refracción complejo. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior derecha),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior izquierda),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha). . . . . 74

4.21. Regiones donde se tiene dispersión anómala (región con color) en la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionaria en el tiempo, según el valor de la derivada temporal y la relación entre  $\omega$  con  $m$  (4.37). . . . . 76

- 4.22. Comportamiento de Desplazamiento Cuadrático Medio para Klein-Gordon fraccionario (4.39).  $m = 0$  (recupera ecuación de onda fraccionaria (4.38), superior izquierda),  $m = 0.3$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 78
- 4.23. Comportamiento de Desplazamiento Cuadrático Medio de Dirac fraccionario (parte real) (4.40).  $m = 0.3$  (superior izquierda),  $m = 1$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior central), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . . . . . 79

# Índice de cuadros

- A.1. Transformadas de Fourier y Laplace de algunas funciones a emplear en el desarrollo de los resultados. Estos resultados son compilación de diversas fuentes donde se pueden consultar [1–4]. Se considera  $\{a, A, k, \beta, \alpha\}$  reales positivos. . 85

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. La derivada fraccionaria como descriptor de complejidad . . . . .	2
1.2. Teorías de campo y la derivada fraccionaria . . . . .	4
1.3. Objetivos de la Investigación . . . . .	6
1.4. Estructura de la presente tesis . . . . .	6
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Transformada Laplace y Fourier . . . . .	10
2.2. Funciones Especiales . . . . .	11
2.2.1. Función de Mittag-Leffler . . . . .	11
2.2.2. Función H de Fox . . . . .	12
2.2.3. Función G . . . . .	13
2.2.4. Funciones de Bernstein . . . . .	14
2.3. Cálculo Fraccionario . . . . .	16
2.3.1. Derivada Fraccionaria Riemann-Liouville . . . . .	17
2.3.2. Derivada Fraccionaria de Caputo . . . . .	18
2.3.3. Aplicaciones . . . . .	18
2.4. Relación de Dispersión . . . . .	20
2.5. Desplazamiento Cuadrático Medio . . . . .	22
2.6. Dinámica fraccionaria . . . . .	24
2.7. Teorías de campo . . . . .	26
2.7.1. Ecuación Relativista de Onda . . . . .	27
2.7.2. Ecuación Escalar Relativista de Klein-Gordon . . . . .	28

2.7.3. Ecuación Relativista de Dirac . . . . .	28
<b>3. Ecuaciones de Tipo Onda con Derivada Temporal de Orden Entero</b>	<b>30</b>
3.1. Ecuación Relativista de Onda . . . . .	31
3.2. Ecuación Escalar Relativista de Klein-Gordon . . . . .	31
3.3. Ecuación Relativista de Dirac . . . . .	34
3.4. Ecuación Escalar Relativista de Klein-Gordon con Disipación . . . . .	36
3.5. Relaciones de Dispersión . . . . .	39
3.6. Desplazamiento Cuadrático Medio . . . . .	42
<b>4. Ecuaciones de Tipo Onda con Derivada Temporal Fraccionaria</b>	<b>46</b>
4.1. Ecuación de onda con derivada temporal fraccionaria . . . . .	47
4.2. Ecuación Escalar de Klein-Gordon con Derivada Temporal Fraccionaria . . . . .	51
4.3. Ecuación de Dirac . . . . .	61
4.4. Relación de Dispersión de Orden Fraccionario . . . . .	65
4.5. Desplazamiento Cuadrático Medio Fraccionario . . . . .	76
<b>5. Conclusiones</b>	<b>82</b>
<b>A. Transformada de Laplace y Fourier</b>	<b>84</b>
<b>B. Deducción de Resultados</b>	<b>86</b>
<b>C. Función Mittag-Leffler</b>	<b>109</b>
<b>D. Función H de Fox</b>	<b>111</b>
<b>E. Función de Wright</b>	<b>112</b>
<b>F. Difusión Anómala</b>	<b>114</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de la propagación de partículas u ondas es de amplio interés en diversas áreas de las ciencias, desde la física [5,6] hasta la ecología [7,8] y la biología [9,10]. En diversas teorías es de sumo interés la propagación de los correspondientes elementos y su efecto o interacción con su entorno, como sucede en la propagación de perturbaciones<sup>1</sup> de un medio o la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío. Por ejemplo, considere el caso de la propagación de ondas sonoras que corresponden a la propagación de variaciones de presión en el aire, u ondas de luz que corresponden a una parte del espectro electromagnético, etcétera.

Un papel relevante en la descripción de la propagación libre, es decir, sin la influencia de otros elementos, lo tiene la ecuación relativista de onda, que en su versión unidimensional es  $[\partial_t^2 - v^2 \partial_x^2] \phi(t, x) = 0$ , donde  $v$  es la velocidad de propagación y  $\phi(t, x)$  es un campo escalar. La perturbación no cambia de tamaño ni de forma conforme se propaga, y esto implica que tal propagación se lleva a cabo sin disipación de energía [11].

Por otro lado, la propagación de una partícula micro métrica en un fluido en equilibrio térmico puede entenderse de manera simple a través de la solución de la ecuación de difusión  $[\partial_t - D \partial_x^2] \phi(t, x) = 0$ , donde  $D$  es el coeficiente de difusión y especifica la cantidad de sustancia que se difunde a través de un área por unidad de tiempo.

La ecuación de onda está dada por una ecuación diferencial parcial lineal, cuya solución en una dimensión fue estudiada por d'Alembert. Análisis posteriores a esta ecuación incluso considerando más dimensiones, así como aplicados a fenómenos que consideran fricción, disi-

---

<sup>1</sup>Variación de una magnitud física respecto a un determinado valor que se considera estacionario o de equilibrio.

pación y/o masa, han sido estudiados y su función de Green<sup>2</sup> es conocida. El tratamiento al caso específico que considera disipación y masa, otorga un comportamiento que depende de la relación entre los respectivos términos. Este caso engloba no distorsión y no dispersión, dispersión normal y dispersión anómala [4].

Las propiedades de transporte de los elementos de las ecuaciones antes mencionadas, tienen un cambio drástico en sectores determinados para los valores de los parámetros involucrados. En el caso único de disipación hay un término dedicado (derivada temporal de primer orden), mientras que en el caso de difusión, se obtiene en la diferencia de órdenes de la derivada temporal (segundo y primer orden). En muchas situaciones la propagación presenta características peculiares que demandan una adecuación de los marcos teóricos simples [12].

El caso de mayor éxito y que cuenta con diversas aproximaciones es el de difusión, donde desde la perspectiva de la teoría de caminatas aleatorias en tiempo continuo es posible describir la difusión anómala, caracterizada por un desplazamiento cuadrático medio tipo potencia, y no lineal como el caso clásico de orden entero [13]. Este nuevo comportamiento tipo potencia generaliza el clásico y da una mayor descripción en los tipos de difusión. Si la potencia es de orden menor al lineal se da el caso de subdifusión, mientras que para mayor se tiene superdifusión. Este comportamiento se engloba ante un cambio en el orden de la derivada temporal, de entero a fraccionario [14].

## **1.1. La derivada fraccionaria como descriptor de complejidad**

Desde los inicios del cálculo por parte de Leibniz, hay evidencia de la interrogante respecto a la comprensión de una derivada de orden no entero [15]. Gracias al desarrollo que proporcionan las matemáticas a la física, es de interés hallar una interpretación física de este tipo de operadores. Desde finales del siglo pasado se ha dado un desarrollo y uso de la derivada fraccionaria en sistemas físicos, aunque no siempre siendo clara la interpretación de este operador en los respectivos sistemas [16, 17].

En el desarrollo y empleo de la derivada fraccionaria ha surgido una implicación de interés.

---

<sup>2</sup>Solución de un operador diferencial que por condición inicial toma una delta de Dirac en el origen.

Ante el cambio de derivadas de orden entero por fraccionario, se han obtenido resultados que ajustan mejor. Algunos casos son la visco elasticidad [18], difusión, crecimiento de bacterias (*Daphnias*) en laboratorio y estudio de funciones fractales [19].

Siendo el caso de sistemas dinámicos, el cambio o introducción de una derivada de orden fraccionario resulta interesante. En la solución analítica de estos nuevos sistemas se ha observado tiene el mismo efecto que una fuerza de amortiguación lineal que provoca una ley de potencia asintótica, en lugar de una aproximación exponencial hacia el equilibrio [20]. De manera más ambiciosa, West propone a la dinámica fraccionaria como una fuente de complejidad [19].

Si bien en sistemas dinámicos de procesos difusivos con derivadas de orden fraccionario se tiene un cambio claro, pasando a tener funciones de distribución de probabilidad en tiempos de espera, de orden lineal a potencia. Donde el orden lineal viene asegurado por el teorema del límite central. Se ha buscado generalizar este comportamiento con el llamado teorema del límite central estocástico. Este teorema permite interpretar las trayectorias fraccionarias como promedios sobre infinitas realizaciones estocásticas. Ante esta interpretación, los respectivos autores señalan que, la naturaleza disipativa de las trayectorias fraccionarias debe interpretarse como una forma de proceso de decorrelación de fase, más que como un proceso con fricción [21].

Las derivadas de orden fraccionario proporcionan una descripción compacta de las correlaciones temporales de largo alcance y la memoria en series de tiempo. Es posible explicar las memorias de largo alcance introduciendo una derivada de orden superior o rezagos de orden superior en un modelo auto regresivo. Sin embargo, esto implica muchos parámetros. El enfoque de la derivada fraccionaria se define únicamente en términos de un único parámetro: el orden fraccionario de la derivación. Esto convierte a este enfoque en un candidato interesante para ajustar series temporales con correlaciones de largo alcance [22]. Las derivadas fraccionarias también han surgido más recientemente en física como generadoras de evoluciones temporales de sistemas dinámicos y como herramienta para clasificar las transiciones de fase en termodinámica mediante la generalización del esquema de clasificación de Ehrenfest [23].

En estudios que contrastan los efectos del tipo de kernel en la derivada, se ha visto y distinguido el efecto en las correlaciones. La convolución de la primera derivada con una función exponencial genera una memoria específica en la que los estados pasados influyen exponencial-

mente en el comportamiento futuro. Esto conlleva una rápida disminución de la influencia con el tiempo, lo que se conoce como memoria desvanecida. Por el contrario, la convolución de una primera derivada con un kernel de ley de potencia genera correlaciones de largo alcance, donde el impacto de los eventos pasados se reduce más lentamente, lo que caracteriza los efectos persistentes que se observan a menudo en muchos sistemas complejos. La convolución del kernel de Mittag-Leffler con la primera derivada ofrece un marco versátil que replica una combinación de comportamientos tanto exponenciales como de ley de potencia [24]. El caso específico que se emplea en nuestro caso son de tipo potencia, teniendo así correlaciones de largo alcance. Este tipo de efectos se ha buscado describir en plasmas. Mientras que las derivadas tradicionales seleccionan un único punto con el que se comparan otros puntos, las derivadas fraccionarias dan la posibilidad de describir interacciones no locales y comportamientos históricos que se registran con frecuencia en sistemas de plasma [25].

## 1.2. Teorías de campo y la derivada fraccionaria

Entre las teorías más sobresalientes de la física moderna se encuentra la *Teoría Cuántica de Campos* (TCC), siendo el modelo estándar<sup>3</sup> la culminación de diversas herramientas (rompimiento espontáneo de la simetría, renormalización) y teorías (electrodébil, escalar, etc.). Siendo este modelo de las mejores descripciones de la naturaleza [27]. La TCC se puede tornar muy complicada al momento de calcular secciones eficaces, tiene muchos elementos involucrados acorde a los tipos de interacción considerados. En aspectos generales y simplistas, describe el comportamiento de bosones y fermiones, con términos que describen su dinámica, hasta términos de acoplamiento e interacción entre estos elementos. Lo que se describe mediante términos no lineales y conlleva a calcular más diagramas de Feynman para poder dar una sección efectiva, de un solo proceso (decaimiento, dispersión) [28]. El modelo estándar es una teoría efectiva, es decir, una aproximación a bajas energías de una teoría “mayor”, lo que permite proponer diversos modelos, entre ellos supersimetría, cuerdas, de gran unificación, etc. [29]. Cada propuesta está por encima del nivel energético del modelo estándar y es lo suficiente alta, tal que al momento el Gran Colisionador de Hadrones va en su tercer mayor modificación y, desde 2022

---

<sup>3</sup>Teoría que clasifica todas las partículas fundamentales en función de sus propiedades e introduce reglas que determinan las interacciones que pueden ocurrir entre ellas [26].

inició su tercer corrida para alcanzar tales niveles y otorgar resultados que ayuden a precisar las mismas teorías [30].

Si bien la mayoría de físicos en área de partículas apuesta por una teoría mayor [31, 32], las bases de la TCC deja elementos con la capacidad para tener fenómenos propios de complejidad. Dado el comportamiento de las partículas se rige por sus respectivas ecuaciones de movimiento y términos de interacción, la no linealidad y la introducción de la derivada fraccionaria pueden efectuar dicha emergencia.

Actualmente el cálculo fraccionario en TCC sugiere una manifestación de dinámica compleja. Así apunta Goldfain, como herramienta para estudiar los fenómenos complejos que emerjan más allá del modelo estándar [33, 34]. Incluso desde sus fundamentos, realizando una cuantización estocástica, permitiendo introducir operadores fraccionarios [35]. Por su parte Herrmann ha estudiado y hallado viable el uso de derivada fraccionario ante la invariancia de norma, estableciendo la electrodinámica cuántica fraccionaria como candidata para estudiar partículas y campos de norma que obedecen una simetría inherente  $SU(n)$  [36].

Si bien promete una descripción interesante, así como cubrir aspectos básicos y necesarios (invariancia de norma) en la teoría de campo, en muchos casos no se justifica el uso de la derivada fraccionaria, simplemente se hace el cambio en busca de obtener algo nuevo o más “completo”. Una forma viable de introducir la derivada fraccionaria es mediante los kernel de memoria. En este tipo de teorías se consideran regímenes de energía elevados, por encima de los MeV, por lo que las interacciones presentes tienen la posibilidad de ser libres de escala; ser afectadas por interacciones anteriores, que tengan memoria. Este tipo de procesos son propios de la ecuación generalizada de Langevin, donde el término de fricción considera efectos de memoria [37].

Ante los mencionados casos donde ha resultado beneficioso el uso de derivada fraccionaria, así como otorgado aspectos propios de complejidad. La investigación se enfoca en determinar y caracterizar los posibles efectos emergentes del cambio a derivada fraccionaria en ecuaciones de onda relativistas.

### 1.3. Objetivos de la Investigación

Dada la motivación anterior el objetivo general de esta tesis es analizar el comportamiento y posibles efectos emergentes al pasar a un orden fraccionario en la derivada temporal en ecuaciones de onda relativistas. Siendo los casos extremos abarcados en el orden correspondiente, difusión y propagación. La obtención de soluciones analíticas a problemas de función de Green, sirven como identificación directa de la evolución del sistema. Asimismo caracterizar el sistema de estudio con cantidades que otorguen información relevante en su comportamiento, así como enfatizar su utilidad para comparar con los casos límite correspondientes al orden entero, 1 y 2, de la derivada fraccionaria.

Para este propósito se contemplan los siguientes objetivos particulares.

1. Comparar la evolución temporal de los casos fraccionarios con los extremos de orden entero. Teniendo en cuenta que son conocidos los fenómenos correspondientes de orden entero. Difusión para orden 1 y propagación de un pulso constante para orden 2.
2. Establecer en cada caso su relación de dispersión y contrastar el tipo de dispersión presente en el caso fraccionario con el de orden entero.
3. Determinar el desplazamiento cuadrático medio para cada sistema. Complementar con la solución analítica para comparar los casos fraccionarios, que tanto se asemejan o alejan de los casos de orden entero.

### 1.4. Estructura de la presente tesis

Este proyecto parte con un repaso a diversas herramientas matemáticas que serán empleadas en la resolución analítica del problema planteado. Primordialmente las transformadas de Laplace y Fourier las cuales tendrán un papel relevante en el análisis en este trabajo, así como algunas funciones especiales de interés, como son: la función  $H$  de Fox, las funciones Mittag-Leffler y la función  $G$ . Éstas funciones son comunes en la resolución de problemas que involucran derivadas de orden fraccionario. Además de dar una breve revisión a lo que será parte principal de la discusión: la derivada fraccionaria, la relación de dispersión y el desplazamiento cuadrático

medio. En el tercer capítulo se resuelven los sistemas de estudio con derivadas de orden entero. Estudiando el comportamiento de sus soluciones, así como de sus relaciones de dispersión y desplazamiento cuadrático medio. Para el cuarto capítulo se pasa a orden fraccionario la derivada temporal. Estudiando las propiedades del capítulo anterior, ahora de orden fraccionario. El quinto capítulo se dedica a las conclusiones del trabajo, aciertos y similitudes con trabajos del tema, así como propuestas para trabajo futuro.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

El desarrollo del presente trabajo se basa principalmente en la solución y análisis físico de ecuaciones diferenciales parciales de orden entero y fraccionario, que describen la propagación en el tiempo y en el espacio de campos empleando el método Fourier-Laplace. Al transformar la ecuación de interés en variables de Fourier y Laplace que reemplazan las variables espacial y temporal respectivamente, el problema se vuelve meramente algebraico en dicho espacio. Se busca regresar a las coordenadas originales ahora aplicando las respectivas transformaciones inversas. Ya sea para obtener su solución analítica o realizar las operaciones correspondiente para hallar el desplazamiento cuadrático medio.

La resolución algebraica aparece mediante funciones específicas que pueden ser ajenas incluso a conocedores del tema, que no hayan manejado orden fraccionario. Entre estas la propia definición de derivada fraccionaria, la función Mittag-Leffler, la función H de Fox, la función  $G$  y la función de Wright. En este capítulo se da una definición de cada elemento a emplear, así como algunos resultados, mayor detalle se presenta en los respectivos apéndices.

## 2.1. Transformada Laplace y Fourier

Las transformadas de Laplace y Fourier, junto sus respectivas transformadas inversas se definen como

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx} dx \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{F}(k)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k)e^{2\pi ikx} dk \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{F}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \tilde{F}(s)e^{st} ds. \quad (2.4)$$

Por la definición de estas transformadas en el rango de integración se aprecia que Fourier se asocia a parte espacial y Laplace a parte temporal. En cuanto a definición la transformada de Laplace también permite la integración en todo el espacio (transformada bilateral), por el tipo de proceso físico a describir, solo se considera tiempo positivo, tomando así la definición mostrada.

De las definiciones de las transformadas inversas, para Laplace no queda tan claro se pueda calcular para toda función o por lo menos que resulte sencillo, sin embargo, en su mayoría se emplearán resultados ya conocidos que se enlistan en el apéndice A. Así como resultados de otras funciones a continuación nombradas y con resultados específicos en sus correspondientes apéndices.

Como se verá más adelante en este capítulo, la definición de la derivada de Caputo está dada como una convolución. Razón por la que se puede pensar se complica emplear la transformada de Laplace. Sin embargo, por propiedades de la transformada de Laplace, esta resulta en el producto de los términos involucrados en la convolución. En este caso un polinomio y el término de derivada de orden entero. Por lo que no se necesita algún resultado nuevo, más si es indispensable recordar la transformada de Laplace de una derivada, así como notar la aparición de las condiciones iniciales.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0), \quad (2.5)$$

donde  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Además con la derivada de Caputo se emplean directamente las condiciones iniciales, aspecto de suma importancia físicamente.

## 2.2. Funciones Especiales

La resolución de sistemas que involucran operadores fraccionarios requieren de funciones enfocadas en este tipo de estudio. Se presenta brevemente las definiciones de estas funciones y algún resultado primordial. Un listado dedicado de resultados se dedican en posteriores y respectivos apéndices.

### 2.2.1. Función de Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler  $E(z)$  se define como una serie de potencias que puede ser definida hasta con 4 parámetros

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma, \kappa}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}, \quad (2.6)$$

donde  $\{z, \alpha, \beta, \gamma, \kappa\} \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}[\alpha] > \max\{0, \operatorname{Re}[\kappa] - 1\}$ ,  $\operatorname{Re}[\kappa] > 0$  y  $(\gamma)_k = \Gamma(\gamma + k)/\Gamma(\gamma)$  es el símbolo de Pochhammer. Es el matemático Gösta Mittag-Leffler quien originalmente en 1903 introduce esta función de un índice, en relación con su método de suma de series divergente [38].

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.7)$$

esta es la función Mittag-Leffler de un parámetro, en donde  $z \in \mathbb{R}$  y  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ . Se puede apreciar que si  $\alpha = 1$  se tiene la expansión en serie de la función exponencial y razón por la que se suele conocer como una generalización de la misma.

La función Mittag-Leffler surge de forma natural en la solución de ecuaciones integrales de orden fraccionario o ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Especialmente en las investigaciones de la generalización fraccionaria de la ecuación cinética, caminatas aleatorias, los vuelos de Lévy, el transporte superdifusivo y en el estudio de sistemas complejos [39]. Una forma especial de esta función de un parámetro que será empleada más adelante y es conocida

como la función  $\alpha$ -exponencial se da como

$$e_\alpha(t; \lambda) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha), \quad (2.8)$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ , cuya transformada de Laplace está dada por

$$\mathcal{L}\{e_\alpha(t; \mp \lambda)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp \lambda}. \quad (2.9)$$

En la Figura 2.1 se puede ver el comportamiento de una función Mittag-Leffler de dos parámetros, que reduce a un parámetro al ser el segundo parámetro 1. Se aprecia el comportamiento para  $E_{\alpha,1}(\pm x^\alpha)$ , donde el caso  $\alpha = 1$  retoma respectivamente  $\exp(\pm x)$ .

El comportamiento asintótico de esta función es a destacar. Siendo una función cotidiana en la resolución de ecuaciones fraccionarias, así como la dificultad de hallar soluciones analíticas, se opta por estudiar en base a esta expansión. Para la función Mittag-Leffler de dos parámetros se tiene la expansión asintótica [40]

$$E_{\alpha,\beta}(z) \simeq - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)}, \quad z > 1. \quad (2.10)$$

Una demostración rigurosa es presentada por Podlubny [15]. En el apéndice B se enlistan las funciones Mittag-Leffler para más de un parámetro, así como sus respectivas transformadas de Laplace.

### 2.2.2. Función H de Fox

La resolución de problemas que involucran operadores fraccionarios tienen resultados pocas veces conocidos para ajenos a estos temas, muchas veces requiriendo de funciones especiales dedicadas al problema específico. Las funciones de Mittag-Leffler anteriormente mencionadas son las más frecuentes y simples. No obstante, para la solución de la ecuación de onda fraccionaria es necesaria la función  $H$  de Fox, la cual está definida por una transformada de Mellin-Barnes [41]

$$K(s) = \int_0^\infty k(x)x^{s-1}dx. \quad (2.11)$$

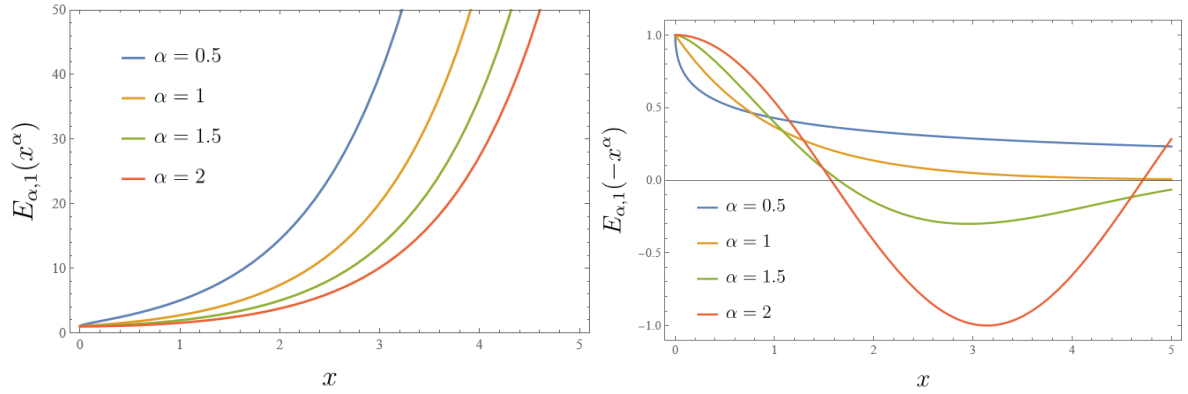


Figura 2.1: Ejemplo de comportamiento para la función Mittag-Leffler para argumento con potencias enteras y fraccionarias. El caso  $\alpha = 1$  recupera exponencial positiva y negativa respectivamente.

Con esta se define la función  $H$  de Fox como

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \theta(s) z^s ds, \quad (2.12)$$

donde

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - A_j s)},$$

$0 \leq n \leq p$ ,  $1 \leq m \leq q$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ ,  $A_i, B_j \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$ . Algunas de las propiedades de esta función que serán de utilidad se presentan en el apéndice C. La parte gráfica de esta función a lo largo del presente trabajo se dio por medio del programa Mathematica. Misma donde desde la versión 12.3 ha sido implementada<sup>1</sup>.

### 2.2.3. Función G

La función G es definida por Lorenzo y Hartley en un estudio enfocado a funciones en el estudio del cálculo fraccionario [42]. Esta función se define como

$$G_{q,v,r}[a, t] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-r)(-a)^j t^{(r+j)q-v-1}}{\Gamma(1+j)\Gamma(1-j-r)\Gamma((r+j)q-v)}, \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>Wolfram Research (2021), FoxH, Wolfram Language function, <https://reference.wolfram.com/language/ref/FoxH.html> (updated 2021).

donde los parámetros deben satisfacer  $Re(qr - \nu) > 0$ ,  $Re(s) > 0$  y  $|\frac{a}{s^q}| < 1$ . Su transformada de Laplace tiene la forma simple

$$\mathcal{L}\{G_{q,v,r}[a,t]\} = \frac{s^v}{(s^q - a)^r}, \quad (2.14)$$

definida para  $Re(qr - \nu) > 0$ ,  $Re(s) > 0$ ,  $|\frac{a}{s^q}| > 0$ . En la Figura 2.2 se puede apreciar el comportamiento de la función  $G$  para algunos parámetros dentro del rango del presente estudio. Destacar el comportamiento de decaimiento con posibles oscilaciones, así como la aparente divergencia; característica de las soluciones de orden entero en este estudio, como se verá más adelante.

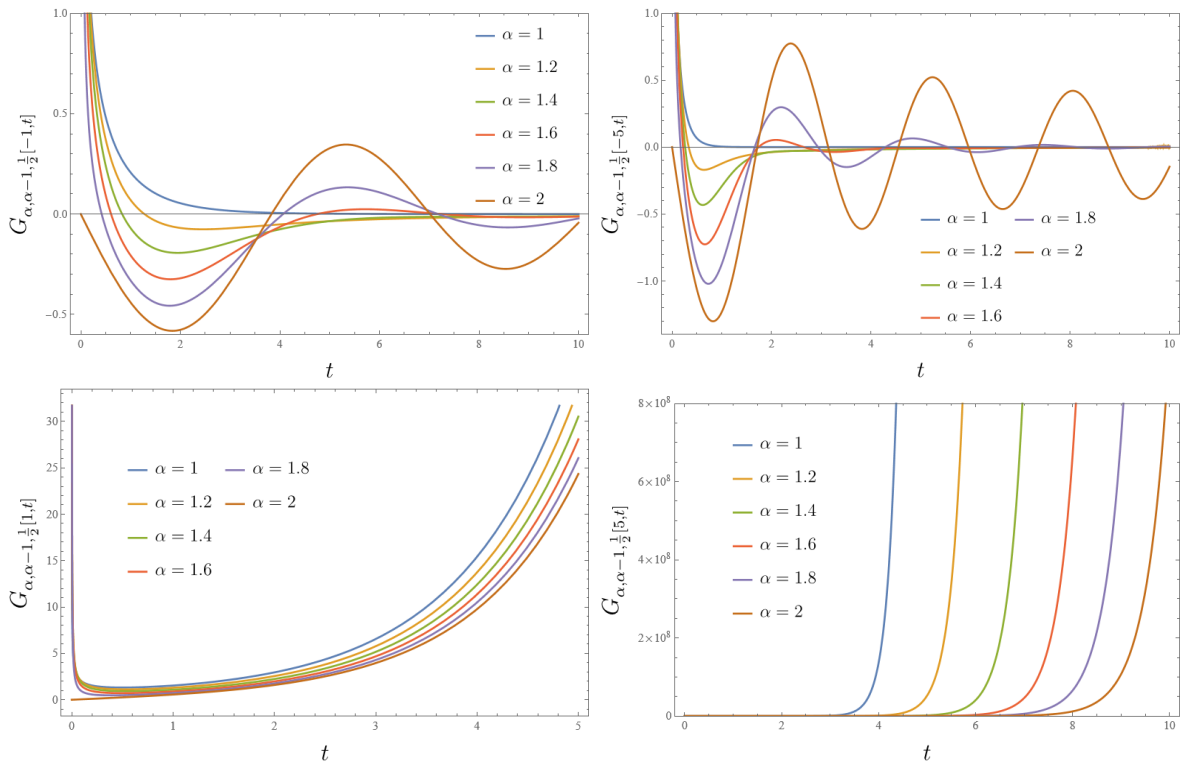


Figura 2.2: Comportamiento de la función  $G_{\alpha, \alpha-1, 1/2}[a, t]$  para el parámetro  $\alpha \in [1, 2]$  y fijando  $a = -1$  (superior izquierda),  $a = -5$  (superior derecha),  $a = 1$  (inferior izquierda),  $a = 5$  (inferior derecha).

## 2.2.4. Funciones de Bernstein

Estas funciones ayudan a determinar las regiones donde el comportamiento de nuestras soluciones se mantienen estrictamente positivas permitiendo asegurar o no cuándo se puedan seguir

interpretando como funciones de distribución de probabilidad. A continuación se enlistan los resultados empleados [43, 44].

1. Una función  $f$  se llama función de Bernstein (FB) si  $f(s) \geq 0 \forall s \geq 0$ ,  $f$  es de clase  $C^\infty$  (es decir que es continua así como todas sus derivadas) y  $(-1)^{n-1} f^{(n)}(s) > 0$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .
2. La función de Bernstein admite la representación Lévy-Khintchine:

$$f(s) = a + bs + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-st})\mu(dt),$$

con  $a, b \geq 0$  y  $\mu$  medida en  $(0, \infty)$ , satisfaciendo  $\int_0^\infty (1 \wedge t)\mu(dt) < 1$ , donde  $\wedge$  denota el producto cuña o exterior entre los vectores involucrados.

3. Una función  $f$  es llamada función completa de Bernstein (FCB) si  $f$  es una función de Bernstein y su medida de Lévy<sup>2</sup> tiene una densidad completamente monótona  $m(t)$  con respecto a una medida de Lebesgue<sup>3</sup> tal que su representación Lévy-Khintchine se vuelve

$$f(s) = a + bs + \int_0^\infty (1 - e^{-st})m(t)dt.$$

4.  $f(s) = s^\lambda$  es función tipo Bernstein  $\iff 0 \leq \lambda \leq 1$ .
5. Si  $f(s)$  es función tipo Bernstein, entonces  $e^{-af(s)}$  ( $a > 0$ ) y  $\frac{f(s)}{s}$  son completamente monótonas.
6. Sea  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  tal que  $\alpha + \beta \leq 1$ . Entonces  $f_1^\alpha \cdot f_2^\beta \in \text{FCB} \forall f_1, f_2 \in \text{FCB}$ .
7. Teorema de Bernstein. Una función es completamente monótona si y solo si es la transformada de Laplace de una medida no negativa.

---

<sup>2</sup>Los procesos de Lévy son un tipo de proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios. La medida de Lévy describe la frecuencia e intensidad de los "saltos" de dichos procesos.

<sup>3</sup>La medida de Lebesgue es una forma de asignar "tamaño" (o "volumen") a conjuntos en espacios euclidianos, como intervalos en la recta real, regiones en el plano, etc.

## 2.3. Cálculo Fraccionario

Se le conoce como Cálculo Fraccionario la teoría de integrales y derivadas de orden arbitrario, que unifican y generalizan la derivación e integración de orden entero. Hay registro de correspondencia entre Leibniz y l'Hôpital, donde l'Hôpital cuestiona a Leibniz acerca de su nuevo resultado de derivada: *¿qué pasa cuando  $n = 1/2$ ?* [45]. Por lo que desde su creación, ha sido una pregunta de interés la posibilidad de generalizar a valores no enteros.

La notación distintiva se da por  ${}_a D_t^\alpha f(t)$ , donde el valor de  $\alpha$  especifica el orden del operador, si es positivo se tiene derivada y si es negativo una integral. Los subíndices  $a$  y  $t$  denotan los dos límites relacionados con la operación de diferenciación fraccionaria. Clásicamente se tiene la definición de derivada dada por un límite

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t+h)}{h}. \quad (2.15)$$

Por inducción se puede obtener para orden  $n$ , dado como

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n t}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \quad (2.16)$$

donde  $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$  es el binomio de Newton. Considerando  $p$  un número entero arbitrario, si se consideran valores negativos para  $p$  se tiene

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{p}{r} f(t - rh), \quad (2.17)$$

donde  $\binom{p}{r} = \frac{p(p+1)\dots(p+r+1)}{r!}$ . Si se fija un valor para  $n$ ,  $f_h^{(-p)}(t)$  tiende a cero conforme  $h \rightarrow 0$ . Para tener un límite distinto de cero, se debe suponer que  $n \rightarrow \infty$  y  $h \rightarrow 0$ . Se puede tomar  $h = (t - a)/n$ , donde  $a$  es una constante real, con lo que se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Por el teorema de Letnikov, se puede demostrar que la expresión anterior existe el límite y

se puede evaluar. Considerando el caso  $p > 0$ ,

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh). \quad (2.19)$$

Se puede demostrar que dicho límite también existe y se puede evaluar [15]. A la ecuación (2.19) se le conoce como derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. Este operador conmuta con derivadas de orden entero, así como con derivadas de orden fraccionario del mismo tipo

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t), \quad (2.20)$$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t), \quad (2.21)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $p, q \in \mathbb{R}$ . En este caso podemos notar que el caso fraccionario generaliza al entero. Sin embargo se deja la distinción ya que en algunas derivadas fraccionarias, esto no se cumple.

### 2.3.1. Derivada Fraccionaria Riemann-Liouville

La derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov está definida como un límite de diferenciación de orden fraccionario a partir de la definición usual de derivada, lo que puede resultar no muy conveniente como es con el caso de orden entero. Es decir, pocas veces se deriva *por definición*. Es útil considerar a (2.19) como un caso particular de la expresión integro-diferencial

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \left( \frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} d\tau, \quad m \leq p < m + 1. \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) es conocida como derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. La derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov se recupera de (2.22) realizando integración por partes repetidamente y diferenciando. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es más común puesto son menos las condiciones sobre la función  $f(t)$  que se aplica. Basta que exista la integrabilidad de  $f(t)$  para que exista su derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Al igual que la derivada de Grünwald-Letnikov, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville conmuta con derivadas de orden entero. Sin embargo, con derivadas de orden fraccionario solo

en el caso que son del mismo orden.

### 2.3.2. Derivada Fraccionaria de Caputo

Otra aproximación a la generalización de diferenciación e integración, es la sugerida por Caputo y la aproximación basada en funciones generalizadas (distribuciones). Esta aproximación permite la formulación de condiciones iniciales para problemas de valor inicial. La derivada fraccionaria de Caputo se define como

$${}_a^C D_t^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\mu-1} \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) d\tau, \quad n - 1 < \mu < n. \quad (2.23)$$

La principal razón de usar la derivada de Caputo, es que al trabajar en la variable de Laplace, se tendrá un producto de los elementos involucrados en la convolución. Dejando explícita la transformada de la derivada de orden entero, involucrándose así las condiciones iniciales, aspecto que físicamente es de suma importancia. De igual forma, posteriormente el límite inferior será tomado  $a \rightarrow 0$ , indicando tomar de tiempo cero en adelante.

Otra ventaja de la derivada de Caputo sobre la de Riemann-Liouville es que la derivada de Caputo de una constante, es cero como resulta clásicamente, contrario a Riemann-Liouville que es distinta de cero. Salvo el caso de procesos dinámicos estacionarios, donde se debe tomar  $a \rightarrow -\infty$  en ambos casos<sup>4</sup>.

### 2.3.3. Aplicaciones

1. Una de las primeras aplicaciones de las herramientas del cálculo fraccionario fue la descripción de la viscoelasticidad de algunos fluidos. Teniendo en cuenta que los modelos de tensión y esfuerzo de orden entero tienen dos límites claros, sólidos y fluidos. El caso de los sólidos ideales es descrito por Hooke, mientras que para fluidos se describe por

---

<sup>4</sup>De hecho en este caso se tiene la misma expresión. Otorgan la misma descripción y resultado.

Newton, dados respectivamente como

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad (2.24)$$

$$\sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.25)$$

donde  $\sigma(t)$  es la tensión,  $\varepsilon(t)$  la deformación,  $E$  la constante elástica o módulo de Young y  $\eta$  el coeficiente de viscoelasticidad. Considerando que los modelos indirectamente manejan materiales ideales, que hay materiales con características más complicadas, estos modelos no describen o captan del todo el comportamiento. Viendo que estos modelos son descritos por una derivada de orden cero para sólidos, y por una derivada de primer orden para fluidos; G. W. Scott Blair propone de manera intuitiva que un material con propiedades intermedias, puede ser descrito por una derivada fraccionaria [18]

$$\sigma(t) = E_0 D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.26)$$

donde  $E$  y  $\alpha$  son constantes que dependen del material.

2. En su investigación respecto a la conductancia de algunas membranas<sup>5</sup> de células de organismos biológicos, Cole ha propuesto una expresión para la llamada membrana de reactancia, dada como

$$X(\omega) = X_0 \omega^{-\alpha}, \quad (2.27)$$

donde  $X_0$  y  $\alpha$  son constantes, mientras que  $\omega$  es la frecuencia. Cole ha listado varios valores de  $\alpha$  medidos experimentalmente:  $\alpha = 0.45$  para hígado de cobaya,  $\alpha = 0.25$  para papa,  $\alpha = 0.5$  para huevo de Arbacia,  $\alpha = 0.37$  para músculo de rana y  $\alpha = 0.88$  para sangre [46].

3. El modelado de difusión en un tipo específico de medio poroso es de gran aplicación. Para procesos de transferencia en medios fractales, Le Mehaute sugirió la ecuación de la forma

$${}_0D_t^{1/d-1} J(t) = LX(t), \quad (2.28)$$

---

<sup>5</sup>Capacidad de iones cargados para moverse a través de la membrana.

donde  $J(t)$  es el flujo macroscópico a través de la interfaz fractal,  $X(t)$  la fuerza motriz local,  $L$  una constante y  $d$  la dimensión fractal [47]. Es importante que la ecuación de difusión fraccionaria se haya relacionado con un proceso dinámico en medios fractales, el orden de la ecuación resultante depende de la dimensión fractal del fractal, que sirve como modelo de material poroso.

Posteriormente hubo dos tipos de generalización a la ecuación de Le Mehaute, fue sugerida por Oldham, como un reemplazo a la primera ley de Fick [48]. Lo que permitió a Giona construir una ecuación [49] que en su forma más simple se da como

$${}_0D_t^{1/d}P(r, t) = -A \left( \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} + \frac{\kappa}{r}P(r, t) \right), \quad (2.29)$$

donde  $P(r, t)$  es la densidad de probabilidad promedio de caminatas aleatorias en fractales,  $A$  y  $\kappa$  son constantes,  $d$  es el exponente de difusión anómalo, que depende de la dimensión fractal del medio considerado. El segundo tipo de ecuación de difusión fraccionaria fue sugerido por Metzler [16], siendo de la forma

$${}_0D_t^{2/d_\omega}P(r, t) = \frac{1}{r^{d_s-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d_s-1} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right), \quad (2.30)$$

donde  $d_\omega$  y  $d_s$  dependen de la dimensión fractal del medio. Otro ejemplo de este segundo tipo de ecuación fue deducido por Nigmatullin [50]. En el caso dimensional más simple (unidimensional) la ecuación de difusión de Nigmatullin toma la forma

$${}_0D_t^\alpha u(x, t) = \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2}. \quad (2.31)$$

A (2.31) también se le conoce como la ecuación de difusión-onda, por los órdenes extremos que describe para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ .

## 2.4. Relación de Dispersión

Los efectos de la dispersión en las propiedades de ondas en un medio, son descritas mediante la relación de dispersión. Relaciona la longitud de onda o el número de onda con su frecuencia.

La dispersión puede ser causada por condiciones geométricas en la frontera o por interacción de las ondas con el medio transmisor. En presencia de dispersión, las ondas no se propagan con una forma de onda sin alterar, dando pie a una distinción de frecuencias.

Dada la relación de dispersión, se puede calcular la dependencia de la frecuencia de la velocidad de fase y de grupo de cada componente sinusoidal de una onda en el medio como función de la frecuencia. La dispersión puede ser causada por la geometría de las condiciones de frontera o por interacción de las ondas con el medio transmitido. En presencia de dispersión, una onda no se propaga sin cambio de forma, dando lugar a distinta velocidad de fase y grupo dependientes de la frecuencia.

La característica de dispersión es independiente del fenómeno físico al que la ecuación se refiera, puesto se obtienen de las relaciones de dispersión asociadas. Considerando una ecuación diferencial parcial lineal unidimensional  $D\varphi = 0$ ,  $D = D(\partial_t, \partial_x)$  donde  $D$  es un polinomio con coeficientes constantes reales y  $\varphi = \varphi(x, t)$  una función real genérica, se dice que es dispersiva si

1. Admite soluciones de la forma de onda plana  $\varphi(x, t) = Ae^{i(\kappa x - \omega t)}$ , con  $\kappa$  es el número de onda,  $\omega$  la frecuencia angular. Son raíces de la ecuación implícita  $D(-i\omega, i\kappa) = 0$  definiendo así localmente la relación de dispersión  $\omega = \omega(\kappa)$
2. La relación de dispersión es de valor real  $\omega(\kappa) \in \mathcal{R}$  y  $\omega''(\kappa) \neq 0$ .

Es de suma importancia en este tipo de análisis la velocidad de fase ( $v_p$ ) y la velocidad de grupo ( $v_g$ ). Se definen como

$$v_p(\kappa) = \frac{1}{\kappa}\omega(\kappa) \quad (2.32)$$

$$v_g(\kappa) = \partial_\kappa\omega(\kappa). \quad (2.33)$$

Se debe centrar la atención en la forma asintótica de la solución para  $x$  y  $t$  grandes, tales que  $x/t$  sea  $\mathcal{O}(1)$ , lo que significa nos movemos con velocidad  $c = x/t$ , y estamos en la vecindad del “frente”.

En presencia de disipación  $\omega$  y  $\kappa$  no pueden ambos ser reales, se necesita distinguir cual se elige como variable real independiente y cual variable compleja dependiente. Ya sea que se tenga

el espectro en términos de  $\omega(\kappa)$  o  $\kappa(\omega)$ , la parte real describe la propagación del proceso, mientras que la parte imaginaria describe el amortiguamiento del proceso [51]. La representación de Fourier es en su mayoría usada para representar la naturaleza del movimiento ondular.

$$\mathcal{R}e \{ e^{i[\omega t - \kappa(\omega)x]} \} = e^{-\delta(\omega)x} \cos \{ \omega[t - x/V(\omega)] \}, \quad (2.34)$$

donde

$$V(\omega) = \frac{\omega}{\kappa_r(\omega)} = \frac{c}{n_r(\omega)} \geq 0 \quad (2.35)$$

$$\delta(\omega) = -\kappa_i(\omega) = -\frac{\omega n_i(\omega)}{c} \geq 0. \quad (2.36)$$

Los subíndices  $r$ ,  $i$  denotan parte real e imaginaria respectivamente. De hecho la solución (2.34) representa una onda monocromática (de frecuencia  $\omega$ ), que se propaga con una velocidad de fase  $V(\omega)$  y una amplitud decayendo exponencialmente por un coeficiente de atenuación  $\delta(\omega)$ . Las definiciones anteriores extienden las definiciones de velocidad de fase, de igual forma para la velocidad de grupo  $U(\omega)$  se tiene una extensión dada por

$$U(\omega) = \left[ \frac{d}{d\omega} k_r(\omega) \right]^{-1} = \frac{c}{n_r(\omega) + \omega \frac{dn_r(\omega)}{d\omega}} = \frac{V(\omega)}{1 - \frac{\omega}{V(\omega)} \frac{dV}{d\omega}}. \quad (2.37)$$

Además se han escrito en términos del llamado índice de refracción complejo del medio viscoelástico con respecto a ondas mecánicas,  $n(\omega)$ , en analogía con el caso óptico.

En presencia de disipación el concepto de velocidad de fase mantiene su significado cinético de rapidez de fase, mientras que la anterior definición de velocidad de grupo se espera pierda su significado de rapidez de paquete de onda [4].

## 2.5. Desplazamiento Cuadrático Medio

Las variables aleatorias  $X(t)$  y su respectiva función de distribución de probabilidad (FDP)  $P(x, t)$  otorgan la información sobre el proceso aleatorio y puede traducir la información de la FDP a cantidades o momentos regulares y promedio. El momento de orden  $n$  de la variable

aleatoria  $X(t)$  se define como

$$\langle X(t)^n \rangle = \int_{\Omega} x^n P(x, t) dx. \quad (2.38)$$

El primer momento  $\langle X(t) \rangle$  es llamado promedio o valor esperado. El segundo momento  $\langle X^2(t) \rangle$  en combinación con el primero define la varianza o dispersión,

$$\sigma^2 = \langle (X(t) - \langle X(t) \rangle)^2 \rangle = \langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2, \quad (2.39)$$

también llamado desplazamiento cuadrático medio (DCM). Introduciendo la transformada de Fourier en la FDP, que es el valor esperado de la exponencial, el  $n$ -ésimo momento se puede obtener de una función generadora, también conocida como función característica de la variable  $X(t)$

$$\langle e^{ikX(t)} \rangle = \int_{\Omega} e^{ikx} P(x, t) dx = P(k, t). \quad (2.40)$$

Diferenciando  $n$  veces respecto a  $k$  y evaluando en  $k = 0$ ,

$$\frac{d^n}{dk^n} P(k, t)|_{k=0},$$

se recupera la ecuación (2.38) [40]. Este resultado será el punto de partida para nuestro cálculo. Primero porque no para todas las ecuaciones tenemos solución analítica, por lo tanto calcular el segundo momento por definición no es viable. Segundo, nótese que no afecta tener la función en la variable de Laplace al momento de realizar la derivada respecto a  $k$ . Esto debido a que en nuestro caso, mediante la transformada de Laplace se introducen las condiciones iniciales. Esta explicación es un tanto didáctica, en el apéndice de deducción de resultados viene un desarrollo que verifica lo aquí explicado. Además, el resultado es comúnmente empleado y conocido [52]

$$\langle x^2(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\partial_k^2 \phi(s, k)|_{k=0} \right\}. \quad (2.41)$$

Se presenta por ejemplo en un análisis similar dedicado únicamente a la ecuación de onda fraccionaria con distintos tipos de kernel de memoria [53]. Este tipo de cálculo es usual en temas de difusión, por lo que hay dos resultados que servirán de comparación. El caso de difusión

clásico teniendo un comportamiento lineal, y para la ecuación de onda siendo de segundo orden (movimiento balístico).

## 2.6. Dinámica fraccionaria

Más allá de lo intuitivo por una generalización al tener derivadas de orden fraccionario, el aspecto de razón de cambio no suele ser sencillo de comprender. Así como no podemos entender fácilmente que es una derivada medio orden, tampoco es sencillo comprender los resultados de manera física que arroja este operador. Los casos de viscoelasticidad y difusión anómala, son unos de los pocos donde la introducción y descripción de los operadores fraccionarios involucrados, tienen un entendimiento físico.

En el estudio de difusión, una forma de describir el proceso se puede dar con caminata aleatoria. La función de Green de este caso está dado por una gaussiana, así como la universalidad de dicha solución, asegurado por el teorema del límite central. El siguiente paso se da al considerar que el caminante tenga tiempos de espera entre cada “paso”, conocido con el formalismo de Caminata Aleatoria de Tiempo Continuo (CATC). Si además se agregan propiedades de vuelo de Lévy (longitud de paso variable), se dice estar desacoplado. En general este caso describe transporte anómalo [14].

Un caso particular de éstas CATC son considerar ecuaciones dinámicas con memorias espacial y temporal desacopladas; al igual que invariancia de escala espacial o temporal. De esta forma, ecuaciones difusivas fraccionarias surgen de manera natural. Las ecuaciones difusivas fraccionarias no deben verse como dinámica exótica y patológica, sino como una descripción limitativa general de todos los procesos difusivos invariantes de escala [54].

Si bien estos modelos de CATC o similares otorgan incluso resultados que involucran orden fraccionario [14], nos interesa abordar a ecuaciones de onda relativistas, donde solo la ecuación de onda se ha abordado y entendido como proceso difusivo de orden fraccionario. Para otras ecuaciones de onda, Plyukhin propone un proceso estocástico donde partículas tienen una densidad de probabilidad de cambiar su dirección de movimiento. El caso unidimensional de este modelo permite obtener una ecuación en la forma de Dirac. Sin embargo este proceso (que el mismo autor generaliza para cualquier dimensión) permite pensar en aspectos del com-

portamiento cuántico en términos de modelos estocásticos clásicos con una tasa de transición imaginaria no física [55].

El modelo estocástico propuesto por Plyukhin parte de una versión continua de una caminata aleatoria persistente.

$$\partial_t \phi^+ = -c \partial_x \phi^+ - w(\phi^+ - \phi^-) \quad (2.42)$$

$$\partial_t \phi^- = c \partial_x \phi^- + w(\phi^+ - \phi^-), \quad (2.43)$$

donde  $\phi^\pm$  son densidades de probabilidad para una partícula, para moverse a la derecha (+) o izquierda (-),  $w$  la tasa de transición entre dos estados de velocidad. Este sistema se puede reescribir de forma matricial con ayuda del vector  $\Phi = (\phi^+, \phi^-)^T$ . Además, si se usa la transformación  $\Phi = \Psi \exp(-wt)$ , resulta equivalente a la ecuación de Dirac unidimensional en la representación de Weyl.

$$i\hbar \partial_t \Psi = -ic\hbar \sigma_3 \partial_x \Psi + mc^2 \sigma_1 \Psi. \quad (2.44)$$

Si en el sistema (2.42, 2.43) se impone una transición entre dos estados de velocidad descritas por un campo “arbitrario”  $\xi(x, t)$ , del sistema obtenido se reescribe

$$\partial_t \phi = -c \partial_x \varphi \quad (2.45)$$

$$\partial_t \varphi = c \partial_x \phi + 2\xi, \quad (2.46)$$

donde  $\phi = \phi^+ + \phi^-$  y  $\varphi = \phi^+ - \phi^-$ . Finalmente se toma derivada de orden temporal y se imponen las condiciones sobre el campo arbitrario como  $\partial_x \xi = a\phi$  y  $(1/c)\partial_t \xi = -a\varphi$ . Considerando a la constante  $a = m^2 c^3 / (2\hbar^2)$ , de (2.45, 2.46) se puede obtener la ecuación de Klein-Gordon para cada expresión o incluso en un solo vector.

$$\partial_t^2 \phi = c^2 \partial_x^2 \phi - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi. \quad (2.47)$$

Las condiciones impuestas sobre  $\xi$  dificulta interpretar al sistema como un modelo de una partícula. La función  $\phi$  no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad para un proceso estocástico de una sola partícula, dado que en general la solución a Klein-Gordon no

es positiva definida. El hecho de que  $\phi$  satisfaga (2.45) (que es de la forma de una ecuación de continuidad) sugiere que la interpretación de las funciones  $\phi^\pm$  pueda ser como perturbaciones de densidades de carga en un sistema de muchos cuerpos [55].

En su extensión para más dimensiones, permite establecer una interpretación de las funciones en principio (caso difusión y ecuación de onda) como funciones de distribución de probabilidad. Ahora como un ensamble de partículas, moviéndose libremente con velocidad constante en dirección positiva o negativa. En la misma generalización, las ecuaciones resultantes satisfacen ecuaciones de tipo conservación de corriente, así como ahora poder interpretar el principio de Huygens en las partículas involucradas [56].

## 2.7. Teorías de campo

Una introducción de teoría cuántica de campos, suele decirse ser la unión de mecánica cuántica y relatividad especial. Con el desarrollo de esta teoría, principalmente por parte de Wigner, se entendió a las partículas con un formalismo sólido, siendo representaciones del grupo no homogéneo de Lorentz [57]. Dentro de las transformaciones permitidas, así como las que respetan los postulados y relación de energía relativistas, surge de manera natural el concepto de espín. Siendo un número que codifica el número de estados internos de una partícula y, la manera en que estos estados se mezclan entre sí bajo transformaciones de Lorentz [58].

La ecuación relativista de onda, la ecuación relativista de Klein-Gordon y la ecuación relativista de Dirac son primordiales en el estudio de propagación de ondas, así como descriptivas de partículas elementales. A simple vista lo que diferencia a estas ecuaciones entre sí es un término de masa o el orden de la derivada según el caso. La ecuación de onda se entiende carece del término de masa justo porque las ondas son una perturbación del medio y en cuestiones relativistas, los fotones (partículas asociadas a la luz) no tienen masa. Cada una de estas ecuaciones se diferencia por el tipo de partícula que describe, diferenciándose principalmente por el espín asociado.

Las ecuaciones a continuación mencionadas y que serán objeto de estudio tanto en orden de derivada entero como fraccionario, son claramente ecuaciones lineales. Los operadores y términos involucrados son lineales. Cabe hacer esta observación dado que en complejidad la no

linealidad es una característica, sobre todo en fenómenos emergentes. Por lo que con el pasar a orden fraccionario, se busca englobar y estudiar el efecto que genera y establecerlo como propio de un sistema complejo. Más específicamente como fenómenos complejos de memoria y largo alcance.

### 2.7.1. Ecuación Relativista de Onda

La posibilidad de que partículas materiales como los electrones pudieran ser descritos en términos de ondas, fue sugerido por de Broglie [57]. Una idea que tomaría relevancia en el desarrollo de la mecánica cuántica. Con esta idea se asocia una longitud de onda al momento de la partícula, lo que permite esta descripción de dualidad onda-partícula [59]. Empleando las ecuaciones de Maxwell se puede obtener que campo eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda. Esto sin importar se consideran las ecuaciones de Maxwell en el vacío como en un medio, ambos satisfacen.

Para el caso del vacío la velocidad de propagación es  $c$ , la velocidad de la luz en el vacío. Mientras que el caso en un medio, esta se ve afectada por el índice de refracción, usualmente denotado por  $n$ . Si bien no hay propiamente una partícula asociada en términos de espín, se tiene que los campos involucrados oscilan de manera ortogonal entre sí. Además que su dirección de propagación, dada por el vector de Poynting es ortogonal a ambos [60].

El comportamiento que resulta puede ser descrito por la ecuación de onda, englobando una gran cantidad de fenómenos descritos por la misma ecuación. Diferenciados cada caso particular únicamente por una característica primordiales de las onda, la frecuencia  $\nu$  o la longitud de onda  $\lambda$ . Englobándose en el conocido espectro electromagnético, que abarca del infrarrojo al ultravioleta, ante la variación de las cantidades mencionadas.

$$\nabla^2 E = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 E, \quad \nabla^2 B = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 B, \quad (2.48)$$

la ecuación de onda que satisfacen los campos eléctricos  $E$  y magnéticos  $B$ , donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío y  $\varepsilon_0$  la permitividad del vacío.

### 2.7.2. Ecuación Escalar Relativista de Klein-Gordon

Originalmente derivada por Schrödinger, aunque descartada por el hecho de dar una estructura fina incorrecta para el hidrógeno. Para el momento que decidió publicarla, ya había sido redescubierta de manera independiente por Oskar Klein y Walter Gordon. Razón por la que se le conoce como ecuación de Klein-Gordon [57]

$$\left[ \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right] \phi(t, x) = 0, \quad (2.49)$$

donde  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $m$  la masa de la partícula asociada y  $\hbar$  la constante de Planck reducida.

Esta ecuación se asocia a la descripción de partículas con espín 0, tales como piones o kaones. Sin embargo, para un momento  $\bar{p}$  dado, existen dos posibles soluciones; uno con energía positiva y otro con energía negativa. En consecuencia se presenta una densidad de carga con las mismas consecuencias, lo que sigue a la interpretación de que una corresponde a un partícula con carga  $+e$  y otra con carga  $-e$  [61].

### 2.7.3. Ecuación Relativista de Dirac

Ante el inconveniente de densidades con energía positiva y negativa en la ecuación de Klein-Gordon, Dirac propone hallar una ecuación lineal, en lugar de segundo orden

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc^2}{\hbar} \right) \psi(t, x) = 0, \quad (2.50)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac,  $\partial_\mu = (\partial_t - c\nabla)$  y  $\psi(t, x)$  es ahora un espinor.

La ecuación propuesta debe satisfacer la relación de energía relativista, evitando obtener como en el caso de la ecuación de Klein-Gordon, densidades de energía de ambos signos. Informalmente esta búsqueda se dice como calcular la raíz cuadrada del operador d'Alambertiano. Formalmente se dice que estableció una ecuación de onda covariante en la forma de la ecuación de Schrödinger con densidad de probabilidad definida positiva [61].

Describe el comportamiento de partículas relativistas masivas con espín 1/2, tales como electrones y quarks. A pesar de que Dirac pudo obtener una ecuación de primer orden, buscando

densidades de energía no negativas, este problema persistió. La solución al momento de Dirac fue asociarlo a un mar de partículas con energía negativa (mar de Dirac), mismas que al momento de recibir energía suficiente pueden abandonar este mar y dejan un hueco libre; asociado a la energía negativa que acepta por solución su ecuación. Esta fue la primera noción de anti partícula, que posteriormente se entendería el hecho de poder tener carga eléctrica de signo opuesto [57].

## Capítulo 3

# Ecuaciones de Tipo Onda con Derivada Temporal de Orden Entero

Los sistemas o ecuaciones con orden de derivada entero, en este caso ecuaciones de onda, han sido ampliamente estudiadas, siendo conocidas sus soluciones y su comportamiento. Este capítulo se presenta, en general, como punto de comparación para el caso fraccionario. Tener noción de lo que sucede en el caso de orden entero para contrastar con en el caso fraccionario. Además de tener viable casos límite de masa cero para recuperar resultados de la ecuación relativista de onda a partir de la ecuación relativista de Klein-Gordon. Así como la comparativa de las ecuaciones explícitas en la ecuación relativista de Dirac, que deben satisfacer la ecuación relativista de Klein-Gordon [61].

Se calcula la solución analítica a la ecuación relativista de onda, la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon (en adelante presentada únicamente como Klein-Gordon), la ecuación relativista de Dirac y la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon con disipación (en adelante llamada únicamente Klein-Gordon con disipación). Se obtienen soluciones hasta donde es posible con condiciones iniciales generales, dando énfasis en las funciones de Green (condición inicial específica, a tiempo cero una delta de Dirac). Posteriormente se calculan sus desplazamientos cuadráticos medios y sus relaciones de dispersión. Estas últimas cantidades sirven de mejor comparativa dada la dificultad de obtener soluciones analíticas en el caso fraccionario, como se verá en el siguiente capítulo.

### 3.1. Ecuación Relativista de Onda

La ecuación relativista de onda unidimensional está dada por

$$\partial_t^2 \phi(t, x) = c^2 \partial_x^2 \phi(t, x). \quad (3.1)$$

Las condiciones iniciales generales están dadas como  $\phi(0, x) = f(x)$  y  $\partial_t \phi(0, x) = g(x)$ . Con esta misma notación, Barrow presenta solución general para la ecuación de onda unidimensional [62], dada como

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x') dx'. \quad (3.2)$$

El caso particular de interés resulta en imponer las condiciones iniciales  $\phi(0, x) = \delta(x)$  y  $\partial_t \phi(0, x) = 0$ . A la solución de imponer estas condiciones iniciales, se le llama la función de Green. Con esta imposición (3.2) se reduce a la conocida solución de d'Alembert [62]

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2} [\delta(x - ct) + \delta(x + ct)], \quad (3.3)$$

que describe dos pulsos bien ubicados propagándose en direcciones opuestas de manera simétrica, como se aprecia en la Figura 3.1. Vale la pena resaltar de la solución general (3.2), que para dar un valor a la condición inicial aquí nombrada como  $g(x)$ , en casos donde esta función sea impar la integral a evaluar se anula, por lo que la descripción más general de (3.1) respeta una simetría.

### 3.2. Ecuación Escalar Relativista de Klein-Gordon

Pasando al caso de la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon, se procede de manera análoga. La ecuación de Klein-Gordon unidimensional se presenta como [28]

$$\partial_t^2 \phi(t, x) = c^2 \partial_x^2 \phi(t, x) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi(t, x). \quad (3.4)$$

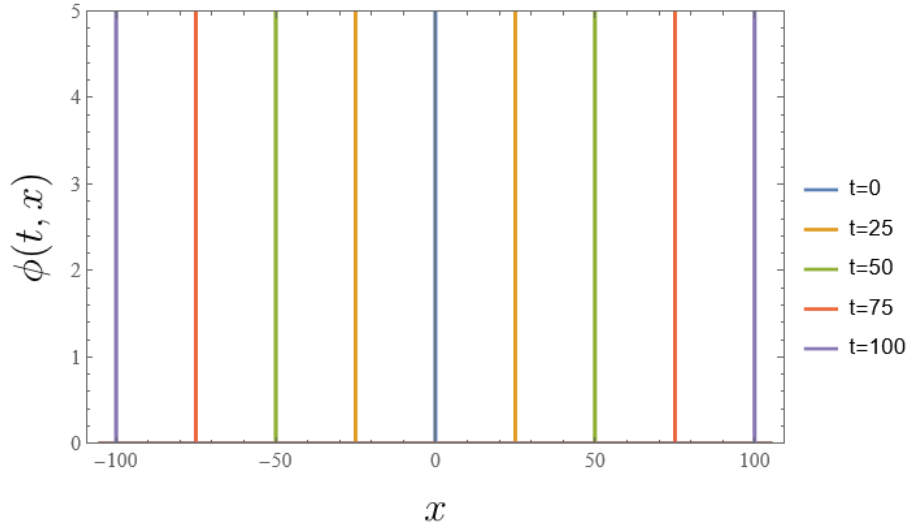


Figura 3.1: Solución de d'Alembert (3.3) para diferentes tiempos y considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Cabe mencionar que el comportamiento mostrado es una ejemplificación, ya que la delta de Dirac es una función de distribución, por lo que solo tiene sentido al ser evaluada. Es meramente con el propósito de ilustrar como se da la propagación en este caso.

La solución a (3.4) con las condiciones iniciales generales indicadas anteriormente se obtiene en términos de convolución, dada como

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \cos \left( ct \sqrt{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \right) \right\} f(x - x') dx' + \\ & + t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{sinc} \left( ct \sqrt{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \right) \right\} g(x - x') dx'. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La ligera diferencia dada por el término de masa, afecta en poder proseguir en obtener una solución general. Incluso al imponer las condiciones iniciales para calcular la función de Green, no resulta tan sencillo ni similar al caso de la ecuación de onda. No obstante, es buen indicio el considerar el caso límite de masa cero se recupera la solución general de la ecuación de onda unidimensional (3.2).

Ante la dificultad de poder continuar con condiciones iniciales generales, deja clara la dificultad de tratar esta ecuación. Por lo que en caso de considerar ahora términos no lineales, estaríamos tratando con algo aún más complicado. En este caso ya no se únicamente con el método de Fourier-Laplace, hoy día hay trabajos enfocados en su solución. Sin embargo cabe mencionar el trabajo de Bengochea, en presentar una solución para Klein-Gordon no lineal, sin

la necesidad de involucrar transformadas integrales o procesos de integración [63].

Imponiendo las condiciones iniciales para la función de Green en (3.5), no se puede proceder como en la ecuación de onda. Escribir el coseno en forma exponencial y obtener las deltas de Dirac, es justo el término de masa el que impide dicha evaluación. Para obtener la función de Green de la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon (3.4) se parte de su expresión en espacio de Laplace-Fourier, imponiendo claro la condición inicial correspondiente  $f(k) = 1$  y  $g(k) = 0$

$$\tilde{\phi}(s, k) = \frac{s}{s^2 + c^2(k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2})} f(k) + \frac{1}{s^2 + c^2(k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2})} g(k). \quad (3.6)$$

Para proceder se aplica primero la transformada inversa de Fourier, dejando así para la restante de Laplace, usando transformada inversa proporcionada por Mainardi y se puede hallar en la tabla de transformadas del apéndice A (A.1) del presente trabajo. Por lo que la función de Green para la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon unidimensional [3] (3.4) está dada por

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2c} \left\{ \delta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) + \frac{d}{dt} \left[ J_0\left(\frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}\right) \Theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \right] \right\} \quad (3.7)$$

donde  $\delta(x)$  es la delta de Dirac,  $J_0$  es una función de Bessel de primer tipo y  $\Theta(t)$  es la función Heaviside o escalón.

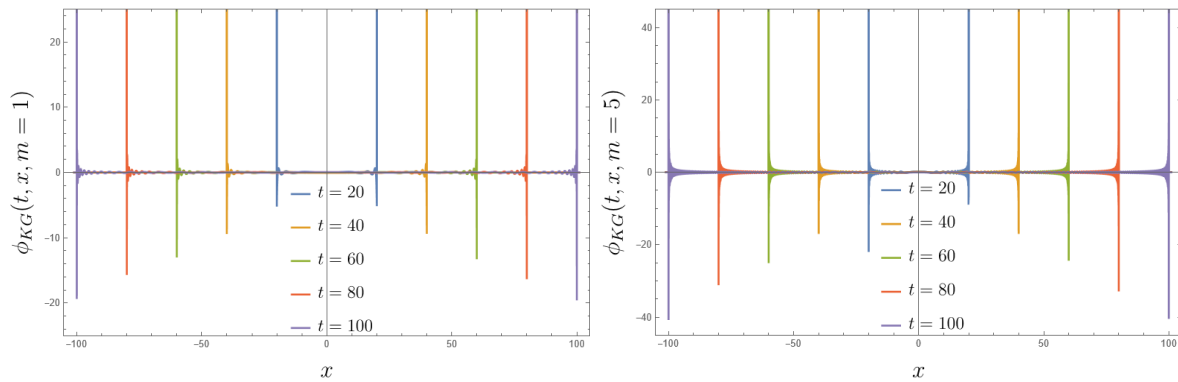


Figura 3.2: Comportamiento de solución a Klein-Gordon de orden entero (3.7), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ ,  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 5$  (derecha).

En la Figura 3.2 se aprecia el comportamiento de la función de Green de la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon de orden entero. Podemos ver que se mantiene un comportamiento de propagación (diverge en el tiempo correspondiente), sin embargo, se presentan también valo-

res negativos y ligeras oscilaciones desde el origen hasta el punto de la divergencia. Además, la amplitud del valor negativo en el punto de divergencia, es proporcional a la masa.

### 3.3. Ecuación Relativista de Dirac

Por tercer caso de ecuación de interés se procede con la ecuación relativista de Dirac unidimensional [28]

$$\left( \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc^2}{i\hbar} \right) \psi(t, x) = 0, \quad (3.8)$$

donde ahora  $\psi(t, x)$  es un espinor<sup>1</sup>. Al ser unidimensional (espacialmente), tiene dos componentes  $\psi^T = (\psi_1, \psi_2)$ . Además el término  $\gamma^\mu$  son conocidas como matrices de Dirac, con  $\mu = 0, 1$ , asociado al índice temporal y espacial respectivamente (no confundir posteriormente con el orden de derivada fraccionaria). En el caso de Dirac, las derivadas son de primer orden, por lo que solo aparece la primer condición inicial general ( $\phi(0, x) = f(x)$ ). En el caso unidimensional  $\gamma^\mu$  son matrices de  $2 \times 2$ , representadas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expandiendo las matrices de Dirac en (3.8), se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales acopladas. En este caso hay dos posibles soluciones, distinguidas únicamente por un signo y las condiciones ubicación de las condiciones iniciales. Al igual que el caso de Klein-Gordon, se dificulta llevar a una solución explícita con condiciones iniciales generales. En este caso al aplicar las transformadas de Fourier y Laplace se tiene por solución en esas variables

$$\hat{\psi}_{1,2}(s, k) = \frac{s}{s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} f_{1,2}(k) + i \frac{\left[ \mp ck f_{1,2}(k) - \frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k) \right]}{s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}. \quad (3.9)$$

Cabe destacar que el primer término corresponde al caso de Klein-Gordon en las mismas variables. Considerando el caso de condición inicial para obtener la función de Green, se tienen

<sup>1</sup>Elementos de un campo vectorial complejo, con diferencia de transformar negativamente ante rotación “completa” de  $360^\circ$ . Empleados para describir el momento angular intrínseco (espín) de las partículas.

por soluciones

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) = & \frac{1}{2c} \left[ \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) + \frac{d}{dt} \left[ J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) \right] \right] + \\ & + \frac{mc}{2\hbar \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}} J_1 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) - \frac{x}{2c|x|} \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) - \\ & - \frac{imc}{\hbar} J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t, x) = & \frac{1}{2c} \left[ \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) + \frac{d}{dt} \left[ J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) \right] \right] + \\ & + \frac{mc}{2\hbar \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}} I_1 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) + \frac{x}{2c|x|} \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) - \\ & - \frac{imc}{\hbar} J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $I_1$  es una función de Bessel modificada de primer tipo. Se destaca que la primer solución pierde el comportamiento característico de pulso, si bien se expresan directamente en la solución, al expandir y evaluar, se pierde para  $\psi_1(t, x)$ . Además, ambas soluciones tienen igual término imaginario. El comportamiento de las soluciones a la ecuación de Dirac de orden entero se puede apreciar en la Figura 3.3.

En la Figura 3.3 podemos notar una gran diferencia en el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Dirac. La primer solución son oscilaciones acotadas y solo en el intervalo correspondiente al tiempo de evaluación. Además, se nota mayor frecuencia y amplitud en relación al valor de la masa. Para la segunda solución vemos se mantiene el comportamiento de pulso propagándose, sin embargo, unas cuencas se tienen en la parte negativa. Mismas que van aumentando su amplitud conforme avanza el tiempo y conforme el valor de la masa asignado. Razón por la que para la segunda solución no se evaluaron tiempos grande ni masa mayor a 1.

Con esto se concluye la sección dedicada a la ecuación de Dirac. El desarrollo del estudio se enfoca en la ecuación de Klein-Gordon dada la cercanía con la ecuación de onda. Se quiere dar un acercamiento a la ecuación de Dirac al estar en el mismo ámbito de ecuación de onda relativista.

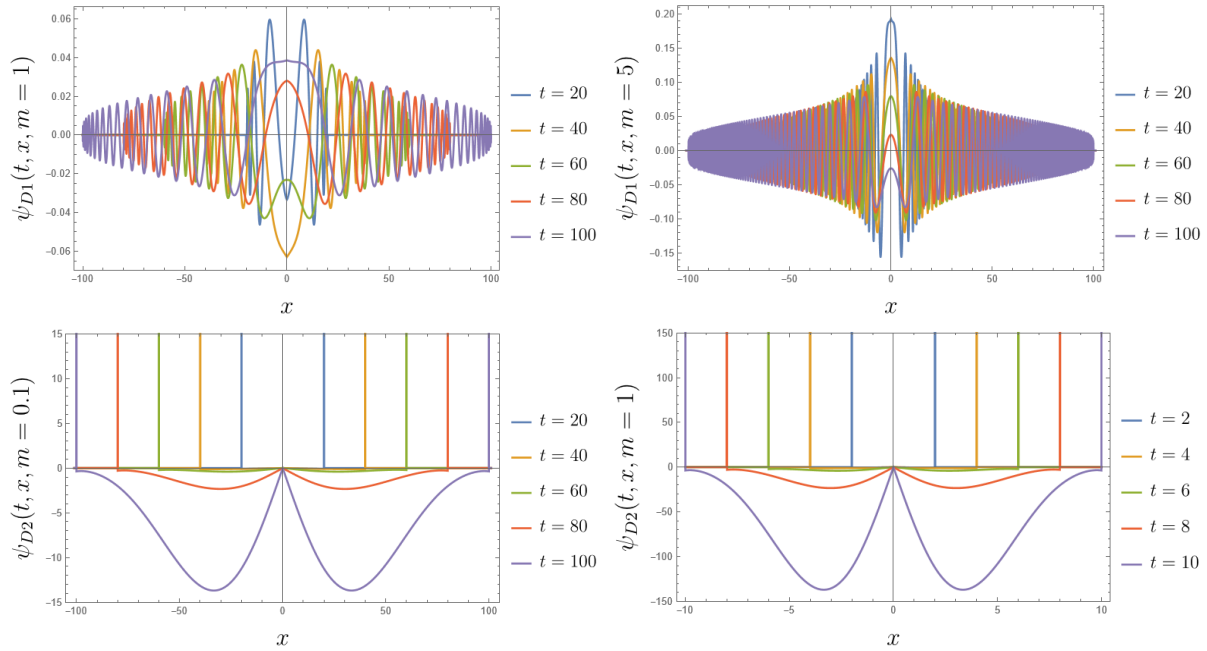


Figura 3.3: Comportamiento de la parte real de las soluciones a la ecuación de Dirac (3.10) y (3.11), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Parte superior para  $\psi_1$  con  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 5$  (derecha). Parte inferior  $\psi_2$  con  $m = 0.1$  (izquierda) y  $m = 1$  (derecha).

### 3.4. Ecuación Escalar Relativista de Klein-Gordon con Disipación

Por último, se procede con la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon con disipación [4]. Así nombrada porque agrega un término de derivada temporal de primer orden, como es en el caso de la ecuación del telegrafista (de hecho similar, salvo en este caso se considera masa). Esta ecuación está dada por

$$\partial_t^2 \phi(t, x) + 2\alpha \partial_t \phi(t, x) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi(t, x) = c^2 \partial_x^2 \phi(t, x). \quad (3.12)$$

Como se mencionó en el caso  $m = 0$  se reduce a la ecuación del telegrafista, mientras que con  $\alpha = 0$  a la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon (3.4). Todos los casos referentes a esta ecuación son presentados por Mainardi [4]. Considerando condiciones iniciales generales se

tiene solución general la convolución

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\chi^2 + c^2\tau^2}t\right) f(x - \tau) d\tau + \\ & + e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\sqrt{\chi^2 + c^2\tau^2}\right) [\alpha f(x - \tau) + g(x - \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\chi^2 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} - \alpha^2$ . Notamos que se reduce a las soluciones generales de los casos anteriores.

Enfocándonos en el caso de función de Green se tiene por solución

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \frac{1}{2c} \left[ e^{-\frac{\alpha|x|}{c}} \delta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) + \frac{d}{dt} \left[ e^{-\alpha t} J_0\left(\chi \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}\right) \right] + \right. \\ & \left. + 2\alpha J_0\left(\chi \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}\right) \right] \Theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde para el segundo término se debe cumplir  $\chi^2 > 0$ . En caso contrario la función de Bessel pasa a ser una función de Bessel modificada ( $I_0$ ), con mismo argumento.

El comportamiento de la solución a Klein-Gordon con disipación (3.14) se presenta en la Figura 3.4. Se aprecia que en efecto, al dominar un término u otro ( $\alpha$  o  $\chi$ ) se presenta un comportamiento distinto. Cuando  $\alpha$  domina (lado izquierdo) se mantiene un comportamiento acotado, pequeños pulsos angostos que se propagan y van marcando oscilaciones en su propagación. Por su parte si  $\chi$  domina, el comportamiento de pulso se retoma, con ligeras oscilaciones alrededor del eje horizontal del origen, como se veía en Klein-Gordon. No es obvio en la solución general tomar el caso límite  $m = 0$  por como se expresa en términos de  $\chi$ . El caso  $\alpha = 0$  resulta en la ya presentada ecuación de Klein-Gordon (3.7). Se presenta a continuación solución analítica cuando  $m = 0$ , que es el caso de la ecuación del telegrafista y está dada por

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \frac{1}{2c} \left[ e^{-\alpha t} \delta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) + \frac{d}{dt} \left[ e^{-\alpha t} I_0\left(\alpha \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}\right) \right] + \right. \\ & \left. + 2\alpha e^{-\frac{\alpha t}{2}} I_0\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}\right) \right] \Theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $I_0$  es una función de Bessel modificada de primer tipo. El comportamiento de esta solución se presenta en la Figura 3.5. Se puede observar que para coeficientes de difusión pequeños,

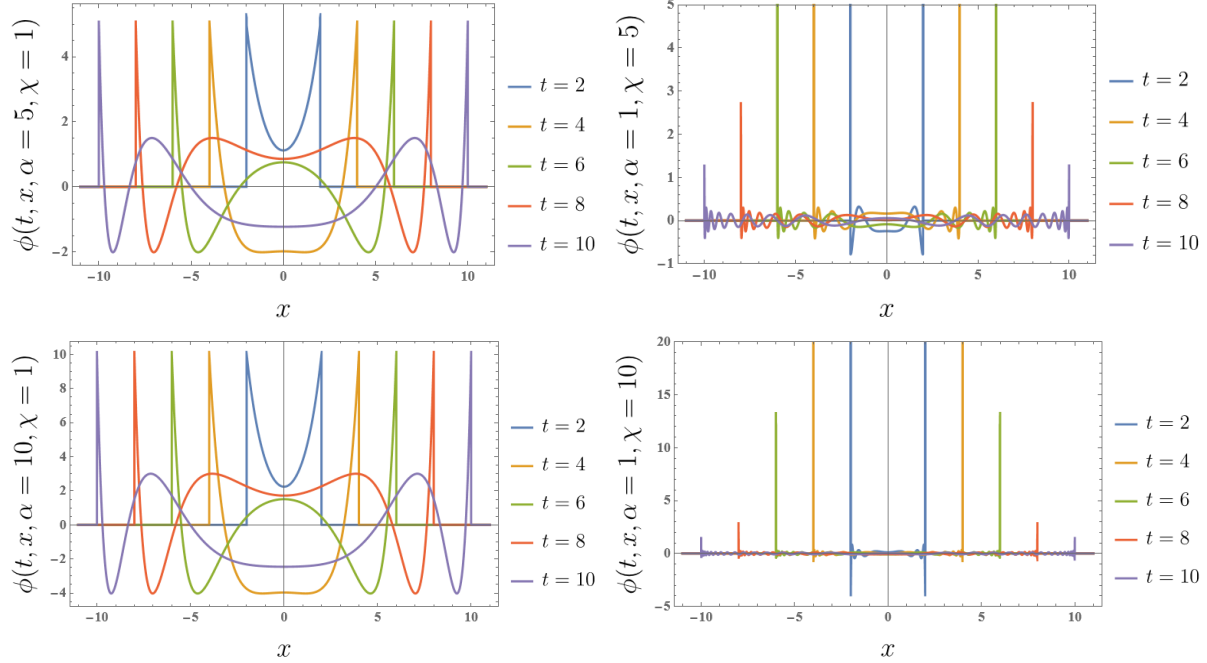


Figura 3.4: Comportamiento a la solución de Klein-Gordon con disipación (3.14), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ , con  $\alpha = 5$  y  $\chi = 1$  (superior izquierda),  $\alpha = 1$  y  $\chi = 5$  (superior derecha).  $\alpha = 10$  y  $\chi = 1$  (inferior izquierda),  $\alpha = 1$  y  $\chi = 10$  (inferior derecha).

el comportamiento se divide en dos partes. Del origen hasta el tiempo de evaluación correspondiente se presenta una curva correspondiente a una gaussiana, cortada justo en la posición igual al tiempo de evaluación, donde se presenta el comportamiento de pulso. Conforme el coeficiente de disipación aumenta, el comportamiento presente es el de difusión. Otro caso de interés es cuando  $\chi^2 = 0$ , es decir,  $\alpha = \frac{mc^2}{\hbar}$ . Para este particular caso se tiene por solución

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2c} \left[ \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) e^{-\frac{\alpha|x|}{c}} + \alpha e^{-\alpha t} \right] \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right). \quad (3.16)$$

En este caso queda explícito si  $\alpha = 0$ , y por lo tanto la masa también es cero, se recupera la solución de d'Alembert (3.3). Con esto se concluye la obtención analítica de las soluciones a ecuaciones de onda relativistas de orden entero.

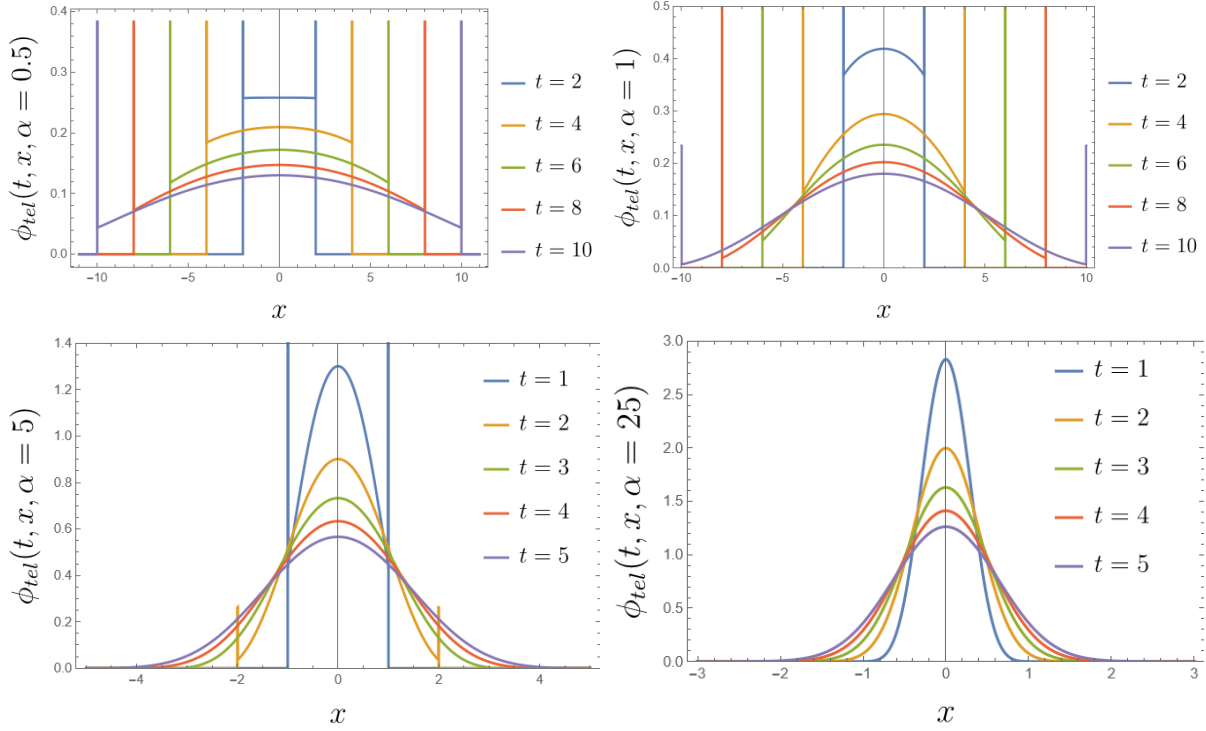


Figura 3.5: Comportamiento de la solución de la ecuación del telegrafista (3.15) a diferentes tiempos, considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$  y  $\alpha = 0.5$  (superior izquierda),  $\alpha = 1$  (superior derecha),  $\alpha = 5$  (inferior izquierda) y  $\alpha = 25$  (inferior derecha).

### 3.5. Relaciones de Dispersión

Como se ha mencionado en el marco teórico, calcular la relación de dispersión es común en áreas que estudian ondas. La forma de evaluar es la usual, es decir, se evalúa suponiendo la ecuación satisface solución de onda plana, para ver el comportamiento y características de estas relaciones. En este caso de orden entero, solo se puede variar la masa y el término de disipación, para ver los comportamientos presentes. Posteriormente en el caso fraccionario, serán la masa y el orden de la derivada fraccionaria.

Los resultados presentados a continuación se pueden hallar en cualquier libro de óptica, incluyendo relación de dispersión y sus velocidades de fase y de grupo [64]. Para la ecuación de onda al buscar soluciones que satisfagan comportamiento de onda plana se tiene la relación de dispersión dada como

$$\omega(\kappa) = c\kappa. \quad (3.17)$$

Sus velocidades, de fase y grupo dadas como

$$v_p(\kappa) = c \quad (3.18)$$

$$v_g(\kappa) = c. \quad (3.19)$$

De igual forma con la ecuación de Klein-Gordon, donde se obtiene su relación de dispersión

$$\omega(\kappa) = \sqrt{c^2\kappa^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} = c\kappa\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2\kappa^2}}. \quad (3.20)$$

En la Figura 3.6 se aprecia el comportamiento para la relación de dispersión de Klein-Gordon, donde se incluye el caso de la ecuación de onda ( $m = 0$ ). Con lo que podemos calcular

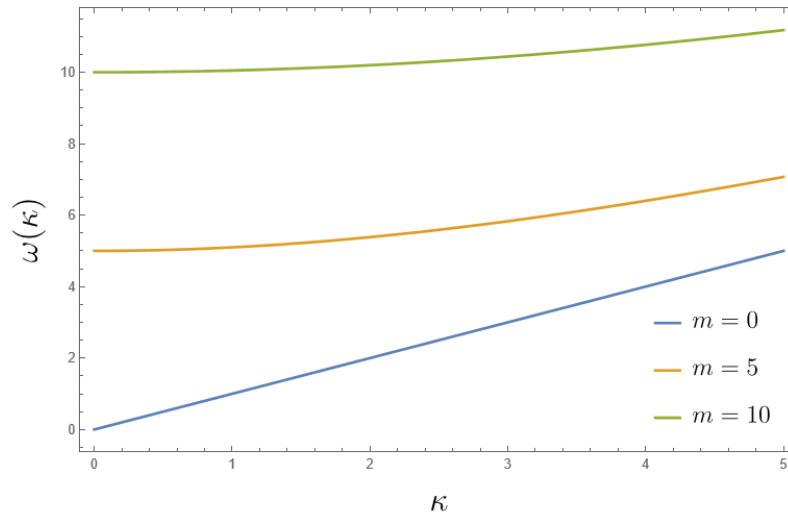


Figura 3.6: Comportamiento de relación de Dispersión de Klein-Gordon de orden entero (3.20) para distintos valores de la masa. Considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

su velocidad de fase y de grupo

$$v_p(\kappa) = c\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2\kappa^2}} \quad (3.21)$$

$$v_g(\kappa) = \frac{c^2\kappa}{\sqrt{c^2\kappa^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}}. \quad (3.22)$$

El comportamiento de esta velocidades se muestra en la Figura 3.7. En este caso se recupera el caso de la ecuación de onda al imponer masa cero en la relación y velocidades obtenidas en

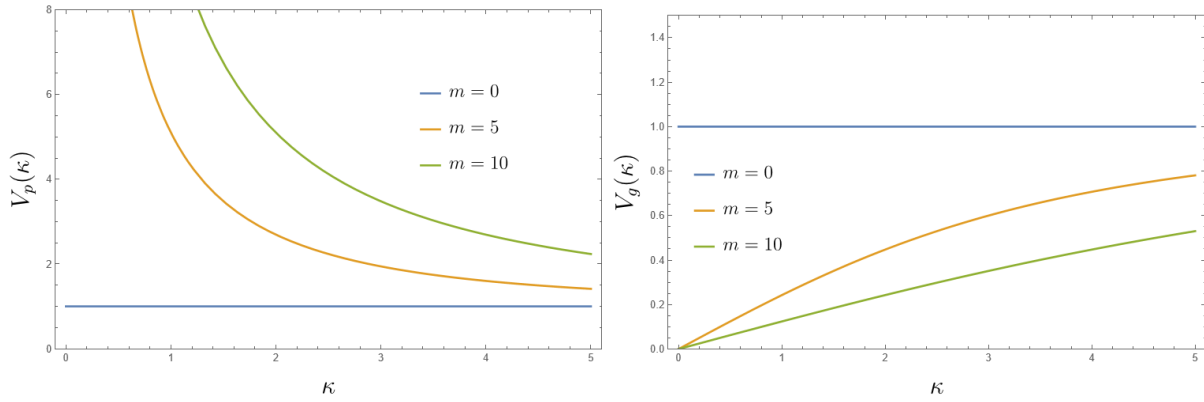


Figura 3.7: Comportamiento de la velocidad de fase (3.21) y grupo (3.22) de la relación de Dispersión de Klein-Gordon de orden entero, para distintos valores de  $m$  y considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

Klein-Gordon. Para el caso de Klein-Gordon disipativo se tiene su relación de dispersión dada por

$$\omega(\kappa) = c\kappa\sqrt{1 + \frac{m^2c^4/\hbar^2 - \alpha^2}{c^2\kappa^2}}. \quad (3.23)$$

Con esta relación se pueden obtener su velocidad de fase y grupo respectivamente

$$v_p(\kappa) = \sqrt{c^2 + \frac{m^2c^4/\hbar^2 - \alpha^2}{\kappa^2}} \quad (3.24)$$

$$v_g(\kappa) = \frac{c^2\kappa}{\sqrt{c^2\kappa^2 + m^2c^4/\hbar^2 - \alpha^2}}. \quad (3.25)$$

El comportamiento de la relación de dispersión de Klein-Gordon con disipación se muestra en la Figura 3.8, en esta primer parte se muestra con parámetros dentro del rango que permiten tener parte imaginaria. Por su parte, en la Figura 3.9, se muestra con parámetros que únicamente permiten tener parte real. En este caso se aprecia que cuando  $\alpha > m$  se tiene claramente efecto de disipación, esto se puede ver del hecho que tenga parte imaginaria distinta de cero. De manera más concreta, Giusti [3] especifica los siguientes intervalos

$0 \leq \alpha < m$	Dispersión Normal
$0 \leq m < \alpha$	Dispersión Anómala
$0 < \alpha = m$	No Dispersión/Sin Distorsión

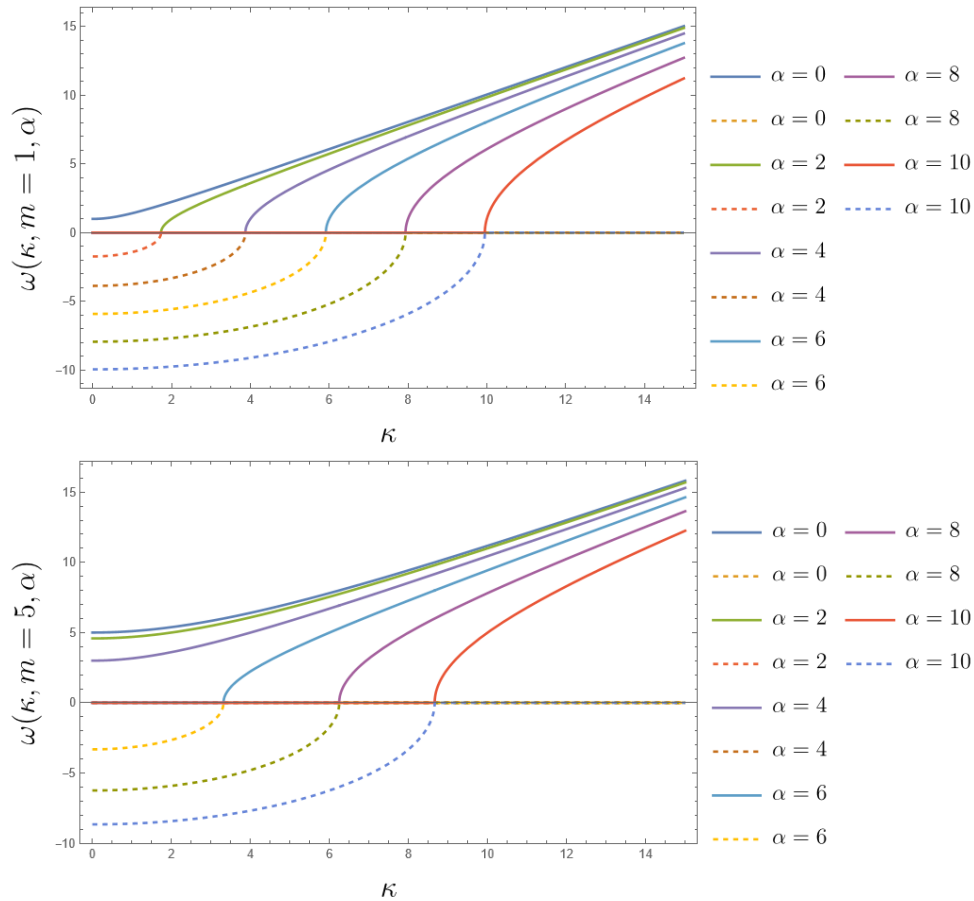


Figura 3.8: Comportamiento de relación de dispersión para Klein-Gordon con disipación (3.23), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . En línea continua se representa parte real, mientras que línea punteada para parte imaginaria. Se fija la masa y varía el término de disipación ( $\alpha$ ).  $m = 1$  (superior),  $m = 5$  (inferior).

Por último en el caso de la ecuación de Dirac, al tener dos ecuaciones diferenciales lineales acopladas, al momento de separar se obtiene nuevamente la ecuación de Klein-Gordon, por lo que conlleva el mismo comportamiento.

### 3.6. Desplazamiento Cuadrático Medio

En casos de difusión es usual calcular esta cantidad, así como se ha hecho para la ecuación de onda fraccionaria, incluso con distintos tipos de kernel. Es una forma de ver el cambio del comportamiento en el sistema, pasando de un comportamiento lineal a uno de potencia en el caso de la ecuación de onda, tras cambiar a derivada fraccionaria [40].

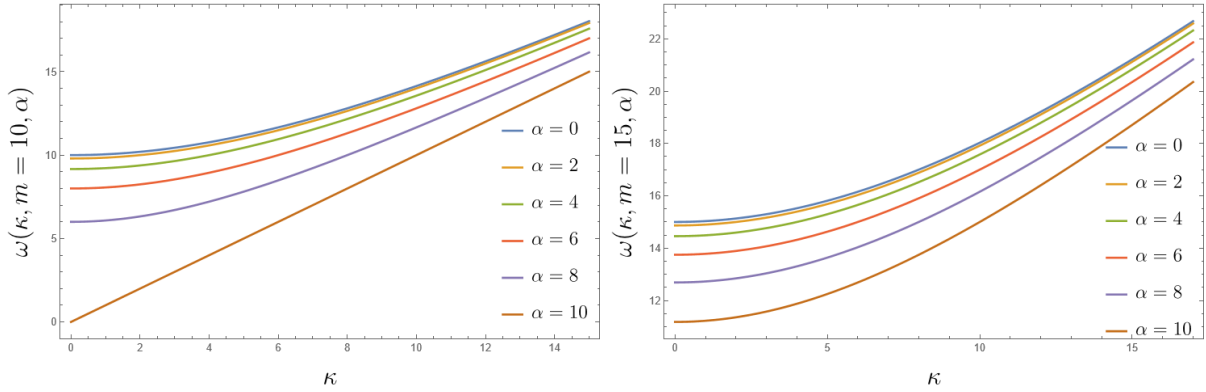


Figura 3.9: Comportamiento de relación de dispersión para Klein-Gordon con disipación (3.23), considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Se fija la masa y varía el término de disipación ( $\alpha$ ).  $m = 10$  (izquierda),  $m = 15$  (derecha).

Se presentan los desplazamientos cuadráticos medios (DCM) de las ecuaciones de estudio de orden entero, donde el caso de difusión y ecuación de onda son conocidos [53], mientras que Klein-Gordon y Dirac no suelen presentarse. Vale recordar que  $\langle f^n(t) \rangle$  denota el  $n$ -ésimo momento de la función correspondiente.

$$\text{Difusión} \quad \langle x^2(t) \rangle = 2Dt, \quad (3.26)$$

$$\text{Ecuación de Onda} \quad \langle x^2(t) \rangle = c^2 t^2, \quad (3.27)$$

$$\text{Klein-Gordon} \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\hbar}{m} t \sin\left(\frac{mc^2}{\hbar} t\right), \quad (3.28)$$

$$\text{Dirac} \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\hbar}{m} t \sin\left(\frac{mc^2}{\hbar} t\right) + \frac{i\hbar}{m} \left[ t \cos\left(\frac{mc^2}{\hbar} t\right) - \frac{\hbar}{mc^2} \sin\left(\frac{mc^2}{\hbar} t\right) \right]. \quad (3.29)$$

En ambos casos que presentan masa, al tomar el límite  $m \rightarrow 0$ , se recupera sin problema el resultado de la ecuación de onda. Sin embargo, el comportamiento en estos casos difiere del esperado de un DCM. Justo se toma el segundo momento para que el cuadrado garantice un valor positivo, razón por la que tener valores negativos es contra intuitivo. Podemos entender que desde sus soluciones analíticas tienen valores negativos, entonces la interpretación de densidad de probabilidad deja de ser viable. Por su parte, es interesante apreciar que al igual que en las soluciones analíticas de Klein-Gordon y Dirac, tienen un término similar, como era de esperar.

En la Figura 3.11 se aprecia el comportamiento de estas cantidades. Para difusión siendo lineal y para la ecuación de onda una potencia cuadrática, también conocido como movimiento balístico. El hecho de que el DCM oscile es aceptable siempre y cuando se mantenga positivo,

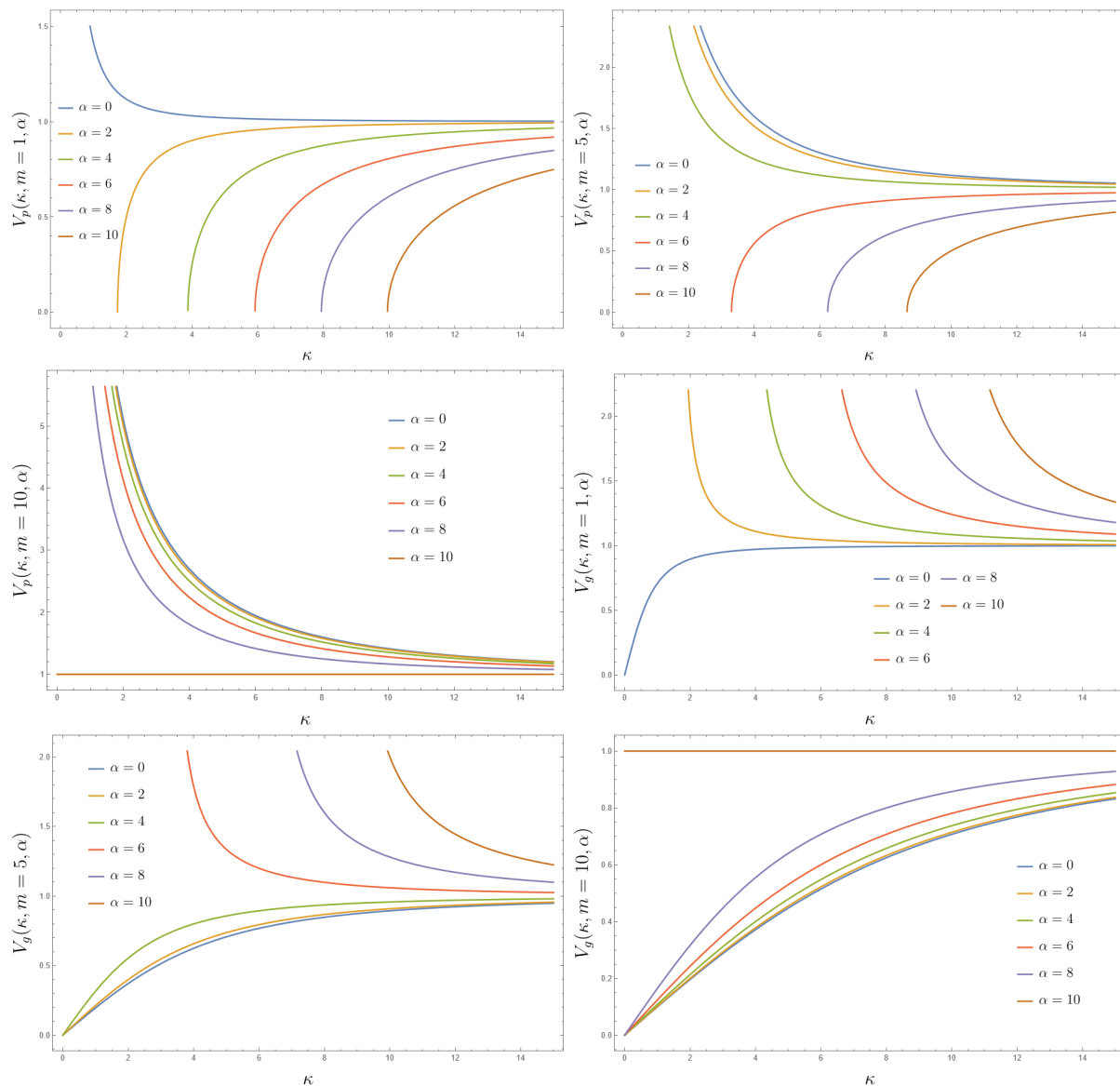


Figura 3.10: Comportamiento de velocidades de fase (3.24) y de grupo (3.25) para la ecuación de Klein-Gordon con disipación. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Se dan distintos valores a la masa al variar el término de disipación. Velocidad de fase con  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha) y  $m = 10$  (central izquierda), velocidad de grupo con  $m = 1$  (central derecha),  $m = 5$  (inferior izquierda) y  $m = 10$  (inferior derecha).

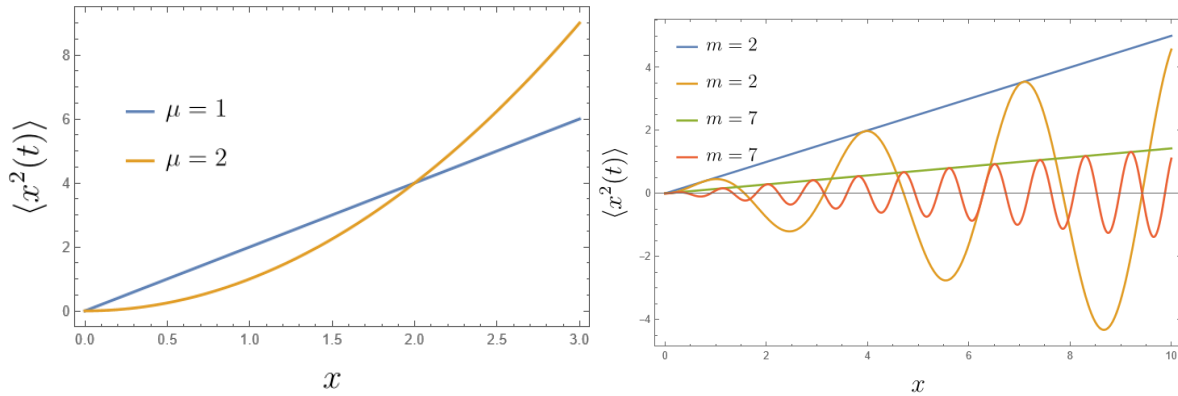


Figura 3.11: Desplazamiento cuadrático medio de ecuaciones de orden entero, se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Difusión 3.26 y ecuación de onda (3.27) (izquierda), Klein-Gordon (3.28) y Dirac (3.29) parte real, el comportamiento oscilatorio, se indica la cota lineal correspondiente con las rectas (derecha).

más como se mencionó anteriormente, la parte negativa deja de lado la interpretación posible de desplazamiento. En el aspecto cuántico podemos pensar este comportamiento por parte de Klein-Gordon y Dirac, que los valores negativos sean asociados a las antipartículas correspondientes. Esto considerando la perspectiva en diagramas de Feynman que una anti partícula se puede ver como una partícula viajando en el sentido contrario en la flecha del tiempo [28]. Siendo así viable que se tenga un DCM negativo, esto claro, si se pudiera mantener la interpretación de distribución de probabilidad.

El comportamiento del DCM en los casos que involucran masa no permite la interpretación de esta cantidad. No obstante, en ambos casos a tiempo cortos se da un comportamiento similar balístico. Esta similitud se mantiene en el caso fraccionario, como se verá en el siguiente capítulo. En ese caso, mantiene similitud con el DCM tipo potencia fraccionaria de la ecuación de onda fraccionaria.

Con esto se concluye los resultados de nuestros sistemas con derivadas de orden entero. El siguiente capítulo se estudian con derivada fraccionaria en el tiempo.

# Capítulo 4

## Ecuaciones de Tipo Onda con Derivada Temporal Fraccionaria

La forma de introducir la derivada fraccionaria en la parte temporal a las ecuaciones de onda tratadas en el capítulo anterior, es por medio de un kernel de memoria de tipo potencia. Este tipo de kernel suele estar presente en fenómenos descritos por la ecuación generalizada de Langevin [65], para describir fluidos viscoelásticos, donde la fricción al tiempo  $t$  puede depender de la historia de la velocidad  $v(s)$  para tiempos  $s$  que son anteriores a  $t$ . La fricción tiene memoria y el coeficiente de fricción  $\zeta$  es reemplazado por una función de memoria  $K(t)$  [37], es decir,

$$mv(t) = -\zeta v(t) + \eta(t) \longrightarrow mv = - \int_{-\infty}^t ds K(t-s)v(s) + \eta(t). \quad (4.1)$$

En la ecuación (4.1) se aprecia en el lado izquierdo la ecuación estándar de Langevin, mientras que del lado derecho el cambio a su versión generalizada. En el caso de la derivada fraccionaria, nos referimos a un Kernel de “tipo potencia” a la relación  $K(t-s) \propto (t-s)^\alpha$ , donde  $\alpha$  se relacionará con el orden de derivada fraccionaria y coincidirá con el término correspondiente en la derivada fraccionaria de Caputo.

En la sección 2.3.3 se dio como ejemplo de aplicación de la derivada fraccionaria a la descripción de la viscoelasticidad de un fluido, donde se mencionó la intuición para hacer dicho cambio, fenómenos bien establecidos para los órdenes extremos en el orden de la derivada, 0 para sólidos y 1 para fluidos. En el caso del fenómeno de difusión, puede haber también un

cambio de derivada de orden entero por fraccionario en la parte temporal [17]. En este caso los fenómenos conocidos extremos a los órdenes de la derivada son 1 para difusión y 2 para propagación de pulsos (ecuación de onda). El cambio por orden fraccionario a la difusión se le suele nombrar como ecuación de onda fraccionaria, misma que engloba el fenómeno de difusión anómala. Un breve planteamiento de este tema se encuentra en el apéndice E.

Tras haber estudiado los casos con derivada de orden entero, este capítulo se dedica a los casos en que se da el cambio a una derivada fraccionaria en la parte temporal. Se presentan las mismas características calculadas para los casos de orden entero, soluciones analíticas, así como soluciones numéricas, relaciones de dispersión y desplazamiento cuadrático medio. Se plantea identificar las consecuencias y similitudes del cambio ante una derivada fraccionaria en lugar de dos derivadas temporales de un orden entero de diferencia, con el comportamiento conocido de disipación. Así como dilucidar las características que engloba la derivada fraccionaria en el aspecto ya conocido de difusión.

En el caso de orden entero se tienen por parámetros la constante de disipación  $\alpha$  y la masa  $m$  (3.12). En base a la relación entre estos parámetros se establece cuando hay dispersión anómala. Mientras que para el caso fraccionario se tiene el orden de la derivada temporal fraccionaria  $1 < \mu < 2$ , y el término de masa  $\frac{mc^2}{\hbar}$ . Estos servirán para establecer el comportamiento de las ecuaciones con derivada temporal fraccionaria.

## 4.1. Ecuación de onda con derivada temporal fraccionaria

La ecuación relativista de onda unidimensional con derivada fraccionaria en la parte temporal está dada por

$$\frac{1}{\Gamma(2-\mu)} \int_0^t (t-t')^{1-\mu} \partial_{t'}^2 \phi(t', x) dt' = \tau^{2-\mu} c^2 \partial_x^2 \phi(t, x), \quad 1 < \mu < 2. \quad (4.2)$$

Se ha optado por agregar un factor temporal  $\tau$  para tener congruencia en las unidades. Otra opción es que la velocidad de propagación  $c$  tenga unidades  $[m^2 s^{-\mu}]$ , sin embargo esto plantea justificar y entender dicho cambio en una constante física, cosa que dista del objetivo del presente trabajo. En adelante se omitirá explícitamente el factor  $\tau$ . El lado izquierdo de (4.2) es la

definición de la derivada fraccionaria de Caputo por lo tanto (4.2) se escribe como

$${}_0^C D_t^\mu \phi(t, x) = c^2 \partial_x^2 \phi(t, x), \quad 1 < \mu < 2. \quad (4.3)$$

Se opta por esta derivada fraccionaria dado que su transformada de Laplace involucra las dos condiciones iniciales del problema con derivada temporal de orden 2. Al igual que en el capítulo anterior, se consideran las condiciones iniciales generales  $\phi(0, x) = f(x)$  y  $\partial_t \phi(0, x) = g(x)$ , hasta donde nos sea posible. Posteriormente se enfocará el análisis en las condiciones iniciales para la función de Green [ $\phi(0, x) = \delta(x)$  y  $\partial_t \phi(0, x) = 0$ ]. Al tratar la derivada fraccionaria son necesarios varios resultados que involucran transformadas de Laplace o de Fourier relacionadas a funciones especiales, como se mostró brevemente en el capítulo 2. Para mayor detalle se recomienda consultar los apéndices correspondientes.

Se sigue un procedimiento similar al realizado en el caso de orden entero, es decir, se halla la solución en espacio de Fourier-Laplace. Así (4.2) en este espacio se da por

$$\tilde{\phi}(s, k) = \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu + c^2 k^2} f(k) + \frac{s^{\mu-2}}{s^\mu + c^2 k^2} g(k). \quad (4.4)$$

En el espacio de configuración-tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|x'|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x'|}{ct^{\mu/2}} \middle| \begin{matrix} (1, \mu/2) \\ (1, 1) \end{matrix} \right] f(x - x') dx' + \\ & + t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|x'|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x'|}{ct^{\mu/2}} \middle| \begin{matrix} (2, \mu/2) \\ (1, 1) \end{matrix} \right] g(x - x') dx', \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde se han considerado las condiciones iniciales generales antes mencionadas. Como caso general, la solución fraccionaria (4.5) debe recuperar la solución del caso entero (3.2). Dadas las funciones  $H$  de Fox dificulta saber a que corresponde su comportamiento. La primer función  $H$  al evaluar en  $\mu = 1$  en espacio de Fourier, se recupera la gaussiana solución a difusión, mientras que al evaluar  $\mu = 2$ , recupera el coseno para poder obtener las deltas, solución de d'Alembert en el caso de orden entero. Para la segunda  $H$  con  $\mu = 2$  en espacio de Fourier recupera una función Mittag-Leffler de dos parámetros, de la forma  $tE_{2,2}[-c^2 k^2 t^2]$ , que corresponde a la

función  $\text{sinc}(ckt)$ , misma que aparece con el caso entero al tratar una solución general en tal caso.

Al considerar las condiciones iniciales para obtener la función de Green de la ecuación de onda fraccionaria se tiene

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2|x|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x|}{ct^{\mu/2}} \left| \begin{array}{l} (1, \mu/2) \\ (1, 1) \end{array} \right. \right], \quad (4.6)$$

solución presentada por Sandev [40], quien además considera distintos tipos de kernel en su libro, como distintas combinaciones de potencias, exponenciales, funciones Mittag-Leffler y combinaciones de éstas, donde el cambio y análisis correspondiente se enfoca en el cambio del comportamiento del desplazamiento cuadrático medio. Lineal con el tiempo en el caso de la difusión, y cuadrático para la ecuación de onda, mientras que en los casos fraccionarios se tienen potencias acotadas por los casos enteros. Otra expresión para la solución a la ecuación de onda fraccionaria, se puede dar en términos de la función de Wright [19].

En la Figura 4.1 se aprecia el comportamiento de la solución a la ecuación de onda fraccionaria (4.6). Donde se puede ver la transición en el comportamiento de las soluciones conforme se varía el orden de la derivada. Para  $\mu = 1$  la gaussiana es la solución a la ecuación de difusión, la cual se va partiendo en dos pulsos acercándose a las deltas conforme  $\mu$  se acerca al valor 2, solución de la ecuación de onda.

Al observar la evolución de la solución a la ecuación de onda fraccionaria (4.6) en las Figuras 4.1 y 4.2, podemos notar que se mantiene el comportamiento característico de difusión, la amplitud disminuye con el paso del tiempo. Además de la propagación, solo para los casos fraccionarios se tienen ambos comportamientos. Las soluciones preservan su estructura principal, sin embargo los casos con valores de  $\mu < 1.5$  no presentan una propagación lineal, es decir, la ubicación del máximo del correspondiente pulso no se propaga proporcional al tiempo. Por el contrario, los casos con  $\mu > 1.5$  asemeja más a esta propagación lineal.

De hecho, estudiando el desplazamiento de los máximos en los respectivos pulsos, podemos verificar esta propagación. En la Figura 4.3 se puede observar que al aumentar el orden de la derivada, aumenta la velocidad de propagación. La evolución de la velocidad de propagación  $\eta(\mu)$ , no presenta un cambio a primeras evidente.

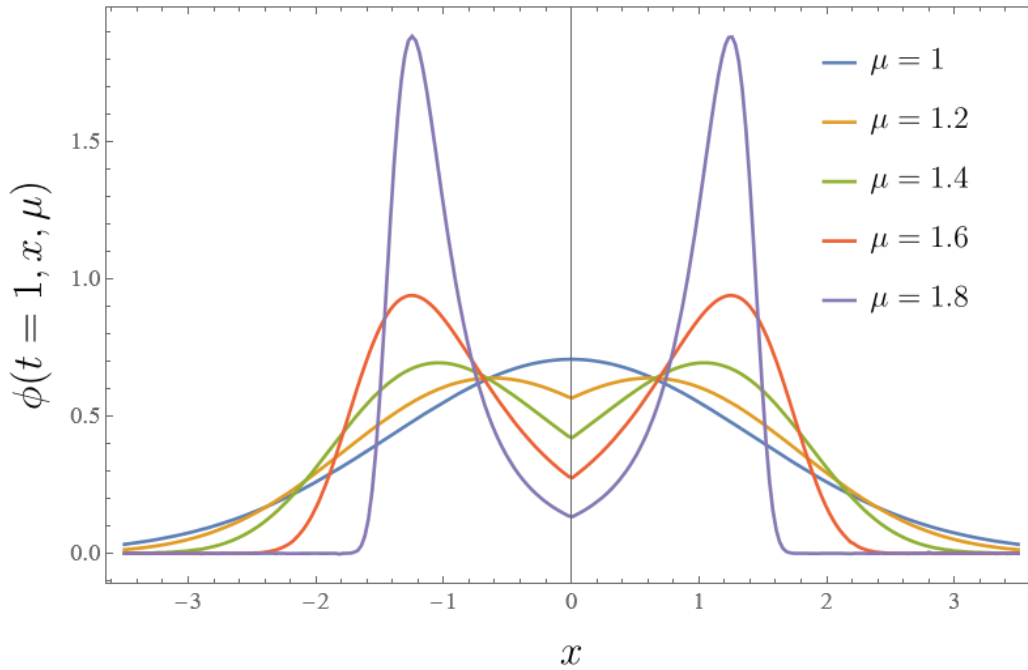


Figura 4.1: Comportamiento de la solución a la ecuación de onda con derivada fraccionaria en la parte temporal (4.6). Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$  y  $t = 1$ , mientras se varía el orden de la derivada.

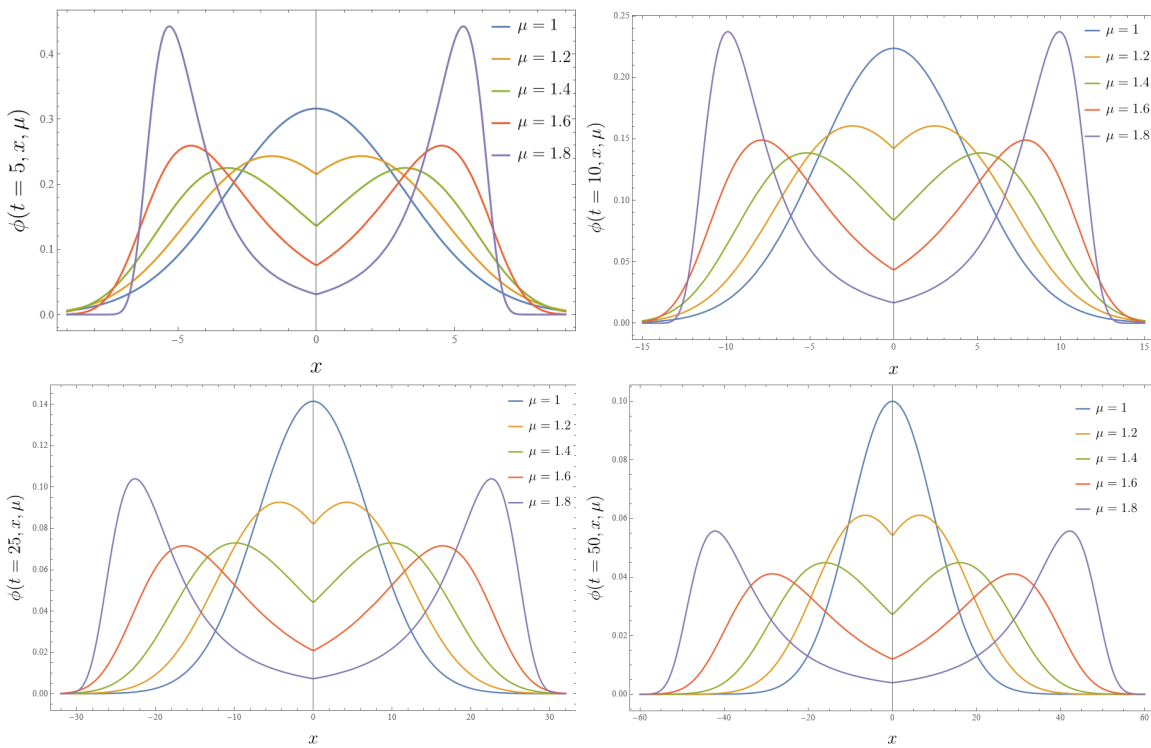


Figura 4.2: Comportamiento de la solución a la ecuación de onda fraccionaria (4.6) a distintos tiempos considerando unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ ,  $t = 5$  (superior izquierda),  $t = 10$  (superior derecha),  $t = 25$  (inferior izquierda) y  $t = 50$  (inferior derecha).

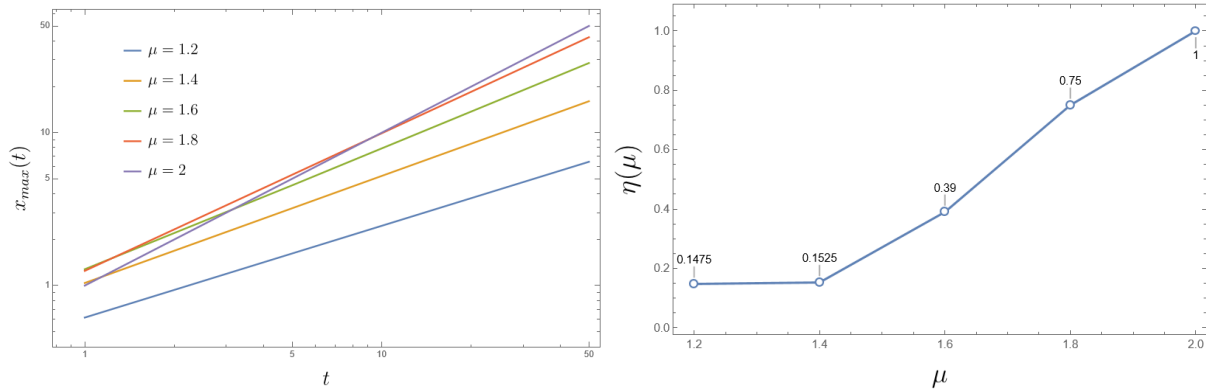


Figura 4.3: Desplazamiento de los máximos en la solución a la ecuación de onda fraccionaria (4.6) para distintos órdenes de derivada (izquierda), con su respectiva pendiente (derecha).

## 4.2. Ecuación Escalar de Klein-Gordon con Derivada Temporal Fraccionaria

Ahora consideramos la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionaria unidimensional, dada como

$$\frac{1}{\Gamma(2-\mu)} \int_0^t (t-t')^{1-\mu} \partial_{t'}^2 \phi(t,x) dt' = c^2 \partial_x^2 \phi(t,x) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi(t,x). \quad (4.7)$$

Al imponer las condiciones iniciales generales  $\phi(0,x) = f(x)$ ,  $\partial_t \phi(0,x) = g(x)$ , al igual que en el caso de orden entero (3.5), el cálculo de la solución se complica bastante más y no hay resultados en términos de la función H de Fox que permitan avanzar. La ecuación (4.7) en el espacio de Fourier-Laplace se da por

$$\tilde{\phi}(s,k) = \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} f(k) + \frac{s^{\mu-2}}{s^\mu + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} g(k). \quad (4.8)$$

Se realiza primero la transformada inversa de Fourier, obteniendo

$$\tilde{\phi}(s,x) = \frac{1}{2c\sqrt{s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-x'|}{c} \sqrt{s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} [s^{\mu-1} f(x') + s^{\mu-2} g(x')] dx'. \quad (4.9)$$

A partir de la cual, por simplicidad e interés, se imponen las condiciones iniciales  $f(x) = \delta(x)$  y  $g(x) = 0$ , obteniendo en el espacio de Laplace

$$\tilde{\phi}(s, x) = \frac{1}{2c} \frac{s^{\mu-1}}{\sqrt{s^{\mu} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} e^{-\frac{|x|}{c} \sqrt{s^{\mu} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}}. \quad (4.10)$$

Aún tras considerar estas condiciones iniciales, realizar la transformada inversa restante de manera analítica resulta inaccesible. Por lo tanto, para vislumbrar la evolución del sistema y poder ver las consecuencias de la derivada fraccionaria en el tiempo, se realiza primero un análisis numérico.

Realizando la transformada inversa de Laplace a (4.10) numéricamente mediante Mathematica. Este procedimiento requiere fijar  $t$  y dar el valor del dominio en  $x$  de manera discreta, por lo que las gráficas resultantes se obtienen discretas a intervalos no tan pequeños, y se unen los puntos correspondientes, por lo que dan curvas no tan suaves. Al igual que otros resultados, se varía el orden de la derivada, con el fin de poder apreciar su evolución y la influencia de estos parámetros.

En la Figura 4.4 se aprecia el comportamiento de la solución de la ecuación para Klein-Gordon, realizando transformada inversa de Laplace numérica a (4.9), para  $t = 1$  y distintos valores de la masa. En esta figura se aprecia que cuando la masa no es muy grande, no hay gran diferencia del comportamiento a la solución de la ecuación de onda fraccionaria. Se mantiene el comportamiento que transita de una gaussiana a dos pulsos simétricos, conforme el orden de la derivada fraccionaria pasa de  $\mu = 1$  a  $\mu = 2$ . La única diferencia es que para Klein-Gordon fraccionario, la función en cuestión no siempre es positiva, alrededor del origen se tienen valores negativos.

Conforme se aumenta el valor de la masa en la ecuación de Klein-Gordon fraccionaria, se va alejando del comportamiento de la ecuación de onda fraccionaria. Incluso a  $t = 1$  con masas mayores a  $m = 1$  se pierde el característico comportamiento de dos pulsos simétricos propagándose. Para órdenes de derivada fraccionaria menores a  $\mu = 1.8$ , para  $m = 10$  las soluciones pasan a localizarse alrededor del origen y con un valor negativo. Solo para  $1.8 \leq \mu < 2$  se mantiene una evolución donde el campo mantiene oscilaciones, cuya amplitud aumenta en proporción al valor de la masa. A pesar de ello, se pierde en general el comportamiento de

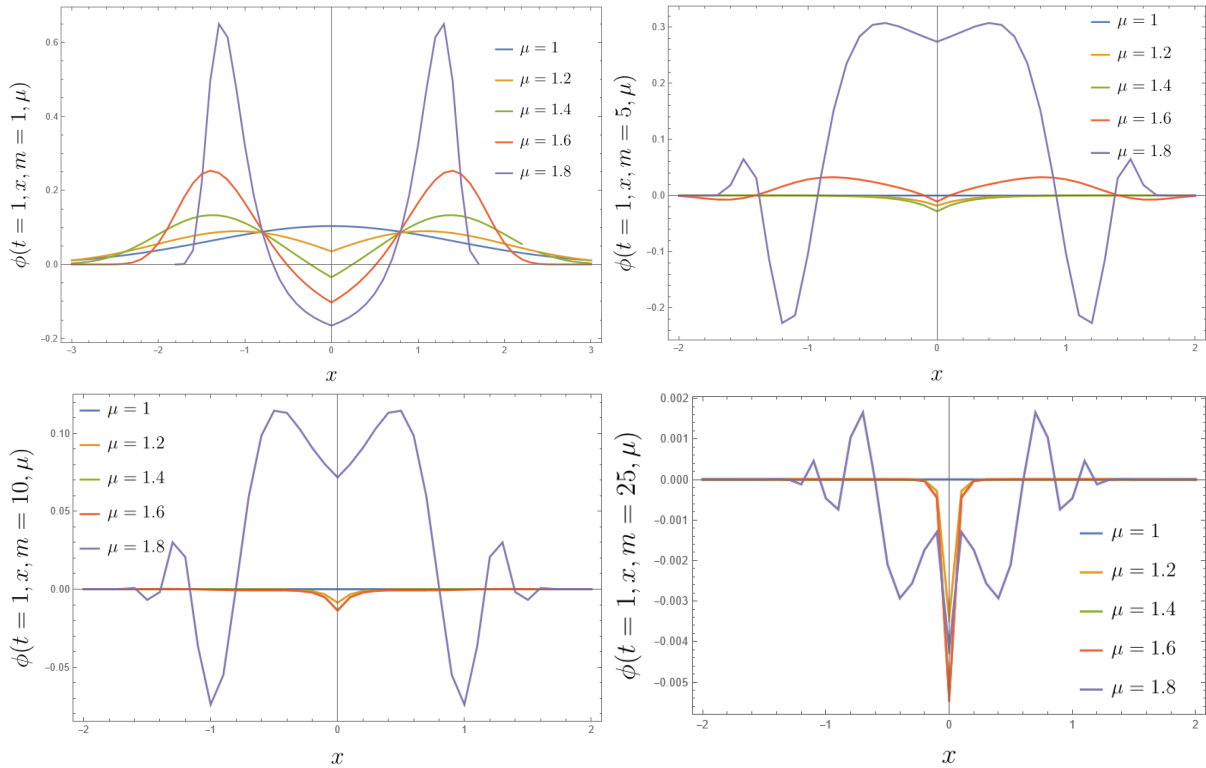


Figura 4.4: Comportamiento de solución numérica a Klein-Gordon fraccionario, aplicado a Laplace (4.10). Se fija  $t = 1$  y varía la masa,  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  (inferior izquierda) y  $m = 25$  (inferior izquierda) y consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

propagación de pulso.

En la Figura 4.5 se puede observar el comportamiento de la solución numérica al aumentar el tiempo de evaluación a  $t = 5$ . Para  $m = 1$  solo los casos con  $\mu \geq 1.6$  mantienen un comportamiento que presenta oscilación, el resto (salvo  $\mu = 1$  que por la escala no se aprecia pero mantiene un comportamiento de gaussiana) pasan a ese comportamiento localizado alrededor del origen y con valor negativo. Al aumentar el valor de la masa solo el caso con  $\mu = 1.8$ , mantiene un comportamiento con oscilación. Nuevamente no se aprecia que haya propagación al menos de un pulso “principal”, el comportamiento general de los casos fraccionarios, tiende a la localización en el origen. Comportamiento que apresura un valor mayor de la masa.

Comparando las Figuras 4.4 y 4.5, podemos observar la influencia de la masa en el hecho de que disminuye drásticamente la amplitud de las oscilaciones. En el caso de  $m = 1$  esta diferencia de tiempo (de  $t = 1$  a  $t = 5$ ) cambia un orden de magnitud la escala donde se manejan las soluciones. Mientras que para  $m = 25$  en la misma diferencia de tiempo, son

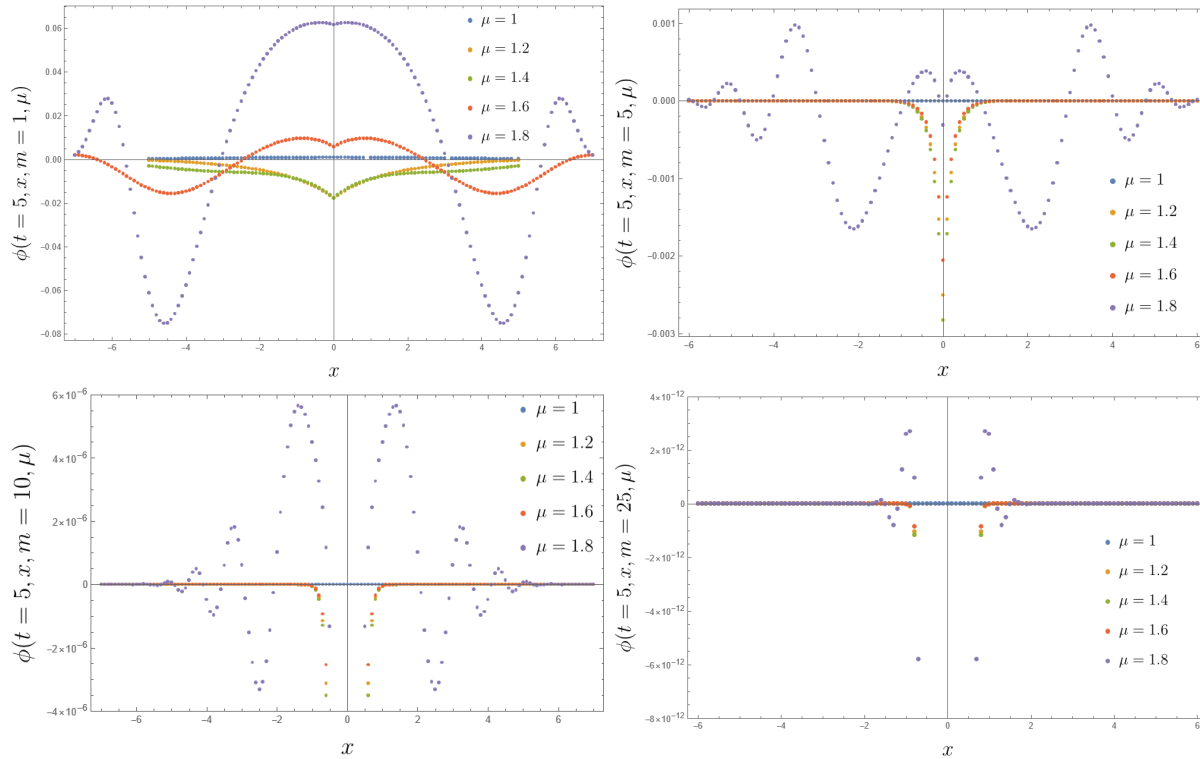


Figura 4.5: Comportamiento de solución numérica a Klein-Gordon fraccionario, aplicado a Laplace (4.10). Se fija  $t = 5$  y varía la masa,  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  (inferior izquierda) y  $m = 25$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

alrededor de 9 órdenes de magnitud. Además, vemos que al menos en sus respectivas escalas, es más pronunciada la localización que van obteniendo las soluciones alrededor del origen.

En el caso de la solución numérica proveniente de la transformada inversa de Laplace de Klein-Gordon fraccionario, evaluada en  $t = 10$  en la Figura 4.6. Se aprecia este comportamiento de localización, donde a partir de considerar  $m = 5$  todos los casos fraccionarios evaluados presentan la localización alrededor del origen. Incluso el caso  $\mu = 1.8$ , a pesar de mantener oscilaciones, gana relevancia el comportamiento de localización. Es para el caso con mayor masa  $m = 25$ , donde todos los casos fraccionarios solo presentan la localización.

La localización se ve ampliamente propiciada por la masa, ya que incluso a  $t = 1$  se puede observar está presente para el caso  $m = 25$ . Por lo que al contrario del caso de Klein-Gordon de orden entero, e incluso Klein-Gordon con disipación, el caso fraccionario pierde completamente la propagación. Se mantiene la atenuación de las soluciones a tiempos cortos para posteriormente dar paso a la localización alrededor del origen. Este último comportamiento parece ser

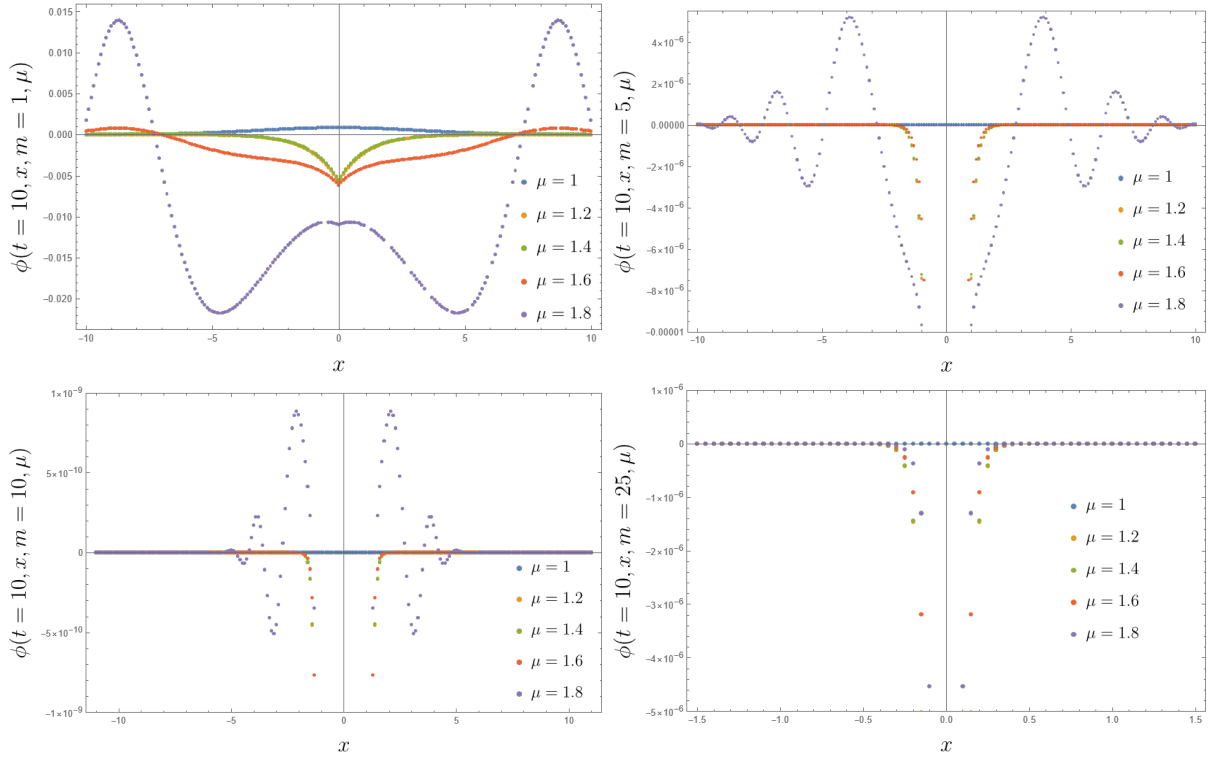


Figura 4.6: Comportamiento de solución numérica a Klein-Gordon fraccionario, aplicado a Laplace (4.10). Se fija  $t = 10$  y varía la masa,  $m = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  (inferior izquierda) y  $m = 25$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

característico del caso fraccionario, y no es clara aún su aparición ni sus consecuencias.

A modo de verificar los resultados presentados, se realiza la transformada inversa de Fourier de manera numérica. Es decir, considerando las condiciones iniciales de función de Green en la ecuación (4.8), se realiza la transformada inversa de Laplace primero, obteniendo

$$\hat{\phi}(t, k) = E_{\mu} \left[ -t^{\mu} \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right]. \quad (4.11)$$

A esta ecuación se aplica la transformada inversa de Fourier de manera numérica usando las funciones para ello contenidas en Mathematica. A diferencia del método numérico usado para realizar la transformada inversa de Laplace, en el caso de Fourier podemos obtener soluciones para un dominio continuo. Evitando así presentar gráficas discretas, aunque a un costo de tiempo de cómputo considerable. En la Figura 4.7 se puede apreciar el comportamiento, coincidiendo con los obtenidos con Laplace (4.4). Se observa que a tiempo  $t = 1$  es similar a la forma

de las soluciones para la ecuación de onda fraccionaria (4.2). Una diferencia notable son las amplitudes más pronunciadas al haber masa, así como el hecho que al aumentar  $t$ , la estructura de las soluciones no se mantiene constante pero si se atenúan con el paso del tiempo.

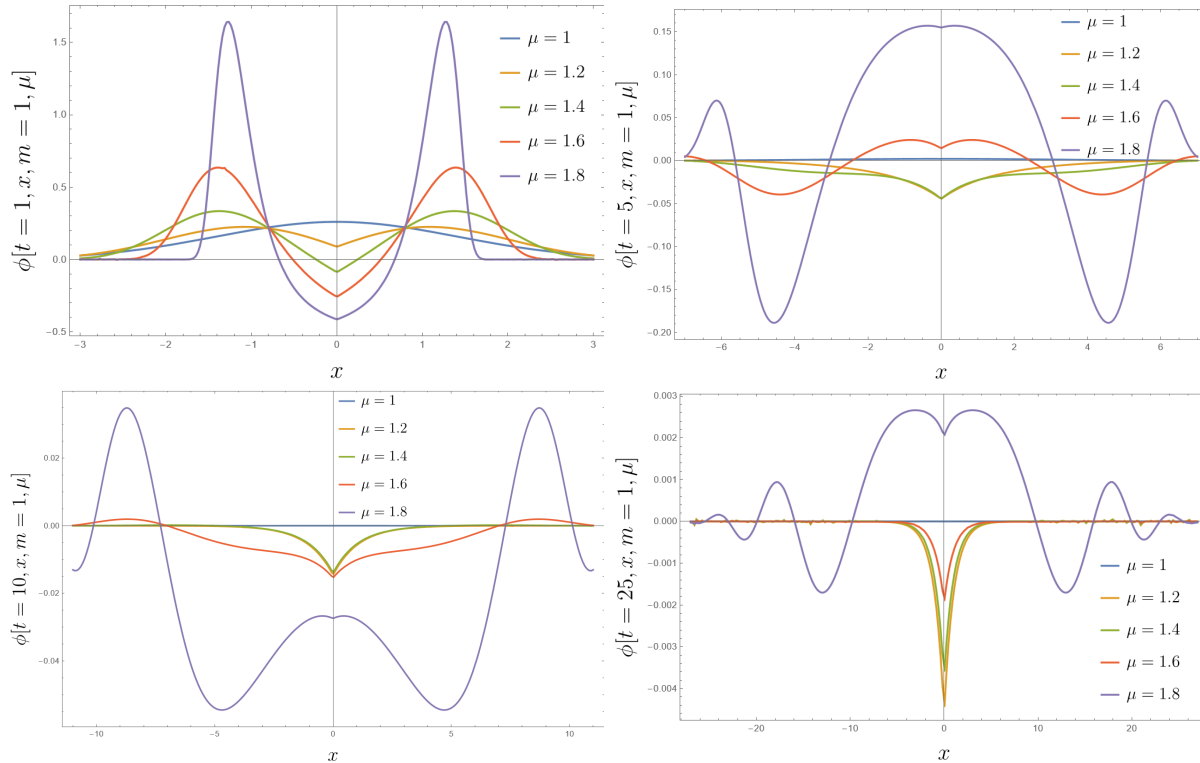


Figura 4.7: Comportamiento de solución a la ecuación fraccionaria de Klein-Gordon mediante transformada de Fourier numérica. Se consideran unidades naturales y se fija  $m = 1$  para variar el tiempo.  $t = 1$  (superior izquierda),  $t = 5$  (superior derecha),  $t = 10$  (inferior izquierda) y  $t = 25$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

Para valores de masa que superan  $m = 5$  y tiempo  $t = 10$ , la solución al caso de Klein-Gordon fraccionario obtenido de manera numérica con Fourier. Presenta un comportamiento errático alrededor del eje horizontal, con pequeñas oscilaciones. Del método numérico con Laplace, se vio que las soluciones tienden a cero conforme  $|x|$  aumenta. Por dicha razón, se presentan en la Figura 4.8 los resultados para distintas masas pero a tiempos pequeños.

El comportamiento emergente de localización en Klein-Gordon solo está presente en el caso fraccionario, siendo con valor negativo. Recordando el aspecto que en difusión el campo  $\phi(t, x)$  se puede ver como una función de distribución de probabilidad, contrasta pues en esa perspectiva es una función definida positiva. Incluso en el caso de la ecuación de onda fraccionaria, este aspecto se mantiene. Por lo que en el caso donde hay localización, se deja de hablar de una

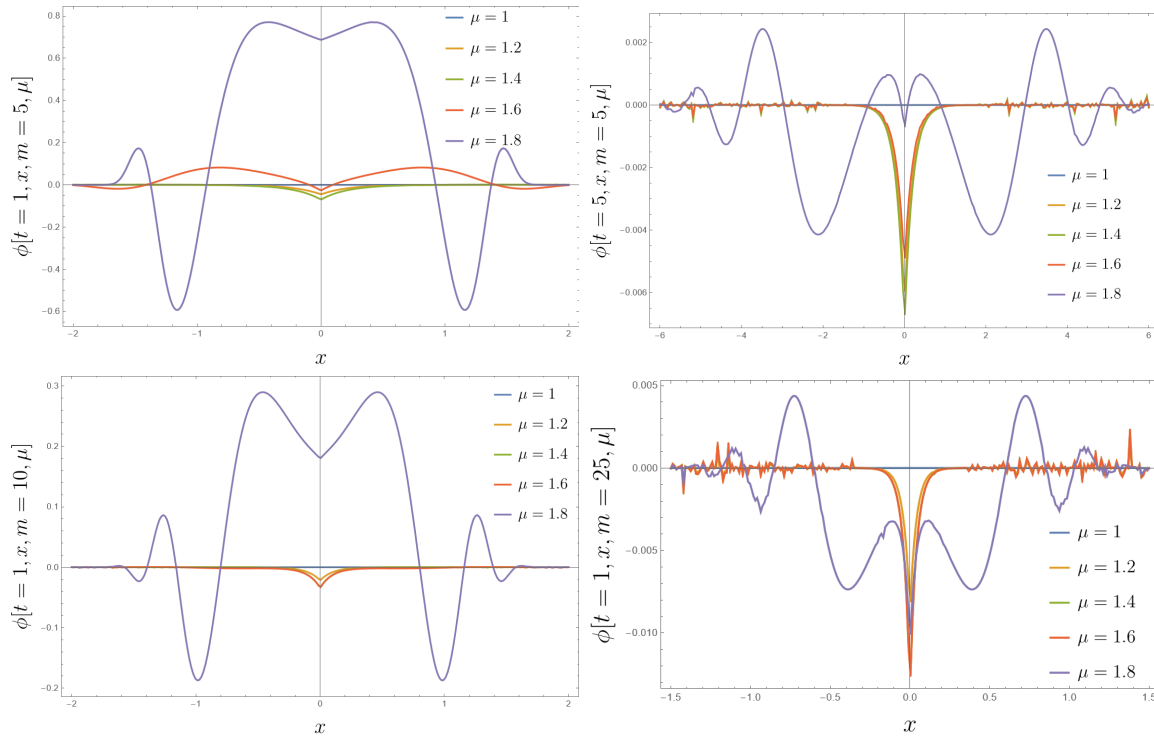


Figura 4.8: Comportamiento de solución numérica a la ecuación fraccionaria de Klein-Gordon. Se consideran unidades naturales y se varía el orden de la derivada ( $1 < \mu < 2$ ).  $m = 5$  y  $t = 1$  (superior izquierda),  $m = 5$  y  $t = 5$  (superior derecha),  $m = 10$  y  $t = 1$  (inferior izquierda),  $m = 25$  y  $t = 1$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

densidad de probabilidad.

En el capítulo 2 se mencionó un modelo estocástico de una partícula para moverse a la derecha (2.42) o a la izquierda (2.43). De este modelo se puede obtener la ecuación de Dirac, y posteriormente la ecuación de Klein-Gordon. En su artículo Plyukhin [55] menciona que la función correspondiente de dicho modelo, debe verse como un ensamble de partículas. Dejando de lado la distribución de probabilidad de una partícula.

Con ambas soluciones numéricas se ha obtenido un acercamiento y verificación al comportamiento que presenta Klein-Gordon fraccionario. Por lo que al realizar aproximaciones, tenemos una comparativa clara de que tan buena sea dicha aproximación. En (4.10) se presenta como único inconveniente no conocer la transformada inversa de Laplace del término exponencial, por lo que una expansión a este término podría ser viable. Para las transformadas de Laplace del tipo exponencial, Doetsch presenta un resultado (Teorema 30.3 en [66]), donde la transformada inversa de funciones tipo exponencial es equivalente a la transformada inversa de la expansión

de la función alrededor del origen. Es decir, la exponencial se escribe como serie de Maclaurin y se aplica la transformada inversa término a término, buscando reescribir el resultado nuevamente como una serie. En el caso de estudio dicha expansión otorga potencias positivas de  $s$ , lo que impide realizar transformada inversa término a término.

Para realizar aproximaciones en el espacio de Laplace en los límites de  $s \rightarrow 0$  y  $s \rightarrow \infty$  están los teoremas Tauberianos. Donde en el espacio de Laplace el comportamiento de la función para  $s \rightarrow 0$  corresponde para  $t \rightarrow \infty$ , y viceversa [67]. Por lo tanto, tomando el límite cuando  $s \rightarrow 0$  en (4.10) y realizando las transformada inversa de Laplace restante, se obtiene

$$\phi(t, x) = \frac{\hbar}{2mc^3} \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|}}{\Gamma(1 - \mu)t^\mu}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Por otra parte, al evaluar el límite  $s \rightarrow \infty$  se obtiene la correspondiente expresión de la

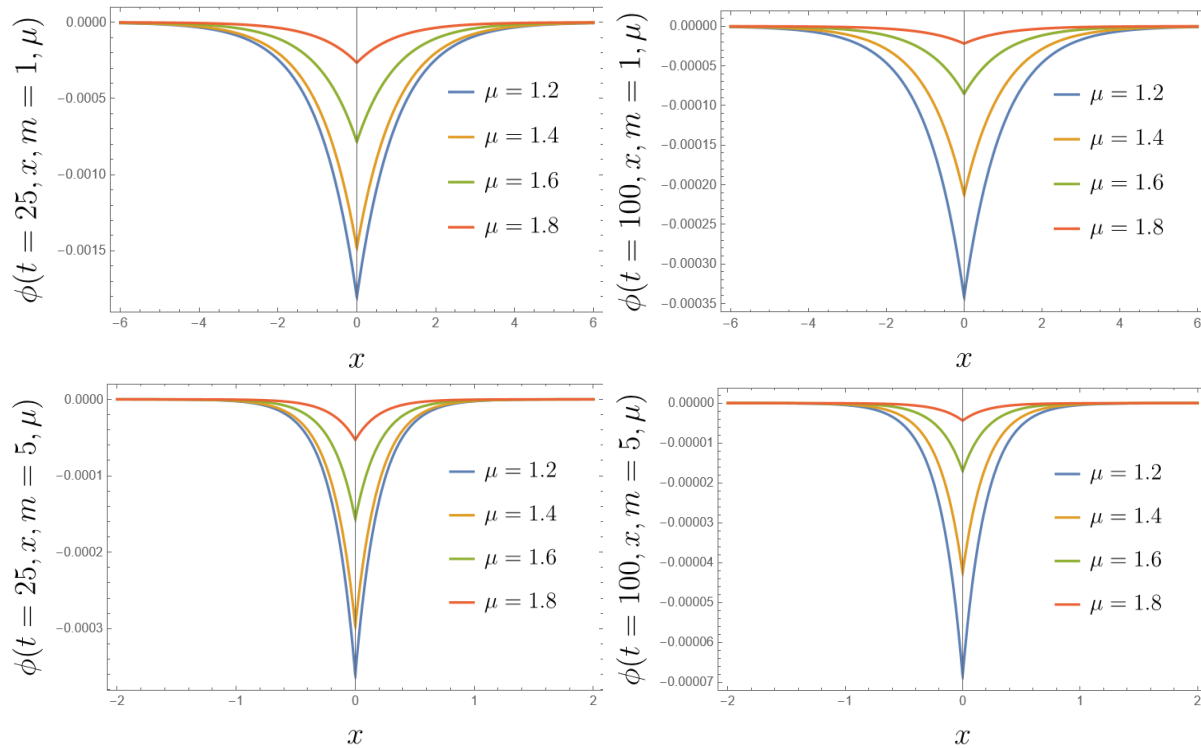


Figura 4.9: Comportamiento de aproximación de Klein-Gordon fraccionario a tiempos grandes (4.12), obtenido con los Teoremas Tauberianos. Se consideran unidades naturales.  $m = 1$  y  $t = 25$  (superior izquierda),  $m = 1$  y  $t = 100$  (superior derecha),  $m = 5$  y  $t = 25$  (inferior izquierda) y  $t = 100$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

ecuación de onda fraccionaria en el espacio de Laplace. Para poder realizar la transformada

inversa de Laplace se emplea la función de Wright, obteniendo así

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2c} t^{-\frac{\mu}{2}} W_{-\frac{\mu}{2}, 1-\frac{\mu}{2}} \left( \frac{|x|}{c} t^{-\frac{\mu}{2}} \right), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

El comportamiento de Klein-Gordon para tiempos grandes, obtenido mediante los teoremas Tauberianos (4.12) coincide con el visto en los resultados numéricos. Deja de haber oscilación y propagación, la función pasa a localizarse alrededor del origen, donde la exponencial con exponente negativo tiene mayor valor. Por su parte para tiempos cortos (4.13) se recupera el comportamiento de la ecuación de onda fraccionaria. Incluso este comportamiento lo podemos ver brevemente en la Figura 4.7, para  $t = 1$  y  $m = 1$ , comportamiento similar a (4.1).

Para verificar y comprobar estas aproximaciones, como fue en el caso de solución numérica se realiza ahora aproximación en espacio de Fourier (4.11), considerando tiempos cortos y largos, para posteriormente poder calcular la transformada inversa de Fourier. Con esto se obtienen los comportamientos

$$\phi(t, x) = \sqrt{\frac{\Gamma(1+\mu)}{4\pi c^2 t^\mu}} \exp\left[-\frac{m^2 c^4 t^\mu}{\hbar^2 \Gamma(1+\mu)}\right] \exp\left[-\frac{\Gamma(1+\mu)x^2}{4c^2 t^\mu}\right], \quad t \ll 1 \quad (4.14)$$

$$\phi(t, x) = \left[ \frac{\hbar t^{-\mu}}{2m c^3 \Gamma(1-\mu)} - \frac{\hbar^3 \left(1 + \frac{m c}{\hbar} |x|\right) t^{-2\mu}}{2m^3 c^7 \Gamma(1-2\mu)} \right] e^{-\frac{m c}{\hbar} |x|}, \quad t \gg 1. \quad (4.15)$$

En la Figura 4.10 se aprecia el comportamiento a tiempos cortos con aproximación en espacio de Fourier, donde se distingue el comportamiento usual de difusión. Descarta la presencia de oscilaciones como en las otras aproximaciones. Sin embargo, un valor de masa mayor a 1 atenúa rápidamente las soluciones. Por otra parte, en la Figura 4.11 para tiempos largos se observa las soluciones tienden a cero, salvo en el origen donde persiste un valor negativo. Mismo comportamiento que coincide con la solución numérica de Klein-Gordon fraccionario (4.8) y con la aproximación a tiempos largos en espacio de Laplace (4.12).

En este caso el comparar la aproximación desde ambos espacios (Fourier y Laplace) no coincide completamente. En ambas aproximaciones, para tiempos largos se presente el mismo comportamiento de localización, sin embargo, a tiempos cortos es un comportamiento sumamente distinto. Con la aproximación de Laplace a tiempos cortos (4.13) siendo la óptima a considerar, dado se asemeja al resultado numérico. Mientras que la aproximación en espacio de

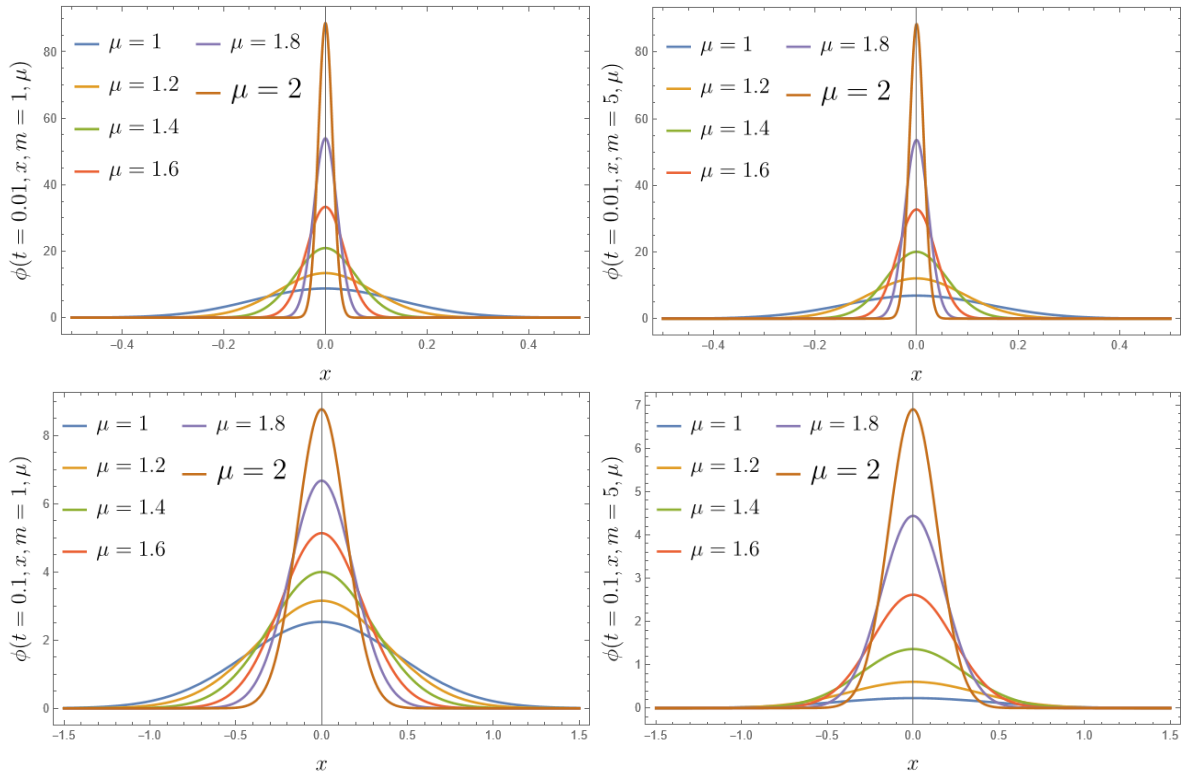


Figura 4.10: Comportamiento de solución aproximativa para Klein-Gordon fraccionario a tiempos cortos (4.14). Se consideran unidades naturales.  $t = 0.01$  y  $m = 1$  (superior izquierda),  $t = 0.01$  y  $m = 5$  (superior derecha),  $t = 0.1$  y  $m = 1$  (inferior izquierda),  $t = 0.1$  y  $m = 5$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

Fourier, omite por completo la separación en dos pulsos, dejando únicamente el comportamiento de difusión.

Se ha dado gran interés en obtener una solución analítica a Klein-Gordon. Con el fin de poder apreciar directamente la evolución de dicha solución y comparar con lo conocido de difusión, sin embargo, se dificulta considerablemente. No obstante más adelante, los resultados numéricos nos han permitido vislumbrar el comportamiento y contrastar con las aproximaciones correspondientes de tiempos cortos o largos. Pudiendo establecer que el comportamiento de propagación se pierde por completo, pasando a una localización, que al paso del tiempo y con mayor valor de masa, se ve atenuada.

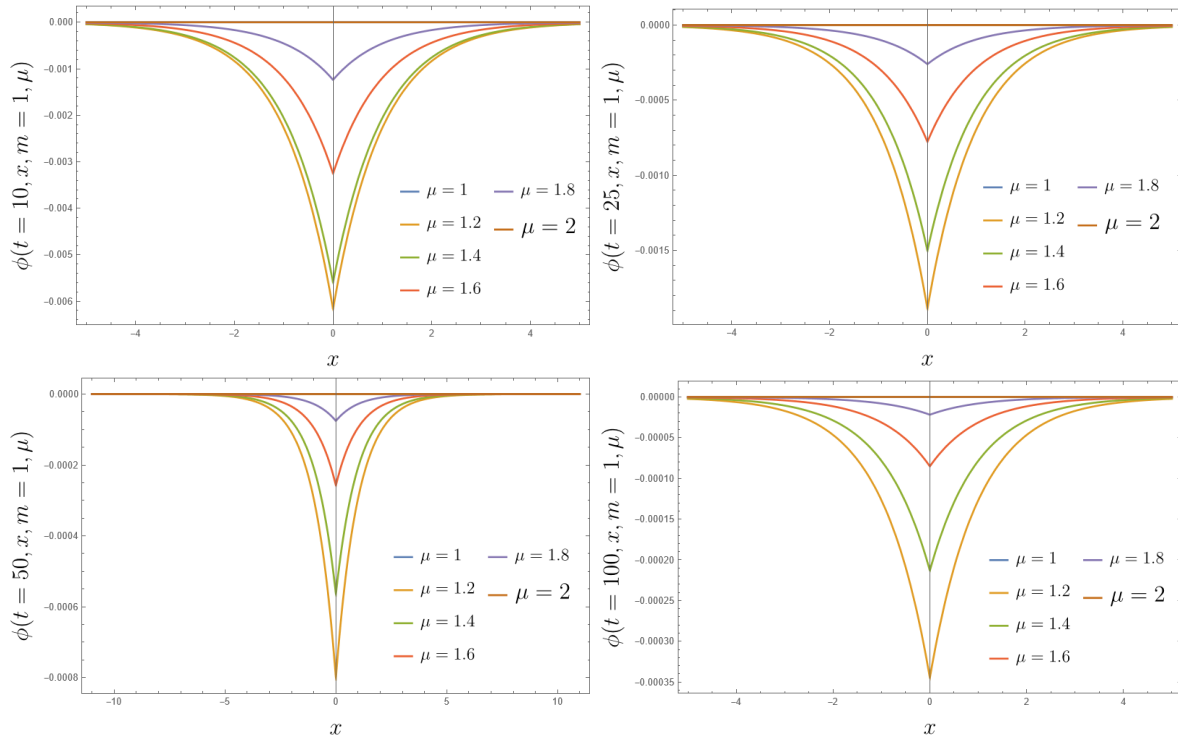


Figura 4.11: Comportamiento de solución aproximativa para Klein-Gordon fraccionario a tiempos largos (4.15). Se consideran unidades naturales.  $t = 10$  y  $m = 1$  (superior izquierda),  $t = 25$  y  $m = 1$  (superior derecha),  $t = 50$  y  $m = 1$  (inferior izquierda),  $t = 100$  y  $m = 1$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

### 4.3. Ecuación de Dirac

Por último, para el caso de la ecuación relativista de Dirac fraccionario, que como vimos en su representación de orden entero, se separa en dos ecuaciones lineales acopladas. Por lo que el orden de la derivada fraccionaria temporal está en el rango  $0 < \alpha < 1$ .

$$({}_0^C D_t^\alpha \pm \partial_x) \psi_{1,2}(t, x) = \frac{mc^2}{i\hbar} \psi_{2,1}(t, x). \quad (4.16)$$

Al igual que con la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionario, se dificulta hallar una solución analítica. Razón por lo que se presentan expresiones en espacio de Fourier o Laplace, así como soluciones numéricas y aproximaciones. En espacio de Fourier-Laplace con condición inicial general en ambos casos, la ecuación relativista de Dirac unidimensional

fraccionaria está dada como

$$\hat{\tilde{\psi}}_{1,2}(s, k) = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} f_{1,2}(k) + i \frac{\left[ \mp ck f_{1,2}(k) - \frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k) \right] s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}. \quad (4.17)$$

Aplicando primero la transformada inversa de Laplace se obtiene funciones Mittag-Leffler, que por el argumento de masa, como fue el caso de la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon, dificultan calcular la transformada inversa de Fourier restante.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{1,2}(t, k) = & E_{2\alpha} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right) \right] + \\ & + t^\alpha E_{2\alpha, \alpha+1} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right) \right] \left( \mp ick - \frac{imc^2}{\hbar} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por otro lado, aplicando primero la transformada inversa de Fourier se tiene

$$\tilde{\psi}_{1,2}(s, x) = \left[ \frac{s^{2\alpha-1} - \frac{imc^2}{\hbar} s^{\alpha-1}}{2c\sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}} \mp \frac{s^{\alpha-1}}{2c} \right] e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}}. \quad (4.19)$$

En ambos casos como fue al tratar la ecuación fraccionaria de Klein-Gordon, aquí se podría aplicar una solución numérica. No obstante se prefiere omitir en este caso, dada la cercanía entre la ecuación de onda y Klein-Gordon, donde el análisis puede resultar más provechoso, siendo con Dirac un acercamiento al ser una ecuación de tipo onda. Únicamente se presentan aproximaciones desde espacio de Fourier y de Laplace para tiempos cortos y largos. Considerando tiempos cortos y largos ( $t \ll 1$  y  $t \gg 1$ ) en la ecuación de Dirac en el espacio de Fourier (4.18), y aplicando la transformada inversa de Fourier restante, se puede obtener

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t, x) = & \frac{\hbar t^{-2\alpha}}{2mc^3\Gamma(1-2\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{\hbar^3 t^{-4\alpha} \left( 1 + \frac{mc}{\hbar}|x| \right)}{4m^3c^7\Gamma(1-4\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \\ & - \left[ \frac{it^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{i\hbar^2 t^{-3\alpha} \left( 1 + \frac{mc}{\hbar}|x| \right)}{4m^2c^5\Gamma(1-3\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \right] \\ & \mp \left[ \frac{t^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{t^{-3\alpha}}{4\Gamma(1-3\alpha)} x e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \right], \quad t \gg 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2}(t, x) &= \sqrt{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha}}} e^{-\frac{m^2 c^4 t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1+2\alpha)}} e^{-\frac{\Gamma(1+2\alpha)x^2}{4c^2 t^{2\alpha}}} \\
&\pm \frac{\pi c t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left( \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{4\pi \Gamma(1+\alpha) c^2 t^{2\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Gamma(1+\alpha)m^2 c^4 t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1+3\alpha)}} x e^{-\frac{\Gamma(1+3\alpha)x^2}{4c^2 \Gamma(1+\alpha) t^{2\alpha}}} \\
&- \frac{i m c^2 t^\alpha}{\hbar \Gamma(1+\alpha)} \sqrt{\frac{\Gamma(1+3\alpha)}{4\pi \Gamma(1+\alpha) c^2 t^{2\alpha}}} e^{-\frac{\Gamma(1+\alpha)m^2 c^4 t^{2\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)\hbar^2}} e^{-\frac{\Gamma(1+3\alpha)x^2}{4\Gamma(1+\alpha)c^2 t^{2\alpha}}}, \quad t \ll 1.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Realizando un análisis similar partiendo de la ecuación de Dirac fraccionaria en espacio de Laplace (4.19), considerando límites a tiempos cortos y largos se pueden obtener las expresiones

$$\psi_{1,2}(t, x) = \frac{1}{2c} [1 \mp 1] t^{-\alpha} W_{-\alpha, 1-\alpha} \left( \frac{|x|}{c} t^{-\alpha} \right) - \frac{i m c}{2\hbar} W_{-\alpha, 1} \left( \frac{|x|}{c} t^{-\alpha} \right), \quad t \ll 1, \tag{4.22}$$

$$\psi_{1,2}(t, x) = \frac{1}{2c} \left[ \frac{\hbar}{m c^2} \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} - (i \pm 1) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] e^{-\frac{m c}{\hbar} |x|}, \quad t \gg 1. \tag{4.23}$$

Los comportamientos provenientes de aproximaciones desde el espacio de Laplace, presentan términos similares a los vistos con la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionario en el mismo caso. Una diferencia considerable es que a tiempos cortos (4.22) el término real existe solo para la segunda componente de  $\psi$ . Este término es similar a la solución de la ecuación de onda fraccionaria en términos de la función de Wright (4.13), salvo que los índices están en un dominio mayor, dado que  $\alpha \in (0, 1)$ . Por otra parte la aproximación a tiempos largos, nuevamente muestra picos de localización, incluso en la parte imaginaria.

Habría que realizar un estudio detallado de la ecuación de onda fraccionaria de Dirac para comparar con las soluciones numéricas. Ya que el comportamiento de la ecuación de Dirac de orden entero dista de estas aproximaciones, pudiendo ser como el caso de la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon que solo en el caso fraccionario se tiene el comportamiento mostrado por las aproximaciones.

Por su parte las aproximaciones para la ecuación de Dirac desde el espacio de Fourier a tiempos largos (4.20), tienen nuevamente localización alrededor del origen. Si bien a diferencia de la expresión que se obtiene en el mismo límite desde el espacio de Laplace (4.23), hay una diferencia de potencias inversas. Sin embargo, no afecta al comportamiento principal de la solución. Mientras que para la aproximación a tiempos cortos, como fue en el caso de la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionario (4.14) se tienen gaussianas, salvo que para Di-

rac es una diferencia según la solución. Este resultado es curioso cuando menos al observar en la Figura 4.12, que para  $\psi_1$  el mayor pico está en la parte del eje  $x$  positivo, mientras que para  $\psi_2$  en la parte del eje negativo. Por lo que al reflejar en el eje vertical, la correspondiente parte de la solución mencionada, tendría un comportamiento similar al de la ecuación de onda fraccionaria (4.1).

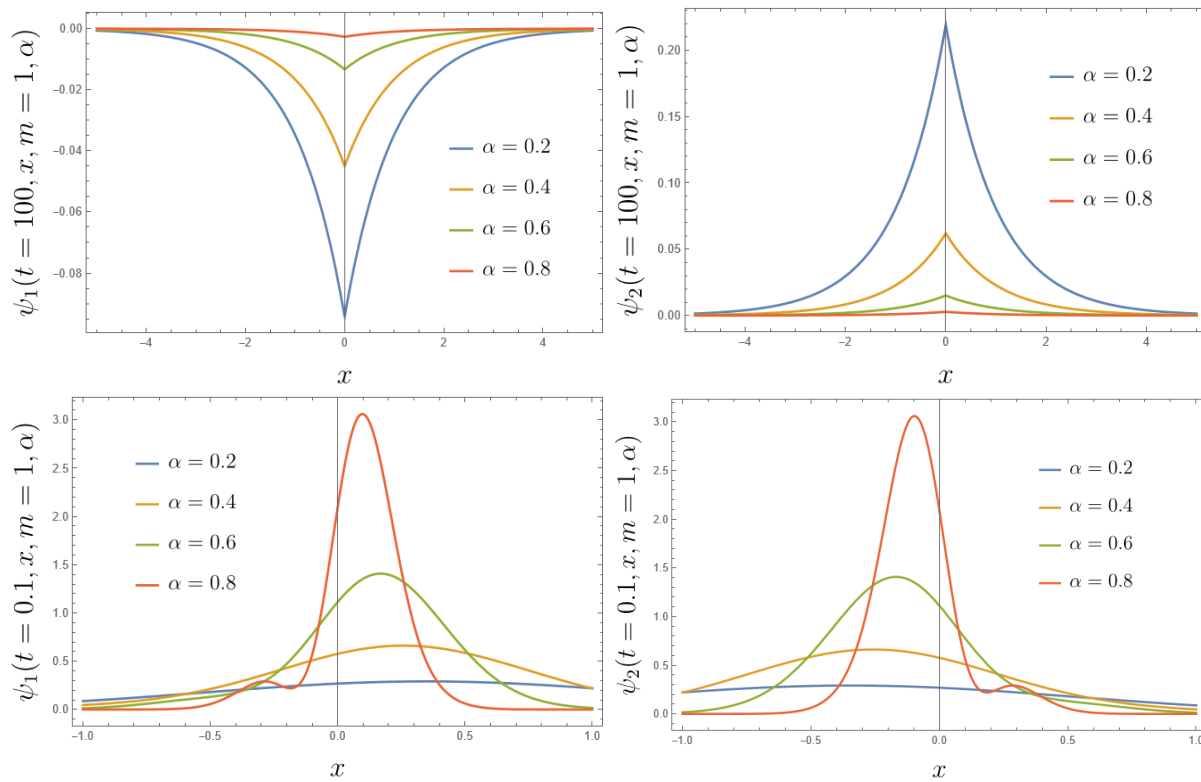


Figura 4.12: Comportamiento de aproximaciones realizadas en el espacio de Fourier a tiempos largos ((4.20) parte superior) y cortos ((4.21) parte inferior) de la ecuación fraccionaria de Dirac. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

Con esto se concluye la obtención de soluciones a la ecuación relativista de onda, la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon y la ecuación relativista de Dirac unidimensionales, con derivada temporal fraccionaria. Salvo el caso fraccionario de Klein-Gordon y Dirac, donde se realiza solución numérica para Klein-Gordon, y aproximaciones a tiempos cortos y largos, para Klein-Gordon y Dirac.

## 4.4. Relación de Dispersión de Orden Fraccionario

Un primer intento y que sería intuitivo, es evaluar directamente la derivada de Caputo en la solución de onda plana, como en el caso de la derivada de orden entero. Sin embargo, el resultado termina con dependencia temporal, asimismo dificulta obtener directamente  $\omega(\kappa)$ , y en su lugar se obtiene  $\kappa(\omega)$ . Como muestra de la complicación que se puede tener, se presenta el cálculo de esta última para el caso de Klein-Gordon fraccionario, donde es claro el caso para ecuación de onda fraccionaria ( $m = 0$ ),

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{1}{c^2 t^\mu} \left[ \frac{1 - \mu - i\omega t}{\Gamma(2 - \mu)} e^{i\omega t} + (-i\omega t)^\mu \left[ \frac{\Gamma(-\mu, -i\omega t)}{\Gamma(-\mu)} - 1 \right] \right]} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}. \quad (4.24)$$

Si bien no es intuitivo ver el comportamiento meramente por la expresión anterior (nótese la dependencia en  $t$ ), resulta reconfortante que al evaluar  $\mu = 2$ , se recupera  $\kappa(\omega)$  de Klein-Gordon de orden entero.

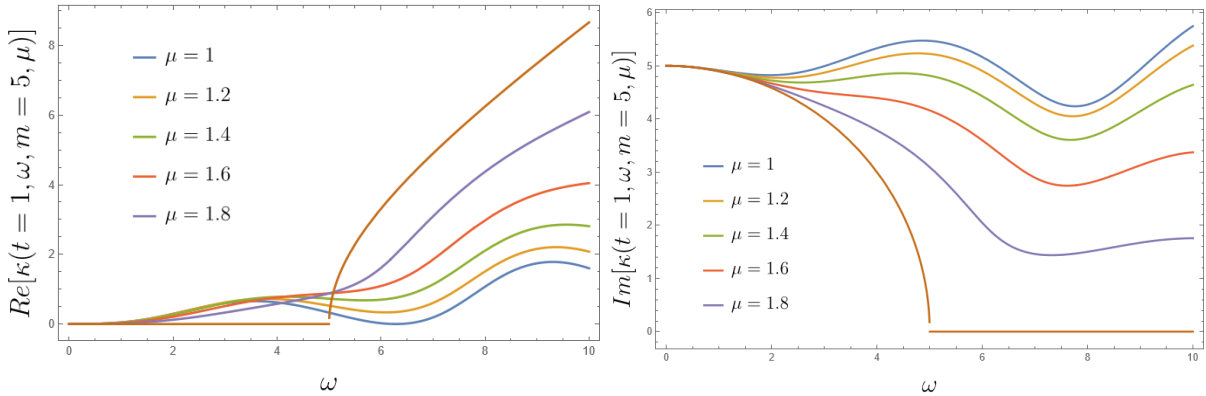


Figura 4.13: Parte Real e Imaginaria de la Relación de Dispersión fraccionaria (4.24), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ ,  $m = 5$ ,  $t = 1$  y distintos valores de  $\mu$ .

A pesar de recuperar el comportamiento esperado en los casos  $\mu = 1$  y  $\mu = 2$  de (4.24), donde se muestra una clara transición entre estos órdenes enteros de derivada, la dependencia en el tiempo en (4.24) no tiene sentido con la descripción usual de un relación de dispersión. La forma correcta de evaluar una relación de dispersión en el caso fraccionario lo especifica Giusti, donde se toma la transformada de Fourier de la ecuación diferencial parcial fraccionaria. Pues el resultado de la transformada correspondiente de la Derivada Fraccionaria de Caputo otorga el

término

$$\mathcal{F} \{ D_{\pm}^{\alpha} \phi(x) \} = (\mp ix)^{\alpha} \mathcal{F} \{ \phi(x) \}.$$

Sin embargo para emplear este resultado, el límite inferior en la integral de Caputo se debe tomar  $-\infty$  en lugar de 0. Lo que conlleva implícitamente a suponer que la dispersión de ondas es resultado de perturbaciones que ocurrieron mucho antes al tiempo de observación [68].

Con esta aclaración se puede obtener la relación de dispersión fraccionaria para Klein-Gordon, y donde se aprecia sin problema para la ecuación de onda haciendo  $m = 0$ . En esta deducción es viable obtener directamente por separado la parte real e imaginaria de la relación de dispersión,

$$\omega_r(\kappa) = \left( c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2\mu}} \sin \left( \frac{\pi}{2\mu} \right) \quad (4.25)$$

$$\omega_i(\kappa) = - \left( c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2\mu}} \cos \left( \frac{\pi}{2\mu} \right), \quad (4.26)$$

donde los subíndices  $r$  e  $i$  denotan parte real e imaginaria respectivamente. Cabe resaltar que en este análisis la derivada fraccionaria se tomó como  $\partial_t^{2\mu}$ , por lo que en este caso se tiene  $0.5 < \mu < 1$ .

El comportamiento de esta relación de dispersión fraccionaria se puede apreciar en la Figura 4.14, donde podemos ver que en los casos límite de orden entero  $\mu = 0.5$  y  $\mu = 1$  se recuperan sus respectivos comportamientos (ver capítulo 3). Donde para el primero solo hay parte imaginaria ( $\omega_r(\kappa) = 0$ ) y para el segundo solo parte real ( $\omega_i(\kappa) = 0$ ). Mientras que los casos fraccionarios presentan ambas partes, siendo en la parte imaginaria más claro el “barrido” entre ambos límites de orden entero. Se puede observar que en la parte real los casos fraccionarios presentan un comportamiento más cercano al entero para  $\mu = 1$ .

Las expresiones para velocidad de fase y grupo se obtienen de manera usual como al caso de orden entero, resultando ser

$$v_p(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \left( c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2\mu}} \sin \left( \frac{\pi}{2\mu} \right), \quad (4.27)$$

$$v_g(\kappa) = \frac{\kappa}{\mu} \left( c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2\mu}-1} \sin \left( \frac{\pi}{2\mu} \right). \quad (4.28)$$

Se puede apreciar que al tomar  $\mu = 1$  se recuperan los resultados del caso Klein-Gordon de orden entero, y posteriormente de la ecuación de onda si  $m = 0$ . El comportamiento de estas velocidades se muestra en las Figuras 4.15 y 4.16. Para el caso de la ecuación de onda fraccionaria vemos un comportamiento similar en velocidad de fase y grupo. Ambas inician en el origen y se ve una transición hacia una constante, 1 al considerar unidades naturales (caso ecuación de onda).

Al momento de añadir masa y esta iguale o supere el valor  $m = 1$  (en unidades naturales) aparece la divergencia usual en el origen para la velocidad de fase. En el caso entero esta tiende asintóticamente a la velocidad de propagación 1(o  $c$  si no se consideran unidades naturales), comportamiento que vemos para  $m = 1$ . No obstante para  $m > 1$  la velocidad de fase pasa el mencionado valor asintótico, disminuyendo hasta en un tiempo  $t \gg 1$ , llegar a cero.

Por su parte la velocidad de grupo sigue un comportamiento similar a la de fase cuando  $m = 0$ , coincidiendo con los casos enteros. Cuando se agrega masa en el intervalo  $0 < m < 1$ , se tiene un comportamiento divergente, idéntico para la velocidad de fase. Al pasar a  $m = 1$  se tiene el comportamiento de orden entero, ir asintóticamente hacia la velocidad de propagación. Más al pasar a  $m > 1$ , la velocidad de grupo aumenta y llega a un máximo, para posteriormente ir decayendo hacia 0.

Estos comportamientos para distintos valores de la masa no dejan claro si hay una aparición de dispersión anómala, característico de un proceso complejo, y es el caso estudiado en la ecuación de onda fraccionaria. Se entiende hay un proceso anómalo cuando  $V_g(\kappa) > V_p(\kappa)$  [68, 69], por lo que empleando las ecuaciones (4.27) y (4.28) podemos obtener al considerar unidades naturales para  $c = \hbar = 1$

$$\Delta V(\kappa) = V_g(\kappa) - V_p(\kappa) = \frac{V_p(\kappa)}{\frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{\kappa^2} \right)} \left[ 1 - \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{\kappa^2} \right) \right]. \quad (4.29)$$

Como la velocidad de fase y el índice de la derivada siempre son positivos, el signo de (4.29) depende únicamente del término entre corchetes<sup>1</sup>. Para casos límite para la masa y el número de

<sup>1</sup>En la expresión anterior se concibe nuevamente  $1 < \mu < 2$ , con el propósito de empatar con los resultados mostrados en la figura (4.17)

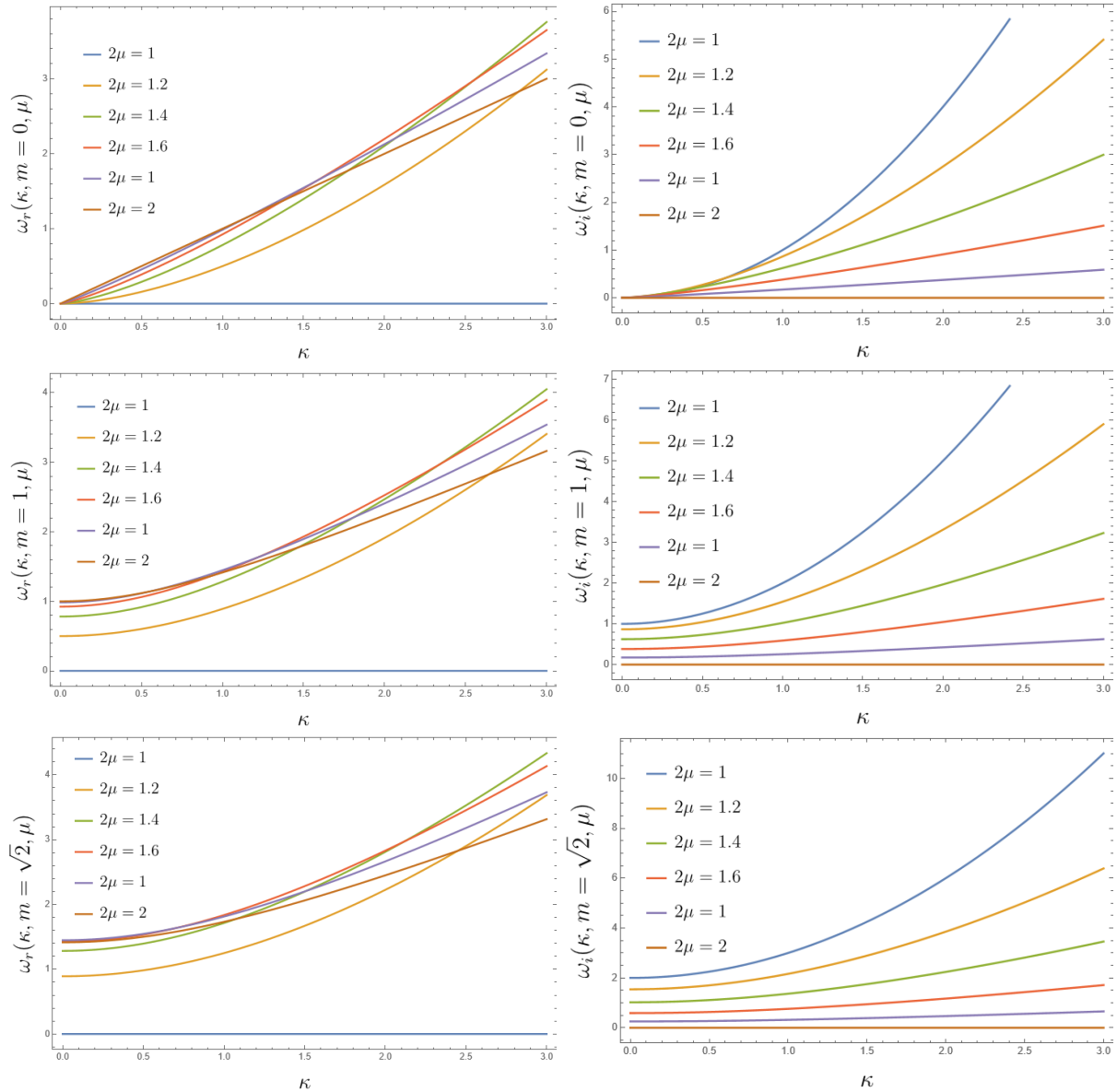


Figura 4.14: Comportamiento de la parte real (4.25) e imaginaria (4.26) de la relación de dispersión para Klein-Gordon fraccionaria. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ . Parte real columna izquierda con  $m = 0$  (superior),  $m = 1$  (central) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior). Parte imaginaria columna derecha con  $m = 0$  (superior),  $m = 1$  (central) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior).

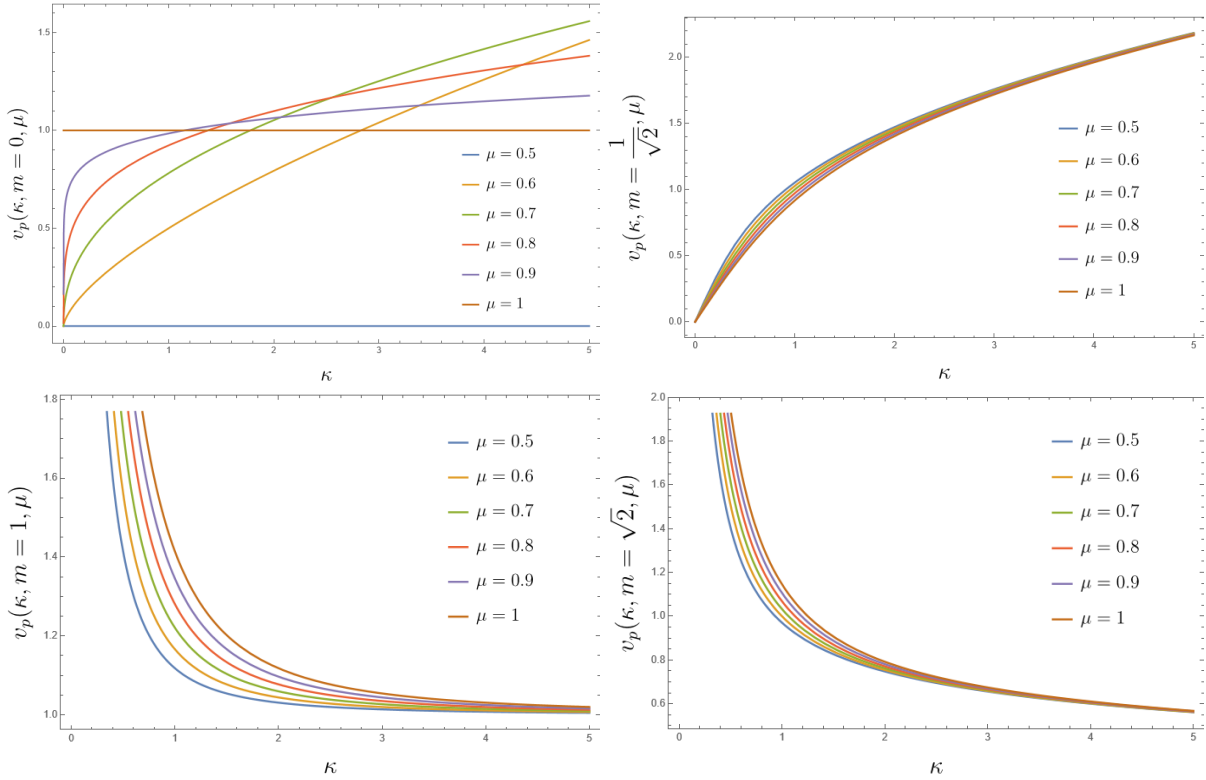


Figura 4.15: Comportamiento de la velocidad de fase fraccionaria para Klein-Gordon (4.27). Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior izquierda),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha).

onda se tiene

$$1 - \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{\kappa^2} \right) = \begin{cases} m \rightarrow 0 : \Delta V(\kappa) \geq 0, & \text{Anómala} \\ \kappa \rightarrow 0 : \Delta V(\kappa) < 0, & \text{Normal} \\ m \rightarrow \infty : \Delta V(\kappa) < 0, & \text{Normal} \\ \kappa \rightarrow \infty : \Delta V(\kappa) \geq 0, & \text{Anómala} \end{cases}.$$

Con este resultado vemos que el caso de la ecuación de onda fraccionaria resulta en dispersión anómala, como se reporta usualmente [40]. Mientras que el hecho de agregar masa, solo en casos de número de onda por encima al valor de ésta se va a poder apreciar este comportamiento anómalo. Vemos así ante la introducción de derivada fraccionaria, a la masa como un retardante/impedimento de alcanzar la dispersión anómala. En la Figura 4.17 se aprecian las regiones donde se puede tener dispersión anómala. El caso entero  $\mu = 2$  carece de este comportamiento. Mientras sea fraccionario y llegue a  $\mu = 1$ , habrá zonas donde este comportamiento emerja. En

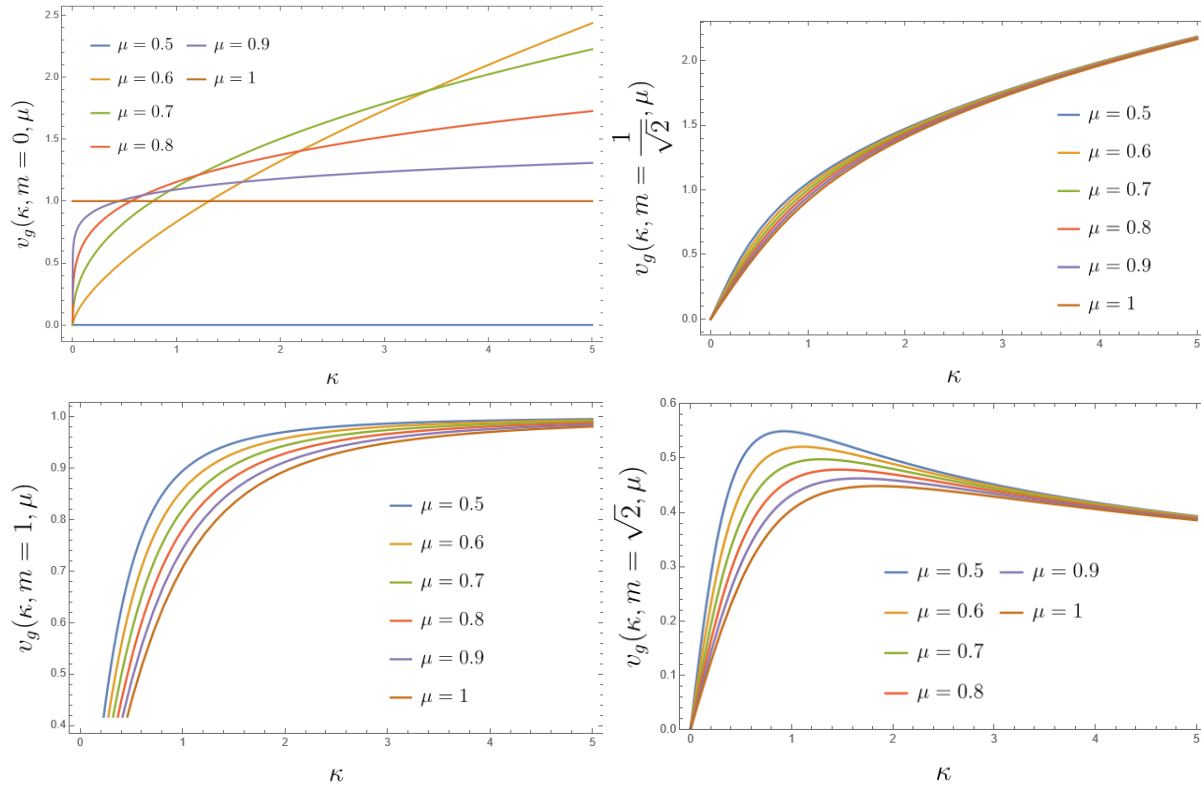


Figura 4.16: Comportamiento de la velocidad de grupo fraccionaria para Klein-Gordon (4.28). Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior izquierda),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha).

parte podemos ver a la derivada fraccionaria como una operador que engloba comportamiento de dispersión anómala, y según el orden de la derivada, serán menores o mayores las zonas donde pueda ocurrir.

Estos resultados se obtienen de manera usual a estudios de dispersión, que es más común la dependencia en  $\kappa$ . Sin embargo Mainardi realiza un análisis a partir del índice de refracción imaginario. Mismo que embebe las propiedades de dispersión y atenuación [4]. Este coeficiente se encuentra en el problema de señalización, donde considerando un pulso inicial  $r_0(t)$ , la solución en espacio de Laplace de manera general está dada como

$$r(s, x) = r_0(s)e^{s[t - \frac{x}{c}n(s)]}. \quad (4.30)$$

Aquí  $n(s)$  corresponde al evaluarse en  $\pm i\omega$  al índice de refracción imaginario. Si bien tratamos el problema de Cauchy, considerando el problema de señalización se tiene un término

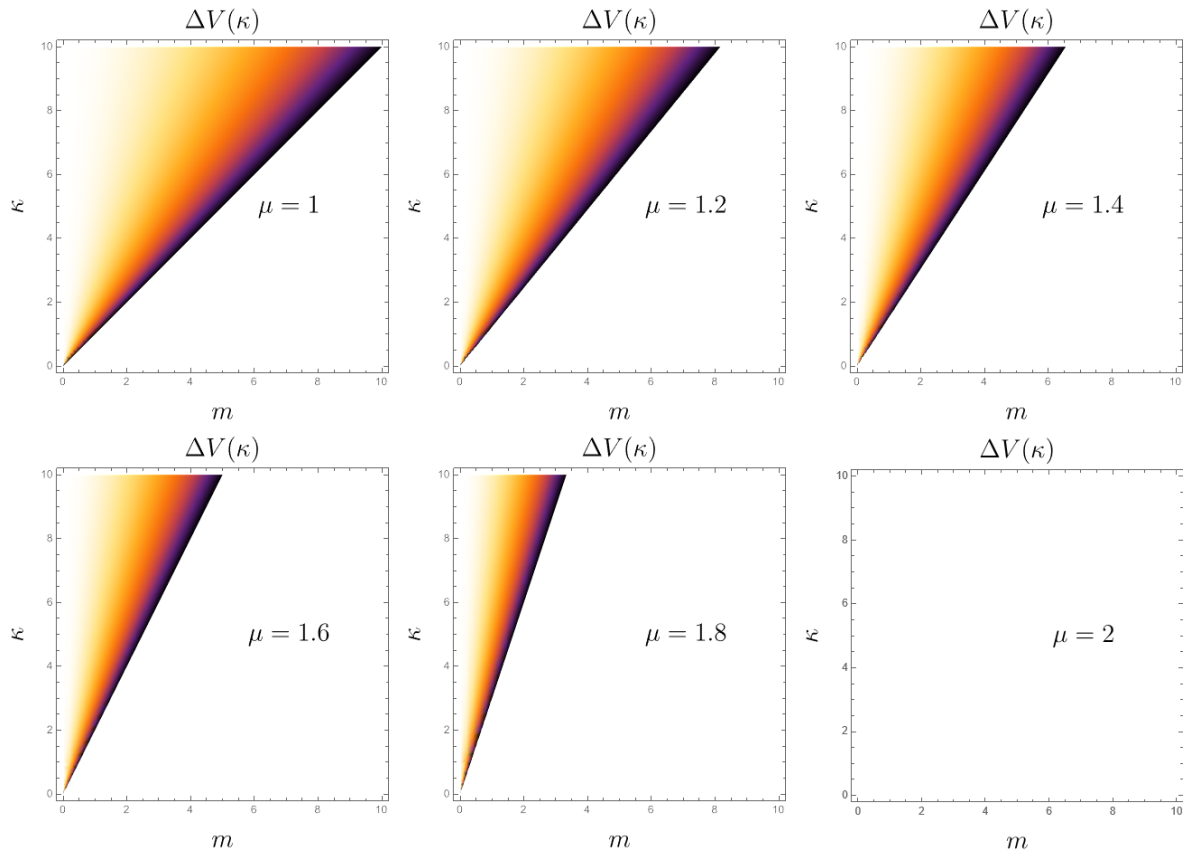


Figura 4.17: Regiones donde se tiene dispersión anómala (parte con color) en la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionaria en el tiempo, según el valor del orden de la derivada temporal y la relación entre  $\kappa$  con  $m$  (4.29).

de exponente similar con Cauchy. Siendo que en espacio de Laplace, la ecuación de onda y Klein-Gordon fraccionarias difieren únicamente por el término de masa, se realiza directamente el análisis para Klein-Gordon.

Para Klein-Gordon fraccionario se tiene

$$n(s) = \sqrt{s^{\mu-2} + \frac{m^2 c^4}{s^2 \hbar^2}}, \quad (4.31)$$

que al evaluar en  $s = \pm i\omega$  se obtiene el índice de refracción imaginario. Sustituyendo se iguala al resultado  $c[V(\omega)^{-1} \mp i\delta(\omega)/\omega]$  [4], donde  $V(\omega)$  representa la velocidad de fase y  $\delta(\omega)$ , el coeficiente de atenuación. Elevando al cuadrado y separando en parte real e imaginaria se

encuentran las siguientes expresiones

$$c^2 \left[ \frac{\omega^2}{V^2(\omega)} - \delta^2(\omega) \right] = -\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \omega^\mu - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \quad (4.32)$$

$$\delta(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \omega^{\mu-1}}{2c^2} V(\omega). \quad (4.33)$$

Con la segunda expresión se puede sustituir en la primera y obtener expresión explícita para  $V(\omega)$ , y posteriormente para  $\delta(\omega)$ .

$$V(\omega) = \frac{\sqrt{2}c}{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \omega^{\mu-1}} \sqrt{\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \sqrt{\omega^{2\mu} + \frac{m^4 c^8}{\hbar^2} + \frac{2m^2 c^4}{\hbar^2} \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}}, \quad (4.34)$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}c} \sqrt{\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \sqrt{\omega^{2\mu} + \frac{m^4 c^8}{\hbar^2} + \frac{2m^2 c^4}{\hbar^2} \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}}. \quad (4.35)$$

En la Figura 4.18 se aprecia el comportamiento de la velocidad de fase. Podemos ver que

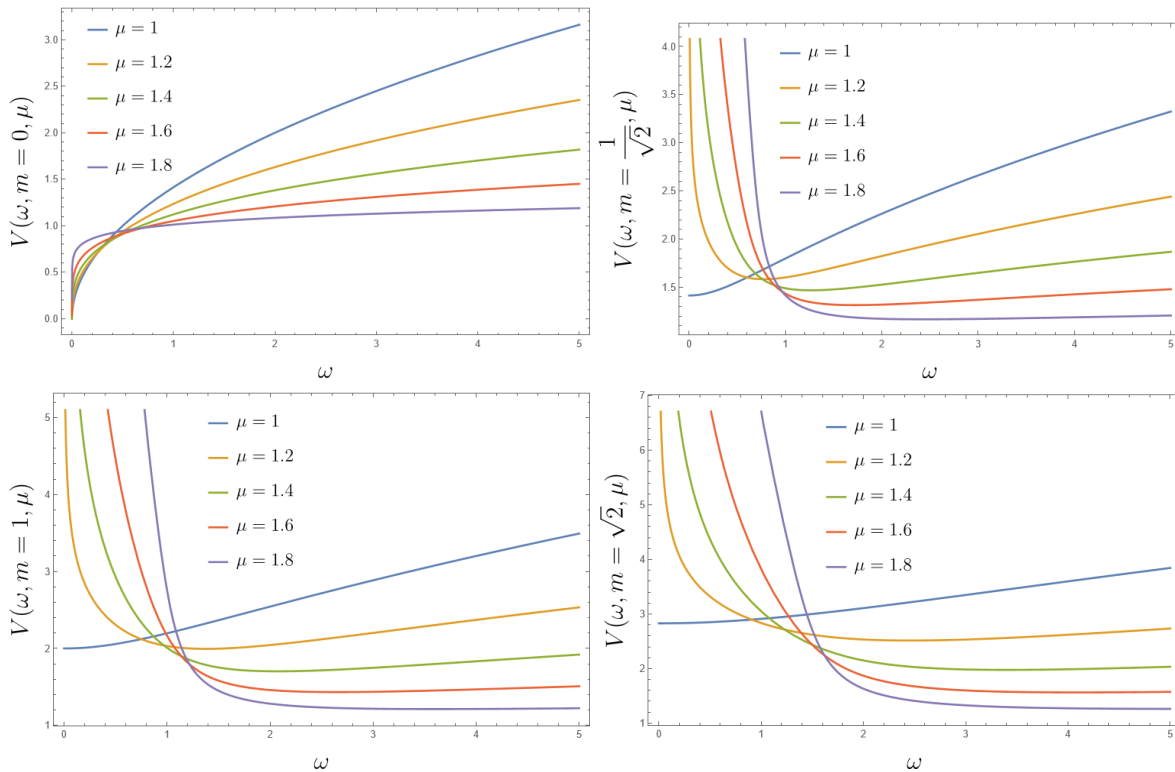


Figura 4.18: Comportamiento de la velocidad de fase de Klein-Gordon fraccionario (4.34), obtenida mediante el índice de refracción complejo. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior derecha),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior izquierda),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha).

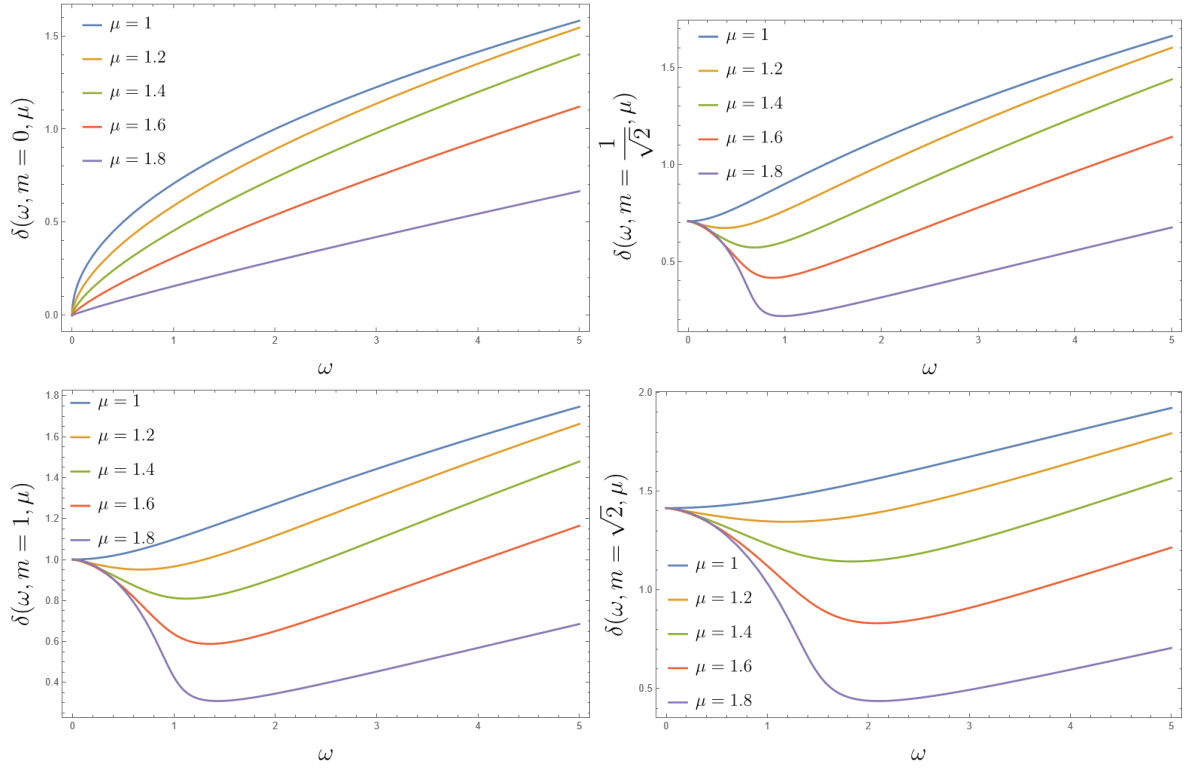


Figura 4.19: Comportamiento de la coeficiente de atenuación obtenido de Klein-Gordon fraccionario (4.35), mediante el índice de refracción complejo. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior derecha),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior izquierda),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha).

la introducción del término para la masa cambia abruptamente el comportamiento. Conforme aumenta el valor de la masa se ve mayor el comportamiento asintótico hacia la velocidad de propagación ( $c = 1$ ), sin embargo, al contrario del caso de orden entero, esto no ocurre. A su vez, se observa como la velocidad para los casos fraccionarios, no está acotada y van por encima de la velocidad de propagación. Contrasta con su parte de orden entero, que al aumentar la frecuencia, esta tiende asintóticamente a la velocidad de propagación. Esto nos permite estipular que el orden fraccionario presenta una correlación de largo alcance. Es decir, la tendencia a la velocidad de fase tarde en ocurrir, y se nota sobre todo en valores mayores.

Por su parte el coeficiente de atenuación (4.35) en base al comportamiento mostrado en la Figura 4.19, para  $0 < \omega < m$  se tiene el comportamiento usual para el caso de orden entero. Conforme se acerca al valor  $\omega \sim m$  en los casos fraccionarios se observa disminuye el valor del coeficiente de atenuación. No llega a anularse, alcanza un mínimo y posteriormente aumenta nuevamente. En el caso de orden entero se tiene que para  $\omega = m$ , el coeficiente se anula y

así se queda. Concuera con el hecho de que la velocidad de fase se mantiene por encima de la velocidad de propagación. Esto puede servir de evidencia, al menos de manera cuantitativa, del efecto en las correlaciones de largo alcance. Un aspecto de complejidad inducido por la introducción de derivadas fraccionarias temporales.

Con la expresión obtenida para velocidad de fase (4.34), se puede obtener una expresión para la velocidad de grupo  $U(\omega)$  por medio de la expresión (2.37), dada por

$$U(\omega) = \frac{2\sqrt{2}c\sqrt{\frac{m^2c^4}{\hbar^2} + \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \varepsilon(\omega, \mu)} \left[ \frac{m^4c^8}{\hbar^2} + \omega^{2\mu} - \frac{m^2c^4}{\hbar^2} (\varepsilon(\omega, \mu) - 2\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)) \right]}{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \mu\omega^{2\mu-1} \left[ \omega^\mu + \frac{2m^2c^4}{\hbar} \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \right]}, \quad (4.36)$$

donde  $\varepsilon(\omega, \mu) = \sqrt{\omega^{2\mu} + \frac{2m^2c^4}{\hbar^2}\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \frac{m^4c^8}{\hbar^4}}$

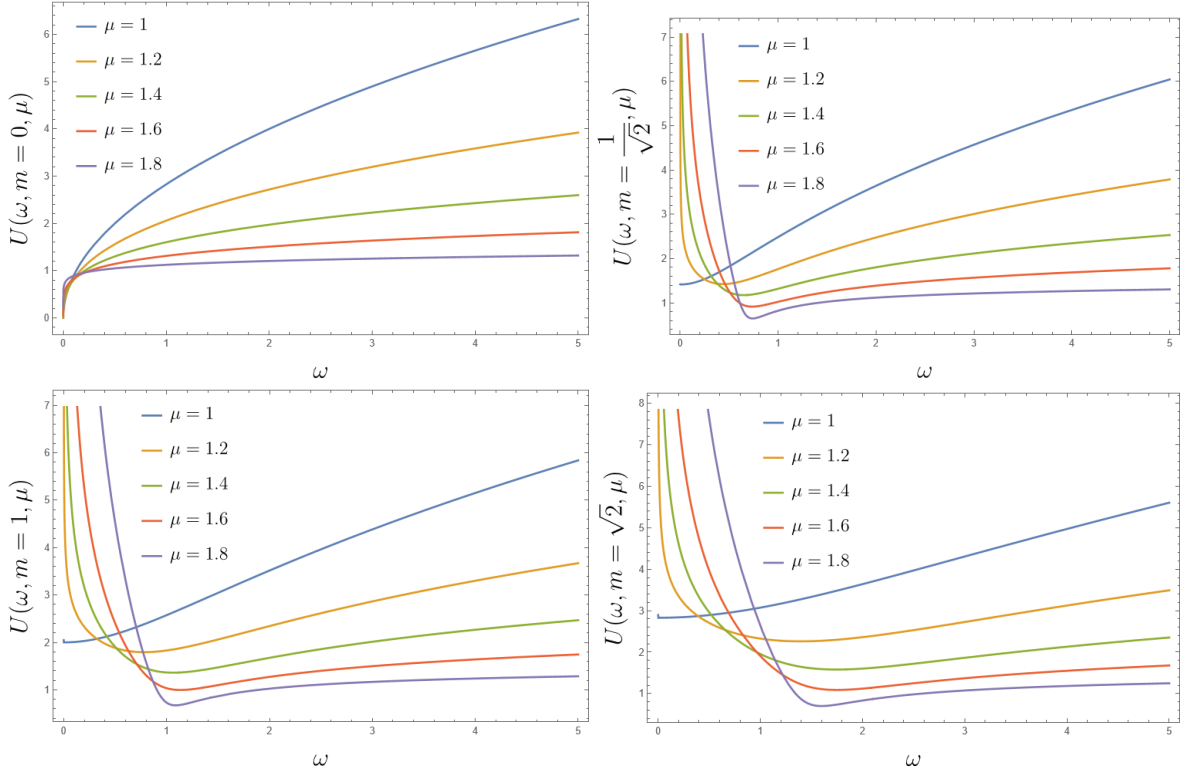


Figura 4.20: Comportamiento de la velocidad de grupo de Klein-Gordon fraccionario (4.36), obtenida mediante el índice de refracción complejo. Se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .  $m = 0$  (superior derecha),  $m = 1/\sqrt{2}$  (superior izquierda),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha).

En la Figura 4.20 se aprecia el comportamiento para la velocidad de grupo. Para el caso de orden entero esta velocidad se acerca de manera asintótica a la velocidad de propagación ( $c = 1$ ),

caso que solo empata para caso fraccionario con masa cero. Al incluir masa el comportamiento se da similar a la velocidad de fase fraccionaria, es decir, para  $m \neq 0 \rightarrow V(\omega) \sim U(\omega)$ . El orden fraccionario invierte por completo el comportamiento usual, ya que en el caso de orden entero esta inicia en 0 y aumenta asintóticamente a la velocidad de propagación. Y como con la velocidad de fase en el caso fraccionario, las velocidades de grupo tienden a aumentar.

Para este caso podemos proceder como en la sección anterior y ver si hay regiones donde se pueda dar dispersión anómala. Calculando de igual forma la diferencia entre la velocidad grupo y de fase se obtiene (considerando unidades naturales)

$$\begin{aligned} \Delta V(\omega) &= V_g(\omega) - V_p(\omega) \\ &= \omega^{2\mu} + m^4 - m^2 \left[ \sqrt{\omega^{2\mu} + 2m^2\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + m^4} - 2\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \right] - 1. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Cuando esta relación es mayor que cero, se tiene dispersión anómala. En la Figura 4.21 se aprecian las regiones donde es posible el comportamiento de dispersión anómala. En este caso para  $\mu = 1$  hay una pequeña región donde no se tiene el comportamiento anómalo, más abarcado para  $\omega'$ s pequeñas.

Al contrario que en las zonas con dependencia del número de onda (4.17), aquí no se ve que conforme aumente o disminuya el valor de la derivada temporal, se tenga un comportamiento claro respecto a si hay mayor o menor zona de posible dispersión anómala. Aunque si coincide cuando se toma el caso entero  $\mu = 2$ . Cabe mencionar que este último se calcula directamente ante límite (no con la expresión obtenida), ya que al evaluar directamente en las expresiones de velocidad de grupo (4.36) y fase (4.34) se tiene indeterminación, hay que evaluar con cuidado.

En los resultados de Mainardi para Klein-Gordon disipativo [4], el comportamiento de ambas velocidades (fase y grupo) cambia drásticamente al caso no masivo. La velocidad de fase no proviene de una divergencia, ambas velocidades están bien definidas para  $\omega \geq 0$ , sin embargo, se preserva que ambas se acerquen de manera asintótica a la velocidad de propagación.

Por lo que al contrastar con nuestro caso, el efecto disipativo no queda bien descrito por el caso fraccionario. Sin embargo da cabida a dispersión anómala, quedando como un efecto ante el cambio del orden entero por fraccionario de la derivada temporal. Por último en este capítulo de resultados de casos fraccionarios, se presentan los desplazamiento cuadráticos medios y su

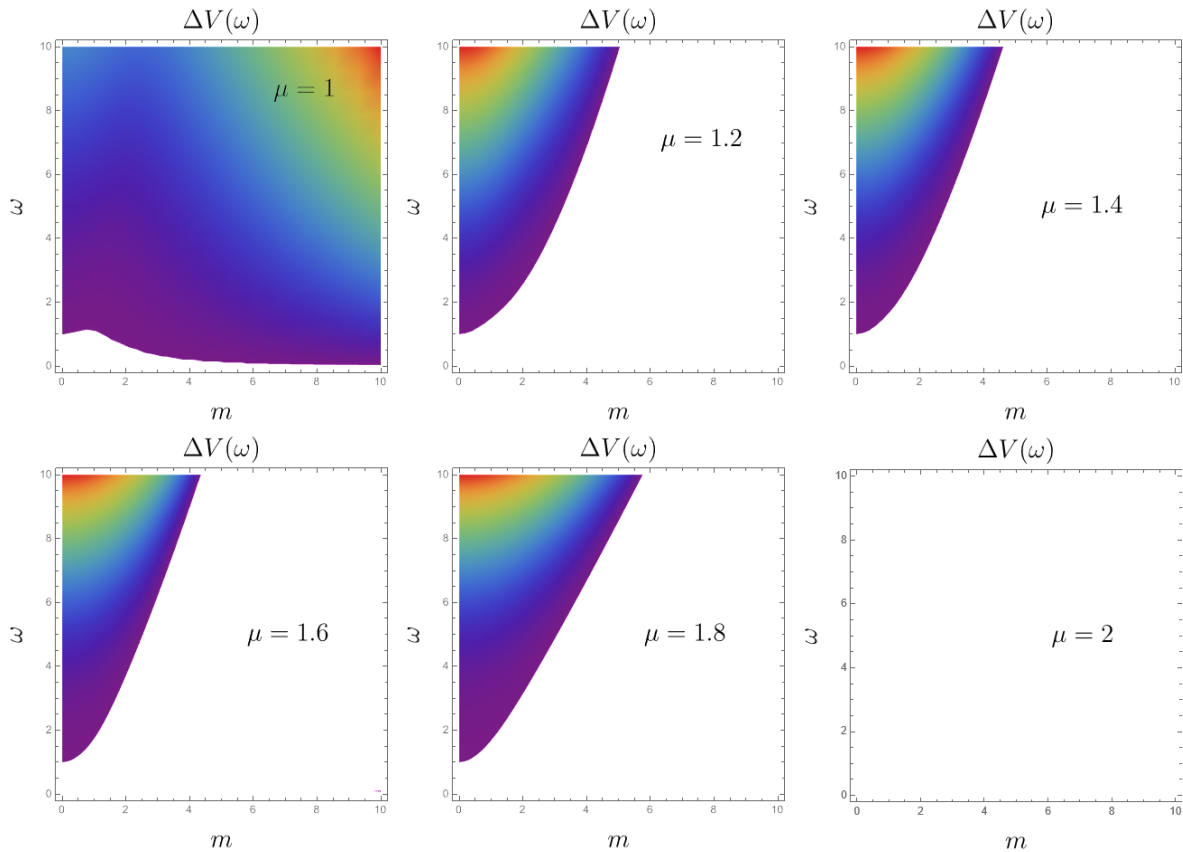


Figura 4.21: Regiones donde se tiene dispersión anómala (región con color) en la ecuación escalar relativista de Klein-Gordon fraccionaria en el tiempo, según el valor de la derivada temporal y la relación entre  $\omega$  con  $m$  (4.37).

análisis.

## 4.5. Desplazamiento Cuadrático Medio Fraccionario

Como se mencionó en el marco teórico y hemos visto a lo largo del desarrollo de resultados fraccionarios. Estos se pueden complicar bastante y es usual el uso de aproximaciones justificadas o directamente la solución numérica. Calcular el desplazamiento cuadrático medio es característico en problemas de difusión, en este caso su evaluación no impide poder obtener un resultado explícito para los casos fraccionarios, razón por la que toma relevancia este resultado. Procediendo de manera análoga al caso de orden entero se tienen los desplazamiento cuadráticos

medio para las ecuaciones de orden fraccionarios, dados como

$$\text{Ecn de Onda} \quad \frac{2c^2}{\Gamma(1 + \mu)} t^\mu \quad (4.38)$$

$$\text{Klein-Gordon} \quad \frac{2c^2 t^\mu}{\mu} E_{\mu, \mu} \left[ -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^\mu \right] \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \text{Dirac} \quad & 2c^2 E_{2\alpha} \left[ -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right] + \\ & + \frac{2imc^3}{\hbar} \left[ \frac{t^{3\alpha}}{2\alpha} E_{2\alpha, 3\alpha} \left( -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right) - \frac{1}{2} E_{2\alpha, 3\alpha-1} \left( -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En todos los caso al evaluar el caso límite  $\mu = 2$  y  $\alpha = 1$ , se recuperan los casos de orden entero. Por lo que posteriormente evaluar el límite  $m \rightarrow 0$  se recupera el caso balístico. El comportamiento del desplazamiento cuadrático medio (DCM) de Klein-Gordon fraccionario se puede apreciar en la Figura 4.22. Resulta curioso el tipo de comportamiento que tiene este DCM fraccionario, donde al involucrar masa se presentan oscilaciones y su frecuencia en proporción al valor de la misma.

Las oscilaciones a su vez permiten valores negativos del DCM, cosa que resulta contra intuitiva. Considerando que el DCM nos habla de la distancia que se ha alejado del punto inicial, puede concebirse una variación en este desplazamiento hasta por un momento llegar el reposo. Más permitir valores negativos, considerando estamos en caso unidimensional implicaría a la partícula en cuestión, puede invertir la dirección del desplazamiento. Sin embargo, por ser el cuadrado es justo no viable que se tenga valores negativos.

En la perspectiva estocástica que plantea Plyukhin (se menciona en el capítulo 2), dado que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon no son definidas positivas, no se pueden interpretar como funciones de distribución de probabilidad. Mientras que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  se pueden interpretar como perturbaciones de densidades de carga en un sistema de muchos cuerpos [55]. En el caso fraccionario el comportamiento de las soluciones se ha visto de manera numérica. Si bien se aprecia permite valores negativos, procedemos formalmente bajo los resultados de funciones de Bernstein, enlistados en el capítulo 2.

Partiendo de Klein-Gordon fraccionario en espacio de Laplace (4.10), el primer término  $s^{\mu-1}$  es función de Bernstein, dado que  $1 < \mu < 2$ . A su vez el término  $\sqrt{s^\mu + m^2}$  también es función de Bernstein. Esto a su vez, permite que  $\exp[-|x|\sqrt{s^\mu + m^2}/c]$  sea tipo Bernstein,

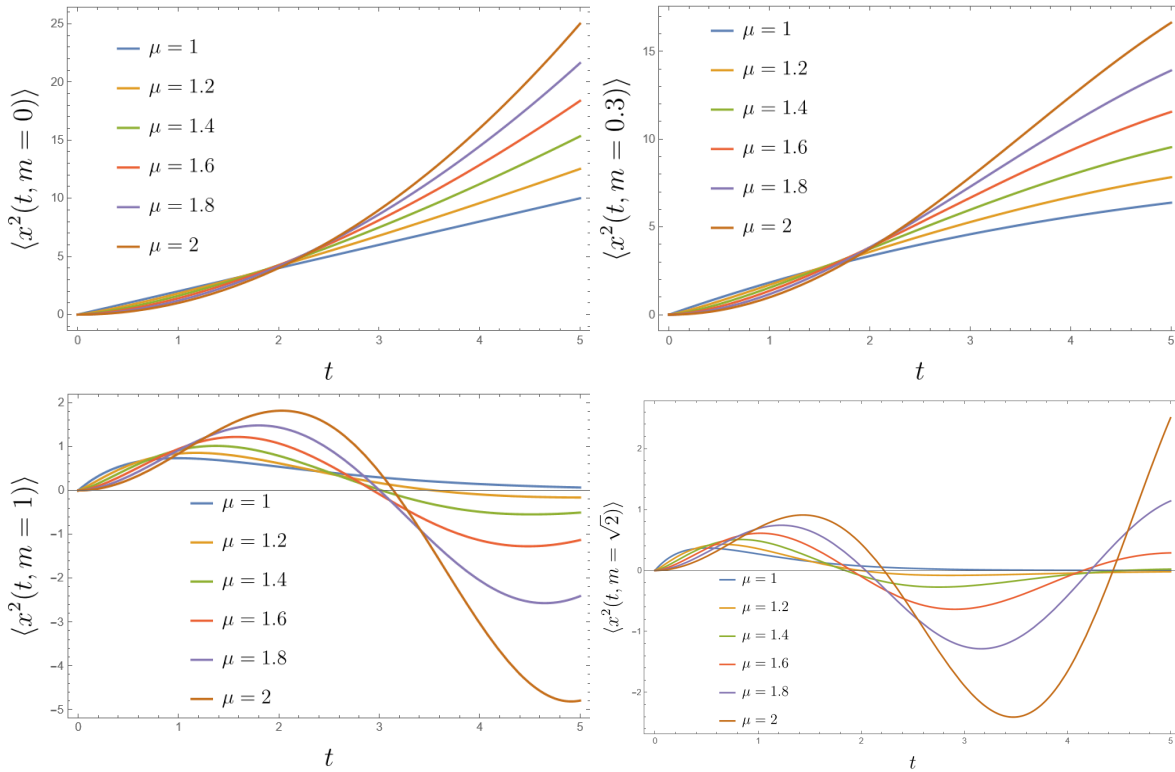


Figura 4.22: Comportamiento de Desplazamiento Cuadrático Medio para Klein-Gordon fraccionario (4.39).  $m = 0$  (recupera ecuación de onda fraccionaria (4.38), superior izquierda),  $m = 0.3$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior derecha), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

ya que  $|x|/c > 0$ . Sin embargo la función de la raíz aparece en el denominador. No permite asegurar esta función sea tipo Bernstein ( $f(s) \sim s^{-\mu/2}$ ), por lo que no se puede garantizar una región donde esta función sea enteramente positiva, por tanto que se pueda ver como una función de distribución de probabilidad.

Un posible caso es hablar de un ensamble de partículas propagándose en un medio no homogéneo. Esto otorga la posibilidad que al llegar a una distancia “máxima”, comience a disminuir la tasa de desplazamiento. Las inhomogeneidades van aportando a impedir el ensamble continué con el desplazamiento hasta frenarlo. Este proceso forma parte de la primer oscilación en el DCM. El ensamble se desplazó hasta donde el ímpetu inicial lo permitió a través del medio. Sin embargo las inhomogeneidades le han frenado y hecho incluso, que retorne (valor negativo del DCM).

En los DCM mostrados en la Figura 4.22 por el dominio no se percibe del todo, pero para los casos fraccionarios las oscilaciones van atenuando. Por lo que el proceso descrito en el párrafo

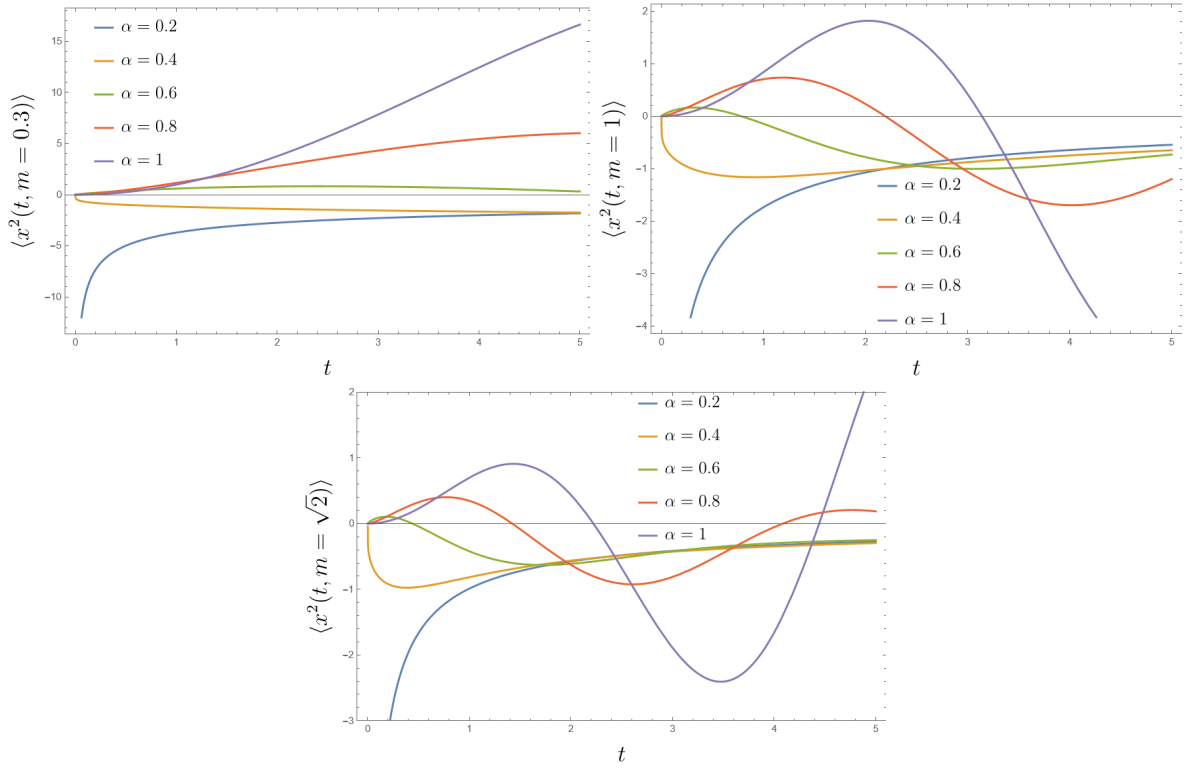


Figura 4.23: Comportamiento de Desplazamiento Cuadrático Medio de Dirac fraccionario (parte real) (4.40).  $m = 0.3$  (superior izquierda),  $m = 1$  (superior derecha),  $m = 1$  (inferior izquierda) y  $m = \sqrt{2}$  (inferior central), se consideran unidades naturales para  $c = \hbar = 1$ .

anterior sucede repetidamente hasta llegar al punto que no hay un desplazamiento por parte del ensamble.

Considerando casos límite para la variable de Laplace al calcular el DCM, así como se hizo para el comportamiento de las soluciones a tiempos cortos y largos. Para Klein-Gordon, tras realizar las derivadas respecto a la variable de Fourier y evaluando en 0 se tiene  $\langle x^2(s) \rangle = 2c^2 s^{\mu-1} (s^\mu + m^2 c^4 / \hbar^2)^{-2}$ . Tomando límite para  $s \rightarrow \infty$  (correspondiente a  $t \rightarrow 0$ ) y calculando su transformada inversa se tiene

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2c^2}{\Gamma(1 + \mu)} t^\mu, \quad (4.41)$$

que coincide con recuperar el caso de la ecuación de onda fraccionaria. De hecho, en todos los casos mostrados en la Figura 4.22, a tiempos pequeños se tiene un comportamiento similar. Por

otra parte tomando el límite  $s \rightarrow 0$  (correspondiente a  $t \rightarrow \infty$ ) se tiene

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2\hbar^4}{m^4 c^6 \Gamma(\mu - 1)} t^{\mu-2}. \quad (4.42)$$

Esta función a tiempos largos se va de manera asintótica a cero. Entonces para  $t \rightarrow \infty$  se tiene un DCM cercano a cero. Estas aproximaciones concuerdan con el comportamiento del DCM de Klein-Gordon fraccionario (4.39), sin embargo, deja abierta la interpretación para las oscilaciones y los posibles valores negativos.

Recordando el comportamiento que Klein-Gordon fraccionario tiene a tiempos largos (localización), empata con el hecho que el DCM se vaya a cero. Aunque mantiene la incógnita de valores negativos. Incluso (4.42) permite ver que para valores de la derivada temporal fraccionaria, entre más cercano a 2, más lento se acerca a 0 el valor del DCM. Hecho que coincide con el comportamiento visto en el análisis numérico, mayor el orden fraccionario, mayor el tiempo en presentar localización.

El caso de Dirac se complica aún más. Con el caso límite recupera Klein-Gordon, y posteriormente ecuación de onda. No obstante para valores de  $\alpha < 0.5$  en todo momento el DCM es negativo y tendiendo hacia 0. Mientras que para  $\alpha > 0.5$  se tiene un comportamiento similar al ya analizado con Klein-Gordon. Por esta parte se puede decir que el DCM de Dirac generaliza el de Klein-Gordon. El DCM en ambos casos que consideran masa, se aprecia un comportamiento que conforme se varía el orden de la derivada temporal, dista del comportamiento de orden entero. El caso de Dirac es más drástico y permite plantear, como fue con el coeficiente de atenuación (4.35), al menos de manera cuantitativa la presencia de complejidad a través de correlaciones de largo alcance, esto claro, debido a la incorporación de derivadas fraccionarias temporales. Presentando un comportamiento en veces drástico comparado al de orden entero.

El análisis discutido anteriormente deja en claro que las propiedades de transporte usuales no están presentes en los casos fraccionarios como se esperaba. Realmente el término de masa afecta bastante, rompiendo el comportamiento visto en los casos extremos de orden entero, la propagación y la difusión. No obstante, otro aspecto donde tienen cabida las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac, como en la mecánica cuántica; no están excluidos los valores negativos en su solución analítica, la cual vendría a ser la función de onda. Esta función solo tiene sentido

físico al evaluar su norma (interpretación de Bron), que se asocia con la probabilidad de medir el objeto entre los límites establecidos. Entonces es drástico el cambio, ya que al querer interpretar a la solución como una función de distribución de probabilidad, la propia solución debe ser siempre positiva, en cambio cuánticamente, al ser la norma la que da información, la solución por sí misma no importa si es negativa o incluso compleja.

Si bien desde el orden entero los desplazamientos cuadráticos medios, en los casos de Klein-Gordon y Dirac, dan un comportamiento con valores negativos, en esos casos si hay propagación. Por lo que debe haber una parte que impida la interpretación de su solución como función de distribución de probabilidad. Por su parte como se mencionó la interpretación cuántica, la naturaleza de sus soluciones tienen sentido en esa perspectiva, no por eso calcular su DCM debe de dejar de brindar información al respecto. En este sentido, las aproximaciones de los DCM a tiempos cortos y largos, empatan bastante bien con lo visto numéricamente. Solo a tiempos muy pequeños sucede algo similar a la difusión, para pasar a tiempos largos y estar localizados.

Esta problemática de intentar dar explicación a lo aparentemente incongruente, va más allá del propósito y entendimiento al momento, sin embargo, si deja cosas claras. La introducción de la derivada fraccionaria en las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac, no presenta una descripción de transporte difusivo. Lo que surge es un comportamiento de localización en sus soluciones, así como de regiones donde es posible tener dispersión anómala. Y son efectos que surgen en ecuaciones diferenciales lineales, no hay términos no lineales o de interacción que puedan dar este cambio, todo es debido únicamente al operador fraccionario temporal involucrado que introduce efectos de memoria.

Con esto se da por terminado la parte del estudio a los sistemas con derivada fraccionaria temporal. Se ha hecho un intento por obtener resultados analíticos, salvo la solución directa de las ecuaciones no ha sido posible. El resto del capítulo con la relación de dispersión y el desplazamiento cuadrático, se ha podido obtener sin problemas, aunque resulta desafiante otorgar una interpretación clara a estos resultados fraccionarios.

# Capítulo 5

## Conclusiones

La presente investigación tuvo como objetivo estudiar el comportamiento englobado por las derivadas fraccionarias en el tiempo en ecuaciones de tipo onda, dando a la ecuación de Klein-Gordon fraccionaria mayor énfasis. De manera parcial se lograron distinguir comportamientos abarcados ante este cambio de operador. Las características de disipación en las soluciones analíticas se pierden en su mayoría, solo se mantiene la atenuación de las amplitudes con el paso del tiempo, así como mayor sea el valor de la masa. Al contrario del caso de orden entero, la propagación se pierde, teniendo como comportamiento límite localización alrededor del origen.

Acompañado de las características de estos nuevos sistemas, con la relación de dispersión se aprecia que no hay un cambio notorio a primera vista. Sin embargo, se encontraron regiones donde es posible tener dispersión anómala. Teniendo así la emergencia de un fenómeno inducido ante el cambio de orden de derivada entera a fraccionaria. Por su parte con el desplazamiento cuadrático medio, se tiene un desplazamiento delimitado (tras oscilar, tiende a cero). Que junto con la propagación, la cual no se mantiene, puede indicar un proceso de confinamiento.

La presente investigación se aventura en una línea de investigación iniciada en la década de los noventas, liderada por Mainardi, Gorenflo y Metzler. El cálculo fraccionario brinda oportunidad de ampliar la descripción de fenómenos con el orden de las derivadas. Hasta el momento un especial interés por la ecuación de Klein-Gordon no se ha visto reflejada como en el presente trabajo. Se ha estudiado incluso con términos no lineales en el ámbito de solitones. Sin embargo, casos similares con otras ecuaciones se mantienen vigentes, como el caso de Angelani, que mediante un modelo de “run and tumble” estudia soluciones que se mantienen como funciones

de distribución de probabilidad para la ecuación del telegrafista [70].

En comparativa con trabajos similares aplicados a distintas ecuaciones, el orden de los parámetros disponibles en el presente trabajo estaba limitado. Solo un orden de derivada fraccionaria y la masa. El caso de Angelani maneja 3 parámetros en las derivadas (pudiendo reducirse a 2), siendo esto lo que le permite establecer una región donde hallar soluciones positivas en todo momento (distribución de probabilidad). Mainardi por su parte maneja una derivada de orden temporal y un término explícito de disipación [4]. Mientras que Giusti tiene tres parámetros en su análisis [68].

Esto deja abierto a seguir esta investigación de diversas formas. Añadir explícitamente la derivada de “primer orden” fraccionaria con su constante de disipación. Para poder delimitar regiones donde se mantenga interpretación de función de distribución de probabilidad. Así como incluir términos no lineales, comportamiento propio de sistemas complejos y de interés en sistemas de muchos cuerpos. De igual forma, buscar una interpretación física más clara de los operadores fraccionarios, cosa que muchas veces se omite, dada su dificultad. Realmente queda el inicio de una investigación que tiene potencial en continuar de diversas maneras.

# Apéndice A

## Transformada de Laplace y Fourier

A continuación se presentan algunos resultados de las transformadas de Fourier como de Laplace que de igual forma se utilizarán en el desarrollo. La definición de estas transformadas y sus inversas se presentan en (2.1) y (2.3).

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right\} = (ik)^n \tilde{F}(k) \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{F} \{(f * g)(x)\} = \tilde{F}(k) \tilde{G}(k) \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{F} \{f(x)g(x)\} = \frac{1}{2\pi} (\tilde{F} * \tilde{G})(k) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{F}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \tilde{F}^{(k-1)}(0) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{L} \{(f * g)(t)\} = \tilde{F}(s) \tilde{G}(s), \quad (\text{A.5})$$

donde  $f * g$  implica la convolución de las funciones. La diferencia de la convolución en las transformadas es el límite de integración, para Laplace se tiene

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (\text{A.6})$$

mientras que para Fourier

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (\text{A.7})$$

Entre los resultados de transformadas de Fourier y Laplace conocidas a emplear, se presentan en la siguiente tabla. De estar en blanco una celda se debe a que no es necesario ni empleado tal resultado o

$f(x)$	$\hat{F}(k)$	$f(t)$	$\tilde{F}(s)$
$rect(ax)$	$\frac{1}{ a } sinc\left(\frac{k}{2\pi a}\right)$	$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
$sinc(ax)$	$\frac{1}{ a } rect\left(\frac{k}{2\pi a}\right)$	$t^q$	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{k^2+a^2}$	$e_{\alpha,\beta}(t; \mp \lambda)$	$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp \lambda}$
1	$\delta(k)$	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(x)$	1	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{\omega^2+s^2}$
$\delta^{(n)}(x)$	$(ik)^n$	$\frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} J_1(a\sqrt{t^2-k^2}) \Theta(t-k)$	$e^{-ks} - e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}$
$e^{-\alpha x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$	$\frac{ak}{\sqrt{t^2-k^2}} I_1(a\sqrt{t^2-k^2}) \Theta(t-k)$	$e^{-k\sqrt{s^2+a^2}} - e^{-ks}$
		$J_0(a\sqrt{t^2-k^2}) \Theta(t-k)$	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$
		$e^{-A\beta} \delta(t-A) + \frac{d}{dt} [e^{-\beta t} J_0(\alpha\sqrt{t^2-A^2}) \Theta(t-A)]$	$\frac{se^{-A\sqrt{(s+\beta)^2+\alpha^2}}}{\sqrt{(s+\beta)^2+\alpha^2}}$
		$e^{-A\beta} \delta(t-A) + \frac{d}{dt} [e^{-\beta t} I_0(\alpha\sqrt{t^2-A^2}) \Theta(t-A)]$	$\frac{se^{-A\sqrt{(s+\beta)^2-\alpha^2}}}{\sqrt{(s+\beta)^2-\alpha^2}}$

Cuadro A.1: Transformadas de Fourier y Laplace de algunas funciones a emplear en el desarrollo de los resultados. Estos resultados son compilación de diversas fuentes donde se pueden consultar [1–4]. Se considera  $\{a, A, k, \beta, \alpha\}$  reales positivos.

# Apéndice B

## Deducción de Resultados

En este espacio se dedica a un desarrollo más a detalla de los resultados obtenidos a lo largo del trabajo.

- El primer resultado que si bien es conocido, la relevancia en el presente trabajo requiere profundizar en su obtención. Obtener el desplazamiento cuadrático medio ante variables de Laplace y Fourier (2.41), que por definición si tenemos una función de distribución de probabilidad  $P(x, t)$ , el segundo momento se da como

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx.$$

Tomando la transformada de Fourier de la función de distribución de probabilidad, empleando  $\mathcal{F} \{x^n f(x)\} = i^n d^n \tilde{f}(k)/dk^n$ , se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = -\frac{\partial^2 \hat{P}(k, t)}{\partial k^2} \Big|_{k=0}.$$

Ahora tomando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L} \{ \langle x^2(t) \rangle \} = -\frac{\partial^2 \tilde{P}(k, s)}{\partial k^2} \Big|_{k=0}.$$

Para recuperar en términos de la variable temporal  $t$ , aplicamos la transformada inversa

de Laplace y obtenemos (2.41)

$$\langle x^2(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial k^2} \tilde{P}(k, s) \Big|_{k=0} \right\}.$$

- Para obtener la solución de la ecuación escalar de Klein-Gordon con condiciones iniciales generales (3.5) ( $\phi(0, x) = f(x)$  y  $\partial_y \phi(0, x) = g(x)$ ), se parte de (3.4). Se pasa a espacio de Fourier-Laplace y despeja la función

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi(t, x) &= c^2 \partial_x^2 \phi(t, x) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi(t, x) \\ \left[ s^2 \tilde{\phi}(s, k) - s f(k) - g(k) \right] &= -c^2 k^2 \phi(s, k) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \tilde{\phi}(s, k) \\ \tilde{\phi}(s, k) \left[ s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right] &= s f(k) + g(k) \\ \tilde{\phi}(s, k) &= \frac{s}{s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} f(k) + \frac{1}{s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} g(k). \end{aligned}$$

Se aplica la transformada de Laplace, que el primer término asemeja a la de coseno y el segundo a la de seno

$$\hat{\phi}(t, k) = \cos \left( t \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \right) u(t) f(k) + \frac{1}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \sin \left( t \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \right) u(t) g(k),$$

donde  $u(t)$  la función escalón, vale 0 para  $t < 0$  y 1 para  $t \geq 0$ , se puede omitir y saber que solo se considera tiempo positivo. Para la transformada inversa de Fourier restante, al ser producto de funciones, la transformada es una convolución. Para el segundo término se multiplica un  $1 = t/t$  para obtener una función *sinc*. Lo que otorga el resultado presentado en (3.5)

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \cos \left( ct \sqrt{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \right) \right\} f(x - x') dx' \\ &+ t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{sinc} \left( ct \sqrt{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}} \right) \right\} g(x - x') dx'. \end{aligned}$$

- Para obtener las soluciones de la ecuación de Dirac unidimensional (3.10) y (3.11), se

parte de la ecuación respectiva (3.8), de momento considerando nuevamente condiciones iniciales generales. En este caso al ser de primer orden, solo aparece  $\psi_{1,2}(0, x) = f_{1,2}(x)$ . Desarrollamos en base a las matrices de Dirac unidimensionales para obtener dos ecuaciones lineales acopladas ([71]) dadas como

$$\begin{aligned}(\partial_t + c\partial_x) \psi_1(t, x) &= \frac{mc^2}{i\hbar} \psi_2(t, x) \\ (\partial_t - c\partial_x) \psi_2(t, x) &= \frac{mc^2}{i\hbar} \psi_1(t, x).\end{aligned}$$

Se pasa a espacio de Fourier-Laplace y despeja en cada caso la función que aparece del lado izquierdo de la respectiva ecuación

$$\begin{aligned}s\tilde{\psi}_1(s, k) - f_1(k) + ick\tilde{\psi}_1(s, k) &= -\frac{imc^2}{\hbar} \tilde{\psi}_2(s, k) \\ \tilde{\psi}_1(s, k) &= \frac{f_1(k)}{s + ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s + ick)} \tilde{\psi}_2(s, k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s\tilde{\psi}_2(s, k) - f_2(k) - ick\tilde{\psi}_2(s, k) &= -\frac{imc^2}{\hbar} \tilde{\psi}_1(s, k) \\ \tilde{\psi}_2(s, k) &= \frac{f_2(k)}{s - ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s - ick)} \tilde{\psi}_1(s, k).\end{aligned}$$

Estos resultados se pueden agrupar como

$$\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) = \frac{f_{1,2}(k)}{s \pm ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s \pm ick)} \tilde{\psi}_{2,1}(s, k).$$

De este último resultado podemos desacoplar, sustituyendo  $\psi_1$  en  $\psi_2$  y vice versa,

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) &= \frac{f_{1,2}(k)}{s \pm ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s \pm ick)} \left[ \frac{f_{2,1}(k)}{s \mp ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s \mp ick)} \tilde{\psi}_{1,2}(s, k) \right] \\ \tilde{\psi}_{1,2}(s, k) \left[ 1 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2(s^2 + c^2k^2)} \right] &= \frac{f_{1,2}(k)}{s \pm ick} - \frac{imc^2 f_{2,1}(k)}{\hbar(s^2 + c^2k^2)} \\ \tilde{\psi}_{1,2}(s, k) \left[ \frac{\hbar^2(s^2 + c^2k^2) + m^2c^4}{\hbar^2(s^2 + c^2k^2)} \right] &= \frac{f_{1,2}(k)}{s \pm ick} - \frac{imc^2 f_{2,1}(k)}{\hbar(s^2 + c^2k^2)} \\ \tilde{\psi}_{1,2}(s, k) &= \frac{(s^2 + c^2k^2)f_{1,2}(k)}{(s^2 + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2})(s \pm ick)} - i \frac{\frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k)}{s^2 + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} \\ \tilde{\psi}_{1,2}(s, k) &= \frac{(s \mp ck)f_{1,2}(k)}{s^2 + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} - i \frac{\frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k)}{s^2 + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}\end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la ecuación de Dirac en espacio de Fourier-Laplace (3.9), separando parte real e imaginaria como

$$\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) = \frac{sf_{1,2}(k)}{s^2 + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}} + i \frac{\left[ \mp ck f_{1,2}(k) - \frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k) \right]}{s^2 + c^2k^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}.$$

A partir de aquí imponemos la condición para calcular la función de Green en ambos casos, es decir,  $f_{1,2}(x) = \delta(x) \rightarrow f_{1,2}(k) = 1$ . Aplicando primero la transformada inversa de Fourier, observando que el primer término es idéntico al de Klein-Gordon. Además, junto con el término de masa, tienen transformada inversa de Fourier similar. El segundo término por el factor  $ik$  debe evaluarse como producto de funciones, por tanto una convolución, lo que permite obtener

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{1,2}(s, x) &= \frac{s}{2c\sqrt{s^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}} e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}} - \frac{imc}{\hbar\sqrt{s^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}} e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}} \\ &\mp \frac{x}{2c|x|} e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}}\end{aligned}$$

Para aplicar las transformadas inversas de Laplace en el término con signo  $\mp$  habrá una diferencia. Los primeros términos de la expresión anterior resultan sin problema, para el último hay que sumar un cero de la forma  $\sim e^{-\frac{|x|}{c}s} - e^{-\frac{|x|}{c}s}$ . Con lo que se puede obtener

solución a la función de Green de la ecuación de Dirac como

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) = & \frac{1}{2c} \left[ \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) + \frac{d}{dt} \left[ J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) \right] \right] + \\ & + \frac{mc}{2\hbar \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}} J_1 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) - \frac{x}{2c|x|} \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) - \\ & - \frac{imc}{\hbar} J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t, x) = & \frac{1}{2c} \left[ \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) + \frac{d}{dt} \left[ J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) \right] \right] + \\ & + \frac{mc}{2\hbar \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}}} I_1 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) + \frac{x}{2c|x|} \delta \left( t - \frac{|x|}{c} \right) - \\ & - \frac{imc}{\hbar} J_0 \left( \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{t^2 - \frac{|x|^2}{c^2}} \right) \Theta \left( t - \frac{|x|}{c} \right), \end{aligned}$$

presentadas en el capítulo 3 como las ecuaciones (3.10) y (3.11).

- El cálculo del desplazamiento cuadrático medio de Klein-Gordon (3.28) y Dirac (3.29), de orden entero se realiza mediante el resultado previo (2.41). Así para Klein-Gordon se realiza

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\partial_k^2 \left[ \frac{s}{s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \right]_{k=0} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \left[ \frac{2c^2 s \left( s^2 - 3c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)}{\left( s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^3} \right]_{k=0} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2c^2 s}{\left( s^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^2} \right\} = \frac{2c^2 t}{2 \frac{mc^2}{\hbar}} \sin \left( \frac{mc^2}{\hbar} t \right) = \frac{\hbar}{m} t \sin \left( \frac{mc^2}{\hbar} t \right). \end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento similar, para Dirac observamos que la parte real de  $\psi_{1,2}(s, k)$  es idéntica a Klein-Gordon. Por lo que se presenta el cálculo para lo restante, la parte

imaginaria

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t) \rangle &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\partial_k^2 \left[ i \frac{\mp ck - \frac{mc^2}{\hbar}}{s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \right]_{k=0} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \left[ \frac{2ic^2(\pm ck + \frac{mc^2}{\hbar})(s^2 - 3c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})}{(s^2 + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^3} \right]_{k=0} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \frac{2imc^4}{\hbar(s^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2} \right\} = \frac{2imc^4}{\hbar} \left[ \frac{t}{2\frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \cos\left(\frac{mc^2}{\hbar}t\right) - \frac{\sin\left(\frac{mc^2}{\hbar}t\right)}{2\frac{m^3 c^6}{\hbar^3}} \right]
\end{aligned}$$

De esta última expresión basta eliminar términos sobrantes y factorizar con  $i\hbar/m$  para obtener finalmente el resultado correspondiente a la parte imaginaria presente en (3.29)

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{i\hbar}{m} \left[ t \cos\left(\frac{mc^2}{\hbar}t\right) - \frac{\hbar}{mc^2} \sin\left(\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \right]$$

- Para la solución general de la ecuación de onda fraccionaria (4.5) se debe pasar por su solución general en espacio de Laplace (4.4). En este apartado se extiende el procedimiento para obtener ambos resultados. Partimos de la ecuación de onda fraccionaria (4.3) y pasamos a espacio de Fourier-Laplace considerando condiciones iniciales generales  $\phi(0, x) = f(x)$  y  $\partial_t \phi(0, x) = g(x)$

$$\begin{aligned}
s^{\mu-2} \left[ s^2 \hat{\phi}(s, k) - sf(k) - g(k) \right] &= -c^2 k^2 \hat{\phi}(s, k) \\
\hat{\phi}(s, k) [s^\mu + c^2 k^2] &= s^{\mu-1} f(k) + s^{\mu-2} g(k) \\
\hat{\phi}(s, k) &= \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu + c^2 k^2} f(k) + \frac{s^{\mu-2}}{s^\mu + c^2 k^2} g(k).
\end{aligned}$$

Continuamos aplicando primero la transformada inversa de Laplace, con lo que se obtienen funciones Mittag-Leffler y empleamos varias de las propiedades de estas funciones dadas en el capítulo 1 o su respectivo apéndice

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(t, k) &= e_{\mu,1}(t; c^2 k^2) f(k) + e_{\mu,2}(t; c^2 k^2) g(k) \\
&= E_\mu(-t^\mu c^2 k^2) f(k) + t E_{\mu,2}(-t^\mu c^2 k^2) g(k).
\end{aligned}$$

Para la transformada inversa de Fourier se expresan en términos de funciones H de Fox. La transformada del primer término es conocido, se presenta en [53]. Para el segundo se presenta el desarrollo en base a resultados ya conocidos de la función H de Fox. En base a la relación

$$E_{\mu,2}(-t^\mu c^2 k^2) = H_{1,2}^{1,1} \left[ t^\mu c^2 k^2 \left| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1) \quad (-1, \mu) \end{array} \right. \right]$$

A esta expresión se aplica la transformada, aprovechando el hecho que es simétrica se pone explícita la transformada y solo la parte real (coseno) aporta. Posterior se aplica el resultado de transformada coseno con la función H de Fox. Por último se va simplificando, teniendo así

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \left\{ H_{1,2}^{1,1} \left[ c^2 k^2 t^\mu \left| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1) \quad (-1, \mu) \end{array} \right. \right] \right\} = \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(kx) H_{1,2}^{1,1} \left[ c^2 k^2 t^\mu \left| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1) \quad (-1, \mu) \end{array} \right. \right] dk = \\ & \frac{1}{|x|} H_{3,3}^{2,1} \left[ \frac{|x|^2}{c^2 t^\mu} \left| \begin{array}{l} (1, 1), \quad (2, \mu), \quad (1, 1) \\ (1, 2), \quad (1, 1), \quad (1, 1) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{|x|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x|^2}{c^2 t^\mu} \left| \begin{array}{l} (2, \mu) \\ (1, 2) \end{array} \right. \right] \\ & = \frac{1}{2|x|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x|}{ct^{\mu/2}} \left| \begin{array}{l} (2, \mu/2) \\ (1, 1) \end{array} \right. \right] \end{aligned}$$

Al tener las condiciones iniciales generales la transformada inversa correspondiente es una convolución entre las funciones H de Fox y las condiciones iniciales, con lo que se llega al resultado deseado de solución general a la ecuación de onda fraccionaria

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|x'|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x'|}{ct^{\mu/2}} \left| \begin{array}{l} (1, \mu/2) \\ (1, 1) \end{array} \right. \right] f(x - x') dx' + \\ &+ t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|x'|} H_{1,1}^{1,0} \left[ \frac{|x'|}{ct^{\mu/2}} \left| \begin{array}{l} (2, \mu/2) \\ (1, 1) \end{array} \right. \right] g(x - x') dx', \end{aligned}$$

La solución a la función de Green (condición inicial con Delta de Dirac) se obtiene di-

rectamente de la expresión anterior, que recupera el resultado presentado y ya conocido (4.6).

- Para obtener la solución general con condiciones iniciales generales  $\phi(0, x) = f(x)$  y  $\partial_t \phi(0, x) = g(x)$ , para la ecuación fraccionaria de Klein-Gordon (4.9) se desarrolla de manera similar al de la ecuación de onda fraccionaria. Primero se pasa a espacio de Fourier-Laplace, salvo la única diferencia es el término de masa no hay gran diferencia en el desarrollo de llevar a este dominio

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s, k) \left[ s^\mu + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right] &= s^{\mu-1} f(k) + s^{\mu-2} g(k) \\ \tilde{\phi}(s, k) &= \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} f(k) + \frac{s^{\mu-2}}{s^\mu + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} g(k). \end{aligned}$$

El término de masa impide seguir el mismo camino que en la ecuación de onda y poder invertir las funciones Mittag-Leffler resultantes. Siguiendo ese camino se puede obtener

$$\hat{\phi}(t, k) = E_\mu \left[ -t^\mu \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] f(k) + t E_{\mu,2} \left[ -t^\mu \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] g(k).$$

La transformada inversa de las respectivas Mittag-Leffler es desconocido. Se puede calcular numéricamente como se hace en el capítulo 4, así mismo de deben fijar los parámetros. En todo caso, se puede expresar una solución general como convolución, dada por

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ E_\mu \left[ -t^\mu \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \right\} f(x - x') + \\ &+ t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ E_{\mu,2} \left[ -t^\mu \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \right\} g(x - x'). \end{aligned}$$

En el caso presentado se aplica primero la transformada inversa de Fourier, lo que permite obtener directamente el resultado.

$$\tilde{\phi}(s, x) = \frac{1}{2c\sqrt{s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-x'|}{c} \sqrt{s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} [s^{\mu-1} f(x') + s^{\mu-2} g(x')] dx'.$$

Imponiendo la condición de función de Green desaparece el término con  $g(x)$  y la convo-

lución de  $f(x)$  deja (4.9), es decir

$$\tilde{\phi}(s, x) = \frac{s^{\mu-1}}{2c\sqrt{s^\mu + \frac{m^2c^4}{h^2}}} e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^\mu + \frac{m^2c^4}{h^2}}},$$

resultado del que se procede posteriormente para resolver de manera numérica, así como aplicar los teoremas Tauberianos.

- La deducción del comportamiento de Klein-Gordon fraccionario parte de(4.9). Para obtener el comportamiento a  $t \rightarrow \infty$  se toma el límite cuando  $s \rightarrow 0$ . Como  $1 < \mu < 2$  y  $m > 0$ , el término de masa domina en la raíz, por lo que se tiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\phi}(s, x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\mu-1}}{2c\sqrt{s^\mu + \frac{m^2c^4}{h^2}}} e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^\mu + \frac{m^2c^4}{h^2}}} = \frac{\hbar}{2cmc^2} e^{-\frac{|x|}{c} \frac{mc^2}{\hbar}} \frac{1}{s^{1-\mu}}.$$

Al resultado aplicamos la transformada inversa de Laplace restante, siendo una potencia de  $s$  resulta sencillo obtener

$$\phi(t, x) = \frac{\hbar}{2mc^3} \frac{e^{-\frac{mc|x|}{\hbar}}}{\Gamma(1-\mu)} t^{-\mu}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ahora para el caso de  $s \rightarrow \infty$ , que corresponde a  $t \rightarrow 0$  y poder obtener (4.13). Ahora en la raíz el término de masa se puede despreciar, lo que corresponde a obtener la ecuación de onda fraccionaria en espacio de Laplace, teniendo así

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(s, x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{\mu-1}}{2c\sqrt{s^\mu + \frac{m^2c^4}{h^2}}} e^{-\frac{|x|}{c}\sqrt{s^\mu + \frac{m^2c^4}{h^2}}} = \frac{s^{\mu-1}}{2cs^{\frac{\mu}{2}}} e^{-\frac{|x|}{c}s^{\frac{\mu}{2}}} = \frac{e^{-\frac{|x|}{c}s^{\frac{\mu}{2}}}}{2cs^{1-\frac{\mu}{2}}}.$$

En este caso al tener la expresión en la variable de Laplace, es útil emplear la función de Wright para obtener la transformada inversa restante, lo que permite llegar al resultado deseado y que coincide con la ecuación de onda fraccionaria

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2c} t^{-\frac{\mu}{2}} W_{-\frac{\mu}{2}, 1-\frac{\mu}{2}} \left( \frac{|x|}{c} t^{-\frac{\mu}{2}} \right), \quad t \rightarrow 0.$$

- Para las aproximaciones de Klein-Gordon fraccionario desde espacio de Laplace, se parte

de (4.11) y se aplican los resultados conocidos para funciones Mittag-Leffler para argumento mucho menores o mayores a 1. Para  $t \ll 1$  se tiene

$$\hat{\phi}(t, k) = E_\mu \left[ -t^\mu \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \simeq \exp \left[ -\frac{\left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) t^\mu}{\Gamma(1 + \mu)} \right]$$

Para realizar la transformada inversa queda una gaussiana en Fourier, que su transformada inversa es, salvo algunas constantes, una gaussiana. Separamos el argumento con variable de Fourier para aplicar la transformada inversa y poder obtener (4.14)

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &\simeq \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 t^\mu}{\hbar^2 \Gamma(1 + \mu)} \right] \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left[ -\frac{c^2 t^\mu}{\Gamma(1 + \mu)} k^2 \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma(1 + \mu)}{4\pi c^2 t^\mu}} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 t^\mu}{\hbar^2 \Gamma(1 + \mu)} \right] \exp \left[ -\frac{\Gamma(1 + \mu) x^2}{4c^2 t^\mu} \right], \quad t \ll 1. \end{aligned}$$

Ahora para  $t \gg 1$  se tiene

$$\hat{\phi}(t, k) \sim \frac{t^{-\mu}}{\left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \Gamma(1 - \mu)} - \frac{t^{-2\mu}}{\left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^2 \Gamma(1 - 2\mu)}.$$

Aplicando transformada inversa de Fourier se puede obtener (4.15)

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \frac{\hbar t^{-\mu}}{2mc^3 \Gamma(1 - \mu)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{t^{-2\mu}}{\Gamma(1 - 2\mu)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^2} \right\} \\ &= \left[ \frac{\hbar t^{-\mu}}{2mc^3 \Gamma(1 - \mu)} - \frac{\hbar^3 \left( 1 + \frac{mc}{\hbar}|x| \right) t^{-2\mu}}{2m^3 c^7 \Gamma(1 - 2\mu)} \right] e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|}, \quad t \gg 1. \end{aligned}$$

- Respecto a la ecuación fraccionaria de Dirac (4.16), para poder presentar soluciones en espacio de Fourier (4.18) o Laplace (4.19), debemos pasar primero la ecuación a espacio de Fourier-Laplace y realizar la correspondiente transformada inversa. Por lo que primero debemos deducir (4.17), que es un procedimiento similar al caso de orden entero. Es decir, primero procedemos a pasar a espacio de Fourier-Laplace y ahí desacoplar

$$\begin{aligned}
(\partial_t^\alpha \pm c\partial_x) \psi_{1,2}(t, x) &= -\frac{imc^2}{\hbar} \psi_{2,1}(t, x) \\
s^{\alpha-1} \left[ s\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) - f_{1,2}(k) \right] &= \mp ick\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) - \frac{imc^2}{\hbar} \tilde{\psi}_{2,1}(s, k) \\
\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) [s^\alpha \pm ick] &= s^{\alpha-1} f_{1,2}(k) - \frac{imc^2}{\hbar} \tilde{\psi}_{2,1}(s, k) \\
\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) &= \frac{s^{\alpha-1} f_{1,2}(k)}{s^\alpha \pm ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s^\alpha \pm ick)} \tilde{\psi}_{2,1}(s, k)
\end{aligned}$$

De la expresión anterior podemos desacoplar, siguiendo

$$\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) = \frac{s^{\alpha-1} f_{1,2}(k)}{s^\alpha \pm ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s^\alpha \pm ick)} \left[ \frac{s^{\alpha-1} f_{2,1}(k)}{s^\alpha \mp ick} - \frac{imc^2}{\hbar(s^\alpha \mp ick)} \tilde{\psi}_{1,2}(s, k) \right]$$

Por simplicidad nombramos  $M = \frac{mc^2}{\hbar}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) \left[ 1 + \frac{M^2}{(s^{2\alpha} + c^2 k^2)} \right] &= \frac{s^{\alpha-1} f_{1,2}(k)}{s^\alpha \pm ick} - \frac{iM s^{\alpha-1} f_{2,1}(k)}{(s^{2\alpha} + c^2 k^2)} \\
\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) \left[ \frac{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + M^2}{s^{2\alpha} + c^2 k^2} \right] &= \frac{s^{\alpha-1} f_{1,2}(k)}{s^\alpha \pm ick} - \frac{iM s^{\alpha-1} f_{2,1}(k)}{(s^{2\alpha} + c^2 k^2)} \\
\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) &= \frac{(s^\alpha \mp ick) s^{\alpha-1} f_{1,2}(k)}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + M^2} - i \frac{s^{\alpha-1} M f_{2,1}(k)}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + M^2},
\end{aligned}$$

con lo que se obtiene Dirac fraccionario en espacio de Fourier-Laplace

$$\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) = \frac{s^{2\alpha-1} f_{1,2}(k)}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} - i s^{\alpha-1} \left[ \frac{\frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k) \pm ck f_{1,2}(k)}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \right]$$

Primero el caso de solución general se realiza primero la transformada inversa de Laplace, ya que las condiciones iniciales están en variable de Fourier y permite avanzar más el desarrollo

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{1,2}(t, k) &= E_{2\alpha} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] f_{1,2}(k) - \\
&- i \left( \frac{mc^2}{\hbar} f_{2,1}(k) \pm ck f_{1,2}(k) \right) t^\alpha E_{2\alpha, 1+\alpha} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Posteriormente la transformada inversa de Fourier, que por la generalidad queda en términos de convolución

$$\begin{aligned}\psi_{1,2}(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ E_{2\alpha} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \right\} f_{1,2}(x - x') dx' - \\ &- i \frac{m c^2}{\hbar} t^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ E_{2\alpha, 1+\alpha} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \right\} f_{2,1}(x - x') dx' \mp \\ &\mp c t^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ i k E_{2\alpha, 1+\alpha} \left[ -t^{2\alpha} \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \right\} f_{1,2}(x - x') dx'\end{aligned}$$

Por otra parte, realizando primero la transformada inversa de Fourier se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{1,2}(s, x) &= \frac{s^{2\alpha-1}}{2ac^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2a}{k^2 + a^2} * f_{1,2}(k) \right\} - \frac{imc^2 s^{\alpha-1}}{2\hbar c^2 a} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2a}{k^2 + a^2} * f_{2,1}(k) \right\} \\ &\mp \frac{cs^{\alpha-1}}{2ac^2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2a}{k^2 + a^2} * ik \right\} * f_{1,2}(k) \right\} \\ &= \frac{s^{\alpha-1}}{2ac^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x'|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} f_{1,2}(x - x') dx' \\ &- \frac{ims^{\alpha-1}}{2\hbar a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x'|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} f_{2,1}(x - x') dx' \\ &\mp \frac{s^{\alpha-1}}{2ac} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}}{c} e^{-\frac{|x'|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \delta(x - x') dx' \right] f_{1,2}(x - x') dx',\end{aligned}$$

donde  $a = \frac{1}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}$ . Simplificando se puede llegar a

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{1,2}(s, x) &= \frac{s^{\alpha-1}}{2c \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x'|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} f_{1,2}(x - x') dx' \\ &- \frac{imcs^{\alpha-1}}{2\hbar \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x'|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} f_{2,1}(x - x') dx' \\ &\mp \frac{s^{\alpha-1}}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x'|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} f_{1,2}(x - x') dx' .\end{aligned}$$

Considerando condición inicial para hallar la función de Green ( $f(x) = \delta(x)$ ), se tiene

$$\tilde{\psi}_{1,2}(s, x) = \left[ \frac{s^{2\alpha-1}}{2c \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} - \frac{imcs^{\alpha-1}}{2\hbar \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} \mp \frac{s^{\alpha-1}}{2c} \right] e^{-\frac{|x|}{c} \sqrt{s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}} .$$

- Para las aproximaciones de la ecuación de Dirac fraccionaria a tiempos cortos (4.21) y tiempos largos (4.20), se parte de Dirac en espacio de Fourier, que al ser funciones de Mittag-Leffler, se realizan aproximaciones similares como fue en el caso de Klein-Gordon fraccionario. Posteriormente se puede realizar la transformada inversa restante.

Para tiempos cortos realizamos la aproximación directamente en  $\hat{\psi}_{1,2}(t, k)$ , lo que otorga

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{1,2}(t, k) \simeq & \exp \left[ -\frac{\left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} t^{2\alpha} \right] \\ & + \frac{\left( \mp i c k - i \frac{m c^2}{\hbar} \right)}{\Gamma(1 + \alpha)} \exp \left[ -\frac{\Gamma(1 + \alpha) \left( c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)}{\Gamma(1 + 3\alpha)} t^{2\alpha} \right] \end{aligned}$$

A este resultado se puede aplicar la transformada inversa de Fourier restante. El término real y masivo imaginario transforman directo la gaussiana a gaussiana salvo un factor. Mientras que el restante término imaginario, por el factor  $ik$  aparece una delta de Dirac prima, que al ser convolución se puede realizar integración por partes y otorga un menos la derivada de la transformada por una delta de Dirac. Que al ya no estar primada se evalúa directamente la convolución. Se expresan directamente los primeros resultados mencionados y se inicia el que lleva un poco más de desarrollo para posteriormente detallar solo.

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t, x) = & \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 2\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha}}} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1 + \alpha)} \right] \exp \left[ -\frac{\Gamma(1 + 2\alpha)}{4c^2 t^{2\alpha}} x^2 \right] \\ & - \frac{imc^2}{\hbar \Gamma(1 + \alpha)} \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 3\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 \Gamma(1 + \alpha) t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1 + 3\alpha)} - \frac{\Gamma(1 + 3\alpha) x^2}{4c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)} \right] \\ & \mp \frac{c}{\Gamma(1 + \alpha)} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 \Gamma(1 + \alpha) t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1 + 3\alpha)} \right] \left( \exp \left[ -\frac{\Gamma(1 + \alpha) c^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} k^2 \right] * ik \right), \end{aligned}$$

donde  $*$  indica convolución a realizar de las transformadas inversas de Fourier correspondientes. Enfocándonos en este último término se tiene

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 3\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\Gamma(1 + 3\alpha) x'^2}{4c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)} \right] \delta'(x - x') dx' \\ & \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 3\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)}} \frac{\Gamma(1 + 3\alpha)}{2c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} x' \exp \left[ -\frac{\Gamma(1 + 3\alpha) x'^2}{4c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1 + \alpha)} \right] \delta(x - x') dx' \end{aligned}$$

Evaluando la delta y agrupando términos, respecto a ese único término se puede obtener

$$\left( \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{4c^2t^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \right)^{\frac{3}{2}} 2x \exp \left[ -\frac{\Gamma(1+3\alpha)x^2}{4c^2t^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \right],$$

con lo que la aproximación para tiempos cortos de la ecuación fraccionaria de Dirac temporal desde tiempo de Fourier queda dada como

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t, x) &= \sqrt{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha}}} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1+\alpha)} \right] \exp \left[ -\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{4c^2 t^{2\alpha}} x^2 \right] \\ &\quad - \frac{imc^2}{\hbar \Gamma(1+\alpha)} \sqrt{\frac{\Gamma(1+3\alpha)}{4\pi c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1+\alpha)}} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 \Gamma(1+\alpha) t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1+3\alpha)} - \frac{\Gamma(1+3\alpha) x^2}{4c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1+\alpha)} \right] \\ &\quad \mp \frac{2cx}{\Gamma(1+\alpha)} \left( \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{4c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1+\alpha)} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{m^2 c^4 \Gamma(1+\alpha) t^{2\alpha}}{\hbar^2 \Gamma(1+3\alpha)} - \frac{\Gamma(1+3\alpha) x^2}{4c^2 t^{2\alpha} \Gamma(1+\alpha)} \right] \\ &\quad t \ll 1. \end{aligned}$$

Ahora para la aproximación a tiempos largos, realizamos directamente la aproximación en espacio de Fourier y posteriormente la transformada inversa. Por aproximación en espacio de Fourier se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{1,2}(t, k) &\simeq \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha) \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]} - \frac{t^{-4\alpha}}{\Gamma(1-4\alpha) \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^2} \\ &\quad + \left( \mp i c k - i \frac{m c^2}{\hbar} \right) \left[ \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]} - \frac{t^{-3\alpha}}{\Gamma(1-3\alpha) \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^2} \right]. \end{aligned}$$

De manera similar, el correspondiente término con  $ik$  requiere un poco más de trabajo que resulta por la derivada de delta de Dirac. Por lo que siguiendo un proceso similar a la aproximación anterior se tiene

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t, x) &\simeq \frac{\hbar t^{-2\alpha}}{2mc^3 \Gamma(1-2\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{\hbar^3 t^{-4\alpha} \left( 1 + \frac{mc}{\hbar}|x| \right)}{4m^3 c^7 \Gamma(1-4\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \\ &\quad - \frac{it^{-\alpha}}{2c \Gamma(1-\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{i \hbar^2 t^{-3\alpha} \left( 1 + \frac{mc}{\hbar}|x| \right)}{4m^2 c^5 \Gamma(1-3\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \\ &\quad \mp \left[ \frac{t^{-\alpha}}{2Mc \Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{2M}{k^2 + M^2} * ik \right) - \frac{t^{-3\alpha}}{4M^2 \Gamma(1-3\alpha)} \left( \frac{(2M)^2}{(k^2 + M^2)^2} * ik \right) \right], \end{aligned}$$

donde aquí  $M = \frac{mc}{\hbar}$  y nuevamente  $*$  denota la transformada inversa de Fourier de los respectivos términos, dada como convolución. Respecto a la última línea desarrollamos explícitamente, teniendo

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^{-\alpha}}{2Mc\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M|x'|} \delta'(x-x') dx' \\
&\quad - \frac{t^{-3\alpha}}{4M^2\Gamma(1-3\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+M|x'|) e^{-M|x'|} \delta'(x-x') dx' \\
&= \frac{t^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M|x'|} \delta(x-x') dx' \\
&\quad - \frac{t^{-3\alpha}}{4\Gamma(1-3\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} x' e^{-M|x'|} \delta(x-x') dx' \\
&= \frac{t^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} e^{-M|x|} - \frac{t^{-3\alpha}}{4\Gamma(1-3\alpha)} x e^{-M|x|}.
\end{aligned}$$

Juntando este desarrollo podemos escribir la ecuación de Dirac con aproximación en espacio de Fourier para tiempos largos como

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2}(t, x) &\simeq \frac{\hbar t^{-2\alpha}}{2mc^3\Gamma(1-2\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{\hbar^3 t^{-4\alpha} \left(1 + \frac{mc}{\hbar}|x|\right)}{4m^3 c^7 \Gamma(1-4\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \\
&\quad - \left[ \frac{it^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{i\hbar^2 t^{-3\alpha} \left(1 + \frac{mc}{\hbar}|x|\right)}{4m^2 c^5 \Gamma(1-3\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \right] \\
&\quad \mp \left[ \frac{t^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} - \frac{t^{-3\alpha}}{4\Gamma(1-3\alpha)} x e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|} \right], \quad t \gg 1.
\end{aligned}$$

- Se desarrollan las aproximaciones para la ecuación fraccionaria de Dirac en espacio de Laplace para tiempos cortos (4.22) y largos (4.23). En ambos casos se parte de la ecuación de Dirac fraccionaria en espacio de Laplace (4.19). Para tiempos cortos como en el caso de Klein-Gordon, para  $s \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow 0$ ) corresponde a tomar el límite de  $m \rightarrow 0$ , con lo que se obtiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_{1,2}(s, x) = \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{2c} - \frac{imc}{2\hbar s} \mp \frac{s^{\alpha-1}}{2c} \right] e^{-\frac{|x|}{c}s^\alpha}.$$

A esta expresión podemos aplicar la transformada inversa de Laplace restante. Los términos no masivos corresponden a la expresión de la ecuación de onda fraccionaria en espacio

de Laplace, mientras que el masivo es distinto pero igual es similar a una transformada inversa de Laplace de una función de Wright. Con lo que se obtiene

$$\psi_{1,2}(t, x) = \frac{1}{2c} [1 \mp 1] t^{-\alpha} W_{-\alpha, 1-\alpha} \left( \frac{|x|}{c} t^{-\alpha} \right) - \frac{imc}{2\hbar} W_{-\alpha, 1} \left( \frac{|x|}{c} t^{-\alpha} \right), \quad t \ll 1.$$

Por otra parte para el caso  $s \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) se tiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\psi}_{1,2}(s, x) = \left[ \frac{\hbar}{2mc^3} \frac{1}{s^{2\alpha-1}} - \frac{i}{2c} \frac{1}{s^{\alpha-1}} \mp \frac{1}{2c} \frac{1}{s^{\alpha-1}} \right] e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|}.$$

Realizando la transformada inversa de Laplace restante se tiene

$$\psi_{1,2}(t, x) = \left[ \frac{\hbar}{2mc^3} \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} - (i \pm 1) \frac{t^{-\alpha}}{2c\Gamma(1-\alpha)} \right] e^{-\frac{mc}{\hbar}|x|}, \quad t \gg 1.$$

- La relación de dispersión fraccionaria presentada en (4.24) se obtuvo evaluando directamente en Mathematica con el siguiente comando

*CaputoD[Exp[I(kx - ωt) - c<sup>2</sup>κ<sup>2</sup> + m<sup>2</sup>c<sup>4</sup>/h<sup>2</sup>], t, μ, Assumptions - > 1 < μ < 2],* que básicamente es poner solución de onda plana en la ecuación de Klein-Gordon fraccionaria. De donde resulta conveniente y factible, despejar  $\kappa(\omega)$ , que tras despejar se puede obtener (4.24). Nótese que se puso el factor correspondiente a la segunda derivada ya en términos de  $\kappa$ , ya que lo realmente complicado es evaluar la derivada fraccionaria de la parte temporal.

- Para obtener la relación de dispersión de Klein-Gordon fraccionario, parte real (4.25) e imaginaria (4.26), se evalúa como indica Giusti [68]. Para esto como se menciona en el capítulo de resultados fraccionarios, se debe emplear la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria. Esto trae consecuencias en el límite de evaluación inferior de la integral de la derivada de Caputo, mismo mencionado en su correspondiente sección. Con esto se procede a calcular como una ecuación de segundo orden, razón por la que en este

apartado se tomó el índice de la derivada fraccionaria como  $2\mu$ , por tanto  $0.5 < \mu < 1$ .

$$\begin{aligned} (-i\omega)^{2\mu} + \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right] &= 0 \\ (-i\omega)^\mu &= \pm i \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \\ \omega^\mu &= \pm i^{1+\mu} \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

En este punto vemos a  $\omega = |\omega|e^{i\theta}$ , donde  $|\omega|$  es su magnitud y  $\theta$ , de manera general, su fase. Por su parte el lado derecho lo vemos como  $\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} = \rho e^{i\psi}$ , donde  $\rho$  y  $\psi$  cumplen los respectivos papeles que en el caso de  $\omega$ .

$$|\omega|^\mu e^{i\mu\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}(1+\mu)} \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}.$$

Con esto podemos separar parte de magnitud y fase. Con la magnitud se tiene

$$\begin{aligned} |\omega|^\mu &= \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \\ |\omega| &= \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}}. \end{aligned}$$

Por su parte la fase otorga

$$\begin{aligned} e^{i\mu\theta} &= e^{\frac{i\pi}{2}(1+\mu)} e^{i\psi} \longrightarrow \mu\theta = \frac{\pi}{2}(1+\mu) + \psi \\ \theta &= \frac{\pi}{2\mu} + \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{\mu} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\psi}{\mu} \end{aligned}$$

Como  $\psi$  se relaciona con la parte imaginaria, dado como  $\psi = \tan^{-1}(Im(\rho e^{i\psi}))$ , en este caso es nulo, por lo que se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} |\omega| &= \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}} \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Con lo que podemos escribir parte real e imaginaria con ayuda de la relación de Euler. Así

se tiene para la parte real

$$\begin{aligned}\omega_r(k) &= |\omega| \cos \theta = \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}} \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \right) \\ &= \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}} \sin \left( \frac{\pi}{2\mu} \right). \\ \omega_i(k) &= |\omega| \sin \theta = \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}} \sin \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \right) \\ &= - \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}} \cos \left( \frac{\pi}{2\mu} \right)\end{aligned}$$

- La velocidad de fase (4.27) y de grupo (4.28) se obtienen por las definiciones usuales, que involucran únicamente la parte real de la relación de dispersión. Por lo que se tiene

$$\begin{aligned}v_f(k) &= \frac{\omega_r(k)}{k} = \frac{1}{k} \left[ c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}} \sin \left( \frac{\pi}{2\mu} \right), \\ v_g(k) &= \partial_k \omega_r(k) = \frac{\kappa}{\mu} \left[ c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2\mu}-1} \sin \left( \frac{\pi}{2\mu} \right).\end{aligned}$$

- Las relaciones (4.32), (4.33) como se indica en su respectiva sección se obtienen al igualar el índice de refracción imaginario de Klein-Gordon con la relación dada por Mainardi, lo que implica

$$\begin{aligned}n(i\omega) &= \sqrt{(i\omega)^{\mu-2} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 (i\omega)^2}} = c \left[ \frac{1}{V(\omega)} \mp i \frac{\delta(\omega)}{\omega} \right] \\ (i\omega)^{\mu-2} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2} &= c^2 \left[ \frac{1}{V(\omega)} \mp i \frac{\delta(\omega)}{\omega} \right]^2 = c^2 \left[ \frac{1}{V^2(\omega)} \mp \frac{2i\delta(\omega)}{\omega V(\omega)} - \frac{\delta^2(\omega)}{\omega^2} \right] \\ \frac{(i\omega)^\mu}{i^2 \omega^2} &= c^2 \left[ \frac{1}{V^2(\omega)} \mp \frac{2i\delta(\omega)}{\omega V(\omega)} - \frac{\delta^2(\omega)}{\omega^2} \right] + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2} \\ (i\omega)^\mu &= c^2 \left[ \delta^2(\omega) \pm \frac{2i\omega\delta(\omega)}{V(\omega)} - \frac{\omega^2}{V^2(\omega)} \right] - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \\ e^{\frac{\pi\mu}{2}} \omega^\mu &= c^2 \left[ \delta^2(\omega) \pm \frac{2i\omega\delta(\omega)}{V(\omega)} - \frac{\omega^2}{V^2(\omega)} \right] - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \\ \left[ \cos \left( \frac{\pi\mu}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi\mu}{2} \right) \right] \omega^\mu &= c^2 \left[ \delta^2(\omega) \pm \frac{2i\omega\delta(\omega)}{V(\omega)} - \frac{\omega^2}{V^2(\omega)} \right] - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\end{aligned}$$

De aquí podemos separar parte real e imaginaria, lo que permite obtener los resultados

presentados en (4.32) y (4.33). Teniendo para la parte real

$$\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) = c^2 \left[ \delta^2(\omega) - \frac{\omega^2}{V^2(\omega)} \right] - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}$$

Mientras que para la parte imaginaria, resulta más fácil despejar el coeficiente de atenuación, para posteriormente sustituir en la parte real y obtener los resultados mostrados.

$$\begin{aligned} \omega^\mu \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) &= \frac{2c^2\omega}{V(\omega)}\delta(\omega) \\ \delta(\omega) &= \frac{V(\omega)\omega^{\mu-1}}{2c^2} \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right). \end{aligned}$$

Habiendo despejado  $\delta$ , sustituimos en la parte real y obtenemos

$$\begin{aligned} \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) &= c^2 \left[ \frac{V(\omega)\omega^{\mu-1}}{2c^2} \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \right]^2 - \frac{c^2\omega^2}{V^2(\omega)} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \\ &= \frac{V^2(\omega)\omega^{2(\mu-1)}}{4c^2} \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - \frac{c^2\omega^2}{V^2(\omega)} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \\ V^2(\omega)\omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) &= \frac{V^4(\omega)\omega^{2(\mu-1)}}{4c^2} \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - c^2\omega^2 - V^2(\omega)\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u(\omega) = V^2(\omega)$ , podemos despejar como

$$u^2(\omega) \frac{\omega^{2(\mu-1)}}{4c^2} \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) - u(\omega) \left[ \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right] - c^2\omega^2 = 0.$$

Por simplicidad se sustituye  $M = \frac{mc^2}{\hbar}$  y  $\frac{\pi\mu}{2} = \Pi$ . Empleando la fórmula general se tienen las soluciones

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \frac{2c^2 \left[ \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \pm 2c^2 \frac{\sqrt{\left[ \omega^\mu \cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^2 + \omega^{2\mu} \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \\ &= \frac{2c^2 [\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2]}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2(\Pi)} \pm 2c^2 \frac{\sqrt{[\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2]^2 + \omega^{2\mu} \sin^2(\Pi)}}{2\omega^{2(\mu-1)} \sin^2(\Pi)} \\ &= \frac{2c^2 [\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2]}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2(\Pi)} \pm 2c^2 \frac{\sqrt{\omega^{2\mu} \cos^2(\Pi) + 2M^2\omega^\mu \cos(\Pi) + M^4 + \omega^{2\mu} \sin^2(\Pi)}}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2(\Pi)} \\ &= \frac{2c^2 [\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2]}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2(\Pi)} \pm 2c^2 \frac{\sqrt{\omega^{2\mu} + 2M^2\omega^\mu \cos(\Pi) + M^4}}{\omega^{2(\mu-1)} \sin^2(\Pi)} \end{aligned}$$

Como  $u(\omega) = V^2(\omega)$ , al sustituir la variable original, se debe volver a sacar raíz cuadrada para despejar por completo, con lo que se tiene

$$V(\omega) = \frac{\pm\sqrt{2}c}{\omega^{\mu-1} \sin(\Pi)} \sqrt{\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2 \pm \sqrt{\omega^{2\mu} + 2M^2\omega^\mu \cos(\Pi) + M^4}}.$$

Si bien hay cuatro posibilidades de solución, la que se presenta en (4.34) es la viable, esto después de haber evaluado con distintos parámetros dentro del rango de estudio ( $\pi/2 < \Pi < \pi, M > 0, 1 < \mu < 2$ ). Con lo que la velocidad de fase queda como se presenta en el capítulo 4, y en base a su relación con el coeficiente de atenuación se encuentra

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{\sqrt{2}c}{\omega^{\mu-1} \sin(\Pi)} \sqrt{\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2 + \sqrt{\omega^{2\mu} + 2M^2\omega^\mu \cos(\Pi) + M^4}} \\ \delta(\omega) &= \frac{\omega^{\mu-1} \sin(\Pi)}{2c^2} V(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}c} \sqrt{\omega^\mu \cos(\Pi) + M^2 + \sqrt{\omega^{2\mu} + 2M^2\omega^\mu \cos(\Pi) + M^4}}. \end{aligned}$$

- El caso de la velocidad de grupo a partir del índice de refracción complejo, es decir,  $U(\omega)$  se obtiene de la relación (2.37). Dado se cuenta con la velocidad de fase  $V(\omega)$ , es cuestión de evaluar y simplificar. Dada la extensión y posibles errores, este resultado se obtuvo con ayuda de Mathematica, donde se define el resultado anterior  $V(\omega)$  y se sustituye como indica la relación (2.37), lo que otorga el resultado (4.36).
- El cálculo de los desplazamientos cuadráticos medio para los casos fraccionarios, emplean el mismo resultado que el caso de orden entero. A partir de la relación (2.41) se procede a calcular (4.39) y(4.40). Para Klein-Gordon partimos de haber obtenido su expresión en espacio de Fourier-Laplace, por lo que a partir de esa expresión realizamos segunda derivada respecto a  $\kappa$  y evaluamos posteriormente en  $\kappa = 0$

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\partial_\kappa^2 \tilde{\phi}(s, \kappa) \Big|_{\kappa=0} \right\} \\ \tilde{\phi}(s, \kappa) &= \frac{s^{\mu-1}}{s^\mu + c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\kappa^2 \tilde{\phi}(s, \kappa) &= \frac{8c^4 \kappa^2 s^{\mu-1}}{\left(s^\mu + c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^3} - \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{\left(s^\mu + c^2 \kappa^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^2} \\
-\partial_\kappa^2 \tilde{\phi}(s, \kappa)|_{\kappa=0} &= \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{\left(s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^2} \\
\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\partial_\kappa^2 \tilde{\phi}(s, \kappa)|_{\kappa=0} \right\} &= 2c^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\mu-1}}{\left(s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^2} \right\} = \frac{2c^2 t^\mu}{\mu} E_{\mu, \mu} \left[ -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^\mu \right],
\end{aligned}$$

con lo que se obtiene el MSD de Klein-Gordon fraccionario

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2c^2 t^\mu}{\mu} E_{\mu, \mu} \left[ -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^\mu \right].$$

De manera análoga se puede calcular para Dirac fraccionario

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{1,2}(s, k) &= \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} - i s^{\alpha-1} \left[ \frac{\frac{mc^2}{\hbar} \pm ck}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \right] \\
&= \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \mp \frac{ick s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} - \frac{i \frac{mc^2}{\hbar} s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} \\
&= \Psi_1(s, k) \mp \Psi_2(s, k) - \Psi_3(s, k).
\end{aligned}$$

Desarrollando término a término se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_k^2 \Psi_1(s, k) &= \frac{8c^4 k^2 s^{2\alpha-1}}{\left(s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^3} - \frac{2c^2 s^{2\alpha-1}}{\left(s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^2} \\
-\partial_k \Psi_1(s, k)|_{k=0} &= \frac{2c^2 s^{2\alpha-1}}{\left(s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^2} \\
\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\partial_k^2 \Psi_1(s, k)|_{k=0} \right\} &= 2c^2 E_{2\alpha} \left[ -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_k^2 \Psi_2(s, k) &= \frac{8ic^5 k^3 s^{\alpha-1}}{\left(s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^3} - \frac{2ic^3 k s^{\alpha-1}}{\left(s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}\right)^2} \\
-\partial_k^2 \Psi_2(s, k)|_{k=0} &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_k^2 \Psi_3(s, k) &= \frac{imc^2 s^{\alpha-1}}{\hbar} \left[ \frac{8c^4 k^2}{(s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^3} - \frac{2c^2}{(s^{2\alpha} + c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2} \right] \\ -\partial_k^2 \Psi_3(s, k)|_{k=0} &= \frac{2imc^3 s^{\alpha-1}}{\hbar (s^{2\alpha} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2} \\ \mathcal{L}^{-1} \{-\partial_k^2 \Psi_3(s, k)|_{k=0}\} &= \frac{2imc^3}{\hbar} \left[ \frac{t^{3\alpha}}{2\alpha} E_{2\alpha, 3\alpha} \left( -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right) - \frac{1}{2} E_{2\alpha, 3\alpha-1} \left( -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Con lo que el MSD para la ecuación fraccionaria de Dirac queda como

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= 2c^2 E_{2\alpha} \left[ -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right] + \\ &+ \frac{2imc^3}{\hbar} \left[ \frac{t^{3\alpha}}{2\alpha} E_{2\alpha, 3\alpha} \left( -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right) - \frac{1}{2} E_{2\alpha, 3\alpha-1} \left( -\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} t^{2\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

- Por último las aproximaciones del MSD de Klein-Gordon fraccionario mediante los teoremas Tauberianos (4.41) y (4.42). Se parte de la expresión

$$-\partial_k^2 \tilde{\phi}(s, k)|_{k=0} = \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{(s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2},$$

en donde tomamos límite  $s \rightarrow \infty$  correspondiente a  $t \rightarrow 0$ , y a su vez el límite  $s \rightarrow 0$  que corresponde a  $t \rightarrow \infty$ . Para el primer caso se tiene

$$\lim_{s \rightarrow \infty} -\partial_k^2 \tilde{\phi}(s, k)|_{k=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{(s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2} = \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{s^{2\mu}} = \frac{2c^2}{s^{\mu+1}}.$$

Realizando la transformada inversa de Laplace se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} -\partial_k^2 \tilde{\phi}(s, k)|_{k=0} \right\} = \frac{2c^2}{\Gamma(1 + \mu)} t^\mu, \quad t \rightarrow 0.$$

Por su parte, el otro límite otorga

$$\lim_{s \rightarrow 0} -\partial_k^2 \tilde{\phi}(s, k)|_{k=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{(s^\mu + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2} = \frac{2c^2 s^{\mu-1}}{(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2})^2} = \frac{2\hbar^2}{m^4 c^6} \frac{1}{s^{1-\mu}}.$$

Al evaluar la transformada inversa de Laplace se tiene

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} -\partial_k^2 \tilde{\phi}(s, k)|_{k=0} \right\} = \frac{2\hbar^2}{m^4 c^6 \Gamma(\mu - 1)} t^{\mu-2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

# Apéndice C

## Función Mittag-Leffler

Se presentó la definición de la función Mittag-Leffler de un parámetro en (2.7), a continuación se presentan definiciones para dos a cuatro parámetros, junto con relaciones útiles y transformadas de Laplace.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (z, \beta \in \mathbb{C}, \mathcal{R}(\alpha) > 0). \quad (\text{C.1})$$

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (\beta, \gamma, z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}(\alpha) > 0). \quad (\text{C.2})$$

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}, \quad (z, \alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbb{C}; \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbb{R}[\alpha] > \max\{0, \mathbb{R}[\kappa] - 1\}; \mathbb{R}[\kappa] > 0),$$

donde  $(\gamma)_{\kappa}$  es el símbolo de Pochhammer, definido como

$$(\gamma)_0 = 1, \quad (\gamma)_{\kappa} = \frac{\Gamma(\gamma + \kappa)}{\Gamma(\gamma)}, \quad (0)_0 = 1 \quad (\text{C.4})$$

Podemos ver de las definiciones para varios parámetros de la función Mittag-Leffler, si se evalúa el último índice como 1, se puede ver como una función Mittag-Leffler de un parámetro menor,

es decir

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad (\text{C.5})$$

$$E_{\alpha,\beta}^1 = E_{\alpha,\beta}(z) \quad (\text{C.6})$$

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma,1}(z) = E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z). \quad (\text{C.7})$$

Relaciones útiles para presentar sus transformadas de Laplace son

$$e_{\alpha,\beta}(t; \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha}), \quad (\alpha, \beta > 0; \lambda \in \mathbb{C}) \quad (\text{C.8})$$

$$e_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t; \lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(-\lambda t^{\alpha}), \quad (\text{mín } \{\alpha, \beta, \gamma\} > 0; \lambda \in \mathbb{R}). \quad (\text{C.9})$$

Sus transformadas de Laplace están dadas por

$$\mathcal{L} \{e_{\alpha}(t; \mp \lambda)\} (s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} \mp \lambda}, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{L} \{e_{\alpha,\beta}(t; \mp \lambda)\} (s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp \lambda} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathcal{L} \{e_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t; \mp \lambda)\} (s) = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\gamma}} \quad (\text{C.12})$$

Para realizar aproximaciones a tiempos pequeños o grandes, se emplean los siguientes resultados

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha}) \simeq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \exp \left[ -\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \lambda t^{\alpha} \right] \quad t \ll 1, \quad (\text{C.13})$$

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha}) \simeq \frac{t^{\beta-\alpha-1}}{\lambda \Gamma(\beta - \alpha)} - \frac{t^{\beta-2\alpha-1}}{\lambda^2 \Gamma(\beta - 2\alpha)}, \quad t \gg 1. \quad (\text{C.14})$$

# Apéndice D

## Función H de Fox

La definición de la función H de Fox se presenta en (2.12), a continuación se presentan propiedades y resultados empleados a lo largo del trabajo.

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}), (a_1, A_1) \end{array} \right. \right] = H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}) \end{array} \right. \right] \quad (\text{D.1})$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}), (b_1, B_1) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}) \\ (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \quad (\text{D.2})$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z^\delta \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{\delta} H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1/\delta), \dots, (a_p, A_p/\delta) \\ (b_1, B_1/\delta), \dots, (b_q, B_q/\delta) \end{array} \right. \right], \delta > 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty k^{\rho-1} \cos(kx) H_{p,q}^{m,n} \left[ ak^\delta \left| \begin{array}{c} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] dk = \\ & = \frac{\pi}{x^\rho} H_{q+1,p+2}^{n+1,m} \left[ \frac{x^\delta}{a} \left| \begin{array}{c} (1-b_q, B_q), \quad (\frac{1+\rho}{2}, \delta/2) \\ (\rho, \delta), \quad (1-a_p, A_p), \quad (\frac{1+\rho}{2}, \delta/2) \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Una relación útil y que relaciona las funciones Mittag-Leffler con a función H de Fox es

$$E_{\alpha,\beta}(-z) = H_{2,1}^{1,1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (0, 1) \\ (0, 1), \quad (1-\beta, \alpha) \end{array} \right. \right] \quad (\text{D.5})$$

# Apéndice E

## Función de Wright

Función definida y estudiada inicialmente por el matemático Británico E. Maitland Wright. Un tratamiento ampliamente detallado lo da Mainardi en el apéndice F de su libro ([4]). Aquí solo se denota definición y resultados que son útiles en el desarrollo del presente trabajo. La función de Wright se define como

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \quad \mu \in \mathbf{C}. \quad (\text{E.1})$$

La función de Wright resulta estar relacionada con las funciones de Bessel  $J$  y Bessel modificadas  $I$ , tomando los caso  $\lambda = 1$  y  $\mu = \nu + 1$ .

$$W_{1,\nu+1}(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!\Gamma(n + \nu + 1)} = z^{-\nu/2} J_{\nu}(2z^{1/2}) \quad (\text{E.2})$$

$$W_{1,\nu+1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(n + \nu + 1)} = z^{-\nu/2} I_{\nu}(2z^{1/2}). \quad (\text{E.3})$$

Esta función es de relevancia dado que el mismo Mainardi empleó casos específicos para estudiar la ecuación de onda difusiva y fraccionaria en el tiempo [72]. Estos casos específicos y nombradas como funciones auxiliares por Mainardi son las funciones  $F$  y  $M$

$$F_{\nu}(z) = W_{-\nu,0}(-z) \quad (\text{E.4})$$

$$M_{\nu}(z) = W_{-\nu,1-\nu}(-z), \quad (\text{E.5})$$

donde en ambos casos  $0 < \nu < 1$ . Al igual que varias de las funciones mencionadas y empleadas en anteriores apéndices, es importante su transformada de Laplace. Para la función de Wright se tiene

$$\mathcal{L}\{W_{\lambda,\mu}(\pm r)\} = \frac{1}{s} E_{\lambda,\mu}\left(\pm \frac{1}{s}\right), \quad \lambda > 0, \quad |s| > \rho > 0, \quad (\text{E.6})$$

donde  $E_{\lambda,\mu}$  denota la función de Mittag-Leffler de dos parámetros. En el caso de las funciones auxiliares se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{r} F_{\nu}(1/r^{\nu})\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\nu}{r^{\nu+1}} M_{\nu}(1/r^{\nu})\right\} = e^{-s^{\nu}} \quad (\text{E.7})$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\nu} F_{\nu}(1/r^{\nu+1})\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{r^{\nu}} M_{\nu}(1/r^{\nu})\right\} = \frac{e^{-s^{\nu}}}{s^{1-\nu}} \quad (\text{E.8})$$

donde  $0 < \nu < 1$ . Por último un caso que sirve para aproximación de solución a la ecuación de Klein-Gordon fraccionaria, se tiene

$$\mathcal{L}\{t^{\mu-1} W_{-\nu,\mu}(-x/t^{\nu})\} = s^{-\mu} e^{-xs^{\nu}}, \quad 0 < \nu < 1, \quad \mu \geq 0, \quad (\text{E.9})$$

y además  $x$  y  $t$  son positivos.

# Apéndice F

## Difusión Anómala

Se conoce como difusión al movimiento neto de algo (átomos, moléculas, masa, etc.) de una región de mayor concentración a una región de menor concentración. Si un proceso difusivo puede ser descrito mediante las leyes de Fick, se dice que difusión normal; de lo contrario se conoce como difusión anómala.

Postuladas por Adolf Fick en 1855 durante un estudio, sus leyes se pueden denotar como

1. El movimiento de partículas de concentración alta a baja es proporcional al gradiente de concentración de la partícula.
2. La predicción del cambio en el gradiente de concentración con el tiempo, es debido a la difusión [73].

En el caso unidimensional, la primer ley se puede escribir como

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (\text{F.1})$$

donde  $J$  es el flujo difusivo, mide la cantidad de sustancia que fluirá a través de una unidad de área durante una unidad de tiempo.  $D$  es el coeficiente de difusión y  $\phi$  es la cantidad de sustancia por unidad de volumen. La segunda ley predice como la difusión provoca que la concentración cambie respecto al tiempo, con lo que se puede obtener

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (\text{F.2})$$

también conocida como la ecuación de difusión. La solución a la ecuación (F.2) es conocida y está dada por

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (\text{F.3})$$

Una característica de los fenómenos descritos por esta ecuación, es su desplazamiento cuadrático medio. Es una medida de la desviación de la posición de una partícula con respecto a una posición de referencia a lo largo del tiempo. En el caso de difusión normal se tiene un desplazamiento cuadrático medio lineal en el tiempo, dado como

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt. \quad (\text{F.4})$$

La difusión anómala es un proceso difusivo con una relación no lineal entre el desplazamiento cuadrático medio y el tiempo. En medios inhomogéneos como medios porosos, la ecuación de difusión normal no es capaz de caracterizar los procesos de difusivos complejos presentes. El desplazamiento cuadrático medio en la difusión anómala es de tipo potencia en el tiempo

$$\langle x^2(\tau) \rangle = K_\alpha \tau^\alpha, \quad (\text{F.5})$$

donde  $K_\alpha$  se le conoce como coeficiente generalizado de difusión y  $\tau$  es el tiempo transcurrido. Las ecuaciones de difusión fraccionarias fueron introducidas para caracterizar el fenómeno de difusión anómala. La clasificación de difusión anómala se da como

- $\alpha < 1$  - subdifusión.
- $\alpha = 1$  - movimiento browniano.
- $1 < \alpha < 2$  - superdifusión.
- $\alpha = 2$  - movimiento balístico.
- $\alpha > 2$  - hiperbalístico.

La ecuación que da lugar a este escenario de posibles comportamientos en la difusión, es la ecuación de difusión con derivada temporal fraccionaria, o también conocida como ecuación de

onda fraccionaria, dada como

$${}_0^C D_t^\alpha \phi(t, x) = K_\alpha \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2}. \quad (\text{F.6})$$

# Bibliografía

- [1] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, volume 55. US Government printing office, 1948.
- [2] Harry Bateman, Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, and Fritz Oberhettinger. Tables of integral transforms, volume 1. McGraw-Hill New York, 1954.
- [3] Andrea Giusti. Dispersive wave solutions of the Klein-Gordon equation in Cosmology. PhD thesis, 2013.
- [4] Francesco Mainardi. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models. World Scientific, 2022.
- [5] Léon Brillouin. Wave propagation and group velocity, volume 8. Academic press, 2013.
- [6] James F Doyle and James F Doyle. Wave propagation in structures. Springer, 1989.
- [7] Eduardo Infantes, Alejandro Orfila, Gonzalo Simarro, Jorge Terrados, Mitul Luhar, and Heidi Nepf. Effect of a seagrass (*posidonia oceanica*) meadow on wave propagation. Marine Ecology Progress Series, 456:63–72, 2012.
- [8] Sophie L Nedelec, James Campbell, Andrew N Radford, Stephen D Simpson, and Nathan D Merchant. Particle motion: the missing link in underwater acoustic ecology. Methods in Ecology and Evolution, 7(7):836–842, 2016.
- [9] F Dunn, WK Law, and LA Frizzell. Nonlinear ultrasonic wave propagation in biological materials. In 1981 Ultrasonics Symposium, pages 527–532. IEEE, 1981.

- [10] Vitaly Volpert and Sergei Petrovskii. Reaction–diffusion waves in biology. Physics of life reviews, 6(4):267–310, 2009.
- [11] Philip McCord Morse and Herman Feshbach. Methods of theoretical physics. Technology Press, 1946.
- [12] Bruce J West. Colloquium: Fractional calculus view of complexity: A tutorial. Reviews of modern physics, 86(4):1169–1186, 2014.
- [13] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Physics reports, 339(1):1–77, 2000.
- [14] Ralf Metzler and Theo F Nonnenmacher. Space-and time-fractional diffusion and wave equations, fractional fokker–planck equations, and physical motivation. Chemical physics, 284(1-2):67–90, 2002.
- [15] Igor Podlubny. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. elsevier, 1998.
- [16] Ralf Metzler, Walter G Glöckle, and Theo F Nonnenmacher. Fractional model equation for anomalous diffusion. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 211(1):13–24, 1994.
- [17] Francesco Mainardi. The time fractional diffusion-wave equation. Radiophysics and Quantum Electronics, 38(1):13–24, 1995.
- [18] GW Scott Blair, BC Veinoglou, and JE Caffyn. Limitations of the newtonian time scale in relation to non-equilibrium rheological states and a theory of quasi-properties. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 189(1016):69–87, 1947.
- [19] Bruce J West. Fractional calculus view of complexity: tomorrow’s science. CRC Press, 2016.

- [20] G Turchetti, D Usero, L Vazquez, et al. Hamiltonian systems with fractional time derivative. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 18(1):31–44, 2002.
- [21] Pensri Pramukkul, Adam Svenkeson, Paolo Grigolini, Mauro Bologna, and Bruce West. Complexity and the fractional calculus. Advances in Mathematical Physics, 2013(1):498789, 2013.
- [22] Didier Sornette. Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools. Springer, 2006.
- [23] R Hilfer. Fractional derivatives in static and dynamic scaling. Scale invariance and Beyond, pages 53–62, 1997.
- [24] Abdon Atangana. Fractional derivatives, dimensions, and geometric interpretation: An answer to your worries. AIMS MATHEMATICS, 10(2):2562–2588, 2025.
- [25] Abdul Ghaffar Khan, Muhammad Muddassar, Sultan Shoaib, Zia Ur Rehman, and Muhammad Zahid. Dynamical systems with fractional derivatives: Focus on phase portraits and plasma wave propagation using lakshmanan–porsezian–daniel model. Axioms, 14(6):405, 2025.
- [26] SF Novaes. Standard model: An introduction. 10th Jorge Andre Swieca Summer School: Particle and Fields, pages 5–102, 2000.
- [27] David Bailin and Alexander Love. Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition. Taylor & Francis, 1993.
- [28] Michael E Peskin. An introduction to quantum field theory. CRC press, 2018.
- [29] The Standard Model — home.cern. <https://home.cern/science/physics/standard-model>. [Accessed 11-12-2024].
- [30] LHC upgrades during ls2. <https://home.cern/press/2022/lhc-upgrades-during-ls2>, 2022. [Accessed 11-12-2024].
- [31] Vincenzo Cirigliano and Michael J Ramsey-Musolf. Low energy probes of physics beyond the standard model. Progress in Particle and Nuclear Physics, 71:2–20, 2013.

- [32] Fabiola Gianotti. Physics at the lhc. Physics Reports, 403:379–399, 2004.
- [33] Ervin Goldfain. Complexity in quantum field theory and physics beyond the standard model. Chaos, Solitons & Fractals, 28(4):913–922, 2006.
- [34] Ervin Goldfain. Fractional dynamics and the standard model for particle physics. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(7):1397–1404, 2008.
- [35] A Glück, H Hüffel, and S Ilijić. Complex systems and quantum field theory. Black Holes in General Relativity and String Theory, page 29, 2008.
- [36] Richard Herrmann. Gauge invariance in fractional field theories. Physics Letters A, 372(34):5515–5522, 2008.
- [37] Robert Zwanzig. Nonequilibrium statistical mechanics oxford university press. New York, 2001.
- [38] Gösta Magnus Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction  $e_\alpha(x)$ . CR Acad. Sci. Paris, 137(2):554–558, 1903.
- [39] Hans J Haubold, Arak M Mathai, and Ram K Saxena. Mittag-leffler functions and their applications. Journal of applied mathematics, 2011(1):298628, 2011.
- [40] Trifce Sandev and Z Tomovski. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- [41] Charles Fox. The  $J_\nu$  and  $K_\nu$  functions as symmetrical fourier kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 98(3):395–429, 1961.
- [42] Carl F Lorenzo and Tom T Hartley. Generalized functions for the fractional calculus. 1999.
- [43] René L Schilling, Renming Song, and Zoran Vondraček. Bernstein functions: theory and applications. Walter de Gruyter, 2009.
- [44] David Applebaum. Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge university press, 2009.

- [45] Igor Podlubny. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, volume 198. elsevier, 1998.
- [46] Kenneth S Cole. Electric conductance of biological systems. In Cold Spring Harbor symposia on quantitative biology, volume 1, pages 107–116. Cold Spring Harbor Laboratory Press, 1933.
- [47] MEHAUTE LE, DE GUIBERT, M DELAYE, and C FILIPPI. Note d'introduction de la cinétique des échanges d'énergies et de matières sur les interfaces fractales. 1982.
- [48] Keith B Oldham and Jerome Spanier. The replacement of fick's laws by a formulation involving semidifferentiation. Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry, 26(2-3):331–341, 1970.
- [49] Massimiliano Giona and H Eduardo Roman. A theory of transport phenomena in disordered systems. The Chemical Engineering Journal, 49(1):1–10, 1992.
- [50] RR Nigmatullin. To the theoretical explanation of the “universal response”. physica status solidi (b), 123(2):739–745, 1984.
- [51] P Kostrobij, B Markovych, O Viznovych, I Zelinska, and M Tokarchuk. Generalized cattaneo–maxwell diffusion equation with fractional derivatives. dispersion relations. Mathematical modeling and computing, (6, Num. 1):58–68, 2019.
- [52] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Physics reports, 339(1):1–77, 2000.
- [53] Trifce Sandev and Alexander Iomin. Special Functions of Fractional Calculus: Applications to Diffusion and Random Search Processes. World Scientific, 2022.
- [54] Albert Compte. Stochastic foundations of fractional dynamics. Physical Review E, 53(4):4191, 1996.
- [55] Alexander V Plyukhin and Jeremy Schofield. Stochastic model related to the klein-gordon equation. Physical Review E, 64(3):037101, 2001.

- [56] AV Plyukhin. Stochastic process leading to wave equations in dimensions higher than one. Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 81(2):021113, 2010.
- [57] Steven Weinberg. The quantum theory of fields, volume 1. Cambridge university press, 1995.
- [58] A. Güijosa. Apuntes teoría cuántica de campos 1, 2007.
- [59] David J. Griffiths and Darrell F. Schroeter. Introduction to quantum mechanics. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, NY, third edition edition, 2018.
- [60] David J Griffiths. Introduction to electrodynamics. Cambridge University Press, 2023.
- [61] Walter Greiner et al. Relativistic quantum mechanics, volume 3. Springer, 1990.
- [62] John David Barrow. Dimensionality. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 310(1512):337–346, 1983.
- [63] G Bengochea, L Verde-Star, and M Ortigueira. Operational solution to the nonlinear klein-gordon equation. Communications in Theoretical Physics, 69(5):506, 2018.
- [64] Max Born and Emil Wolf. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Elsevier, 2013.
- [65] William Coffey and Yu P Kalmykov. The Langevin equation: with applications to stochastic problems in physics, chemistry and electrical engineering, volume 27. World Scientific, 2012.
- [66] Gustav Doetsch. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Springer Science & Business Media, 2012.
- [67] William Feller. An introduction to probability theory and its applications, Volume 2, volume 2. John Wiley & Sons, 1991.
- [68] Andrea Giusti. Dispersion relations for the time-fractional cattaneo-maxwell heat equation. Journal of Mathematical Physics, 59(1), 2018.

- [69] Curtis D. Mobley. The oceanic optics book. International Ocean Colour Coordinating Group (IOCCG), 2022.
- [70] Luca Angelani, Alessandro De Gregorio, and Roberto Garra. Generalized time-fractional kinetic-type equations with multiple parameters. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 35(2), 2025.
- [71] V Balakrishnan and S Lakshimbala. On the connection between biased dichotomous diffusion and the one-dimensional dirac equation. New Journal of Physics, 7(1):11, 2005.
- [72] Francesco Mainardi. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. Applied Mathematics Letters, 9(6):23–28, 1996.
- [73] Adolf Fick. Ueber diffusion. Annalen der physik, 170(1):59–86, 1855.