

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

**Deducción Rigurosa y Análisis
de Campos de Velocidad Irrotacional
y Rotacional en las Ecuaciones de Navier-Stokes**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

ROBERTO CARLOS URRUTIA AMARO

DIRECTOR

DR. JULIO ROBERTO MURILLO TORRES

Ciudad de México, noviembre de 2024.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS ©

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia, cuyo amor incondicional, comprensión y constante aliento han sido la base de mi fortaleza. Gracias por su fe inquebrantable en mí y por estar siempre a mi lado en cada paso de este camino.

Agradezco a mi asesor por su inigualable guía, paciencia y dedicación. Su compromiso y experiencia han sido esenciales para el desarrollo y finalización de este trabajo. Agradezco a los profesores y mentores que, a lo largo de mi formación académica, compartieron su conocimiento y me motivaron a superar desafíos.

En particular, quiero agradecer a mis profesores de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México y de la Escuela Superior de Física y Matemáticas, por su valiosa contribución a mi formación durante la licenciatura. Sus enseñanzas no solo enriquecieron mi comprensión, sino que también despertaron mi pasión por la ciencia. Un especial agradecimiento a mis compañeros de estudios, quienes con su apoyo, debates y colaboración hicieron de este camino una experiencia enriquecedora y gratificante.

Dedicatoria

Dedico esta tesis con profundo amor y gratitud a mis padres, Casimiro Alvino Urrutia Pérez y Delfina Amaro Torres, quienes, con su ejemplo de perseverancia, sacrificio y humildad, me enseñaron que el verdadero éxito no se mide en logros materiales, sino en la capacidad de enfrentar los desafíos con integridad y corazón. A mis hermanos, que han sido mi apoyo constante y mis compañeros en este viaje de vida. Ustedes me han demostrado que la verdadera fortaleza se encuentra en la unión familiar. A mis sobrinos, que con su alegría y curiosidad me han recordado la importancia de mirar el mundo con asombro y ganas de aprender. Ustedes son la esperanza de un futuro lleno de posibilidades. Por último y no menos importante, a Sven, quien con su presencia me ha brindado momentos de calma y compañía.

A cada uno de ustedes, les debo no solo este logro académico, sino también el aprendizaje de que los sueños son alcanzables cuando se cuenta con el amor y apoyo de la familia.

Objetivos Generales

I. Deducción rigurosa de las ecuaciones de Navier-Stokes:

El primer objetivo de esta tesis es realizar una deducción matemática rigurosa de las ecuaciones de Navier-Stokes. Se llevará a cabo un análisis exhaustivo de los teoremas y principios matemáticos que sustentan estas ecuaciones, prestando especial atención a la conservación del momento lineal. Este proceso incluirá un enfoque detallado tanto en los fundamentos físicos como en las bases teóricas que explican la dinámica de los fluidos.

II. Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo suposiciones específicas:

El segundo objetivo consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes bajo dos supuestos específicos sobre la velocidad del fluido. En primer lugar, se considerará que la velocidad del fluido es el gradiente de una función escalar, es decir, $\mathbf{v} = \nabla u$, lo que corresponde a un flujo potencial e irrotacional. En segundo lugar, se analizará el caso en el que la velocidad se define como el rotacional de una función vectorial, es decir, $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$, lo que describe un flujo con vorticidad, asumiendo además que ψ es un campo de Beltrami. Ambas suposiciones facilitarán la obtención de soluciones simplificadas que permitirán una mejor comprensión del comportamiento de los fluidos en condiciones específicas.

Introducción

Comenzaremos con la deducción rigurosa de las ecuaciones de Navier-Stokes, destacando tanto los fundamentos matemáticos como los principios físicos que las sustentan. Esto incluirá un análisis detallado de los teoremas y conceptos clave utilizados en dicha deducción, con énfasis en las ecuaciones de conservación del momento lineal y en la formulación del tensor de esfuerzos.

Como punto importante, es esencial comprender el origen de estas ecuaciones, por lo que se revisará su contexto histórico. Esta revisión brindará la motivación y el marco necesarios para entender mejor el desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Historia

La historia de las ecuaciones de Navier-Stokes se remonta al siglo XVII, específicamente a 1687, cuando Isaac Newton publicó su obra más importante, "Principios matemáticos de la filosofía natural". Este trabajo tuvo un gran impacto en la física, especialmente en la mecánica, que estudia el movimiento de los cuerpos. En este libro, Newton estableció las bases para la mecánica moderna, incluyendo las tres leyes del movimiento: la ley de inercia, la relación entre fuerza y aceleración, y la ley de acción y reacción.

Además de sus contribuciones a la mecánica, Newton, cuya imagen se presenta en la figura (1a), fue pionero en el desarrollo del cálculo infinitesimal, una herramienta que revolucionó el análisis de problemas físicos complejos. No obstante, en su época, las soluciones obtenidas mediante el cálculo solo podían aplicarse al estudio de fluidos ideales o no viscosos, lo que limitaba la representación precisa de muchos fenómenos naturales.

En 1738, Bernoulli, cuya imagen se muestra en la figura (1b), demostró que el gradiente de presión es proporcional a la aceleración del fluido, estableciendo fundamentos importantes para investigaciones posteriores en la mecánica de fluidos. Por su parte, Euler (2a) derivó las ecuaciones diferenciales conocidas como ecuaciones de Euler (1), las cuales, sin embargo, no incluyen la acción de la viscosidad, lo que lleva a predicciones poco realistas en muchos casos.

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La paradoja de D'Alembert, formulada por el matemático y físico francés Jean le Rond d'Alembert en 1758, desafió la intuición sobre el movimiento de los cuerpos en un fluido. D'Alembert, cuya imagen se muestra en la figura (1c), demostró matemáticamente que, incluso en un fluido ideal sin viscosidad, un cuerpo experimenta una fuerza de resistencia que se opone a su movimiento. Esta contradicción entre la teoría y la observación experimental condujo al desarrollo de la mecánica de fluidos como una rama de estudio independiente.



(a) Isaac Newton.
Fuente: [1]



(b) Daniel Bernoulli.
Fuente: [2]



(c) Jean le Rond d'Alembert.
Fuente: [3]

Figura 1: Retratos de destacados científicos en la historia de la mecánica y la dinámica de fluidos.

La búsqueda de una descripción más precisa del movimiento de los fluidos ha sido una preocupación central en la física y la matemática desde el siglo XVIII. Inicialmente, las ecuaciones de

Euler ofrecieron un marco para describir el comportamiento de los fluidos ideales, que son aquellos sin viscosidad. Sin embargo, para comprender mejor la dinámica de fluidos reales, que presentan resistencia interna, fue necesario incorporar términos que representaran la fricción en estas ecuaciones.

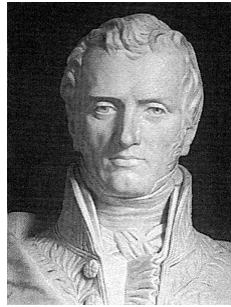
En 1822, Claude-Louis Navier formuló una de las primeras versiones de las ecuaciones de Navier-Stokes, introduciendo un término adicional para representar la fricción a nivel molecular. Este avance permitió describir de manera más precisa el comportamiento de los fluidos viscosos. La imagen de Louis Navier se muestra en la figura (2b).

Más tarde, en 1845, George Gabriel Stokes refinó y amplió las ecuaciones de Navier para considerar fluidos de baja velocidad y alta viscosidad. Su trabajo dio lugar a las ecuaciones de Stokes, que describen con mayor detalle la dinámica de los fluidos en ciertas condiciones. La imagen de George Stokes se muestra en la figura (2c).

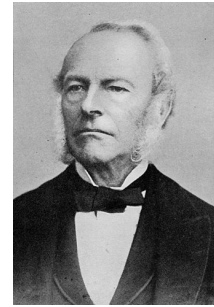
El desarrollo de estas ecuaciones no fue un esfuerzo aislado. Otros científicos, como Augustin-Louis Cauchy, introdujeron una formulación más general de las ecuaciones de movimiento para fluidos viscosos. Siméon-Denis Poisson también realizó contribuciones importantes a la teoría de la elasticidad y la dinámica de fluidos. Además, Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant llevó a cabo trabajos significativos en la teoría de la elasticidad y la mecánica de fluidos. Este continuo desarrollo en la teoría de fluidos sentó las bases para una comprensión más profunda de la dinámica de los fluidos, abriendo nuevas áreas de investigación y aplicación en la ciencia y la ingeniería.



(a) Leonhard Paul Euler.
Fuente: [4]



(b) Claude-Louis Navier.
Fuente: [5]



(c) George Gabriel Stokes.
Fuente: [6]

Figura 2: Retratos de Leonhard Paul Euler, Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes, quienes hicieron contribuciones fundamentales a la teoría de fluidos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, en su forma más general, se escriben como:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen el movimiento de un fluido en función de su velocidad, presión y las fuerzas que actúan sobre él. Aquí, ρ representa la densidad del fluido, \mathbf{v} es la velocidad, p es la presión, μ es la viscosidad y $\rho \mathbf{f}$ son las fuerzas externas.

Aunque las ecuaciones de Navier-Stokes se utilizan en diversas aplicaciones prácticas, como el diseño de aeronaves y la predicción del clima, aún hay aspectos teóricos que no se comprenden completamente. El problema de existencia y suavidad de Navier-Stokes es uno de los mayores desafíos en matemáticas, con implicaciones significativas en la física y la ingeniería.

Estas ecuaciones describen el movimiento de fluidos, desde su formulación inicial en el siglo XIX hasta su influencia en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería hoy en día. En esta tesis, nos proponemos explorar a fondo estas ecuaciones desde una perspectiva matemática rigurosa, enfocándonos en su deducción y analizando las soluciones simplificadas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En los siguientes capítulos, realizaremos una deducción detallada de las ecuaciones de Navier-Stokes, abordando cada teorema y concepto relevante con rigor matemático. Este enfoque permitirá una comprensión profunda de la estructura de estas ecuaciones y su relación con los principios básicos de

la física.

Nos enfocaremos en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes bajo dos supuestos distintos para la velocidad. El primero considera que la velocidad se deriva del gradiente de una función escalar, mientras que el segundo supone que la velocidad es el rotacional de una función vectorial, asumiendo además que se trata de un campo de Beltrami. Este enfoque permitirá analizar diferentes comportamientos de los fluidos y facilitará la obtención de soluciones más manejables.

En resumen, esta tesis tiene como objetivo ofrecer una visión integral de las ecuaciones de Navier-Stokes, abarcando desde sus fundamentos matemáticos hasta el proceso de resolución bajo estas dos suposiciones, explorando así su interrelación con principios de la física.

Índice general

1 Medios Continuos	7
1.1 Coordenadas	7
1.2 Derivada Material y Variación del Jacobiano en Medios Deformables	11
1.2.1 Derivada Material	11
1.2.2 Variación del Jacobiano en Medios Deformables	12
1.3 Principio de Conservación de Masa	15
1.3.1 Teorema de Transporte de Reynolds	16
2 Momento Lineal y Momento Angular	21
2.1 Momento Lineal	21
2.1.1 Matriz de Esfuerzos	23
2.2 Momento Angular	31
3 Forma de la Matriz de Esfuerzos	34
3.1 Gradiente de Velocidad	34
3.1.1 Transformación de Coordenadas y Análisis del Gradiente de Velocidad	35
3.2 Teorema de la Representación para Isótopos	40
3.2.1 Forma Exacta de la Matriz de Esfuerzos	42
4 Ecuaciones de Navier-Stokes	44
4.1 Ecuación de Navier-Stokes adimensional	45
4.1.1 Efectos del Número de Reynolds en la Estabilidad del Flujo: Transición a la Turbulencia	46
4.2 Soluciones de la Ecuación de Navier-Stokes para Fluidos Irrotacionales y Rotacionales	47
4.3 Suposición de la Velocidad como el Gradiente de un Potencial Escalar	48
4.3.1 Comprobación:	51
4.3.2 Simulación	56
4.3.3 Conclusiones	59
4.4 Suposición de la Velocidad como la Rotación de una Función Vectorial	60
4.4.1 Comprobación:	63
4.4.2 Simulación	65
4.4.3 Conclusiones	68
Conclusiones	69
A Notación Índicial	71
A.1 Introducción	71
A.2 Delta de Kronecker	72
A.3 Símbolo de Levi-Civita	72
A.4 Producto Tensorial	76
A.5 Operadores Diferenciales	77
B Teoremas, Lemas y Definiciones Relevantes	80
B.1 Lemas y definiciones	80
B.1.1 Teorema del Valor Medio para Integrales de Superficie y Volumen de Campos Vectoriales	80
B.1.2 Lema de Conmutatividad en Exponenciales Matriciales	83
B.2 Descomposición de Matrices Simétricas y Proyección en Espacios Propios	83
C Códigos de Matlab	90

Índice de figuras

1	Retratos de destacados científicos en la historia de la mecánica y la dinámica de fluidos.	1
2	Retratos de Leonhard Paul Euler, Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes, quienes hicieron contribuciones fundamentales a la teoría de fluidos.	2
1.1	Coordenadas espaciales.	8
1.2	Coordenadas materiales.	8
1.3	Cuerpo en el espacio.	9
1.4	Velocidad de $\mathbf{S}(t)$	11
1.5	Conservación de la masa en el cuerpo conforme el fluido se mueve.	15
1.6	Subconjunto del fluido	19
2.1	Fuerzas externas	22
2.2	Fuerza de tensión	22
2.3	Tetraedro de Cauchy-Euler	24
2.4	Triangulo rectangulo formado por \mathbf{O} , \mathbf{N} y \mathbf{P} .	24
2.5	Triangulo rectangulo.	25
2.6	Fuerzas de tensión	26
2.7	Concentración de volumen del tetraedro y tendencia de la altura a cero	29
4.1	Representación de Flujo Laminar	47
4.2	Representación de Flujo Turbulento	47
4.3	Solución 1: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$	58
4.4	Solución 1: Visualización del flujo laminar con $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$	58
4.5	Solución 1: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$	59
4.6	Solución 1: Visualización del flujo laminar con $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$	59
4.7	Solución 2: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$	66
4.8	Solución 2: Visualización del flujo turbulento con $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$	67
4.9	Solución 2: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$	67
4.10	Solución 2: Visualización del flujo laminar con $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$	68
A.1	Representación gráfica del símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} . La imagen muestra las permutaciones de los índices (i, j, k) y el signo asociado: $\varepsilon_{ijk} = 1$ para permutaciones pares y $\varepsilon_{ijk} = -1$ para permutaciones impares.	73
A.2	Representación geométrica del símbolo de Levi-Civita como un cubo con permutaciones de índices.	73
B.1	Descomposición de \mathbf{v} en términos de vectores propios.	85
B.2	Proyección de un vector en el subespacio generado por un vector propio	85
B.3	Reflexión de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} .	87

Índice de cuadros

4.1	Solución 1: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo para $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$	57
4.2	Solución 1: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo para $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$	58
4.3	Solución 2: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo considerando $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$	66
4.4	Solución 2: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo considerando $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$	67
A.1	Resumen de Símbolos en Notación Indicial	79

Capítulo 1

Medios Continuos

En el estudio de la dinámica de fluidos, es importante comprender el concepto de **medios continuos**, que proporciona un marco teórico para modelar el comportamiento de los fluidos en movimiento. Consideremos un fluido que cambia de forma a medida que se desplaza en el espacio. Para facilitar el modelado, conceptualizaremos este fluido como un subconjunto de \mathbb{R}^3 , el espacio tridimensional euclidiano. A este conjunto lo llamaremos el **cuerpo del fluido** y lo denotaremos como $\mathbf{S}(t)$, donde t representa el tiempo. Así, $\mathbf{S}(t)$ describe la configuración espacial del cuerpo del fluido en un momento determinado.

Es importante resaltar que cada punto del cuerpo del fluido se desplaza de manera continua en el espacio a medida que el fluido fluye y se deforma. Este enfoque nos permite estudiar el movimiento y la evolución del fluido en el tiempo, considerando tanto su posición espacial como su comportamiento dinámico. Al tratar al fluido como un medio continuo, podemos aplicar herramientas matemáticas y conceptos físicos para describir y predecir su comportamiento en diversas situaciones.

En este contexto, nuestro objetivo es desarrollar una comprensión profunda de la dinámica de fluidos a través de la formulación y resolución de las **ecuaciones de Navier-Stokes**, que constituyen un marco matemático fundamental para el estudio de los fluidos en movimiento. Al aplicar este enfoque a nuestro modelo de medio continuo, podremos analizar cómo el fluido responde a fuerzas externas y otros factores que influyen en su comportamiento (ver sección 6.1 [7]).

1.1. Coordenadas

En el estudio de la dinámica de fluidos, se utilizan dos tipos de coordenadas principales para describir el movimiento y la deformación de un fluido a lo largo del tiempo. Estas son las coordenadas espaciales y las coordenadas materiales.

- **Coordenadas espaciales:**

En estas coordenadas, se describe el comportamiento del fluido en términos de las propiedades físicas y las variables de estado que varían continuamente en el espacio en un instante de tiempo dado, utilizando la coordenada espacial $\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t))$, también son llamadas coordenadas eulerianas. Es decir, se analiza cómo cambian las propiedades del cuerpo en diferentes puntos del espacio en un momento específico. Podemos imaginar que los puntos del cuerpo son troncos que se están desplazando por un río; si nos paramos en la orilla del río, veremos cómo pasa cada tronco, lo que nos permite observar el desplazamiento de cada tronco. Véase la figura (1.1). Las ecuaciones de conservación, como las ecuaciones de Navier-Stokes, se basan en las coordenadas espaciales, que relacionan las derivadas espaciales de las propiedades del fluido con las fuerzas que actúan sobre él en un punto dado. Es útil para analizar fenómenos locales y para estudiar el flujo en regiones específicas del dominio.

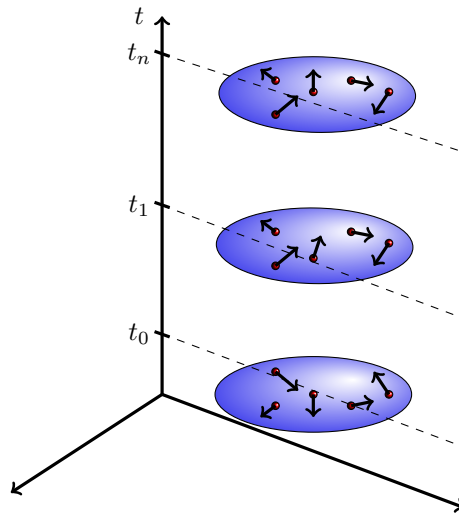


Figura 1.1: Coordenadas espaciales.

■ **Coordenadas materiales:**

En contraste, las coordenadas materiales, también llamadas coordenadas lagrangianas, se centran en el seguimiento de los puntos individuales del cuerpo a medida que se mueven y deforman en el espacio a lo largo del tiempo, utilizando la coordenada material $\mathbf{X} = (X(t), Y(t), Z(t))$. En estas coordenadas, se considera que los puntos del cuerpo forman un continuo que se deforma y se desplaza a medida que avanza el tiempo. De forma análoga a las coordenadas espaciales, imaginamos que los puntos del cuerpo son troncos que se están desplazando por un río; en este caso, podemos subirnos a cada tronco, lo que nos permite conocer el desplazamiento de cada uno de ellos. Véase la figura (1.2). Estas coordenadas son especialmente útiles para estudiar la trayectoria y el comportamiento de puntos específicos en el cuerpo, así como para analizar la evolución de estructuras como remolinos y vórtices.

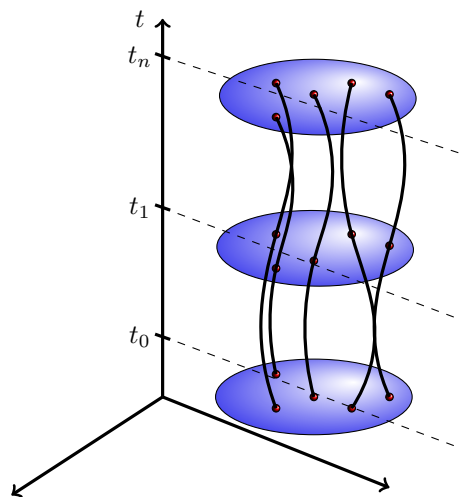


Figura 1.2: Coordenadas materiales.

Ambos enfoques tienen sus ventajas y se complementan entre sí en el análisis de problemas de dinámica de fluidos. La elección del enfoque depende de la naturaleza del problema y de los aspectos específicos que se deseen estudiar. En muchos casos, se utilizan ambos enfoques de manera simultánea para obtener una comprensión completa del comportamiento del fluido en movimiento.

Como se mencionó anteriormente, consideramos que $\mathbf{S}(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ representa el cuerpo del fluido en deformación, y suponemos que este se mueve según una función continuamente diferenciable que describe la posición material de cada punto en $\mathbf{S}(t)$. Por lo tanto, para cualquier t_0 , denotamos

$\mathbf{S}(t_0) = \mathbf{S}_0$ como la configuración del fluido en su posición inicial, al tiempo t_0 , véase la figura (1.3). En otras palabras, $\mathbf{S}(t)$ representa la configuración espacial del fluido en un momento dado, mientras que $\mathbf{S}(t_0)$ corresponde a su posición original (ver sección 3.1 [8]).

Función de Mapeo Directo $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$:

La función $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ es una herramienta que nos ayuda a entender cómo se mueve un punto específico del fluido desde su posición inicial en la configuración original del fluido \mathbf{S}_0 hasta su nueva posición en la configuración deformada $\mathbf{S}(t)$ en un momento determinado t . Esta relación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \mathbf{S}_0 \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{S}(t)} \quad (1.1)$$

La propiedad de impenetrabilidad es un principio clave en la dinámica de fluidos, que asegura que en ningún momento las partes del fluido se superpongan. Esto significa que cada punto del fluido ocupa un lugar único en el espacio. Debido a esta propiedad, la función $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ puede ser invertida para cualquier momento t , lo que implica que, para cualquier t_0 , la función $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t_0)$ es reversible. En otras palabras, podemos volver a encontrar la posición inicial de un punto dado en la configuración original del fluido.

Función de Mapeo Inverso $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$:

La función $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ nos ayuda a encontrar la posición inicial de un punto específico \mathbf{x} que se encuentra en la configuración deformada del fluido $\mathbf{S}(t)$. Esta función se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{S}(t) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{S}_0} \quad (1.2)$$

Es importante destacar que $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ es la función inversa de $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ para cualquier momento t .

Esto significa que, si tenemos las coordenadas espaciales \mathbf{x} , podemos usar $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ para encontrar las coordenadas materiales correspondientes \mathbf{X} . En otras palabras, podemos expresar \mathbf{X} como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

Por otro lado, también podemos escribir \mathbf{x} en términos de las coordenadas materiales \mathbf{X} utilizando la función $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \quad (1.4)$$

Este intercambio entre las coordenadas materiales y espaciales es importante para analizar el comportamiento del fluido a lo largo del tiempo.

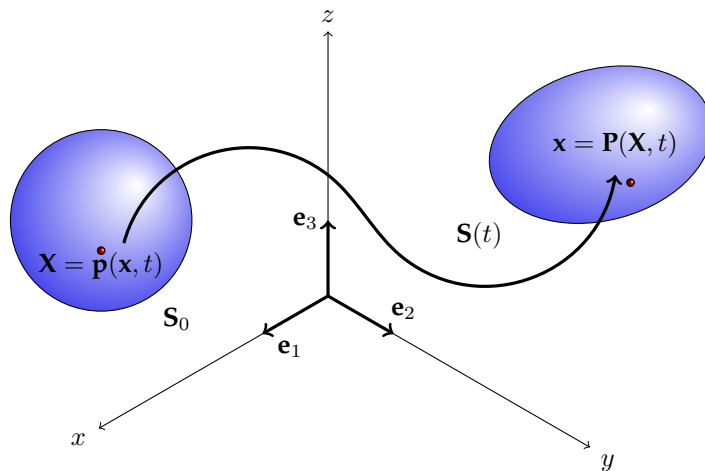


Figura 1.3: Cuerpo en el espacio.

Dado que $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ mapea un punto en la configuración inicial \mathbf{S}_0 a su posición correspondiente en la configuración deformada $\mathbf{S}(t)$, el gradiente de esta función nos proporciona información valiosa sobre cómo cambian las coordenadas espaciales en función de las coordenadas materiales mientras el

fluido se mueve.

Definimos el gradiente de $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ como una matriz jacobiana. Cada entrada de esta matriz representa la tasa de cambio de una coordenada espacial con respecto a una coordenada material. Formalmente, para un punto \mathbf{X} en la configuración inicial y un tiempo t , el gradiente se define como:

$$\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \partial_X P_1(\mathbf{X}, t) & \partial_Y P_1(\mathbf{X}, t) & \partial_Z P_1(\mathbf{X}, t) \\ \partial_X P_2(\mathbf{X}, t) & \partial_Y P_2(\mathbf{X}, t) & \partial_Z P_2(\mathbf{X}, t) \\ \partial_X P_3(\mathbf{X}, t) & \partial_Y P_3(\mathbf{X}, t) & \partial_Z P_3(\mathbf{X}, t) \end{pmatrix}$$

Esta definición nos permite comprender cómo varían las coordenadas espaciales a medida que cambian las coordenadas materiales.

El jacobiano del gradiente de deformación, denotado como $J(\mathbf{X}, t)$, mide cómo cambia el volumen localmente en el fluido a medida que se deforma. La positividad del jacobiano es esencial porque garantiza que no haya inversión de volumen en el fluido. Esto significa que las regiones del fluido no se colapsan ni invierten su orientación durante el proceso de deformación. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$J(\mathbf{X}, t) = \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] > 0, \quad (1.5)$$

donde $\det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]$ representa el determinante del gradiente de la función de mapeo $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$.

Hasta ahora, hemos discutido cómo el fluido experimenta deformación a medida que se mueve en el espacio. Otra manera importante de entender el movimiento del fluido es a través del concepto de desplazamiento material, que describe cómo cada punto del fluido se ha movido desde su posición original en la configuración inicial hasta su posición actual en la configuración deformada.

El desplazamiento material del fluido se describe mediante la función $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$, que representa la diferencia entre la posición actual $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ y la posición original $\mathbf{P}(\mathbf{X}, 0)$ de cada punto material. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{P}(\mathbf{X}, 0) \quad (1.6)$$

La función $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ nos proporciona información sobre cómo se han desplazado los puntos materiales en el fluido desde el inicio de la observación hasta el momento t . Este concepto es esencial para comprender cómo se mueven y se deforman los elementos individuales del fluido a lo largo del tiempo, y nos permite analizar detalladamente su comportamiento dinámico en diferentes contextos.

Entonces, la velocidad de los puntos del cuerpo en coordenadas materiales, denotada como $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$, se define según (1.6) como la derivada temporal del desplazamiento material $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$. A su vez, esto también es la derivada temporal de la función de mapeo $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$. Esto se expresa como:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \quad (1.7)$$

Además, el desplazamiento espacial, representado como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, se define como el desplazamiento material evaluado en las coordenadas espaciales \mathbf{x} . Esto se calcula como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t) \quad (1.8)$$

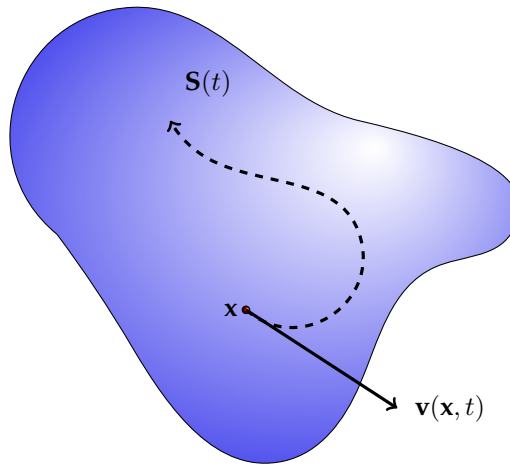
Por lo tanto, la velocidad espacial y la velocidad material están relacionadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t) \quad (1.9)$$

De manera equivalente,

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \quad (1.10)$$

Esto establece la relación entre las velocidades en las coordenadas materiales y espaciales, permitiendo así comprender el movimiento del fluido en distintos marcos de referencia, como se ilustra en la figura (1.4).

Figura 1.4: Velocidad de $S(t)$

En la siguiente sección se analizarán la Derivada Material y la Variación del Jacobiano en Medios Deformables, lo cual nos llevará a la deducción de la ecuación de conservación de masa.

1.2. Derivada Material y Variación del Jacobiano en Medios Deformables

En esta sección, abordaremos la derivada material y su relación con la tasa de cambio del determinante del jacobiano en medios deformables. Esta discusión establecerá las bases para el análisis de la conservación de masa en la siguiente sección, utilizando el teorema de transporte de Reynolds.

1.2.1. Derivada Material

La derivada material es una herramienta fundamental en el estudio del movimiento de fluidos, ya que nos permite comprender cómo cambian las propiedades de un fluido a medida que se mueve en el espacio y en el tiempo. Para deducir la derivada material de manera general, consideremos una función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ que define las propiedades del fluido en coordenadas materiales. Podemos expresar estas propiedades en coordenadas espaciales como $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t)$, donde $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ es la función que mapea las coordenadas espaciales a las coordenadas materiales (ver sección 6.2.3 [7]).

Ahora, nos preguntamos cómo cambian las propiedades del fluido representadas por $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ con respecto al tiempo. Intuitivamente, podríamos pensar que los cambios en $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ son iguales a los cambios en $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, pero esto no es necesariamente cierto debido al movimiento del fluido. Para analizar esto con mayor detalle, consideremos la derivada temporal de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$:

$$\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t),$$

desarrollando esta expresión, obtenemos:

$$\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

Aquí, $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, que representa cómo cambian las propiedades del fluido en coordenadas espaciales. La derivada material $\partial_t \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ describe cómo se mueve un punto del fluido en el espacio a medida que avanza el tiempo. Por lo tanto, la derivada material $\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ se expresa como:

$$\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.12)$$

Al evaluar la ecuación (1.12) en el punto $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, se obtiene:

$$\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t) = [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t) + \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.13)$$

De acuerdo con la ecuación (1.9), podemos reformular la ecuación (1.13) de la siguiente manera:

$$\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.14)$$

Simplificaremos el lado derecho de la ecuación (1.14) utilizando notación de índices, para mayor simplicidad (ver apéndice A). Teniendo en cuenta la propiedad $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k = \delta_{jk}\mathbf{e}_i$ (la delta de Kronecker δ está definida en la sección (A.2) del apéndice A, mientras que los operadores diferenciales en notación índicial se encuentran en la sección (A.5) del mismo apéndice), procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\nabla[\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)]\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \partial_j(f_i)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)v_k\mathbf{e}_k \\ &= \partial_j(f_i)v_k\delta_{jk}\mathbf{e}_i \\ &= \partial_j(f_i)v_j\mathbf{e}_i \\ &= v_j\partial_j f_i\mathbf{e}_i \\ &= [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla]\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{1.15}$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.15) en la ecuación (1.14) la derivada material puede expresarse como:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{f}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \partial_t\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla]\mathbf{f}(\mathbf{x}, t),}\tag{1.16}$$

Podemos expresar la ecuación (1.16) en términos de sus componentes espaciales, las cuales representan la derivada material para funciones escalares. Es decir:

$$\frac{Df_i}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \partial_t f_i(\mathbf{x}, t) + v_j(\mathbf{x}, t)\partial_j f_i(\mathbf{x}, t)\tag{1.17}$$

o bien

$$\boxed{\frac{Df_i}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \partial_t f_i(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla]f_i(\mathbf{x}, t),}\tag{1.18}$$

donde i representa las componentes espaciales de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Para comprender la dinámica de un fluido en un medio deformable, es importante definir cómo la velocidad del fluido cambia en el tiempo y el espacio. En este sentido, la derivada material de la velocidad es clave. Esta derivada describe cómo la velocidad del fluido cambia a medida que se mueve a lo largo de su trayectoria en el flujo.

En este contexto, podemos expresar la derivada material de la velocidad de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \partial_t\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla]\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}\tag{1.19}$$

Aquí, $\partial_t\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ representa la **aceleración local** y $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la **aceleración convectiva**.

1.2.2. Variación del Jacobiano en Medios Deformables

A continuación, nos centraremos en el análisis de la evolución temporal del determinante de la matriz jacobiana $J(\mathbf{X}, t)$, ya que esta comprensión nos permitirá introducir de manera efectiva el teorema de transporte de Reynolds, que se analizará en la siguiente sección.

Este determinante está relacionado con el mapeo directo $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$. Usando la ecuación (1.5), podemos encontrar cómo varía esta deformación en el tiempo. Consideraremos la derivada temporal del determinante del mapeo directo para estudiar cómo cambia la deformación del medio:

$$\partial_t J(\mathbf{X}, t) = \partial_t \det[\nabla\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]$$

Para abordar este análisis, es importante utilizar el teorema de la fórmula de Jacobi, que nos ayuda a entender cómo cambia el determinante de la matriz en el tiempo y su relación con el comportamiento del fluido en un medio deformable. Antes de esto, será útil mencionar el siguiente lema, que simplificará la demostración del teorema de la fórmula de Jacobi.

Lema 1.2.1. Consideremos $\det(\mathbf{M})$ como una función de las entradas de la matriz, es decir:

$$\det(\mathbf{M}) = \mathcal{D}(M_{11}, M_{12}, \dots, M_{nn})$$

Entonces se cumple que:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial M_{ij}} = C_{ij},}$$

donde C_{ij} son las componentes de la matriz de cofactores de \mathbf{M} .

Demostración:

El determinante de \mathbf{M} se puede expresar como una suma de productos de sus entradas y los cofactores. Una forma de escribir el determinante es a través de menores, como se muestra en el apéndice B (B.1.2). Por lo tanto, podemos denotar:

$$\mathcal{D}(M_{11}, M_{12}, \dots, M_{nn}) = \sum_{k=1}^n C_{kj} M_{kj}$$

Esta suma se realiza sobre la entrada k -ésima, y los cofactores C_{kl} se obtienen al eliminar la columna j . Esto significa que ningún cofactor depende de la entrada M_{ij} , así que la derivada de los cofactores con respecto a M_{ij} es cero:

$$\frac{\partial C_{kj}}{\partial M_{ij}} = 0$$

Por lo tanto, al derivar el determinante con respecto a M_{ij} , tenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial M_{ij}} = \frac{\partial}{\partial M_{ij}} \left(\sum_{k=1}^n C_{kj} M_{kj} \right) = \frac{\partial}{\partial M_{ij}} (C_{ij} M_{ij}) = C_{ij}$$

Q.E.D.

Este lema proporciona un resultado clave que utilizaremos para demostrar el teorema de la fórmula de Jacobi de una manera más sencilla y clara, como se muestra a continuación.

Teorema 1.2.1. Fórmula de Jacobi. Para todo t en un intervalo abierto, sea $\mathbf{M}(t)$ una matriz invertible y continuamente diferenciable. Entonces, se cumple que:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \det[\mathbf{M}(t)] = \det[\mathbf{M}(t)] \operatorname{tr} \left\{ [\mathbf{M}(t)]^{-1} \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right\}}$$

Demostración:

Utilizando la notación indicial por comodidad (véase el apéndice A para una breve introducción a la notación indicial) y el lema (1.2.1), obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \det[\mathbf{M}(t)] = \frac{d}{dt} \mathcal{D}(M_{ij}) = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial M_{ij}} \frac{dM_{ij}}{dt} = C_{ij} \frac{dM_{ij}}{dt} = \operatorname{tr} \left\{ [\mathbf{C}(t)]^T \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right\}$$

Ahora, recordemos que la inversa de una matriz puede expresarse en términos de su matriz de cofactores, es decir:

$$[\mathbf{M}(t)]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{M}(t)]} [\mathbf{C}(t)]^T \quad (1.20)$$

Por lo tanto, con la ayuda de (1.20), continuamos la demostración de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det[\mathbf{M}(t)] &= \operatorname{tr} \left\{ [\mathbf{C}(t)]^T \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right\} \\ &= \operatorname{tr} \left\{ \det[\mathbf{M}(t)] [\mathbf{M}(t)]^{-1} \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right\} \\ &= \det[\mathbf{M}(t)] \operatorname{tr} \left\{ [\mathbf{M}(t)]^{-1} \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} \right\} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Como hemos demostrado en el teorema (1.2.1), la fórmula de Jacobi proporciona una herramienta clave para calcular la tasa de cambio temporal del determinante de una matriz. Ahora, con el objetivo de aplicar este resultado en el contexto de nuestro análisis, introducimos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1. Consideremos un dominio $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^3$, donde \mathbf{X} representa un punto en $\Omega(t_0)$ en coordenadas materiales, \mathbf{x} representa un punto en $\Omega(t)$ en coordenadas espaciales, y $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es una función vectorial que mapea cada punto de $\Omega(t)$ en coordenadas materiales a su posición en el espacio tridimensional. Además, sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ una función vectorial que mapea cada punto en el espacio tridimensional $\Omega(t)$ a su posición en el tiempo t . Entonces, la relación entre los gradientes de estas funciones en sus respectivas coordenadas está dada por:

$$\boxed{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) [\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]^{-1}},$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}$ representa el mapeo de coordenadas materiales a coordenadas espaciales.

Demostración:

Dado que $F(\mathbf{X}, t)$ se puede representar como $\mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)$ con $\mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\nabla F(\mathbf{X}, t) &= \nabla \mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \\ &= \nabla \mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \\ &= \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\end{aligned}$$

Despejando $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, obtenemos:

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla F(\mathbf{X}, t) [\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]^{-1}$$

Q.E.D.

Este corolario establece un principio básico entre los gradientes de las funciones que describen la deformación del medio en coordenadas materiales y espaciales. Proporciona una herramienta crucial para entender cómo las propiedades físicas cambian a medida que el medio se deforma en el tiempo.

Como se ha establecido anteriormente, gracias al lema y al corolario demostrados, tenemos una mejor comprensión de las relaciones entre las transformaciones materiales y espaciales en un medio deformable. Ahora, utilizaremos estos resultados para derivar una expresión para la tasa de cambio temporal del determinante del jacobiano.

Recordemos que la traza del gradiente de un campo vectorial es la divergencia del campo. Con este conocimiento en mente, llegamos al siguiente corolario:

Corolario 1.2.2. Consideremos un dominio $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{X} \in \Omega(t_0)$ y $\mathbf{x} \in \Omega(t)$. Sea $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ una función de movimiento diferenciable de $\Omega(t)$ y $J(\mathbf{X}, t)$ el determinante jacobiano de $\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$. Entonces,

$$\partial_t J(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ representa la velocidad de cada punto en $\Omega(t)$ en coordenadas espaciales.

Demostración:

Este es un corolario del teorema de la fórmula de Jacobi. Gracias a los lemas y teoremas mencionados y demostrados anteriormente, esta demostración es relativamente sencilla, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\partial_t J(\mathbf{X}, t) &= \partial_t \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] \\ &= \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] \operatorname{tr}\{\partial_t \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) [\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]^{-1}\} \\ &= J(\mathbf{X}, t) \operatorname{tr}\{\partial_t \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) [\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]^{-1}\} \\ &= J(\mathbf{X}, t) \operatorname{tr}\{\nabla \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) [\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]^{-1}\} \\ &= J(\mathbf{X}, t) \operatorname{tr}\{\nabla \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) [\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)]^{-1}\} \\ &= J(\mathbf{X}, t) \operatorname{tr}\{\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\} \\ &= J(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Q.E.D.

Este corolario proporciona una relación importante entre la tasa de cambio temporal del determinante del jacobiano y la divergencia del campo de velocidad en un medio deformable.

La demostración del corolario (1.2.2) no solo establece una conexión importante entre la variación temporal del determinante del jacobiano y la divergencia del campo de velocidad, sino que también sienta las bases para comprender y aplicar el teorema de Reynolds.

El teorema de Reynolds, un componente esencial en la mecánica de fluidos, permite una transición fluida entre sistemas de coordenadas móviles y fijos al relacionar integrales a lo largo de trayectorias materiales con integrales en regiones fijas del espacio.

Si bien el teorema de Reynolds proporciona una herramienta matemática poderosa para modelar una variedad de fenómenos, en esta tesis, nos centraremos exclusivamente en su papel dentro del contexto de deducir la ecuación de Navier-Stokes de forma matemáticamente coherente.

Además, es importante destacar el principio de conservación de masa, que establece que la masa total dentro de un sistema cerrado permanece constante en el tiempo. Este principio subraya que cualquier cambio en la masa dentro del sistema debe ser compensado por un flujo neto de masa a través de sus fronteras. En la dinámica de fluidos, este principio es esencial para nuestro análisis en la próxima sección.

En la próxima sección, exploraremos en detalle la demostración y aplicación del teorema de Reynolds en nuestro contexto específico, subrayando su importancia y relevancia para nuestro análisis de la dinámica de fluidos en medios deformables, así como la aplicación del principio de conservación de masa.

1.3. Principio de Conservación de Masa

Además de la demostración del Corolario (1.2.2) y la aplicación del teorema de Reynolds, es crucial comprender el principio de conservación de masa en el contexto de la dinámica de fluidos en medios deformables.

El principio de conservación de masa es una ley fundamental en la dinámica de fluidos que establece que la masa total dentro de un sistema cerrado permanece constante en el tiempo. Esta ley implica que cualquier cambio en la masa dentro del sistema debe ser equilibrado por un flujo neto de masa a través de sus fronteras. En otras palabras, la masa no puede ser creada ni destruida; solo puede cambiar de una forma a otra o moverse dentro o fuera del sistema (ver sección 4.2 [9]).

En el contexto de nuestra tesis, el principio de conservación de masa será crucial para comprender cómo se comporta el fluido en un medio deformable. Nos permitirá analizar cómo se distribuye y se mueve la masa dentro del sistema a medida que el medio se deforma y se mueve en el tiempo. Esta comprensión es esencial para nuestro análisis de la dinámica de fluidos y para el desarrollo de modelos matemáticos precisos.

Dado que las propiedades del medio continuo se pueden establecer de dos formas, material y espacial, dependiendo del argumento utilizado, podemos describir las siguientes funciones:

$$\hat{\rho}(\mathbf{X}, t) : \mathbf{S}(t_0) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

como la **descripción material** de la densidad, y

$$\rho(\mathbf{x}, t) : \mathbf{S}(t) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

como la **descripción espacial** de la densidad.

En la descripción material, $\hat{\rho}(\mathbf{X}, t)$ representa la densidad en función de la posición material \mathbf{X} en el sistema de referencia inicial $\mathbf{S}(t_0)$. En contraste, en la descripción espacial, $\rho(\mathbf{x}, t)$ representa la densidad en función de la posición espacial \mathbf{x} en el sistema de referencia actual $\mathbf{S}(t)$. Véase la figura (1.5) para una mejor comprensión.

Ambas descripciones son equivalentes y están relacionadas mediante la función de mapeo que conecta las configuraciones material y espacial del fluido.

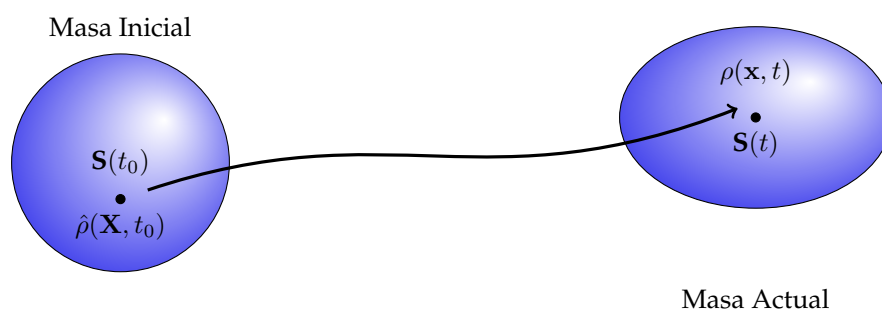


Figura 1.5: Conservación de la masa en el cuerpo conforme el fluido se mueve.

Consideramos la masa de un fluido en un medio deformable que se está moviendo. La masa total del fluido en cualquier momento t se llama $m(t)$. Para calcular esta masa, integramos la densidad del fluido $\rho(\mathbf{x}, t)$ sobre el volumen del fluido en su forma actual, que llamamos $\mathbf{S}(t)$:

$$m(t) = \int_{\mathbf{S}(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = m_0, \quad (1.21)$$

donde dV es el pequeño volumen en el sistema de coordenadas espaciales, y m_0 es la masa total del fluido en el instante inicial t_0 . Esta masa inicial se puede calcular como:

$$m_0 = \int_{\mathbf{S}(t_0)} \rho(\mathbf{x}, t_0) dV$$

La ecuación (1.21) muestra que la masa total en un momento t es igual a la masa total en el tiempo inicial t_0 .

Es importante destacar que, durante el movimiento del fluido, no se pierde masa. Esto significa que el volumen V del fluido debe ser constante en el tiempo, lo que asegura que la masa total dentro de $\mathbf{S}(t)$ no cambia. Por lo tanto, podemos expresar el principio de conservación de masa como la tasa de cambio de la masa total:

$$\dot{m}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{S}(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (1.22)$$

Este principio establece que, en un sistema sin pérdidas ni fricción, la masa no se crea ni se destruye. En otras palabras, la masa que entra en un intervalo de tiempo es igual a la masa que sale. Este concepto se discute en la sección 2.3, página 235 [10]. Para entender cómo la masa se mantiene constante, necesitamos relacionar las tasas de cambio del volumen V y la densidad del fluido con el tiempo. Esto implica observar cómo cambia el volumen a lo largo del tiempo y cómo esta variación afecta la distribución de la densidad en el fluido.

1.3.1. Teorema de Transporte de Reynolds

El teorema de transporte de Reynolds es una herramienta poderosa en la dinámica de fluidos que permite analizar cómo cambian las propiedades de un fluido, tales como la masa, el momento y la energía, a medida que este se mueve. Este teorema establece una relación entre la tasa de cambio de una cantidad y el flujo de esa cantidad a través de la frontera de un volumen controlado (ver sección 6.3 pág. 304 [7]).

A continuación, presentaremos el teorema de transporte de Reynolds:

Teorema 1.3.1. Teorema de Transporte de Reynolds para funciones escalares. Sea $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ y $f(\mathbf{x}, t)$ una función continua en $\Omega(t)$, descrita como

$$f(\mathbf{x}, t) : \Omega(t) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

donde el movimiento de $\Omega(t)$ está dado por $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$, descrito como

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3,$$

tal que para cualesquiera $\mathbf{X} \in \Omega(t)$, se tiene que

$$\det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] > 0,$$

entonces se cumple que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega(t)} \{ \partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \} dV,$$

donde la función $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad de $\Omega(t)$, dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : \Omega(t) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Demostración:

Para demostrar el teorema, utilizaremos el teorema de la cadena para integrales dependientes de parámetros y la regla de Leibniz para derivadas de integrales dependientes de parámetros. Dado que $f(\mathbf{x}, t)$ es una función continua en $\Omega(t)$, podemos aplicar el teorema de la cadena para integrales dependientes de parámetros. Entonces, la derivada de la integral de $f(\mathbf{x}, t)$ sobre $\Omega(t)$ se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] dV_{\mathbf{X}},$$

donde $dV_{\mathbf{X}}$ representa el elemento de volumen en coordenadas materiales.

El jacobiano de $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ es:

$$J(\mathbf{X}, t) = \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)],$$

por el corolario (1.2.2), sabemos que $\partial_t J(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, lo cual nos será útil en la demostración como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \partial_t [f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t)] dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \partial_t [f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] J(\mathbf{X}, t) + f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \partial_t J(\mathbf{X}, t) \} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ [\nabla f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \cdot \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \partial_t f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \partial_t J(\mathbf{X}, t)] J(\mathbf{X}, t) \\ &\quad + f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \partial_t J(\mathbf{X}, t) \} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ [\nabla f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \partial_t f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] J(\mathbf{X}, t) \\ &\quad + f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \nabla f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \partial_t f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \\ &\quad + f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \} J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \partial_t f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \nabla f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \\ &\quad + f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \} J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \partial_t f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \nabla \cdot [f(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] \} J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega(t)} \{ \partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \} dV \end{aligned}$$

Q.E.D.

Siguiendo esta línea de pensamiento, presentamos el teorema de transporte de Reynolds para funciones vectoriales. Este teorema establece una relación clave entre la derivada total y la derivada parcial de una función vectorial a lo largo de una trayectoria que se desplaza con el flujo. Su aplicación es crucial para el análisis de cómo varían las magnitudes físicas en un sistema en movimiento, como un fluido en flujo. En particular, nos enfocaremos en la evolución del momento lineal en el siguiente capítulo. A continuación, se procederá a enunciar el teorema de transporte de Reynolds para funciones vectoriales.

Teorema 1.3.2. Teorema de Transporte de Reynolds para funciones vectoriales. Sea $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ una función continua en $\Omega(t)$, descrita como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) : \Omega(t) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

donde el movimiento de $\Omega(t)$ está dado por $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$, descrito como

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3,$$

tal que para cualesquiera $\mathbf{X} \in \Omega(t)$, se tiene que

$$\det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] > 0,$$

entonces se cumple que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega(t)} \{ \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \} dV,$$

donde la función $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad de $\Omega(t)$, dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : \Omega(t) \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Demostración:

La demostración de este teorema es análoga a la versión escalar, la cuál se demostró con anterioridad (1.3.1), utilizaremos el teorema de la cadena para integrales dependientes de parámetros y la regla de Leibniz para derivadas de integrales dependientes de parámetros. Dado que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es una función continua en $\Omega(t)$, podemos aplicar el teorema de la cadena para integrales dependientes de parámetros. Entonces, la derivada de la integral de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ sobre $\Omega(t)$ se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] dV_{\mathbf{X}},$$

donde $dV_{\mathbf{X}}$ representa el elemento de volumen en coordenadas materiales.

El jacobiano de $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ es:

$$J(\mathbf{X}, t) = \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)],$$

por el corolario (1.2.2), sabemos que $\partial_t J(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, lo cual nos será útil en la demostración como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \det[\nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)] dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \partial_t \{ \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) \} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \partial_t [\mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] J(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \partial_t J(\mathbf{x}, t) \} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \} dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} [\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \nabla [\mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \partial_t t \\ &\quad + \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \} J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega_0} \{ \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \nabla [\mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \\ &\quad + \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \} J(\mathbf{X}, t) dV_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\Omega(t)} \{ \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) + \nabla \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{v}^T(\mathbf{P}(\mathbf{X}, t), t)] \} dV \\ &= \int_{\Omega(t)} \{ \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \} dV \end{aligned}$$

Q.E.D.

Este resultado será útil en el siguiente capítulo. Por ahora, nos enfocaremos únicamente en el teorema de transporte de Reynolds para funciones escalares.

Si $\mathbf{B}(t) \subseteq \mathbf{S}(t)$, entonces $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{S}_0$. Esto implica que $\mathbf{B}(t)$ es la imagen de \mathbf{B}_0 en el tiempo t_0 , como se muestra en la figura (1.6). Utilizando el teorema de transporte de Reynolds (1.3.1), podemos expresar la tasa de cambio de la masa respecto al tiempo de la siguiente manera:

$$\dot{m}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{B}(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathbf{B}(t)} \{ \partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \} dV = 0 \quad (1.23)$$

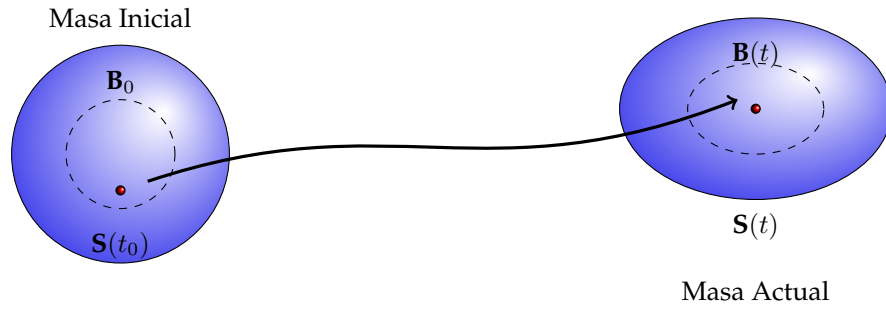


Figura 1.6: Subconjunto del fluido

Para demostrar que el integrando es cero, se requiere el siguiente teorema, ya que a partir de él se deduce la ecuación de conservación de masa en su forma diferencial.

Teorema 1.3.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $f(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en Ω , tal que para cualquier subconjunto medible $I \subseteq \Omega$ se cumple

$$\int_I f(\mathbf{x}) dV = 0$$

Entonces, $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ en Ω .

Demostración:

Supongamos que existe un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ tal que $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(\mathbf{x}_0) > 0$ (el caso donde $f(\mathbf{x}_0) < 0$ se puede tratar de manera similar).

Debido a la continuidad de f , existe una bola $\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$ tal que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todas las $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$. Esto se puede formalizar utilizando la definición de continuidad:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$. Elegimos $\varepsilon = f(\mathbf{x}_0)/2$. Así, existe un $\delta > 0$ tal que para todas las $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$ con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$:

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon = \frac{f(\mathbf{x}_0)}{2} > 0$$

Ahora, consideremos un subconjunto $I \subseteq \Omega$ que es suficientemente pequeño y contiene a \mathbf{x}_0 dentro de $\mathbf{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$. En este caso, como $f(\mathbf{x}) > 0$ para todas las $\mathbf{x} \in I$, podemos afirmar que:

$$\int_I f(\mathbf{x}) dV > 0$$

Sin embargo, esto contradice nuestra hipótesis de que:

$$\int_I f(\mathbf{x}) dV = 0$$

La suposición inicial de que existe un punto donde $f(\mathbf{x}) \neq 0$ debe ser falsa. Por lo tanto, debe ser que $f(\mathbf{x}) = 0$ para todos $\mathbf{x} \in \Omega$, es decir, $f(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Hemos demostrado que si la integral de una función continua f sobre cualquier subconjunto de Ω es cero, entonces f debe ser cero en todos los puntos de Ω . *Q.E.D.*

Aplicamos el teorema (1.3.3) a la ecuación de conservación de masa (1.23) para derivar su forma diferencial, obteniendo, (ver sección 1.5 [11]):

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (1.24)$$

A continuación, desarrollamos el término de la divergencia en la ecuación anterior:

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.25)$$

Según la expresión (1.18), la derivada material de la densidad se puede escribir como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.26)$$

Al sustituir (1.26) en la ecuación (1.25), obtenemos una forma alternativa de la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.27)$$

En el caso de un fluido incompresible, la densidad es constante en todo el volumen del fluido. Por lo tanto, la derivada material de la densidad es igual a cero:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de masa (1.27) se simplifica a:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0} \quad (1.28)$$

Esta última expresión indica que, para un fluido incompresible, la divergencia del campo de velocidad es nula, lo que refleja la conservación de masa bajo la condición de incompresibilidad.

Con la deducción de la ecuación de conservación de masa y su interpretación en el contexto de fluidos incompresibles, hemos sentado las bases para el siguiente capítulo. En este capítulo próximo, abordaremos las ecuaciones de conservación del momento lineal y del momento angular, las cuales son fundamentales para describir la dinámica completa de un sistema fluido.

Capítulo 2

Momento Lineal y Momento Angular

En el capítulo anterior, se dedujo que para los fluidos incompresibles se cumple la condición (1.28). Esta propiedad es clave, ya que indica que el volumen del fluido permanece constante durante el flujo. En este capítulo, continuaremos explorando el comportamiento de los fluidos incompresibles, manteniendo esta premisa como base para nuestro análisis.

Además, exploraremos dos conceptos fundamentales en la mecánica de medios continuos: el **momento lineal** y el **momento angular**.

Primero, deduciremos la forma del **vector de esfuerzo** \mathbf{t} en un cuerpo sometido a fuerzas externas, destacando su relación con la normal a una superficie. Aplicaremos el **teorema de Reynolds** en su versión vectorial, lo que nos llevará a obtener la ecuación de conservación del momento lineal. Este análisis nos permitirá comprender cómo se distribuyen y equilibran las fuerzas superficiales en un medio continuo.

Posteriormente, nos enfocaremos en el **momento angular**, donde analizaremos la simetría inherente de la **matriz de esfuerzo**. Este enfoque revelará cómo el **tensor de Cauchy** captura las interacciones rotacionales en sistemas mecánicos, proporcionando una visión integral del comportamiento de sólidos bajo diversas cargas y condiciones de deformación.

A través de estos temas, consolidaremos nuestra comprensión de cómo los principios esenciales de la mecánica y la conservación de cantidades físicas clave se combinan para describir fenómenos complejos en la mecánica de medios continuos.

2.1. Momento Lineal

Suponemos que cada punto del cuerpo se mueve de forma continua en el espacio, el momento lineal de un elemento de volumen de $\mathbf{S}(t) \subseteq \mathbb{R}^3$, para fluidos incompresibles se define como:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

donde ρ es constante.

Por lo tanto, el momento lineal total del cuerpo es:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.1)$$

La segunda ley de Newton establece que la fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual a la tasa de cambio del momento lineal de la partícula con respecto al tiempo. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} \quad (2.2)$$

Al aplicar esta ley (2.2) al sistema continuo (2.1), observamos que la derivada temporal del momento lineal total del sistema es igual a la integral de la fuerza aplicada sobre el volumen $\mathbf{S}(t)$. Por tanto, podemos escribir:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.3)$$

En un fluido, las fuerzas externas se ejercen sobre él como resultado de la interacción con su entorno (ver figura 2.1), donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ representa las aceleraciones externas del cuerpo. Por otro lado, las fuerzas de tensión emergen de la cohesión molecular dentro del fluido. Estas fuerzas pueden tener un impacto significativo en el comportamiento y la dinámica del fluido. Comprender su naturaleza es esencial para realizar un análisis fluidodinámico adecuado.

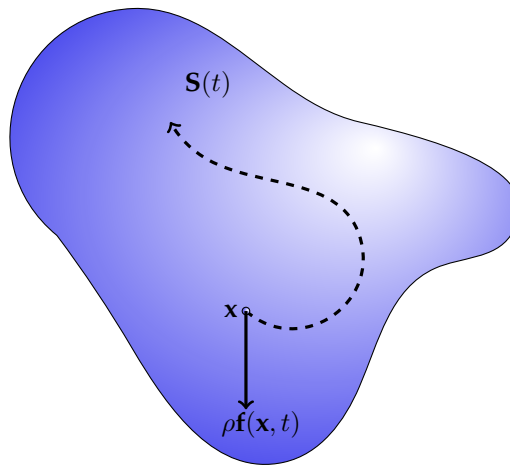


Figura 2.1: Fuerzas externas

El vector de esfuerzos, también conocido como vector de tensión, es un concepto importante en la mecánica de fluidos y en la teoría de elasticidad. Este vector, que denotaremos como \mathbf{t} , describe la distribución de fuerzas internas que actúan sobre una superficie $\partial S(t)$. En un punto dado dentro de un fluido, \mathbf{t} representa la magnitud y dirección de la fuerza que actúa por unidad de área sobre una superficie con una orientación específica.

El análisis del vector de esfuerzos \mathbf{t} es crucial para comprender cómo un fluido responde a las fuerzas aplicadas, tanto externas como internas (ver la figura 2.2), lo cual es esencial en el estudio de la dinámica de fluidos. Para obtener una visión más general y completa del estado de tensiones en un punto del fluido, es fundamental utilizar la matriz de tensiones, la cual se deriva del vector de tensiones. Esta matriz permite calcular los esfuerzos en cualquier orientación de una superficie dada, proporcionando una herramienta clave para analizar y prever el comportamiento del fluido bajo diversas condiciones.

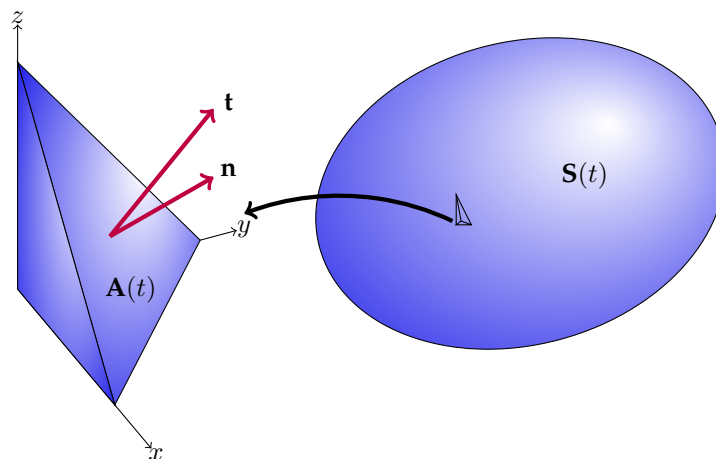


Figura 2.2: Fuerza de tensión

Dado que las fuerzas de tensión y las fuerzas externas pueden influir en el movimiento del fluido, recordemos que las fuerzas de tensión actúan a lo largo de la frontera del cuerpo, mientras que las fuerzas externas actúan dentro del volumen del fluido (ver sección 8.6 [7]). Según la segunda ley de

Newton, obtenemos:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\mathbf{S}(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \quad (2.4)$$

Por conservación del momento lineal, o mediante la ley de equilibrio, la ecuación (2.4) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\mathbf{S}(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = 0, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ representa el término que agrupa todos los componentes de las fuerzas volumétricas (también denominadas fuerzas de cuerpo) que actúan dentro del volumen de control.

En la siguiente sección, nos centraremos en derivar esta forma específica del vector de esfuerzos.

2.1.1. Matriz de Esfuerzos

Para introducir el concepto del vector de esfuerzo en un punto \mathbf{x} y tiempo t , recurrimos a un problema clásico propuesto por Cauchy. Consideramos una región tetraédrica $\mathbf{A}(t) \subseteq \mathbf{S}(t)$ y aplicamos el enfoque denominado Tetraedro de Cauchy-Euler. Este enfoque es esencial para comprender la distribución de las tensiones dentro de un cuerpo continuo (ver sección 4.6 pág. 126 [8]).

En primer lugar, analizaremos las tensiones en el tetraedro. El enfoque del **Tetraedro de Cauchy-Euler** permite abordar la integral sobre la superficie $\partial\mathbf{A}(t)$, que representa las tensiones $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ en los límites del tetraedro. Este enfoque demuestra que el vector de tensiones es una función lineal del vector normal \mathbf{n} a la superficie del tetraedro, lo que proporciona una representación clara y precisa de las tensiones internas en función de las direcciones espaciales.

Una vez que se ha establecido la contribución de las tensiones, abordaremos la integral sobre la región $\mathbf{S}(t)$ correspondiente a las fuerzas exteriores $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$. Para simplificar el cálculo de esta integral, elegimos un tetraedro dentro de $\mathbf{S}(t)$ y lo comprimimos hacia un punto interior \mathbf{x}_0 . Esta aproximación permite reducir el problema a una forma manejable, facilitando la evaluación de las contribuciones de las fuerzas exteriores.

La integral de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ sobre el volumen del tetraedro representa la suma de las fuerzas exteriores aplicadas en la región. Al comprimir el tetraedro a un punto, se puede calcular la integral aproximada utilizando el valor de \mathbf{a} en ese punto y considerando el efecto de las fuerzas a lo largo de los bordes del tetraedro.

Al combinar estas dos integrales, se obtiene una formulación matemática que describe el equilibrio de fuerzas y tensiones en el cuerpo continuo. El método del **Tetraedro de Cauchy-Euler** no solo simplifica el cálculo de estas integrales, sino que también proporciona una comprensión profunda de la relación entre las tensiones internas y las fuerzas exteriores, así como las direcciones en el espacio tetraédrico, clave para el análisis mecánico de medios continuos.

Tetraedro de Cauchy-Euler

Consideremos un tetraedro en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , definido por los vectores \mathbf{O} , \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{R} (ver la figura (2.3)), donde:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Sea \mathbf{n} un vector unitario perpendicular al plano formado por \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{R} :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Además, sea \mathbf{N} el vector que representa la altura desde el origen hasta la cara principal del tetraedro, con $\|\mathbf{N}\| = h$. Este vector es ortogonal a la cara principal, lo que implica que forma un ángulo recto con ella. La perpendicularidad de \mathbf{N} a la cara principal es clave para analizar las tensiones en el tetraedro, ya que facilita la relación entre las fuerzas que actúan sobre la superficie y el vector normal asociado.

El enfoque del Tetraedro de Cauchy-Euler nos permite demostrar la igualdad:

$$\boxed{A_i = n_i A}, \quad (2.8)$$

donde A_i es el área de la cara i ($i = 1, 2, 3$) del tetraedro (ver la figura (2.3)).

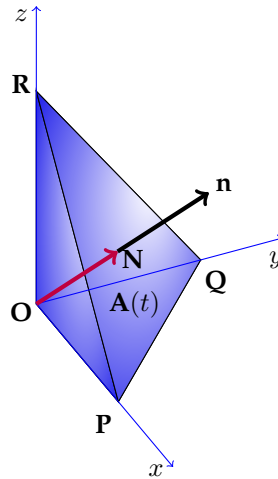


Figura 2.3: Tetraedro de Cauchy-Euler

Para demostrar esta igualdad, consideramos las áreas de cada cara del tetraedro:

$$A_1 = \text{Área del triángulo } \triangle ORQ, \quad (2.9)$$

$$A_2 = \text{Área del triángulo } \triangle OPR, \quad (2.10)$$

$$A_3 = \text{Área del triángulo } \triangle OPQ, \quad (2.11)$$

$$A = \text{Área del triángulo } \triangle PRQ \quad (2.12)$$

El plano formado por el área A es ortogonal a \mathbf{N} , por lo que se forma un triángulo rectángulo formado por \mathbf{O} , \mathbf{N} y \mathbf{P} , como se muestra en la figura (2.4).

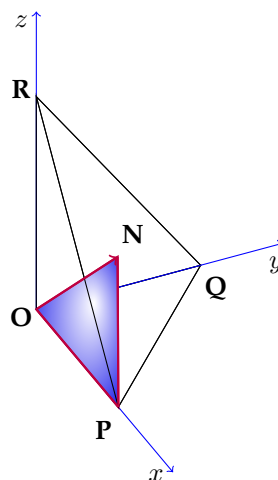


Figura 2.4: Triángulo rectángulo formado por \mathbf{O} , \mathbf{N} y \mathbf{P} .

Podemos observar el triángulo de una mejor forma, como se muestra en la siguiente figura:

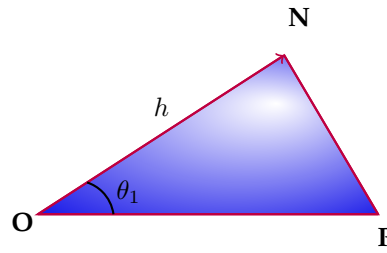


Figura 2.5: Triángulo rectángulo.

Siguiendo la figura (2.5), notamos que podemos expresar el coseno de θ_1 , que es igual a la primera componente del vector normal:

$$\cos \theta_1 = \frac{h}{\mathbf{OP}} \quad (2.13)$$

De manera análoga, obtenemos el coseno de θ_2 , que se deriva del triángulo rectángulo formado por O, N y Q. Asimismo, para el triángulo rectángulo formado por O, N y R, podemos obtener θ_3 :

$$\cos \theta_2 = \frac{h}{\mathbf{OQ}}, \quad (2.14)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{h}{\mathbf{OR}} \quad (2.15)$$

Los cosenos directores son las proyecciones del vector normal sobre los ejes coordenados y se definen como los cosenos de los ángulos entre \mathbf{n} y cada uno de los ejes. Si θ_1 , θ_2 y θ_3 son los ángulos que \mathbf{n} forma con los ejes x , y y z respectivamente, entonces los cosenos directores son:

$$n_1 = \cos \theta_1, \quad n_2 = \cos \theta_2, \quad n_3 = \cos \theta_3 \quad (2.16)$$

A partir de las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15), podemos reescribir las componentes del vector normal de la siguiente manera:

$$n_1 = \frac{h}{\mathbf{OP}}, \quad n_2 = \frac{h}{\mathbf{OQ}}, \quad n_3 = \frac{h}{\mathbf{OR}} \quad (2.17)$$

Esto nos lleva a obtener tres ecuaciones para calcular h :

$$h = n_1 \mathbf{OP}, \quad h = n_2 \mathbf{OQ}, \quad h = n_3 \mathbf{OR} \quad (2.18)$$

Calculamos el volumen del tetraedro, sustituyendo (2.18):

$$V = \frac{1}{3} h A = \frac{1}{3} \mathbf{OP} A_1 = \frac{1}{3} \mathbf{OQ} A_2 = \frac{1}{3} \mathbf{OR} A_3 \quad (2.19)$$

Por lo tanto, de la ecuación (2.19) obtenemos las siguientes igualdades:

$$h A = \mathbf{OP} A_1 = \mathbf{OQ} A_2 = \mathbf{OR} A_3$$

Despejando \mathbf{OP} , \mathbf{OQ} y \mathbf{OR} de las ecuaciones (2.17), obtenemos:

$$\mathbf{OP} = \frac{h}{n_1}, \quad \mathbf{OQ} = \frac{h}{n_2}, \quad \mathbf{OR} = \frac{h}{n_3} \quad (2.20)$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en (2.20), obtenemos:

$$h A = \frac{h}{n_1} A_1 = \frac{h}{n_2} A_2 = \frac{h}{n_3} A_3$$

Esto nos lleva a la conclusión deseada:

$$A_1 = n_1 A, \quad A_2 = n_2 A, \quad A_3 = n_3 A \quad (2.21)$$

Por lo tanto, se demuestra la ecuación (2.8):

$$A_i = n_i A \quad (2.22)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Consideremos las fuerzas actuantes sobre cada una de las caras del tetraedro. Sea σ_i la tensión en la cara A_i , definida como:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Para entender mejor la naturaleza de σ_i , véase la figura (2.6).

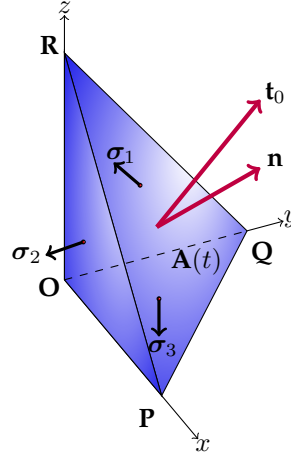


Figura 2.6: Fuerzas de tensión

Siguiendo la figura (2.6), podemos expresar la integral del vector de esfuerzo de la ecuación (2.5) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA &\approx \int_{\partial A(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \\ &= \int_{PQR} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{OQR} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{OPR} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{OPQ} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \end{aligned} \quad (2.24)$$

Comprimos cada cara del tetraedro a un único punto. Esta técnica simplifica la integral de tensiones superficiales al aproximarla mediante el valor de $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ en ese punto, multiplicado por el área de la cara. Esto facilita la evaluación de las tensiones en una superficie reducida. Por lo tanto, para aproximar cada una de las integrales en la ecuación (2.24), utilizaremos el siguiente corolario:

Corolario 2.1.1. *Dado un tetraedro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ con superficie $\partial\Omega$, supongamos que cada cara del tetraedro se denota por $\partial\Omega_k$ (para $k = 1, 2, 3, 4$), y consideremos que \mathbf{F} es una función vectorial continua de tensión sobre $\partial\Omega$. Entonces, para cada cara $\partial\Omega_k$, existen puntos $\mathbf{x}_i \in \partial\Omega_k$ tales que, cuando el tetraedro Ω se comprime hacia un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, la integral de \mathbf{F} sobre $\partial\Omega_k$ satisface:*

$$\lim_{\partial\Omega_k \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dA = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0) A_k,$$

donde A_k es el área de la cara $\partial\Omega_k$ y \mathbf{F}^k es la función de tensión evaluada en \mathbf{x}_0 para cada cara.

Demostración:

Consideremos un tetraedro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ cuya superficie es $\partial\Omega$. Cada cara del tetraedro se denota como $\partial\Omega_k$, donde k varía de 1 a 4. Cada $\partial\Omega_k$ está parametrizada por coordenadas locales (u, v) . La función de tensión \mathbf{F} es continua sobre $\partial\Omega$ y se define en términos de estas coordenadas locales.

Aplicando el teorema del valor medio para integrales (B.1.1) en cada cara $\partial\Omega_k$, existen puntos $\mathbf{x}_i \in \partial\Omega_k$ tal que:

$$\int_{\partial\Omega_k} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dA = \begin{pmatrix} F_1^k(\mathbf{x}_1) \\ F_2^k(\mathbf{x}_2) \\ F_3^k(\mathbf{x}_3) \end{pmatrix} A_k = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_i) A_k,$$

donde \mathbf{x}_i son puntos específicos de la cara $\partial\Omega_k$ y A_k es el área de dicha cara.

A medida que el tetraedro se reduce y sus caras $\partial\Omega_k$ se aproximan al punto \mathbf{x}_0 , el punto \mathbf{x}_i tiende a \mathbf{x}_0 . Debido a la continuidad de \mathbf{F}^k , esto implica que:

$$\mathbf{F}^k(\mathbf{x}_i) \rightarrow \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0)$$

Por lo tanto, el límite de la integral sobre la cara $\partial\Omega_k$ es:

$$\lim_{\partial\Omega_k \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dA = \lim_{\partial\Omega_k \rightarrow \mathbf{x}_0} [\mathbf{F}^k(\mathbf{x}_i)A_k]$$

Dado que $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}_i) \rightarrow \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0)$ y el área A_k se mantiene en el límite, se tiene que:

$$\lim_{\partial\Omega_k \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dA = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0)A_k$$

Esto demuestra que la integral sobre cada cara del tetraedro converge al valor de la función \mathbf{F}^k evaluada en \mathbf{x}_0 , multiplicada por el área de la cara, al tomar el límite en que la cara se aproxima al punto \mathbf{x}_0 .

Q.E.D.

Para cada cara **PQR**, **OQR**, **OPR** y **OPQ** del tetraedro, podemos utilizar el corolario (2.1.1) para calcular la integral en el límite cuando el tetraedro se aproxima al punto \mathbf{x}_0 . Esto se realiza considerando la ecuación (2.22), que relaciona las áreas del tetraedro con las componentes del vector normal, es decir, $A_i = n_i A$, como se demostró inicialmente. El corolario establece que:

$$\int_{\partial A_k} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \approx \lim_{\partial A_k \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\partial A_k} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}^k(\mathbf{x}_0, t)A_k, \quad (2.25)$$

donde $\mathbf{t}^k(\mathbf{x}_0, t)$ es la función de tensión evaluada en un punto específico sobre la cara ∂A_k , y A_k es el área de esa cara.

Para la cara **PQR**, el punto de evaluación es \mathbf{x}^* . Entonces:

$$\int_{\text{PQR}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \approx \lim_{\text{PQR} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\text{PQR}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}_0, t)A, \quad (2.26)$$

donde A es el área principal del tetraedro.

Para la cara **OQR**, el punto de evaluación es \mathbf{x}_1 . Entonces:

$$\int_{\text{OQR}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \approx \lim_{\text{OQR} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\text{OQR}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}^1(\mathbf{x}_0, t)A_1 = \mathbf{t}^1(\mathbf{x}_0, t)n_1 A, \quad (2.27)$$

donde A_1 es el área de la cara **OQR**.

Para la cara **OPR**, el punto de evaluación es \mathbf{x}_2 . Entonces:

$$\int_{\text{OPR}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \approx \lim_{\text{OPR} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\text{OPR}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}^2(\mathbf{x}_0, t)A_2 = \mathbf{t}^2(\mathbf{x}_0, t)n_2 A, \quad (2.28)$$

donde A_2 es el área de la cara **OPR**.

Para la cara **OPQ**, el punto de evaluación es \mathbf{x}_3 . Entonces:

$$\int_{\text{OPQ}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \approx \lim_{\text{OPQ} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\text{OPQ}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}^3(\mathbf{x}_0, t)A_3 = \mathbf{t}^3(\mathbf{x}_0, t)n_3 A, \quad (2.29)$$

donde A_3 es el área de la cara **OPQ**.

Sustituimos cada resultado en la ecuación (2.24):

$$\int_{\partial S(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \approx \mathbf{t}^* A + \mathbf{t}^1 n_1 A + \mathbf{t}^2 n_2 A + \mathbf{t}^3 n_3 A \quad (2.30)$$

Al sustituir en la ecuación (2.5), obtenemos:

$$\int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV + \mathbf{t}^* A + \mathbf{t}^1 n_1 A + \mathbf{t}^2 n_2 A + \mathbf{t}^3 n_3 A = 0 \quad (2.31)$$

A partir de la ecuación (2.31), procederemos a calcular la integral de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$. Para ello, utilizaremos el siguiente corolario, donde consideraremos el mismo tetraedro dentro de $\mathbf{S}(t)$ que se comprime hacia el mismo punto \mathbf{x}_0 . Esto nos permitirá aproximar la integral de las fuerzas volumétricas como el valor de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ en ese punto multiplicado por el volumen del segmento, facilitando el análisis local de las fuerzas volumétricas.

Corolario 2.1.2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, supongamos que \mathbf{F} es una función vectorial continua en Ω . Entonces, existen puntos $\mathbf{x}_i \in \Omega$ tales que, si la región Ω se comprime hacia un punto \mathbf{x}_0 en Ω , la integral de volumen de \mathbf{F} sobre Ω satisface:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) V,$$

donde V es el volumen total de la región Ω .

Demostración:

Si la región Ω se comprime hacia \mathbf{x}_0 , podemos considerar que la región Ω se concentra alrededor de \mathbf{x}_0 .

Por el Teorema (B.1.2), sabemos que existen puntos $\mathbf{x}_i \in \Omega$ tal que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}_1) \\ F_2(\mathbf{x}_2) \\ F_3(\mathbf{x}_3) \end{pmatrix} V = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) V,$$

A medida que la región Ω se comprime hacia \mathbf{x}_0 , los puntos \mathbf{x}_i convergen a \mathbf{x}_0 . Por lo tanto, en el límite se tiene:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$$

Dado que la integral de volumen se convierte en:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) V$$

Esto completa la demostración, mostrando que cuando la región tridimensional Ω se comprime hacia el punto \mathbf{x}_0 , la integral de volumen de la función vectorial sobre Ω se iguala al valor de la función vectorial en \mathbf{x}_0 multiplicado por el volumen de Ω .

Q.E.D.

Aplicando el Corolario (2.1.2), se puede simplificar la integral de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ sobre $\mathbf{S}(t)$. Según el corolario, existe un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}(t)$ con $\mathbf{A}(t) \subseteq \mathbf{S}(t)$, donde $\mathbf{A}(t)$ se comprime a \mathbf{x}_0 . Entonces, podemos aproximar la integral como:

$$\int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV \approx \lim_{\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\mathbf{A}(t)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV = \mathbf{a}(\mathbf{x}_0, t) V, \quad (2.32)$$

donde V es el volumen total de $\mathbf{A}(t)$.

Sustituyendo (2.32) en la ecuación (2.4), obtenemos:

$$\mathbf{a}_0 V + \mathbf{t}^* A + \mathbf{t}^1 n_1 A + \mathbf{t}^2 n_2 A + \mathbf{t}^3 n_3 A = 0 \quad (2.33)$$

Considerando que $\mathbf{A}(t)$ es un tetraedro contenido en el interior de $\mathbf{S}(t)$, el volumen del tetraedro se puede expresar como $V = \frac{1}{3} h A$, donde h es la altura del tetraedro, definida como la magnitud del vector \mathbf{N} , tal como se ilustra en la figura (2.3), y A es el área de la base. Al sustituir esta expresión en la ecuación (2.33), obtenemos:

$$\frac{1}{3} \mathbf{a}_0 h A + \mathbf{t}^* A + \mathbf{t}^1 n_1 A + \mathbf{t}^2 n_2 A + \mathbf{t}^3 n_3 A = 0 \quad (2.34)$$

Dividiendo (2.34) entre A :

$$\frac{1}{3} \mathbf{a}_0 h + \mathbf{t}^* + \mathbf{t}^1 n_1 + \mathbf{t}^2 n_2 + \mathbf{t}^3 n_3 = 0 \quad (2.35)$$

A medida que el volumen del tetraedro se concentra en el punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}(t)$, la altura h tiende a cero. Esto implica que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{a}_0 h = 0 \quad (2.36)$$

Tal como se ilustra en la figura (2.7).

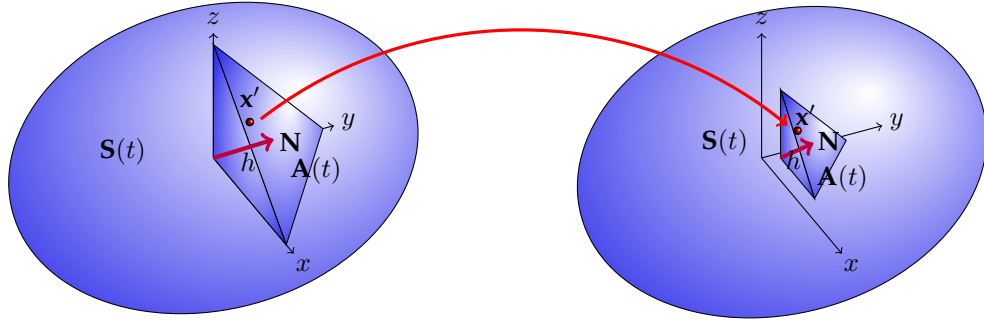


Figura 2.7: Concentración de volumen del tetraedro y tendencia de la altura a cero

A partir de la ecuación (2.35), que describe la conservación del momento lineal en términos de tensiones superficiales, podemos simplificar la expresión para obtener una forma más manejable, sustituyendo (2.36). La ecuación se reduce a:

$$\mathbf{t}^* + \mathbf{t}^1 n_1 + \mathbf{t}^2 n_2 + \mathbf{t}^3 n_3 = 0 \quad (2.37)$$

donde \mathbf{t}^* representa el vector de tensión en un punto específico de la superficie, \mathbf{t}^k (para $k = 1, 2, 3$) son los vectores de tensión sobre las caras de la superficie, y n_k son las componentes normales asociadas a cada cara.

Para simplificar el signo negativo en la ecuación, elegimos redefinir los vectores de tensión \mathbf{t}^k como negativos de los vectores de tensión $\boldsymbol{\sigma}_k$, es decir:

$$\mathbf{t}^k = -\boldsymbol{\sigma}_k \quad (2.38)$$

Al sustituir $\mathbf{t}^1 = -\boldsymbol{\sigma}_1$, $\mathbf{t}^2 = -\boldsymbol{\sigma}_2$, y $\mathbf{t}^3 = -\boldsymbol{\sigma}_3$ en la ecuación (2.37), obtenemos:

$$\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma}_1 n_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 n_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 n_3 \quad (2.39)$$

Esta forma final expresa el vector de tensión \mathbf{t}^* como una combinación lineal de las tensiones sobre las caras del tetraedro, ponderada por las componentes normales correspondientes.

Esta simplificación es válida en el límite de un volumen V suficientemente pequeño, donde las fuerzas de volumen no afectan significativamente las fuerzas de superficie. Esto nos permite enfocarnos en las tensiones sobre las superficies del tetraedro, simplificando el análisis del problema.

De forma equivalente, podemos expresar (2.39), sustituyendo (2.23) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^* &= \boldsymbol{\sigma}_1 n_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 n_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 n_3 \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} n_1 + \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} n_2 + \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} n_3 \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de esfuerzos se denota como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Hemos establecido la forma del vector de esfuerzo \mathbf{t} como una función lineal de la normal unitaria \mathbf{n} , encapsulada en la matriz de tensiones (2.40). Este resultado nos proporciona una descripción precisa de cómo las fuerzas superficiales se distribuyen y actúan sobre un cuerpo en equilibrio estático.

Por último, podemos expresar la ley de conservación del momento lineal (2.4) de la siguiente manera:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial S(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA \quad (2.41)$$

Para simplificar la ecuación presentada en (2.41), es importante enunciar el teorema de la divergencia. Este teorema proporciona una herramienta clave para relacionar las integrales de un campo vectorial sobre un volumen con las integrales a través de la superficie que lo delimita. El enunciado es el siguiente:

Teorema 2.1.1. Divergencia. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ cuyo vector normal \mathbf{n} está dado hacia afuera de la superficie, si $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ es un campo vectorial diferenciable, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\partial \Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dA,$$

donde $\partial \Omega$ es la frontera de la superficie.

Aplicando el teorema de la divergencia a (2.41), obtenemos:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{S(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.42)$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds para funciones vectoriales (1.3.2) enunciado en el capítulo 1, la ecuación (2.3) se puede expandir para considerar tanto las variaciones temporales como espaciales del campo de velocidad y densidad dentro del volumen de control en movimiento:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_{S(t)} \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \} dV \quad (2.43)$$

Esta ecuación (2.43) permite describir cómo el momento lineal del sistema evoluciona con el tiempo, considerando tanto la variación temporal de la velocidad y la densidad en un punto dado como el flujo de momento lineal a través de la superficie del volumen en movimiento.

Ahora podemos igualar (2.42) y (2.43), sin embargo, para facilitar nuestro análisis, consideramos una subregión $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{S}(t)$. Esto nos permite aplicar el teorema de Transporte de Reynolds en esta subregión, logrando que el integrando sea cero debido a la elección apropiada de $\mathbf{B}(t)$. De este modo, podemos reescribir la ecuación como:

$$\int_{\mathbf{B}(t)} [\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)] dV = \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \} dV \quad (2.44)$$

De esta forma, hemos logrado simplificar la ecuación original restringiendo la región de integración a una subregión $\mathbf{B}(t)$, lo cual nos permite manejar términos más sencillos y enfocar nuestro análisis en esta subregión específica.

Ahora, reescribimos (2.44) de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbf{B}(t)} \{ \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \rho \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \} \} dV = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

Por el teorema (1.3.3), tenemos que

$$\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \rho \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

o bien,

$$\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \rho \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, t)] \}$$

Procedemos a desarrollar la divergencia del lado derecho de la ecuación, considerando la expresión dada en (1.28), resultando en:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \rho \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \} \\ &= \rho \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Simplificamos el lado derecho de la ecuación utilizando (1.15), como se muestra a continuación:

$$\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \rho \{ \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \} \quad (2.48)$$

Así, podemos reescribir la ecuación (2.48), teniendo en cuenta la definición de la derivada material (1.19), lo que nos lleva a la ecuación de conservación del momento lineal del cuerpo (ver sección 1.3 pág. 31 [12]):

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)} \quad (2.49)$$

Para comprender la importancia de esta ecuación, es crucial determinar la forma de la matriz de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$. Este proceso no solo será extenso, sino también sumamente interesante, ya que implica el uso de un teorema crucial que nos permitirá demostrar la forma de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$.

En este contexto, al integrar la ecuación (2.49) sobre el volumen $\mathbf{S}(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{\mathbf{S}(t)} [\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)] dV \\ &= \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\mathbf{S}(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dV \\ &= \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial \mathbf{S}(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dA \\ &= \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial \mathbf{S}(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por otro lado, de acuerdo con (2.4), la ecuación (2.50) puede expresarse como:

$$\boxed{\int_{\mathbf{S}(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV} \quad (2.51)$$

Finalmente, en la siguiente sección, se analizará el momento angular, realizando un procedimiento análogo para derivar las correspondientes ecuaciones de conservación y determinar la forma de los términos involucrados.

2.2. Momento Angular

En el estudio de la dinámica de fluidos, el momento angular constituye una herramienta esencial para caracterizar el comportamiento rotacional de un elemento de fluido. Consideremos que el cuerpo se encuentra en la posición $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Para un fluido incompresible, el momento angular de un elemento de volumen $\mathbf{S}(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ respecto al origen se define como:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (2.52)$$

donde ρ es constante.

Es importante notar que el momento angular depende de la elección del origen desde el cual se mide el vector de posición \mathbf{x} . A partir de esta definición, podemos expresar el momento angular del cuerpo de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \rho \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV} \quad (2.53)$$

La tasa de cambio del momento angular del cuerpo del fluido según (2.53) está dada por:

$$\dot{\mathbf{L}}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{S}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.54)$$

Podemos relacionar esta tasa de cambio con las fuerzas angulares actuantes en el volumen. Según el principio de conservación del momento angular, la derivada temporal del momento angular es igual a la suma de los momentos de las fuerzas volumétricas y de superficie que actúan sobre el volumen del fluido, considerando $\mathbf{B}(t) \subseteq \mathbf{S}(t)$ (ver sección 4.6 pág. 129 [8]):

$$\rho \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \quad (2.55)$$

Fundamentándonos en las ecuaciones previamente establecidas, la ecuación (2.51) relaciona la derivada material de la velocidad con la tasa de cambio del momento lineal, mientras que la ecuación (2.55) aborda la conservación del momento angular. A partir de estas bases, podemos extender nuestro análisis al momento angular de un volumen $\mathbf{B}(t)$, lo que nos lleva a la siguiente relación:

$$\int_{\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.56)$$

Entonces, igualando (2.55) y (2.56), podemos expresar:

$$\rho \int_{\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) dV = \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\mathbf{B}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \quad (2.57)$$

A continuación, expresaremos la ecuación en la k -ésima componente del vector resultante para mayor claridad. Utilizando el símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} (véase la sección (A.3) del apéndice A), podemos reescribir la relación obtenida como sigue:

$$\rho \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i \frac{Dv_j}{Dt} dV = \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i f_j dV + \int_{\partial\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i t_j dA \quad (2.58)$$

Además, la integral de la tensión de superficie en notación indicial se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_{\partial\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i t_j dA = \int_{\partial\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{mj} n_m dA = \int_{\mathbf{B}(t)} \partial_m (\varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{mj}) dV \quad (2.59)$$

Sustituyendo la ecuación (2.59) en la ecuación (2.58), obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i \frac{Dv_j}{Dt} dV &= \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i f_j dV + \int_{\mathbf{B}(t)} \partial_m (\varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{mj}) dV \\ &= \rho \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i f_j dV + \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} \partial_m (x_i \sigma_{mj}) dV \\ &= \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} [\rho x_i f_j + \partial_m (x_i \sigma_{mj})] dV \\ &= \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} [\rho x_i f_j + \partial_m (x_i) \sigma_{mj} + x_i \partial_m \sigma_{mj}] dV \end{aligned}$$

Considerando que $\partial_m x_i = \delta_{im}$ (ver ejemplo (A.2.2) en el Apéndice A), entonces

$$\rho \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i \frac{Dv_j}{Dt} dV = \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} (\rho x_i f_j + \delta_{im} \sigma_{mj} + x_i \partial_m \sigma_{mj}) dV \quad (2.60)$$

lo que nos lleva a

$$\int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} \left(\rho x_i \frac{Dv_j}{Dt} - \rho x_i f_j - x_i \partial_m \sigma_{mj} \right) dV = \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} \delta_{im} \sigma_{mj} dV \quad (2.61)$$

Ahora, podemos simplificar la ecuación (2.61) factorizando x_i en el lado izquierdo:

$$\int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} x_i \left(\rho \frac{Dv_j}{Dt} - \rho f_j - \partial_m \sigma_{mj} \right) dV = \int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} \delta_{im} \sigma_{mj} dV \quad (2.62)$$

De acuerdo con la ecuación de conservación del momento lineal (2.49), tenemos:

$$\rho \frac{Dv_j}{Dt} - \rho f_j - \partial_m \sigma_{mj} = 0 \quad (2.63)$$

Sustituyendo esta expresión (2.63) en la ecuación (2.62), obtenemos:

$$\int_{\mathbf{B}(t)} \varepsilon_{ijk} \delta_{im} \sigma_{mj} dV = 0 \quad (2.64)$$

De acuerdo con el teorema en (1.3.3), sabemos que para cualquier $\mathbf{B}(t) \subseteq \mathbf{S}(t)$, el integrando de la integral sobre $\mathbf{B}(t)$ es cero. Es decir, se cumple que:

$$\varepsilon_{ijk} \delta_{im} \sigma_{mj} = 0 \quad (2.65)$$

Además, considerando que δ_{im} actúa como una matriz identidad en la notación de índices, se deduce que:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} = 0 \quad (2.66)$$

Multiplicando (2.66) por ε_{mnk} , obtenemos:

$$\varepsilon_{mnk} \varepsilon_{ijk} \sigma_{ij} = 0 \quad (2.67)$$

A partir de la ecuación (2.67), podemos utilizar la propiedad (A.3) del tensor de Levi-Civita y de la matriz identidad para analizar las componentes del tensor de esfuerzos σ_{ij} . Primero, consideramos la identidad:

$$(\delta_{mi} \delta_{nj} - \delta_{mj} \delta_{ni}) \sigma_{ij} = 0 \quad (2.68)$$

Esta identidad se descompone en dos términos:

$$\delta_{mi} \delta_{nj} \sigma_{ij} - \delta_{mj} \delta_{ni} \sigma_{ij} = 0 \quad (2.69)$$

Al expandir estos términos, observamos que:

$$\delta_{mi} \sigma_{in} - \delta_{mj} \sigma_{nj} = 0 \quad (2.70)$$

Esta expresión indica que el tensor de esfuerzos σ_{ij} cumple con una condición de simetría en relación con el índice de las componentes. Simplificando esta condición, llegamos a:

$$\sigma_{mn} - \sigma_{nm} = 0,$$

lo que se puede escribir como:

$$\boxed{\sigma_{mn} = \sigma_{nm}} \quad (2.71)$$

Esto muestra que el tensor de esfuerzos σ_{ij} es simétrico. La simetría implica que las componentes de σ_{ij} son tales que σ_{mn} es igual a σ_{nm} , lo que confirma que el tensor de esfuerzos no tiene componentes antisimétricas.

Es notable que este resultado no solo simplifica las ecuaciones de movimiento, sino que también proporciona una profunda comprensión de la naturaleza de las fuerzas internas en un fluido.

En este capítulo, hemos explorado los conceptos básicos de momento lineal y momento angular en el contexto de la dinámica de fluidos. Comenzamos definiendo el momento lineal para un elemento de volumen de fluido. A través de una rigurosa derivación matemática, demostramos que la matriz de esfuerzos σ debe ser simétrica para cumplir con la conservación del momento angular. Este resultado es notable ya que, a diferencia de otros principios de conservación, no obtenemos una nueva ecuación diferencial, sino una propiedad fundamental de la matriz de esfuerzos.

En el siguiente capítulo, nos enfocaremos en calcular la matriz de esfuerzos. Exploraremos cómo se puede determinar σ a partir de las ecuaciones de movimiento y las condiciones físicas del problema.

Con esto, concluimos nuestra discusión sobre la conservación del momento lineal, el momento angular y la simetría de la matriz de esfuerzos. A continuación, abordaremos los métodos y las herramientas para calcular la matriz de esfuerzos.

Capítulo 3

Forma de la Matriz de Esfuerzos

En el capítulo anterior, examinamos conceptos primordiales como el momento lineal y el momento angular en la dinámica de fluidos. Además, demostramos la simetría de la matriz de esfuerzos σ , que es una herramienta esencial para entender las tensiones internas en un fluido. Sin embargo, para describir completamente el comportamiento de un fluido bajo diversas condiciones, es necesario determinar la forma exacta de la matriz de esfuerzos.

La matriz de esfuerzos es esencial porque establece la relación entre las tensiones internas del fluido y las correspondientes deformaciones. Estas deformaciones están directamente vinculadas al gradiente de velocidad del fluido, es decir, cómo cambia la velocidad en diferentes puntos dentro del fluido. Para derivar la forma específica de la matriz de esfuerzos, utilizaremos el **Teorema de Representación de Isótropos**.

Este teorema es crucial porque asegura que, en materiales isotrópicos aquellos cuyas propiedades físicas son las mismas en todas las direcciones, la matriz de esfuerzos puede expresarse de manera única en términos de combinaciones lineales de matrices invariantes. Esto significa que las tensiones internas en un fluido isotrópico dependen únicamente de ciertas cantidades que no cambian bajo rotaciones, lo cual simplifica considerablemente el análisis.

Para comenzar con este análisis, es necesario introducir el **gradiente de velocidad**, ya que las tensiones en el fluido dependen directamente de cómo cambia la velocidad del fluido en diferentes puntos. El gradiente de velocidad proporciona una descripción precisa de la deformación que experimentan los elementos del fluido debido a los diferentes valores de velocidad en sus inmediaciones.

El gradiente de velocidad es clave porque describe tanto los cambios de dirección como los cambios en la magnitud de la velocidad del fluido. Esto es vital para entender cómo se generan las tensiones internas en el fluido. En materiales isotrópicos, estas tensiones dependen únicamente de la relación entre la velocidad y las posiciones relativas de los elementos del fluido. A partir del gradiente de velocidad, podremos derivar la forma general de la matriz de esfuerzos, incluyendo términos que representen tanto los esfuerzos viscosos como la presión dentro del fluido.

En este capítulo, derivaremos la forma precisa de la matriz de esfuerzos para fluidos isotrópicos y examinaremos cómo se relaciona con las propiedades del fluido, como la viscosidad y la presión. Además, exploraremos cómo estas tensiones internas influyen en el movimiento del fluido.

3.1. Gradiente de Velocidad

El comportamiento de un fluido bajo diversas condiciones puede describirse mediante la matriz de esfuerzos, que relaciona las tensiones internas del fluido con sus deformaciones y el gradiente de velocidad. Esta matriz ofrece una comprensión detallada de cómo las tensiones internas influyen en el comportamiento del fluido.

Para obtener una representación precisa de la matriz de esfuerzos, es fundamental descomponer el gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{v}$ en sus componentes simétricas y antisimétricas. Esta descomposición nos permite identificar de manera clara las contribuciones de las tensiones de corte y las tensiones normales, proporcionando así una visión más completa de las interacciones internas del fluido y su

impacto en la dinámica. A continuación, se muestra esta descomposición (ver sección 8.10.2 pág. 416 [7]):

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{D} se define como la parte simétrica de $\nabla \mathbf{v}$:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (3.2)$$

y \mathbf{W} se define como la parte antisimétrica de $\nabla \mathbf{v}$:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (3.3)$$

Esta descomposición es útil porque \mathbf{D} describe la **deformación pura** del fluido, mientras que \mathbf{W} está relacionada con la **rotación** del fluido sin deformación. La parte simétrica, \mathbf{D} , captura cómo las partículas del fluido cambian sus distancias relativas entre sí, mientras que la parte antisimétrica, \mathbf{W} , refleja cómo el fluido rota sin cambiar su forma.

Para un fluido newtoniano, la matriz de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ puede expresarse en términos de la presión p y una función \mathbf{G} que depende de las partes simétrica \mathbf{D} y antisimétrica \mathbf{W} del gradiente de velocidad:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{W})} \quad (3.4)$$

Aquí, \mathbf{I} es la matriz identidad, y $-p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ representa la parte **isotrópica** de la matriz de esfuerzos debida a la presión. Esto significa que el término $-p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$ actúa de manera uniforme en todas las direcciones, reflejando la influencia de la presión sobre el fluido.

Por otro lado, la función $\mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{W})$ describe las tensiones relacionadas con las deformaciones y rotaciones internas del fluido. Para un fluido newtoniano, la parte simétrica \mathbf{D} está directamente relacionada con las **tensiones viscosas**, mientras que la parte antisimétrica \mathbf{W} refleja la rotación del fluido, que no contribuye directamente a la matriz de esfuerzos en este caso, pero puede tener efectos indirectos en otras dinámicas del fluido.

3.1.1. Transformación de Coordenadas y Análisis del Gradiente de Velocidad

Para demostrar que la matriz de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ depende únicamente de las partes simétricas de las deformaciones, consideramos el efecto de una traslación y rotación en el campo de esfuerzos.

En el estudio de la dinámica de fluidos, es crucial comprender cómo se transforman las velocidades y tensiones cuando cambiamos el sistema de coordenadas. Un aspecto clave de esta transformación es el cálculo de las componentes simétricas y antisimétricas del gradiente de velocidad, \mathbf{D}^* y \mathbf{W}^* , en un nuevo sistema de coordenadas. Este análisis es indispensable para entender el comportamiento del fluido bajo diferentes marcos de referencia, especialmente en estudios de deformaciones y rotaciones (ver sección 8.9 [7]).

Consideremos la siguiente transformación de coordenadas:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ es una matriz de rotación dependiente del tiempo y $\mathbf{b}(t)$ es un vector de traslación dependiente del tiempo. Nuestro objetivo es expresar la velocidad $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ en el nuevo sistema de coordenadas.

Primero, definimos la velocidad $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$ como la derivada temporal de (3.5):

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}^* \quad (3.6)$$

$$= \frac{d}{dt} [\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)]. \quad (3.7)$$

Aplicando la regla de la cadena para la derivada, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{b}}(t) \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{b}}(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para calcular el gradiente de la velocidad en el nuevo sistema de coordenadas, utilizamos la ecuación (3.8):

$$\begin{aligned}\nabla^* \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) &= \nabla^* \left[\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{b}}(t) \right] \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)\nabla^* \mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\nabla^* \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla^* \dot{\mathbf{b}}(t) \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)\nabla^* \mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\nabla^* \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Despejando \mathbf{x} de la ecuación (3.5), obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [\mathbf{Q}(t)]^{-1} [\mathbf{x}^* - \mathbf{b}(t)] \\ &= [\mathbf{Q}(t)]^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{b}(t)],\end{aligned}\quad (3.10)$$

donde hemos utilizado la propiedad de que la matriz de rotación es ortogonal, es decir, $[\mathbf{Q}(t)]^{-1} = [\mathbf{Q}(t)]^T$. Aplicando el operador gradiente en la ecuación (3.10), obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla^* \mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}^*, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^*} \left\{ [\mathbf{Q}(t)]^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{b}(t)] \right\} \\ &= [\mathbf{Q}(t)]^T\end{aligned}\quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.11) en la ecuación (3.9), obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla^* \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla^* \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\nabla^* \mathbf{x} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T,\end{aligned}\quad (3.12)$$

donde $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es el gradiente de la velocidad en el sistema de coordenadas original.

Siguiendo (3.2) y (3.3), utilizamos las siguientes definiciones:

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla^* \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) + [\nabla^* \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)]^T \right\}, \quad (3.13)$$

y

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla^* \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) - [\nabla^* \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)]^T \right\}. \quad (3.14)$$

Estas cantidades permiten analizar por separado las deformaciones \mathbf{D}^* y las rotaciones \mathbf{W}^* del fluido en el nuevo sistema de coordenadas. Este análisis es esencial para comprender cómo el fluido responde a las fuerzas aplicadas y cómo se comporta en distintos marcos de referencia, facilitando el estudio de su dinámica en contextos más complejos.

Determinaremos la parte simétrica del gradiente de velocidad en el nuevo sistema de coordenadas.

Sustituyendo la expresión (3.12) en la definición (3.13), obtenemos:

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \left[\dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right]^T \right\} \quad (3.15)$$

Recordemos que la transposición de un producto de matrices se expresa como:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (3.16)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices de dimensiones compatibles para la multiplicación.

Al aplicar la transposición (3.16) a la expresión (3.15), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^*(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \left[\dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right]^T + \left[\mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \left\{ [\mathbf{Q}(t)]^T \right\}^T [\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T + \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right\}^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T + \left\{ [\mathbf{Q}(t)]^T \right\}^T [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)[\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)[\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{Q}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right\} + \mathbf{Q}(t) \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T \right\} [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\mathbf{I}}{dt} + \mathbf{Q}(t) \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T \right\} [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T \right\} [\mathbf{Q}(t)]^T \\
&= \mathbf{Q}(t)\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para obtener la parte antisimétrica del gradiente de velocidad en el nuevo sistema de coordenadas, utilizamos (3.14):

Sustituyendo el gradiente de velocidad (3.12) en el nuevo sistema de coordenadas (3.14), obtenemos:

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \left[\dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right]^T \right\} \tag{3.18}$$

Esta expresión representa la parte antisimétrica del gradiente de velocidad en el nuevo sistema de coordenadas, la cual describe las rotaciones del fluido.

Es importante notar que el primer término captura las rotaciones inducidas por la transformación del sistema de coordenadas, mientras que el segundo término está relacionado con las rotaciones internas del fluido.

Nuevamente aplicamos la transposición (3.16) a la expresión (3.18), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^*(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \left[\dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right]^T - \left[\mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \left\{ [\mathbf{Q}(t)]^T \right\}^T [\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T - \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T \right\}^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T - \left\{ [\mathbf{Q}(t)]^T \right\}^T [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t)\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T - \mathbf{Q}(t)[\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T + \mathbf{Q}(t) \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T \right\} [\mathbf{Q}(t)]^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) \left\{ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - [\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]^T \right\} [\mathbf{Q}(t)]^T \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \mathbf{Q}(t)[\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T \right\} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)[\mathbf{Q}(t)]^T
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora, vamos a proceder a descomponer y simplificar el primer término de la expresión obtenida. Para ello, observamos que dicho término involucra una diferencia entre productos de matrices y sus transpuestas. Utilizaremos propiedades de derivadas y de productos matriciales para simplificarlo de manera sistemática. El objetivo es reescribir este término en una forma más manejable que facilite su

interpretación y el análisis posterior de la expresión completa.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \mathbf{Q}(t) [\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T \right\} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) [\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T \\
&= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) [\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T \\
&= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T + \mathbf{Q}(t) [\dot{\mathbf{Q}}(t)]^T \right\} \\
&= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{Q}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T \} \\
&= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{I} \} \\
&= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Definamos la matriz $\psi(t)$ como:

$$\psi(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T \tag{3.21}$$

Así, sustituyendo (3.21) en (3.19), la definición (3.18) se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) [\mathbf{Q}(t)]^T \tag{3.22}$$

Para analizar completamente $\mathbf{G}(\mathbf{D}^*, \mathbf{W}^*)$, debemos verificar cómo se transforma la función tensorial \mathbf{G} bajo una rotación de coordenadas.

Utilizamos la definición (3.1.1) de isotropía de funciones tensoriales, que establece que una función tensorial \mathbf{G} es isotrópica si, para cualquier matriz ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple:

Definición 3.1.1. Una función tensorial \mathbf{G} que depende de uno o más tensores de segundo orden $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ se dice que es isotrópica si, para toda matriz ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_k\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k)\mathbf{Q}^T$$

Aplicando la definición de isotropía a nuestro caso, obtenemos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{D}^*, \mathbf{W}^*) = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T, \psi + \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T)$$

Utilizando la propiedad de isotropía, podemos deducir que:

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T, \psi + \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{W})\mathbf{Q}^T \tag{3.23}$$

Para demostrar que la función tensorial \mathbf{G} solo depende de las partes simétricas de \mathbf{D} , consideramos una transformación de coordenadas generada por una matriz ortogonal $\mathbf{Q}(t)$ de la forma:

$$\mathbf{Q}(t) = e^{-t\mathbf{W}} \tag{3.24}$$

Esta elección garantiza que la transformación representa una rotación dependiente del tiempo. Para analizar cómo \mathbf{G} se comporta bajo esta transformación, es crucial verificar que $\mathbf{Q}(t)$ es efectivamente una matriz ortogonal.

Para confirmar que $\mathbf{Q}(t)$ es ortogonal, necesitamos demostrar que:

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{I} \tag{3.25}$$

Esto implica que:

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}(t)^T = e^{-t\mathbf{W}} (e^{-t\mathbf{W}})^T = e^{-t\mathbf{W}} e^{-t\mathbf{W}^T} \tag{3.26}$$

En general, al multiplicar exponenciales de matrices, no siempre se puede sumar los exponentes directamente. El lema (B.1.1) del apéndice B establece que si dos matrices conmutan, entonces la exponencial de su suma es igual al producto de las exponenciales individuales. En nuestro caso, es importante verificar que las matrices $-t\mathbf{W}$ y $(-t\mathbf{W})^T$ conmutan, ya que esto nos permitirá aplicar el lema para descomponer la exponencial de la suma.

Podemos abordar este aspecto de una manera más general, enunciando el siguiente lema:

Lema 3.1.1. Si \mathbf{M} es una matriz antisimétrica y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la matriz $\mathbf{A} = e^{\alpha\mathbf{M}}$ es ortogonal.

Demostración:

Para demostrar que \mathbf{A} es ortogonal, debemos probar que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

Calculemos la transpuesta de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^T = (e^{\alpha\mathbf{M}})^T = e^{\alpha\mathbf{M}^T}$$

Dado que \mathbf{M} es antisimétrica, tenemos $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$, lo que implica:

$$\mathbf{A}^T = e^{-\alpha\mathbf{M}}$$

A continuación, verificamos que los exponentes conmutan:

$$(\alpha\mathbf{M})(-\alpha\mathbf{M}) = -\alpha^2\mathbf{M}^2,$$

lo que es equivalente a

$$(-\alpha\mathbf{M})(\alpha\mathbf{M}) = -\alpha^2\mathbf{M}^2$$

Por lo tanto, los exponentes efectivamente conmutan. Finalmente, tenemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = e^{\alpha\mathbf{M}}e^{-\alpha\mathbf{M}} = e^{\alpha\mathbf{M}-\alpha\mathbf{M}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$$

Q.E.D.

El lema (3.1.1) establece que la matriz $\mathbf{A} = e^{\alpha\mathbf{M}}$ es ortogonal si \mathbf{M} es antisimétrica. Este resultado justifica que la matriz $\mathbf{Q}(t) = e^{-t\mathbf{W}}$ es ortogonal, dado que $-t\mathbf{W}$ es antisimétrica. Esta propiedad es esencial para garantizar que la transformación de coordenadas sea válida y que se conserve la estructura de \mathbf{G} .

Para profundizar en el comportamiento de la matriz ortogonal $\mathbf{Q}(t)$ bajo la transformación considerada, es útil analizar la derivada temporal de $\mathbf{Q}(t)$ y cómo esta se relaciona con su transpuesta. Al sustituir la expresión para $\mathbf{Q}(t)$ en (3.21) y realizar las operaciones correspondientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{Q}(t)]^T \\ &= -\mathbf{W}e^{-t\mathbf{W}}e^{-t\mathbf{W}^T} \\ &= -\mathbf{W}e^{-t\mathbf{W}}e^{t\mathbf{W}} \\ &= -\mathbf{W}e^{-t\mathbf{W}+t\mathbf{W}} \\ &= -\mathbf{W} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Esta simplificación demuestra que $\psi(t)$ es igual a $-\mathbf{W}$, es decir, $\psi(t)$ es la transpuesta de la matriz antisimétrica \mathbf{W} . Esto confirma la propiedad clave de la matriz \mathbf{W} en el contexto de nuestra transformación ortogonal dependiente del tiempo.

De esta propiedad (3.23) y sustituyendo (3.27), se sigue que la función tensorial \mathbf{G} depende únicamente de la parte simétrica \mathbf{D} y no de la parte antisimétrica \mathbf{W} . Esto se puede formalizar como:

$$\boxed{\mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{W}) = \mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{W} + \psi) = \mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{W} - \mathbf{W}) = \mathbf{G}(\mathbf{D})} \tag{3.28}$$

Esta expresión confirma que la parte antisimétrica \mathbf{W} no afecta el resultado final de \mathbf{G} , ya que cualquier contribución adicional de ψ se cancela.

La igualdad demostrada en (3.28) no solo proporciona una conclusión relevante para nuestra función tensorial \mathbf{G} , sino que también concuerda con nuestras expectativas teóricas. La matriz de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, que es clave en la descripción del estado de deformación en los fluidos, se ha demostrado ser simétrica en el capítulo anterior. Esta simetría implica que los términos antisimétricos de las partes de la velocidad, que no afectan la matriz de esfuerzos, pueden ser eliminados sin pérdida de generalidad.

Dado que hemos demostrado que la función tensorial \mathbf{G} solo depende de la parte simétrica \mathbf{D} y

no de la parte antisimétrica \mathbf{W} , como se concluye en la ecuación (3.28), podemos expresar la matriz de esfuerzos en términos de \mathbf{D} sustituyendo en (3.4). La matriz de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, que describe el estado de deformación en un fluido, se relaciona con la parte simétrica del gradiente de la velocidad mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathbf{G}(\mathbf{D}) \quad (3.29)$$

Esta ecuación resalta que la matriz de esfuerzos se descompone en una parte relacionada con la presión y otra que depende exclusivamente de la simetría del gradiente de velocidad, lo cual refleja cómo la deformación en el fluido está influenciada por ambas contribuciones. En la siguiente sección, se procederá a calcular la forma exacta de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$, proporcionando una descripción más precisa de la influencia del gradiente de deformación en la dinámica del fluido.

3.2. Teorema de la Representación para Isótopos

En esta sección, abordaremos una formulación detallada del Teorema de la Representación para Isótopos, representado por $\mathbf{G}(\mathbf{D})$. Este teorema, fundamentado en una serie de lemas enunciados y demostrados en la sección (B.2) del Apéndice B, ofrece una base sólida para entender cómo las propiedades y comportamientos de la matriz de esfuerzos \mathbf{G} están estrechamente relacionados con las deformaciones simétricas \mathbf{D} (véase [13]).

Estos resultados teóricos permiten revelar la estructura esencial que caracteriza la relación entre la matriz de esfuerzos y las deformaciones en medios isótopos, estableciendo así una base robusta para su análisis y aplicación en la mecánica de medios continuos.

Consideremos el espacio V dotado de un producto interno, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Definimos Sym como el conjunto de todas las matrices simétricas y Orth como el conjunto de todas las matrices ortogonales.

Dado un vector propio $\mathbf{u} \in V$ asociado a la matriz \mathbf{D} , la matriz de reflexión $\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \in \text{Orth}$, cuya ortogonalidad está establecida en el lema (B.2.4) del Apéndice B, refleja a través del plano perpendicular a \mathbf{u} . Un vector $\mathbf{v} \in V$ se considera paralelo a \mathbf{u} si, y solo si, la reflexión $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ de \mathbf{v} resulta en $-\mathbf{v}$, cumpliendo así que $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, como se demuestra en el lema (B.2.5) del Apéndice B. Por otro lado, un vector $\mathbf{v} \in V$ es perpendicular a \mathbf{u} si, y solo si, la reflexión $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ mantiene a \mathbf{v} inalterado, lo que se expresa como $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Adicionalmente, la proyección del vector \mathbf{v} sobre \mathbf{u} , para cualquier $\mathbf{v} \in V$, está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \quad (3.30)$$

La demostración del Teorema de la Representación para Isótopos se fundamenta en las siguientes consecuencias del Teorema Espectral:

1. Representación de Matrices Simétricas: Cualquier matriz $\mathbf{D} \in \text{Sym}$ admite una representación de la forma

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}, \quad (3.31)$$

donde $\{\mathbf{u}_i\}$ es una base ortonormal de vectores propios de \mathbf{D} y λ_i es el valor propio correspondiente al vector propio \mathbf{u}_i . Esta representación está corroborada en el lema (B.2.1). Además, si \mathbf{u} es un vector propio arbitrario de \mathbf{D} , es posible elegir la representación de tal manera que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, asegurando que todos los vectores propios tengan longitud unitaria.

2. Representación en Términos de Valores Propios: Sea \mathbf{u} un vector propio de \mathbf{D} tal que todos los vectores unitarios perpendiculares a \mathbf{u} son también vectores propios de \mathbf{D} . En este caso, \mathbf{D} admite la representación:

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \mathbf{I} + (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{P}_{\mathbf{u}} \quad (3.32)$$

Esta relación se encuentra demostrada en el lema (B.2.2).

El siguiente lema constituye un paso crítico en la demostración del Teorema de la Representación

para Isótopos. Este resultado es central, ya que establece que los vectores propios de una matriz simétrica \mathbf{D} también son vectores propios de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ cuando \mathbf{G} representa una transformación isótropa. La demostración se basa en el uso de la matriz ortogonal \mathbf{Q} , introducida en el lema (B.2.6) del Apéndice B, que permite llevar a cabo una transformación que preserve las propiedades de simetría de \mathbf{D} . Por consiguiente, esta transformación también mantiene inalterados los vectores propios en $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

Para proporcionar un contexto completo, el lema (B.2.6) permite comprender cómo se transforman los vectores normales mediante matrices ortogonales. Esto se complementa con el lema (3.2.1), que se presenta a continuación.

Lema 3.2.1. *Sea $\mathbf{G}(\mathbf{D}) : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}$ una transformación isótropa y $\mathbf{D} \in \text{Sym}$. Entonces, cada vector propio de \mathbf{D} también es un vector propio de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.*

Demostración:

Dado que \mathbf{R}_u es una matriz ortogonal, como se establece en el lema (B.2.4) del apéndice B, y considerando la definición de una función isótropa \mathbf{G} (Definición (3.1.1)), se concluye que $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ es invariante bajo la acción de la reflexión \mathbf{R}_u . Esto se expresa matemáticamente como:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{R}_u^T = \mathbf{G}(\mathbf{D})$$

Multiplicando ambos lados de esta igualdad por \mathbf{R}_u , obtenemos:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{R}_u^T \mathbf{R}_u = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{R}_u.$$

Dado que $\mathbf{R}_u^T = \mathbf{R}_u^{-1}$ y $\mathbf{R}_u^T \mathbf{R}_u = \mathbf{I}$, esta expresión se simplifica a:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{G}(\mathbf{D}) = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{R}_u \quad (3.33)$$

Esto demuestra que \mathbf{R}_u y $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ conmutan, indicando que el orden de aplicación de estas dos matrices no altera el resultado.

A continuación, multiplicamos ambos lados de la ecuación (3.33) por \mathbf{u} :

$$\mathbf{R}_u \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{R}_u \mathbf{u}$$

Dado que $\mathbf{R}_u \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ (por la definición de reflexión \mathbf{R}_u), podemos reescribir la ecuación como:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{u} = -\mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{u} \quad (3.34)$$

Definamos $\mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{u} = \mathbf{v}$; así, la ecuación (3.34) se simplifica a:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

De acuerdo con el lema (B.2.5), si se cumple que $\mathbf{R}_u \mathbf{v} = -\mathbf{v}$, entonces existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\mathbf{G}(\mathbf{D}) \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Así finaliza la demostración.

Q.E.D.

Con el lema anterior ya establecido, podemos proceder a enunciar el Teorema de la Representación para Isótopos. Los lemas previos nos han proporcionado las herramientas esenciales para comprender la interacción de las funciones isótropas con las reflexiones y el comportamiento de los vectores propios bajo estas transformaciones.

Teorema 3.2.1. Teorema de la Representación para Isótopos: *Sea $\mathbf{G}(\mathbf{D}) : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}$ una aplicación lineal e isótropa. Entonces, existen escalares λ, μ tales que*

$$\mathbf{G}(\mathbf{D}) = 2\mu \mathbf{D} + \lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}$$

Demostración:

Utilizando la ecuación (3.32), derivada del lema (B.2.2) del apéndice B, podemos expresar la matriz \mathbf{D} de la siguiente manera. Esta ecuación establece que, si \mathbf{u} es un vector propio de \mathbf{D} con valor propio λ_1 y cualquier vector \mathbf{v} ortogonal a \mathbf{u} es un vector propio de \mathbf{D} con valor propio λ_2 , entonces:

$$\mathbf{D} = \lambda_2(\mathbf{u}) \mathbf{I} + [\lambda_1(\mathbf{u}) - \lambda_2(\mathbf{u})] \mathbf{P}_u, \quad (3.35)$$

donde \mathbf{P}_u es la proyección ortogonal sobre \mathbf{u} . Esto implica que cualquier transformación isótropica puede expresarse en términos de la proyección sobre \mathbf{u} , por (3.35):

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}_u) = \lambda_2(\mathbf{u})\mathbf{I} + [\lambda_1(\mathbf{u}) - \lambda_2(\mathbf{u})]\mathbf{P}_u \quad (3.36)$$

Definiendo $\lambda(\mathbf{u}) = \lambda_2(\mathbf{u})$ y $2\mu(\mathbf{u}) = \lambda_1(\mathbf{u}) - \lambda_2(\mathbf{u})$, sustituyendo en (3.36), obtenemos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}_u) = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{u})\mathbf{P}_u \quad (3.37)$$

Aplicamos el Lema (B.2.3), que establece que $\mathbf{A}\mathbf{P}_u\mathbf{A}^T = \mathbf{P}_{\mathbf{A}u}$ para cualquier matriz ortogonal \mathbf{A} . Dado que \mathbf{G} es isótropica, se tiene:

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}u}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{P}_u\mathbf{A}^T) = \mathbf{A}\mathbf{G}(\mathbf{P}_u)\mathbf{A}^T \quad (3.38)$$

Usando la expresión anterior (3.37), podemos expresar (3.38) como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}u}) = \lambda(\mathbf{A}u)\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{A}u)\mathbf{P}_{\mathbf{A}u} \quad (3.39)$$

Entonces, de la ecuación (3.38) y de (3.37), tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{A}u)\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{A}u)\mathbf{P}_{\mathbf{A}u} &= \mathbf{A}[\lambda(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{u})\mathbf{P}_u]\mathbf{A}^T \\ &= \lambda(\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{A}^T + 2\mu(\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{P}_u\mathbf{A}^T \\ &= \lambda(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{u})\mathbf{P}_{\mathbf{A}u} \end{aligned}$$

Comparando ambos lados de la ecuación, concluimos que $\lambda(\mathbf{u})$ y $\mu(\mathbf{u})$ no dependen de \mathbf{u} , es decir, son constantes. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\mathbf{G}(\mathbf{P}_u) = \lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{P}_u \quad (3.40)$$

En este punto, utilizamos el Lema (3.2.1), que establece la invariancia de los vectores propios bajo transformaciones isótropicas. Dado que \mathbf{G} es isótropica y \mathbf{D} es simétrica, los vectores propios de \mathbf{D} se conservan bajo \mathbf{G} . Esto significa que si cualquier vector propio de \mathbf{D} , también lo es de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

Dado que \mathbf{G} es una transformación lineal, se cumple que $\mathbf{G}(\alpha\mathbf{D}) = \alpha\mathbf{G}(\mathbf{D})$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, usando la ecuación (3.31), derivada del lema (B.2.1), obtenemos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{D}) = \mathbf{G}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}_{u_i}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{G}(\mathbf{P}_{u_i})$$

Sustituyendo el resultado (3.40), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{D}) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{P}_{u_i}) \\ &= \lambda_1(\lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{P}_{u_1}) + \lambda_2(\lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{P}_{u_2}) + \lambda_3(\lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{P}_{u_3}) \\ &= 2\mu(\lambda_1\mathbf{P}_{u_1} + \lambda_2\mathbf{P}_{u_2} + \lambda_3\mathbf{P}_{u_3}) + \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{I} \\ &= 2\mu\mathbf{D} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} \end{aligned}$$

Esto completa la demostración.

Q.E.D.

Esta demostración concluye que cualquier transformación lineal e isótropica \mathbf{G} sobre el espacio de matrices simétricas puede representarse como una combinación de la matriz \mathbf{D} y el trazo de \mathbf{D} , escalado por constantes λ y μ .

3.2.1. Forma Exacta de la Matriz de Esfuerzos

Con el análisis exhaustivo realizado hasta este punto, que incluye el cambio de coordenadas y la aplicación del teorema para la representación de isótopos, hemos establecido las bases necesarias para determinar de manera precisa la forma exacta de la matriz de esfuerzos. Este trabajo preliminar ha permitido comprender cómo las transformaciones isótropas y las representaciones tensoriales se entrelazan para definir completamente la matriz de esfuerzos en términos de las propiedades del gradiente de velocidad y sus invariantes. Así, hemos preparado el terreno para una deducción rigurosa y detallada de la matriz de esfuerzos, esencial para avanzar en el estudio de las ecuaciones

de Navier-Stokes. Para un análisis más detallado, consideramos la representación específica de la matriz de esfuerzos en términos de \mathbf{D} y su traza. Según el teorema (3.2.1), la función tensorial \mathbf{G} sobre matrices simétricas se puede expresar como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{D}) = 2\mu\mathbf{D} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} \quad (3.41)$$

Para nuestro caso específico, la matriz simétrica es la parte simétrica del gradiente de velocidad del cuerpo, definida por (3.2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al calcular la traza obtenemos:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{D}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.42)$$

Con esta información, la forma general de la matriz de esfuerzo es:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}} \quad (3.43)$$

Sustituyendo en la matriz de esfuerzos y (3.42), obtenemos una forma específica de la matriz de esfuerzos:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T] + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}} \quad (3.44)$$

En el siguiente capítulo, calcularemos la divergencia de la matriz de esfuerzos, ya que es necesario sustituirla en la ecuación de conservación del momento lineal. Esto nos permitirá deducir las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma general y explorar cómo estas ecuaciones se transforman utilizando la transformada de Cole-Hopf para abordar problemas complejos en la dinámica de fluidos.

Capítulo 4

Ecuaciones de Navier-Stokes

Estamos ahora preparados para el siguiente paso, ya que en el capítulo anterior dedujimos la forma de la matriz de esfuerzos, y en el capítulo inicial establecimos las ecuaciones de conservación de masa. En este capítulo, introduciremos las ecuaciones de Navier-Stokes, que son esenciales en la dinámica de fluidos. Estas ecuaciones describen el movimiento de los fluidos bajo la influencia de varias fuerzas y son cruciales para modelar fenómenos en ingeniería, física y otras ciencias aplicadas.

Primero, comenzaremos reescribiendo la ecuación de conservación de momento lineal que se dedujo en el segundo capítulo, y luego, nos centraremos en calcular la divergencia de la matriz de esfuerzos, un paso importante en la formulación de estas ecuaciones. Este cálculo nos permitirá incorporar los efectos de la viscosidad y la presión en la dinámica del fluido.

Una vez que hayamos establecido la forma de las ecuaciones de Navier-Stokes, procederemos a analizar dos casos distintos para la velocidad del fluido. En el primer caso, supondremos que la velocidad es irrotacional. Para este escenario, utilizaremos la transformada de Cole-Hopf, que resulta especialmente útil para resolver problemas no lineales, ya que transforma una ecuación no lineal en una lineal, facilitando así su resolución. En el segundo caso, supondremos que la velocidad es rotacional, como se mencionó anteriormente, considerando que la velocidad es un campo de Beltrami. Aquí, no aplicaremos la transformada de Cole-Hopf, ya que esta técnica es específica para campos irrotacionales. En su lugar, exploraremos una solución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes para este tipo de flujo.

La ecuación de conservación del momento lineal (2.49):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

En el capítulo anterior, derivamos la forma de la matriz de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ en un fluido, la cual está dada por (3.44):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (4.2)$$

Por lo tanto, ahora podemos calcular la divergencia de la matriz de esfuerzos como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot (-p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}) + \nabla \cdot \{ \mu [\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))^T] \} + \nabla \cdot (\lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))\mathbf{I}) \\ &= \partial_c (-p \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_c + \partial_c [\mu (\partial_s v_q \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_s + \partial_a v_b \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b)] \mathbf{e}_c + \partial_c (\lambda \partial_m v_m \delta_{nr} \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_c \\ &= -\partial_c p \delta_{ij} \delta_{jc} \mathbf{e}_i + \mu \partial_c \partial_s v_q \delta_{sc} \mathbf{e}_q + \mu \partial_c \partial_a v_b \delta_{bc} \mathbf{e}_a + \lambda \partial_c \partial_m v_m \delta_{nr} \delta_{rc} \mathbf{e}_n \\ &= -\partial_c p \delta_{ic} \mathbf{e}_i + \mu \partial_c \partial_c v_q \mathbf{e}_q + \mu \partial_c \partial_a v_c \mathbf{e}_a + \lambda \partial_c \partial_m v_m \delta_{rc} \mathbf{e}_r \\ &= -\partial_c p \mathbf{e}_c + \mu \partial_c \partial_c v_q \mathbf{e}_q + \mu \partial_a \partial_c v_c \mathbf{e}_a + \lambda \partial_c \partial_m v_m \mathbf{e}_c \\ &= -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \\ &= -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.3), obtenemos:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \quad (4.3)$$

La ecuación de conservación de masa para fluidos incompresibles (1.28) es:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.4)$$

La ecuación (4.3) se simplifica de la siguiente manera, obteniendo así las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}} \quad (4.5)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica. Estas ecuaciones capturan tanto la influencia de la presión como los efectos viscosos dentro de un fluido. La comprensión y resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes son esenciales para predecir el comportamiento de los fluidos bajo diversas condiciones.

En la siguiente sección exploraremos la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada, que nos conduce a la definición del número de Reynolds. Este parámetro adimensional desempeña un papel crucial en la caracterización de los regímenes de flujo y en la predicción de fenómenos como la transición a la turbulencia.

4.1. Ecuación de Navier-Stokes adimensional

Para obtener la ecuación de Navier-Stokes adimensional, realizaremos un cambio de variable sin dimensiones (ver sección 1.2, pág. 11 [14]).

Primero, estableceremos las unidades de longitud mediante el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{x} = \ell \mathbf{x}_a = \ell \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

donde ℓ representa una longitud característica del problema, como la longitud de una tubería, y el subíndice a se utiliza para denotar que estas cantidades son adimensionales.

A continuación, definimos el cambio de variable para la velocidad como:

$$\mathbf{v} = \ell_v \mathbf{v}_a = \ell_v \begin{pmatrix} v_{x_a} \\ v_{y_a} \\ v_{z_a} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

donde ℓ_v representa la velocidad característica del fluido.

Introducimos el cambio de variable para el tiempo y la presión:

$$t = \frac{\ell}{\ell_v} t_a, \quad (4.8)$$

$$p = \ell_v^2 \rho p_a, \quad (4.9)$$

donde ρ es la densidad del fluido.

El operador gradiente, que tiene dimensiones de longitud, se transforma de la siguiente manera:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_a} \\ \frac{\partial}{\partial y_a} \\ \frac{\partial}{\partial z_a} \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell} \nabla_a, \quad (4.10)$$

donde ∇_a es el operador gradiente adimensional.

Calculamos las derivadas necesarias para luego sustituirlas en la ecuación de conservación del momento lineal del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes (4.5).

Comenzamos derivando la velocidad dada en (4.7) con respecto al tiempo, teniendo en cuenta la relación establecida en (4.8). Obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\ell_v \mathbf{v}_a) = \ell_v \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial \left(\frac{\ell}{\ell_v} t_a \right)} = \frac{\ell_v^2}{\ell} \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t_a} \quad (4.11)$$

Ahora, examinamos el término convectivo $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. Utilizando el cambio de variable para la velocidad (4.7) y (4.10), este término se transforma como sigue:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \left(\ell_v \mathbf{v}_a \cdot \frac{1}{\ell} \nabla_a \right) \ell_v \mathbf{v}_a = \frac{\ell_v^2}{\ell} (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}_a \quad (4.12)$$

A continuación, transformamos el gradiente de la presión:

$$\nabla p = \frac{1}{\ell} \nabla_a (\ell_v^2 \rho p_a) = \frac{\ell_v^2 \rho}{\ell} \nabla_a p_a \quad (4.13)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13) en la ecuación de conservación del momento lineal del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes (4.5), obtenemos:

$$\rho \left[\frac{\ell_v^2}{\ell} \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t_a} + \frac{\ell_v^2}{\ell} (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}_a \right] = \rho \mathbf{f} - \frac{\ell_v^2 \rho}{\ell} \nabla_a p_a + \frac{\ell_v \mu}{\ell^2} \nabla_a^2 \mathbf{v}_a \quad (4.14)$$

Comenzamos simplificando el lado izquierdo de la ecuación (4.14):

$$\frac{\ell_v^2 \rho}{\ell} \left[\frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t_a} + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}_a \right] = \rho \mathbf{f} - \frac{\ell_v^2 \rho}{\ell} \nabla_a p_a + \frac{\ell_v \mu}{\ell^2} \nabla_a^2 \mathbf{v}_a \quad (4.15)$$

Multiplicamos toda la ecuación por $\frac{\ell}{\ell_v^2 \rho}$, obteniendo:

$$\frac{\ell}{\ell_v^2 \rho} \left\{ \frac{\ell_v^2 \rho}{\ell} \left[\frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t_a} + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}_a \right] \right\} = \frac{\ell}{\ell_v^2 \rho} \left(\rho \mathbf{f} - \frac{\ell_v^2 \rho}{\ell} \nabla_a p_a + \frac{\ell_v \mu}{\ell^2} \nabla_a^2 \mathbf{v}_a \right)$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de Navier-Stokes adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t_a} + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}_a = \frac{\ell}{\ell_v^2} \mathbf{f} - \nabla_a p_a + \frac{\mu}{\rho \ell_v \ell} \nabla_a^2 \mathbf{v}_a$$

Esta forma compacta incorpora el efecto de las fuerzas inerciales, viscosas y de presión en términos de variables adimensionales. Finalmente, introducimos un concepto fundamental en la mecánica de fluidos, el número de Reynolds Re , que se define como un parámetro adimensional utilizado para distinguir entre flujos laminar y turbulento (ver sección 1.2.2 pág. 11 [7]).

Definición 4.1.1. *El número de Reynolds Re es un parámetro adimensional clave en la mecánica de fluidos que representa el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas presentes en el flujo. Se define como:*

$$Re = \frac{\rho \ell_v \ell}{\mu}, \quad (4.16)$$

donde ρ es la densidad del fluido, ℓ_v es la velocidad característica del flujo, ℓ es una longitud característica del sistema, y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes adimensional se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t_a} + (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}_a = \frac{\ell}{\ell_v^2} \mathbf{f} - \nabla_a p_a + \frac{1}{Re} \nabla_a^2 \mathbf{v}_a,$$

donde Re es el número de Reynolds, definido en (4.1.1).

4.1.1. Efectos del Número de Reynolds en la Estabilidad del Flujo: Transición a la Turbulencia

El número de Reynolds Re es un parámetro esencial en la mecánica de fluidos que permite clasificar el tipo de flujo en laminar o turbulento. Este número adimensional se utiliza para caracterizar la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas en un fluido. La expresión matemática de Re se presenta en (4.1.1) (ver sección 2.4 pág. 95 [12]).

Los flujos se clasifican en diferentes regímenes según el valor del número de Reynolds, que se pueden describir como sigue:

- $0 < Re < 1$: Movimiento laminar altamente viscoso (reptante)
- $1 < Re < 100$: Flujo laminar con menor dependencia del número de Reynolds
- $100 < Re < 2 \times 10^3$: Flujo laminar, útil la teoría de la capa límite
- $2 \times 10^3 < Re < 10^4$: Transición a la turbulencia
- $10^4 < Re < 10^6$: Flujo turbulento, con dependencia moderada del número de Reynolds
- $10^6 < Re < 10^8$: Flujo turbulento, con ligera dependencia del número de Reynolds

Cuando el número de Reynolds $Re = 0$, el flujo del fluido se comporta de manera muy particular. En este caso, las fuerzas viscosas dominan completamente sobre las fuerzas inerciales, lo que implica que no hay movimiento inducido por la inercia del fluido. Este tipo de flujo es conocido como flujo de Stokes o flujo viscoso puro.

Los flujos laminares, que presentan un número de Reynolds bajo, son caracterizados por ser suaves y predecibles. En la Figura (4.1), se ilustra una representación del flujo laminar, donde las partículas del fluido se mueven en capas paralelas sin interferencias significativas entre ellas. Este comportamiento es típico cuando el número de Reynolds se encuentra en el rango de $0 < Re < 100$.

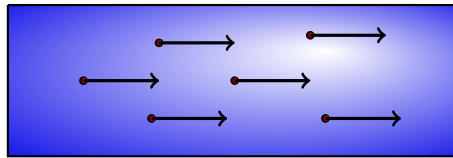


Figura 4.1: Representación de Flujo Laminar

A medida que el número de Reynolds aumenta, el flujo puede volverse inestable y entrar en un régimen turbulento. La Figura (4.2) muestra una representación del flujo turbulento, donde las partículas del fluido interactúan de manera compleja y desordenada. Este comportamiento se observa típicamente cuando el número de Reynolds supera 2300, momento en el cual se forman estructuras turbulentas, conocidas como **puffs**. Estas estructuras presentan un frente de movimiento rápido y una parte posterior de movimiento más lento, lo que genera un flujo caótico y muy dinámico.

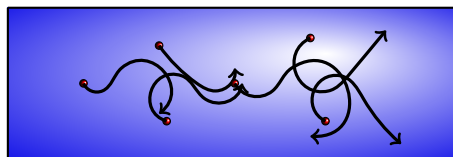


Figura 4.2: Representación de Flujo Turbulento

La transición entre el flujo laminar y el turbulento es un fenómeno complejo que depende no solo del número de Reynolds, sino también de la geometría del sistema y las condiciones del flujo. Por ello, el diseño de sistemas de flujo no debe realizarse en la zona de transición, donde las características del flujo pueden ser impredecibles. Este fenómeno demuestra que no existe una definición universalmente aplicable de turbulencia o flujo laminar; en cambio, la clasificación depende de las condiciones específicas del problema y de la geometría del cuerpo del fluido.

4.2. Soluciones de la Ecuación de Navier-Stokes para Fluidos Irrotacionales y Rotacionales

Comenzamos escribiendo las ecuaciones de Navier-Stokes, se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

donde $\mu \geq 0$ representa la viscosidad dinámica.

Este sistema también puede ser reformulado de la siguiente manera:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \alpha \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.18)$$

donde $\alpha = \frac{\mu}{\rho}$, siendo μ la viscosidad dinámica del fluido y ρ su densidad.

4.3. Suposición de la Velocidad como el Gradiente de un Potencial Escalar

La motivación para estudiar la velocidad irrotacional proviene del artículo [15], donde se resolvió la ecuación de Burgers unidimensional.

Consideramos $u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como una función suave, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, tal que:

$$\mathbf{v} = \nabla u \quad (4.19)$$

Esta condición garantiza que el flujo sea irrotacional, lo que es esencial en el estudio de flujos laminares y en aplicaciones donde se busca minimizar la fricción y la energía disipada.

Procedemos a definir el término no homogéneo de (4.17) de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.20)$$

Para expresar \mathbf{F} en términos de un potencial, consideramos el rotacional de (4.20) y lo igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \left(\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \\ &= \nabla \times \mathbf{f} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) se puede expresar en términos de un potencial si y solo si la aceleración externa del fluido es conservativa. En otras palabras, esto requiere que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (4.22)$$

donde Φ representa una función escalar.

Sustituyendo la expresión de la fuerza externa conservativa (4.22) en la ecuación (4.20), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ &= \nabla \left(\Phi - \frac{1}{\rho} p \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

A partir de la ecuación (4.22), el potencial Φ puede expresarse en términos del flujo de la aceleración externa sobre la superficie S de la siguiente manera:

$$\Phi = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + a(t), \quad (4.24)$$

donde \mathcal{C} representa el camino (curva) que va desde el punto de referencia \mathbf{x}_0 hasta el punto \mathbf{x} , $d\mathbf{x}$ es el diferencial del desplazamiento a lo largo de la curva y $a(t)$ representa una forma de energía por unidad de masa que depende exclusivamente del tiempo.

Finalmente, sustituyendo la expresión del potencial Φ de la ecuación (4.24) en la ecuación (4.23), obtenemos \mathbf{F} en función de la aceleración externa y de la presión del fluido:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \left(\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + a(t) \right) \quad (4.25)$$

Ahora calculamos la derivada temporal del campo de velocidades \mathbf{v} . Dado (4.19), donde u es un potencial escalar, obtenemos:

$$\partial_t \mathbf{v} = \partial_t (\nabla u) = \nabla (\partial_t u) \quad (4.26)$$

A continuación, calculamos el laplaciano del campo de velocidades. Utilizando la identidad para el laplaciano de un gradiente, obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 (\nabla u) = \nabla (\nabla \cdot \nabla u) = \nabla (\nabla^2 u) \quad (4.27)$$

Finalmente, evaluamos el término convectivo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ utilizando la expresión para la velocidad dada en (4.19), y aplicando la propiedad establecida en (A.14). Esto nos conduce al siguiente resultado:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \|\nabla u\|^2 + (\nabla \times \nabla u) \times (\nabla u)$$

Dado que $\nabla \times \nabla u = 0$ por la naturaleza escalar de u , el término de vorticidad desaparece, dejando:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \|\nabla u\|^2 \quad (4.28)$$

Sustituyendo las derivadas temporales y espaciales de u , obtenidas en las ecuaciones (4.26), (4.27), el término convectivo (4.28) y la definición (4.25), en la ecuación de Navier-Stokes (4.17), obtenemos:

$$\nabla \partial_t u + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla (\nabla^2 u) = \nabla \left(\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + a(t) \right) \quad (4.29)$$

Al simplificar la expresión, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\nabla \left[\partial_t u + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla^2 u \right] = \nabla \left(\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + a(t) \right) \quad (4.30)$$

De esta relación (4.30), podemos deducir que:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla^2 u &= \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + a(t) + b(t) \\ &= \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + c(t), \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde $c(t) = a(t) + b(t)$.

Procedemos a definir G de la siguiente forma:

$$G(\mathbf{x}, t) = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + c(t) \quad (4.32)$$

Con esta definición (4.32), la ecuación (4.31) se puede expresar como:

$$\boxed{\partial_t u + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla^2 u = G, \quad u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})} \quad (4.33)$$

Ahora usamos la transformación de Cole-Hopf con una función suave φ :

$$w = \varphi(u), \quad (4.34)$$

donde φ es una función suave a determinar. Calculamos las derivadas necesarias para sustituir en la ecuación diferencial.

Comenzamos calculando la derivada temporal de (4.34):

$$\partial_t w = \varphi'(u) \partial_t u \quad (4.35)$$

Calculamos el gradiente de (4.34):

$$\nabla w = \varphi'(u) \nabla u \quad (4.36)$$

Luego, el Laplaciano de (4.34) se calcula usando la regla del producto:

$$\nabla^2 w = \nabla \cdot (\varphi'(u) \nabla u) = \varphi'(u) \nabla^2 u + \varphi''(u) \|\nabla u\|^2 \quad (4.37)$$

Despejando $\nabla^2 u$ de la ecuación (4.37), obtenemos:

$$\nabla^2 u = \frac{\nabla^2 w - \varphi''(u) \|\nabla u\|^2}{\varphi'(u)} \quad (4.38)$$

Ahora de la ecuación (4.33), despejamos la derivada temporal de u

$$\partial_t u = \alpha \nabla^2 u - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + G \quad (4.39)$$

Sustituyendo (4.38) en (4.39), podemos expresar la derivada temporal de u en términos de w

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \alpha \frac{\nabla^2 w - \varphi''(u) \|\nabla u\|^2}{\varphi'(u)} - \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + G \\ &= \frac{\alpha}{\varphi'(u)} \nabla^2 w - \left(\alpha \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} + \frac{1}{2} \right) \|\nabla u\|^2 + G \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sustituyendo (4.40) en (4.35), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\partial_t w = \varphi'(u) \left[\frac{\alpha}{\varphi'(u)} \nabla^2 w - \left(\alpha \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} + \frac{1}{2} \right) \|\nabla u\|^2 + G \right] \quad (4.41)$$

$$= \alpha \nabla^2 w - \left(\alpha \varphi''(u) + \frac{1}{2} \varphi'(u) \right) \|\nabla u\|^2 + G \varphi'(u) \quad (4.42)$$

Considerando que:

$$\alpha \varphi''(u) + \frac{1}{2} \varphi'(u) = 0 \quad (4.43)$$

La solución para φ es:

$$\varphi(u) = e^{-\frac{1}{2\alpha} u} \quad (4.44)$$

Por lo que la derivada de (4.44) la podemos expresar en términos de u de la siguiente forma:

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{1}{2\alpha} u} = -\frac{1}{2\alpha} \varphi(u) = -\frac{1}{2\alpha} w \quad (4.45)$$

Al sustituir la expresión (4.45) en la ecuación (4.42), llegamos a la ecuación a resolver:

$$\boxed{\partial_t w = \alpha \nabla^2 w - \frac{G}{2\alpha} w} \quad (4.46)$$

La resolución de esta ecuación depende de la forma de G , que está relacionada con las fuerzas externas y la presión (4.32). Para simplificar, consideraremos el caso más básico, asumiendo que G es constante, es decir, $G = c$. En este caso, la solución se puede deducir de la siguiente manera:

La ecuación a resolver es:

$$\partial_t w = \alpha \nabla^2 w - \frac{c}{2\alpha} w \quad (4.47)$$

La solución general para (4.47) es:

$$w = e^{-\frac{c}{2\alpha} t} \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) w(\mathbf{y}, 0) dV_{\mathbf{y}}, \quad (4.48)$$

donde $G(\mathbf{x}, t)$ es el núcleo de calor dado por:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4\alpha t}\right) \quad (4.49)$$

Al sustituir (4.49) en la solución (4.48), obtenemos:

$$w = e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t}\right) w(\mathbf{y}, 0) dV_{\mathbf{y}}, \quad (4.50)$$

Considerando (4.44) podemos despejar a u :

$$u = -2\alpha \log \varphi = -2\alpha \log w \quad (4.51)$$

Sustituyendo (4.51) en (4.50), obtenemos la solución de (4.47):

$$u = -2\alpha \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t}\right) w(\mathbf{y}, 0) dV_{\mathbf{y}} \right] \quad (4.52)$$

Sabemos que $w(\mathbf{x}, 0) = e^{-u_0(\mathbf{x})/2\alpha}$ por (4.44) y simplificando, la expresión final para u se obtiene como:

$$u(\mathbf{x}, t) = -2\alpha \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}u_0(\mathbf{y})\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \quad (4.53)$$

Por lo tanto, bajo la suposición de que la velocidad del fluido es conservativa, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -2\alpha \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}u_0(\mathbf{y})\right) dV_{\mathbf{y}} \right], \quad (4.54)$$

donde $u_0(\mathbf{x})$ depende de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ del fluido, es decir $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$ y del cambio de variable (4.19). Esto es:

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.55)$$

donde \mathcal{C} sigue representando el camino (curva) que va desde el punto de referencia \mathbf{x}_0 hasta el punto \mathbf{x} , y $d\mathbf{x}$ es el diferencial del desplazamiento a lo largo de la curva.

Por lo tanto, sustituyendo (4.55) en la ecuación (4.54), obtenemos la velocidad del fluido en términos de su velocidad inicial:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -2\alpha \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \quad (4.56)$$

La solución de la ecuación (4.17), bajo la premisa de que la velocidad es conservativa, depende de la solución de la ecuación (4.46), dado que esta última está influenciada por las fuerzas externas y la presión del fluido. La expresión (4.56) se refiere a un caso en el que la ecuación (4.32) se asume como constante, es decir, c .

4.3.1. Comprobación:

A continuación, procederé a verificar que la función (4.56) satisface la ecuación de Navier-Stokes (4.17). Derivada temporal:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= \partial_t \left\{ -2\alpha \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} \\ &= -2\alpha \nabla \left\{ \partial_t \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Con respecto al término convectivo, y de acuerdo con la propiedad (A.14), podemos anular automáticamente el segundo término, ya que el rotacional de un gradiente es siempre cero. Por lo tanto, obtenemos:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 2\alpha^2 \nabla \left\| \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\|^2$$

El laplaciano es:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} &= \nabla^2 \left\{ -2\alpha \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} \\ &= -2\alpha \nabla \left\{ \nabla^2 \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.17):

$$\begin{aligned} & -2\alpha \nabla \left\{ \partial_t \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} \\ & + 2\alpha^2 \nabla \left\| \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\|^2 \\ & + 2\alpha^2 \nabla \left\{ \nabla^2 \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \quad (4.57)$$

Procedemos a reescribir la función presentada en (4.53) y definimos h de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= -2\alpha \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right], \\ h &= e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Entonces, la relación entre u y h se expresa como:

$$u = -2\alpha \log h \quad (4.59)$$

A partir de esta expresión, reescribimos la ecuación (4.57) en términos de u , obteniendo:

$$\nabla \partial_t u + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla (\nabla^2 u) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.60)$$

Dado que asumimos que la aceleración externa satisface (4.22), y utilizando la expresión para Φ en (4.24), la ecuación (4.60) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\nabla \partial_t u + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla (\nabla^2 u) = \nabla \left[\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + a(t) \right] \quad (4.61)$$

Simplificando, obtenemos la siguiente forma para la ecuación:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla^2 u &= \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + a(t) + b(t) \\ &= \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} p + c(t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

En nuestra solución (4.56), suponemos que el término de potencial (4.32) es constante e igual a c . Por lo tanto, la ecuación (4.62) se simplifica de la siguiente manera:

$$\partial_t u + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - \alpha \nabla^2 u = c \quad (4.63)$$

Calculemos las derivadas de u en términos de h :

Derivada temporal de (4.59):

$$\partial_t u = -2\alpha \frac{\partial_t h}{h} \quad (4.64)$$

Derivada espacial de (4.59):

$$\nabla u = -2\alpha \frac{\nabla h}{h} \quad (4.65)$$

Calculemos la norma al cuadrado de (4.65):

$$\|\nabla u\|^2 = \left\| -2\alpha \frac{\nabla h}{h} \right\|^2 = 4\alpha^2 \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2} \quad (4.66)$$

Ahora calculemos el laplaciano $\nabla^2 u$ con ayuda de (4.65):

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \left(-2\alpha \frac{\nabla h}{h} \right) = -2\alpha \left(\frac{\nabla^2 h}{h} - \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2} \right) \quad (4.67)$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (4.63):

$$-2\alpha \frac{\partial_t h}{h} + \frac{1}{2} \left(4\alpha^2 \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2} \right) - \alpha \left[-2\alpha \left(\frac{\nabla^2 h}{h} - \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2} \right) \right] = c \quad (4.68)$$

Simplificando,

$$-2\alpha \frac{\partial_t h}{h} + 2\alpha^2 \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2} + 2\alpha^2 \frac{\nabla^2 h}{h} - 2\alpha^2 \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2} = c \quad (4.69)$$

Los términos $2\alpha^2 \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2}$ y $-2\alpha^2 \frac{\|\nabla h\|^2}{h^2}$ se cancelan de la ecuación (4.69), dejando:

$$-2\alpha \frac{\partial_t h}{h} + 2\alpha^2 \frac{\nabla^2 h}{h} = c \quad (4.70)$$

que se reduce a la ecuación del calor:

$$\partial_t h = \alpha \nabla^2 h - \frac{c}{2\alpha} h \quad (4.71)$$

Ahora sustituimos el valor que suponemos para h (4.58) en la ecuación (4.71) para verificar que se cumple la igualdad. De esta manera, comprobamos que efectivamente la expresión (4.56) es una solución de la ecuación de Navier-Stokes (4.17), como se muestra a continuación:

Primero, calculemos la derivada parcial de h respecto a t :

$$\begin{aligned} \partial_t h &= \partial_t \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \right] \\ &= \int_{\Omega} \partial_t \left[\frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \right] dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Descomponemos la derivada parcial respecto al tiempo (4.72), como se muestra a continuación:

$$\partial_t \left[\frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \right] = -\frac{3(4\pi\alpha)}{2(4\pi\alpha t)^{3/2+1}} = -\frac{3}{2t(4\pi\alpha t)^{3/2}}, \quad (4.73)$$

$$\partial_t \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right\} = \left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t^2} - \frac{c}{2\alpha} \right) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \quad (4.74)$$

Sumando ambas partes, tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t h &= \int_{\Omega} \left\{ -\frac{3}{2t(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t^2} - \frac{c}{2\alpha} \right) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \right\} dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Simplificando, tenemos:

$$\partial_t h = \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t^2} - \frac{c}{2\alpha} \right) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \quad (4.76)$$

Ahora calculamos el laplaciano de h (4.58) respecto a \mathbf{x} , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \nabla^2 h &= \nabla_{\mathbf{x}}^2 \left[e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right] \\ &= e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \\ &= e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ahora calculamos el gradiente de \mathbf{x} de la exponencial, como se muestra a continuación:

$$\nabla^2 h = e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\exp \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \nabla_{\mathbf{x}} \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \right] dV_{\mathbf{y}}$$

El siguiente paso consiste en evaluar el gradiente del exponente de la exponencial:

$$\begin{aligned}\nabla^2 h &= e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \nabla_{\mathbf{x}} \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t}\right) \right] dV_{\mathbf{y}} \\ &= e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \left[-\frac{2(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{4\alpha t}\right] \right\} dV_{\mathbf{y}} \\ &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t} \right\} dV_{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

Aplicamos la regla del producto dentro del operador de divergencia:

$$\begin{aligned}\nabla^2 h &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t}\right) \right\} dV_{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

Consideramos que el término $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t}\right) = \frac{3}{2\alpha t}$:

$$\begin{aligned}\nabla^2 h &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ \nabla_{\mathbf{x}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \frac{3}{2\alpha t} \right\} dV_{\mathbf{y}} \\ &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \right. \\ &\quad \left. \nabla_{\mathbf{x}} \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \frac{3}{2\alpha t} \right\} dV_{\mathbf{y}} \\ &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \right. \\ &\quad \left. \nabla_{\mathbf{x}} \left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t} \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \frac{3}{2\alpha t} \right\} dV_{\mathbf{y}} \\ &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2\alpha t} + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \frac{3}{2\alpha t} \right\} dV_{\mathbf{y}} \\ &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ -\exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha^2 t^2}\right) + \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) \frac{3}{2\alpha t} \right\} dV_{\mathbf{y}} \\ &= -e^{-\frac{c}{2\alpha}t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left\{ -\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha^2 t^2} + \frac{3}{2\alpha t} \right\} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

Por lo tanto el laplaciano de h es:

$$\nabla^2 h = \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left(-\frac{3}{2\alpha t} + \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha^2 t^2}\right) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}} \quad (4.78)$$

Reacomodando términos y multiplicando por α la ecuación (4.78), tenemos:

$$\boxed{\alpha \nabla^2 h = \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t^2}\right) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha}t - \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\right) dV_{\mathbf{y}}} \quad (4.79)$$

Sustituyendo la derivada temporal de h (4.76) y el laplaciano (4.79) en la ecuación (4.71), obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t^2} - \frac{c}{2\alpha} \right) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha} t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t^2} \right) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha} t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \\ & - \frac{c}{2\alpha} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha} t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Al simplificar (4.80), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & -\frac{c}{2\alpha} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha} t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{c}{2\alpha} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{c}{2\alpha} t - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución (4.56), es en efecto, solución de la ecuación de conservación de momento lineal de Navier-Stokes (4.17).

Observamos que esta solución (4.56) satisface únicamente la ecuación de conservación del momento lineal homogénea (4.17), sin cumplir necesariamente la condición de incomprensibilidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Por lo tanto, vamos a investigar las condiciones bajo las cuales esta función cumple con la condición de incomprensibilidad.

Para un fluido incomprensible, la ecuación de conservación de masa es (4.18). Sustituyendo la expresión de (4.56) en esta ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot \left\{ -2\alpha \nabla \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha} t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right] \right\} \\ &= -2\alpha \nabla^2 \log \left[e^{-\frac{c}{2\alpha} t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right] \\ &= -2\alpha \left[e^{-\frac{c}{2\alpha} t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \right]^{-1} \\ & \times e^{-\frac{c}{2\alpha} t} \int_{\Omega} \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para que se cumpla la ecuación de conservación de masa (4.18), es necesario demostrar que la integral en (4.81) es cero, es decir:

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} = 0 \quad (4.82)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación (4.82), obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\partial\Omega} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \nabla_{\mathbf{x}} \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\partial\Omega} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \left[-\frac{2(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4\alpha t} \right] \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\partial\Omega} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} \int_C \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \right) \left(-\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{2\alpha t} \right) \cdot \mathbf{n} dA_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

en donde $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω y \mathbf{n} es el vector normal unitario a esa frontera.

Para que la integral (4.83) sea cero, la siguiente expresión puede cumplirse, aunque no necesariamente debe hacerlo:

$$-\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{2\alpha t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.84)$$

Simplificando (4.84), obtenemos:

$$\boxed{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = 0} \quad (4.85)$$

Esto indica que el vector $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es ortogonal al vector normal \mathbf{n} . Para que esta condición sea verdadera, \mathbf{x} y \mathbf{y} deben estar en el mismo hiperplano perpendicular a \mathbf{n} .

En el caso de nuestro fluido, esto significa que el flujo de la velocidad del fluido es tal que no hay acumulación ni salida de fluido a través de la frontera cuando se cumple la condición. Dado que \mathbf{v} está relacionado con el gradiente del logaritmo del integral de la función de distribución, esta ortogonalidad asegura que el flujo no atraviesa la frontera en la dirección normal a ella, manteniendo la integridad del sistema.

Por lo tanto, la solución presentada en (4.56) cumple con los requisitos del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, ya que satisface tanto la ecuación de conservación del momento lineal como la ecuación de conservación de masa.

En el contexto del flujo conservativo, la solución para el campo de velocidad, denotada como $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, está representada por la función obtenida en (4.56). Bajo la suposición de que $\mathbf{v} = \nabla u$, donde u es un campo escalar, la solución depende de una función $G(\mathbf{x}, t)$, que satisface la ecuación presentada en (4.46).

Para caracterizar el régimen del flujo, se utiliza el número de Reynolds, que se define formalmente en (4.1.1). Este parámetro adimensional mide la relación entre las fuerzas inerciales y viscosas en el fluido, y se calcula de la siguiente forma:

$$\boxed{Re = \frac{\rho \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\| \ell}{\mu}} \quad (4.86)$$

En este caso, la velocidad característica ℓ_v se puede interpretar como la magnitud de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, es decir,

$$\ell_v = \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\| = \|\nabla u(\mathbf{x}, t)\|,$$

lo que permite calcular el número de Reynolds en función de la posición \mathbf{x} y el tiempo t . Esto proporciona un valor local que puede variar a lo largo del sistema y permite una evaluación detallada del régimen de flujo.

Aunque intuitivamente el hecho de que $\mathbf{v} = \nabla u$ pueda sugerir un comportamiento de flujo laminar, esto no garantiza que el flujo sea efectivamente laminar. El gradiente de un campo escalar no proporciona información suficiente para concluir el régimen del flujo, ya que también podrían estar presentes efectos no lineales que conduzcan a turbulencia. Por lo tanto, la aplicación del número de Reynolds es crucial para distinguir entre flujo laminar y turbulento.

4.3.2. Simulación

Se realizaron varias simulaciones en MATLAB con el objetivo de analizar el comportamiento del flujo de un fluido, utilizando la solución presentada en (4.56). Aunque se llevaron a cabo múltiples simulaciones, en esta subsección se presentarán los resultados de dos simulaciones específicas. El código utilizado para estas simulaciones se encuentra en el Apéndice C (C.0.1). A continuación, se muestran los parámetros utilizados en las simulaciones. Consideraremos un fluido contenido dentro de un elipsoide con semi-ejes $a = 4$ m, $b = 3$ m y $c = 2$ m, centrado en el origen. Se supondrán condiciones de no deslizamiento, de modo que la velocidad del fluido en la superficie del elipsoide sea cero.

- Fuente: $c = 1 \text{ Jkg}^{-1}$.
- Densidad: $\rho = 1,2 \text{ kgm}^{-3}$.
- Viscosidad Dinámica: $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$ y $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$.

- Longitud característica:

$$\ell = (abc)^{1/2} \quad (4.87)$$

- Velocidad inicial:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \text{sen}(x + y + z) \\ \text{cos}(x + y + z) \\ \text{sen}(x + y + z) \text{cos}(x + y + z) \end{pmatrix} \text{ms}^{-1} \quad (4.88)$$

En muchas simulaciones de dinámica de fluidos, se utiliza un valor crítico de $Re = 2000$ para determinar el régimen de flujo (ver [20]). Este valor representa el punto de transición entre dos comportamientos fundamentales del flujo de un fluido, tal como se detalla en la sección (4.1.1):

- Cuando $Re < 2000$: El flujo es laminar, caracterizado por un movimiento suave y ordenado de las capas de fluido. En este régimen, las partículas de fluido se mueven en trayectorias paralelas y no se observan perturbaciones significativas entre las diferentes capas del fluido.
- Cuando $2000 < Re < 10^4$: El flujo entra en un régimen de transición, donde se observa un comportamiento intermedio. En esta fase, pueden comenzar a aparecer perturbaciones en el flujo, y se producen cambios en la estructura de las capas de fluido. El flujo puede volverse inestable y experimentar fluctuaciones en la velocidad y la presión.
- Cuando $Re > 10^4$: El flujo es turbulento, lo que se manifiesta con un comportamiento caótico, con remolinos, mezclas intensas y fluctuaciones en la velocidad y presión del fluido. Este comportamiento caótico es el resultado de la inestabilidad creciente en el fluido conforme el Número de Reynolds aumenta.

El valor de $Re = 2000$ es un estándar aproximado que se utiliza comúnmente como referencia para la transición del flujo laminar al turbulento. Aunque el valor exacto del Número de Reynolds para esta transición puede variar según las condiciones del flujo, 2000 representa un punto de inflexión importante, ya que indica el inicio de un rango de transición que se extiende hasta $Re < 10^4$. Este intervalo es significativo en muchas aplicaciones, ya que marca el comienzo del comportamiento turbulento en el flujo.

En la tabla (4.1) correspondiente a la primera simulación, se presentan algunos valores del número de Reynolds Re en función del tiempo. Como se puede observar, en todo momento el flujo se mantiene en régimen laminar cuando la viscosidad dinámica del fluido es de $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{Nsm}^{-2}$. Además, se puede notar que el número de Reynolds tiende a cero conforme avanza el tiempo, lo que confirma que el flujo sigue manteniéndose laminar.

Tiempo (s)	Re	Estado del Flujo
0.1	0.11269	Flujo Laminar
0.4667	0.004033	Flujo Laminar
0.8333	0.00017521	Flujo Laminar
1.2	$8,0054 \times 10^{-6}$	Flujo Laminar
1.5667	$3,7482 \times 10^{-7}$	Flujo Laminar
1.9333	$1,781 \times 10^{-8}$	Flujo Laminar
2.3	$8,5506 \times 10^{-10}$	Flujo Laminar
2.6667	$4,1377 \times 10^{-11}$	Flujo Laminar
3.0333	$2,0147 \times 10^{-12}$	Flujo Laminar
3.4	$9,8588 \times 10^{-14}$	Flujo Laminar
3.7667	$4,8444 \times 10^{-15}$	Flujo Laminar
4.1333	$2,3887 \times 10^{-16}$	Flujo Laminar
4.5	$1,1813 \times 10^{-17}$	Flujo Laminar
4.8667	$5,8572 \times 10^{-19}$	Flujo Laminar
5.0	$2,9105 \times 10^{-20}$	Flujo Laminar

Cuadro 4.1: Solución 1: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo para $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{Nsm}^{-2}$

En la siguiente figura (4.3) se muestra la gráfica correspondiente a la simulación de cada componente del vector de velocidad, lo que permite observar con mayor detalle el comportamiento individual de cada dirección del flujo.

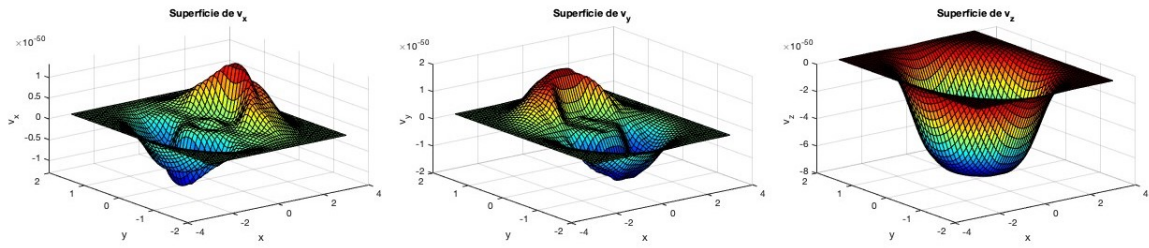


Figura 4.3: Solución 1: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$

Se presenta la gráfica (4.4) obtenida de la simulación numérica. En esta simulación, se observa cómo el flujo permanece en régimen laminar a lo largo del intervalo de tiempo considerado. Los valores correspondientes se han calculado utilizando las condiciones iniciales establecidas, y el comportamiento observado es consistente con el análisis teórico del flujo en condiciones laminares. La gráfica permite visualizar la disminución progresiva del Número de Reynolds conforme el tiempo avanza, lo cual es indicativo de la estabilización del flujo.

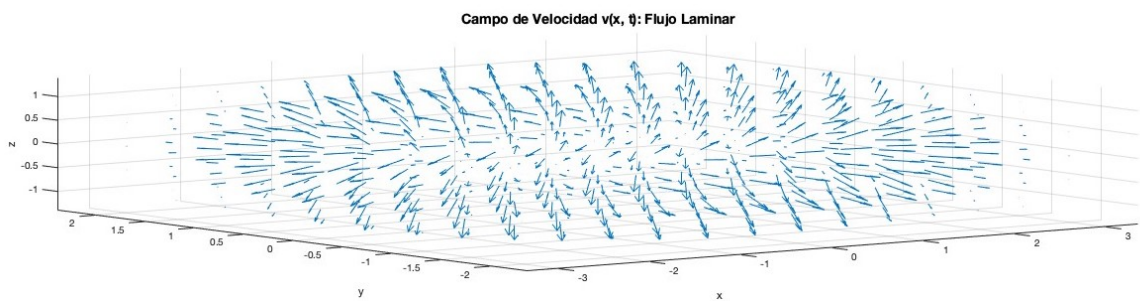


Figura 4.4: Solución 1: Visualización del flujo laminar con $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ Nsm}^{-2}$

De forma análoga, se realizará una simulación con $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$ para analizar el comportamiento del flujo bajo estas condiciones. La información del estado del flujo, se encuentra en la tabla (4.2):

Tiempo (s)	Re	Estado del Flujo
0.1	3115.9939	Flujo de Transición
0.4667	1004.8192	Flujo Laminar
0.8333	773.899	Flujo Laminar
1.2	191.636	Flujo Laminar
1.5667	92.5769	Flujo Laminar
1.9333	40.0357	Flujo Laminar
2.3	37.5149	Flujo Laminar
2.6667	25.6295	Flujo Laminar
3.0333	15.7759	Flujo Laminar
3.4	9.9851	Flujo Laminar
3.7667	8.0167	Flujo Laminar
4.1333	4.0585	Flujo Laminar
4.5	2.8613	Flujo Laminar
4.8667	2.2429	Flujo Laminar
5.0	1.8517	Flujo Laminar

Cuadro 4.2: Solución 1: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo para $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$

En la siguiente figura (4.5) se muestra cada componente del vector de velocidad. Como se indica en la tabla (4.2), el flujo se encuentra en un estado laminar, lo cual se refleja en el comportamiento suave y ordenado de cada componente del vector de velocidad.

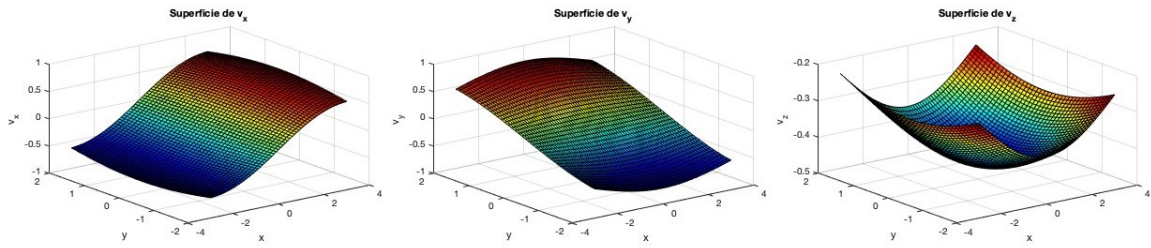


Figura 4.5: Solución 1: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$

En esta simulación, se puede observar cómo el número de Reynolds Re varía en función del tiempo, manteniendo un estado de flujo laminar a lo largo del intervalo temporal considerado. Los valores de Re coinciden con los presentados en la Tabla (4.2), lo que confirma la consistencia de los resultados obtenidos mediante la simulación.

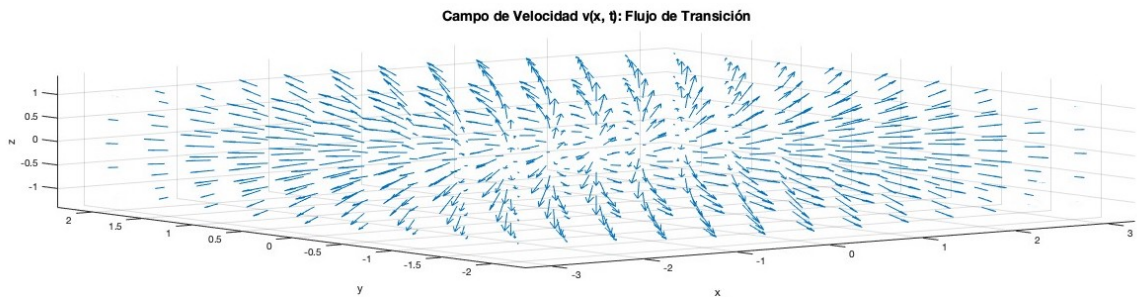


Figura 4.6: Solución 1: Visualización del flujo laminar con $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$

4.3.3. Conclusiones

Se realizaron múltiples simulaciones en MATLAB para diferentes valores de densidad y viscosidad dinámica. En particular, se llevaron a cabo dos simulaciones clave para $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$ y $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$, en las cuales el comportamiento del fluido fue siempre laminar. Adicionalmente, se ejecutaron más simulaciones con otros valores de μ , y en todas ellas se observó que el flujo permanecía en régimen laminar. Esto nos indica que, bajo las condiciones estudiadas, el fluido no presenta turbulencias.

Aunque se modificaron los parámetros de las simulaciones, este comportamiento no depende exclusivamente de la viscosidad del fluido, sino también de otros factores como la longitud característica del problema, la densidad y la velocidad del fluido. Estos elementos son esenciales para determinar si un flujo es laminar o turbulento. Sin embargo, todas las simulaciones confirmaron que, al suponer un campo de velocidad conservativo (4.19), el flujo tiende a mantenerse laminar.

El comportamiento del fluido también depende de la presión del fluido, la aceleración externa de las fuerzas externas del fluido y de una función temporal $c(t)$. En la solución (4.56), se tomó $G = c$ (4.32), y en la simulación se consideró $C = 1 \text{ Jkg}^{-1}$. No obstante, la dependencia de G es esencial para obtener una solución analítica para la velocidad del fluido. Esta relación entre la presión del fluido, la aceleración externa, y la función $c(t)$ juega un papel crucial en la estabilidad del flujo.

La suposición de que la velocidad es conservativa implica que no hay rotaciones en el fluido, lo que también sugiere que la aceleración externa debe ser conservativa. Esta condición, junto con la elección de $G = 1 \text{ Jkg}^{-1}$, llevó a que las simulaciones confirmaran un flujo laminar estable en cada caso, incluso al variar los parámetros del problema.

En cuanto a la viscosidad dinámica, se esperaba que, cuando μ fuera pequeño, es decir, $\mu = 0,01 \text{ Nsm}^{-2}$, el número de Reynolds fuera más grande que cuando $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$. Sin embargo, ocurrió lo contrario: en general, se observó que cuando μ es más pequeño, el número de Reynolds tiende a ser más alto.

En conclusión, las simulaciones demostraron que, bajo las suposiciones impuestas, el modelo es

adecuado para estudiar fluidos laminares. El hecho de que la aceleración externa se conserve, junto con la dependencia de G , contribuye a la estabilidad del flujo laminar observado, lo que valida el enfoque adoptado para obtener una solución analítica de la velocidad del fluido.

4.4. Suposición de la Velocidad como la Rotación de una Función Vectorial

Sea $\psi(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función suave, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ representa un dominio físico adecuado. Asumimos que ψ cumple con las siguientes condiciones:

La relación:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \psi \quad (4.89)$$

indica que el campo \mathbf{v} es el resultado de la rotacional de ψ . Esta expresión es esencial en el contexto de flujos rotacionales, donde \mathbf{v} representa un campo de velocidad asociado a movimientos en un fluido, reflejando así la naturaleza vorticosa del mismo.

La suposición de que ψ es un campo de Beltrami, que satisface la relación:

$$\nabla \times \psi = \lambda \psi \quad (4.90)$$

para algún escalar λ con unidades de m^{-1} , implica que la rotacional de ψ está alineada con el propio campo. Esta característica es relevante en el estudio de flujos en los que se espera que la estructura del campo de velocidad se mantenga, incluso si ψ evoluciona en el tiempo. En particular, esto permite describir sistemas en los que la dinámica del flujo puede estar influenciada por su propia configuración, facilitando un análisis más profundo de los comportamientos vorticosos en fluidos.

Estas condiciones establecen un marco teórico robusto para el estudio de las ecuaciones de movimiento de fluidos, permitiendo un análisis detallado de las interacciones y comportamientos en sistemas con propiedades vorticosas y conservativas.

La condición (4.90) conduce a la siguiente relación:

$$\nabla \cdot \psi = 0, \quad (4.91)$$

lo cual se deduce del hecho de que la divergencia de un campo derivado como un rotacional siempre es nula.

Por lo tanto, la ecuación de conservación de masa (4.18) se satisface trivialmente con estas suposiciones. Es decir, no es necesario verificar que la solución obtenida cumpla con esta condición, ya que se cumple de forma trivial.

Primero, calculamos la derivada temporal del campo de velocidades \mathbf{v} . A partir de la ecuación (4.89), se sigue que:

$$\partial_t \mathbf{v} = \partial_t (\nabla \times \psi) \quad (4.92)$$

Luego, calculamos el laplaciano del campo de velocidades:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 (\nabla \times \psi) \quad (4.93)$$

A continuación, evaluamos el término convectivo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ utilizando la expresión para la velocidad dada en (4.89). Este término puede descomponerse en una suma que involucra tanto el gradiente de $\|\mathbf{v}\|^2$ como la vorticidad $\nabla \times \mathbf{v}$, según la propiedad presentada en (A.14). El resultado es el siguiente:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (4.94)$$

Para calcular $\nabla \times \mathbf{v}$, hacemos uso de una propiedad fundamental del cálculo vectorial, conocida como la identidad del doble producto vectorial. Esta propiedad se expresa de la siguiente forma:

$$\nabla \times (\nabla \times \Theta) = \nabla (\nabla \cdot \Theta) - \nabla^2 \Theta \quad (4.95)$$

donde Θ es un campo vectorial que se asume continuo y suave en el dominio considerado.

Esto nos lleva a:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \psi) = \nabla(\nabla \cdot \psi) - \nabla^2 \psi = -\nabla^2 \psi, \quad (4.96)$$

donde utilizamos la condición (4.91).

Sustituyendo esta expresión en el término convectivo (4.94), obtenemos:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \|\nabla \times \psi\|^2 - \nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi) \quad (4.97)$$

Finalmente, al sustituir las derivadas del campo de velocidades (4.92), (4.93) y el término convectivo (4.97) en la ecuación de Navier-Stokes (4.17), obtenemos la siguiente expresión:

$$\partial_t (\nabla \times \psi) + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla \times \psi\|^2 - \nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi) - \alpha \nabla^2 (\nabla \times \psi) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.98)$$

A continuación aplicamos el operador rotacional a la ecuación (4.98), obteniendo:

$$\nabla \times \left[\partial_t (\nabla \times \psi) + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla \times \psi\|^2 - \nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi) - \alpha \nabla^2 (\nabla \times \psi) \right] = \nabla \times \left(\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \quad (4.99)$$

Para simplificar la expresión en (4.99), recordamos que el rotacional de un gradiente es nulo para cualquier función potencial escalar. Esto nos permite reducir la ecuación de la siguiente manera:

$$\partial_t [\nabla \times (\nabla \times \psi)] - \nabla \times [\nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi)] - \alpha \nabla^2 [\nabla \times (\nabla \times \psi)] = \nabla \times \mathbf{f} \quad (4.100)$$

Sustituyendo la ecuación (4.96) en (4.100), obtenemos:

$$\partial_t (-\nabla^2 \psi) - \nabla \times [\nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi)] - \alpha \nabla^2 (-\nabla^2 \psi) = \nabla \times \mathbf{f}$$

Esta expresión se puede reescribir como:

$$\nabla^2 (\partial_t \psi - \alpha \nabla^2 \psi) + \nabla \times [\nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi)] = -\nabla \times \mathbf{f} \quad (4.101)$$

Considerando nuestras suposiciones dadas por las ecuaciones (4.91) y (4.90), podemos simplificar el segundo término de la ecuación (4.101). Utilizando la ecuación (4.96), obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \psi) = -\nabla^2 \psi \quad (4.102)$$

Dado que ψ es un campo de Beltrami, podemos expresar la relación anterior como:

$$\nabla \times (\lambda \psi) = -\nabla^2 \psi \quad (4.103)$$

A partir de la expresión (4.103), se deduce que el laplaciano de ψ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \psi = -\lambda^2 \psi \quad (4.104)$$

Ahora, calculamos el producto vectorial en la ecuación (4.101), sustituyendo la propiedad del campo de Beltrami y el resultado obtenido en (4.104), tal como se muestra a continuación:

$$\nabla^2 \psi \times (\nabla \times \psi) = -\lambda^2 \psi \times (\lambda \psi) = -\lambda^3 \psi \times \psi = \mathbf{0} \quad (4.105)$$

Sustituyendo esta simplificación en la ecuación (4.101), llegamos a la forma final:

$$\boxed{\nabla^2 (\partial_t \psi - \alpha \nabla^2 \psi) = -\nabla \times \mathbf{f}, \quad \psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x})} \quad (4.106)$$

Por lo que podemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi - \alpha \nabla^2 \psi &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t), \\ \nabla^2 \mathbf{h} &= -\nabla \times \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Con la ayuda de (4.104), podemos reescribir el sistema (4.108) de la siguiente forma:

$$\partial_t \psi + \alpha \lambda^2 \psi = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t), \quad (4.108)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} = -\nabla \times \mathbf{f} \quad (4.109)$$

La solución de la ecuación (4.108) puede descomponerse en dos partes, la solución homogénea $\psi_h(\mathbf{x}, t)$ y la solución particular $\psi_p(\mathbf{x}, t)$:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_h(\mathbf{x}, t) + \psi_p(\mathbf{x}, t)$$

La solución homogénea satisface:

$$\partial_t \psi_h(\mathbf{x}, t) + \alpha \lambda^2 \psi_h(\mathbf{x}, t) = 0$$

La solución de esta ecuación es:

$$\psi_h(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t), \quad (4.110)$$

donde $\psi_0(\mathbf{x})$ representa el estado inicial del sistema en $t = 0$.

La solución particular se obtiene mediante el método de funciones de Green:

$$\psi_p(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \mathbf{h}(\mathbf{y}, s) dV_{\mathbf{y}} ds$$

La función de Green $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$ satisface la ecuación homogénea asociada:

$$\partial_t G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) + \alpha \lambda^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - s) \quad (4.111)$$

Por lo que, la función de Green para ψ_p es:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) = \exp(-\alpha \lambda^2(t - s)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Esta función de Green permite relacionar la respuesta del sistema a una perturbación puntual en el espacio y el tiempo. La delta de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ tiene la propiedad de colapsar la integral espacial. Es decir, para cualquier función $f(\mathbf{y})$:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}) \quad (4.112)$$

Esto implica que al integrar sobre \mathbf{y} , la delta de Dirac selecciona el valor de la función en el punto donde $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Siguiendo (4.112), nuestra integral se simplifica a:

$$\psi_p(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2(t - s)) \mathbf{h}(\mathbf{x}, s) ds \quad (4.113)$$

Finalmente, la solución completa considerando tanto el estado inicial (4.110) como la respuesta a la fuente (4.113) se expresa como:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2(t - s)) \mathbf{h}(\mathbf{x}, s) ds \quad (4.114)$$

Se observa que, para que la solución (4.114) describa un campo de Beltrami, es necesario que el campo \mathbf{h} también lo sea. Esto requiere que se satisfaga la siguiente condición:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \lambda \mathbf{h} \quad (4.115)$$

Dado lo anterior, podemos reescribir la ecuación (4.109). Para cualquier campo de Beltrami con la misma λ constante, utilizando la relación (4.104), obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{h} = -\lambda^2 \mathbf{h} \quad (4.116)$$

Aplicando rotacional a la ecuación (4.109), se llega a la expresión:

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{h}) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) \quad (4.117)$$

Dado que \mathbf{h} es un campo de Beltrami y teniendo en cuenta (4.95), podemos afirmar que se cumple la siguiente relación:

$$\nabla^2(\lambda \mathbf{h}) = -[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}] \quad (4.118)$$

A partir de la expresión (4.116), se deduce que:

$$-\lambda^3 \mathbf{h} = -[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}] \quad (4.119)$$

De aquí se concluye que el campo \mathbf{h} debe tener la siguiente forma:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\lambda^3} [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}] \quad (4.120)$$

Ahora necesitamos calcular ψ_0 . Sabemos que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0$ tiene la forma:

$$\mathbf{v}_0 = \nabla \times \psi_0 = \lambda \psi_0 \quad (4.121)$$

Por lo tanto, ψ_0 se obtiene como:

$$\psi_0 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{v}_0 \quad (4.122)$$

Noté que al calcular el rotacional de la ecuación (4.121), podemos deducir que

$$\nabla \times \mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{v}_0, \quad (4.123)$$

lo que implica que la velocidad inicial debe satisfacer necesariamente la condición de ser un campo de Beltrami para el mismo escalar λ .

Sustituyendo las expresiones (4.120) y (4.122) en la ecuación (4.114), obtenemos:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \frac{1}{\lambda^3} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)] - \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \} ds \quad (4.124)$$

Aplicando el operador rotacional a la ecuación (4.124), obtenemos:

$$\nabla \times \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda} \nabla \times \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) - \frac{1}{\lambda^3} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)] ds \quad (4.125)$$

Por lo tanto, la velocidad del fluido, de acuerdo con nuestra suposición (4.89), es la siguiente:

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda} \nabla \times \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) - \frac{1}{\lambda^3} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)] ds} \quad (4.126)$$

Esta expresión para la velocidad considera que ψ es un campo de Beltrami, lo cual, como hemos observado, simplifica notablemente los cálculos. Esta simplificación permite encontrar una solución analítica para la ecuación de Navier-Stokes, lo cual sería de otro modo muy complicado de obtener.

4.4.1. Comprobación:

Es necesario verificar que la expresión (4.126) constituye una solución de la ecuación de Navier-Stokes (4.17). Iniciaremos el proceso estableciendo que ψ se comporta como un campo de Beltrami.

A partir de la ecuación (4.122), se deduce que $\nabla \times \mathbf{v}_0 = \lambda^2 \psi_0$. Además, dado que en la ecuación (4.109) se considera que \mathbf{h} es un campo de Beltrami, la ecuación (4.125) se simplifica de la siguiente forma:

$$\nabla \times \psi(\mathbf{x}, t) = \lambda \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \frac{1}{\lambda^3} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \nabla^2 [\nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, s)] ds \quad (4.127)$$

$$= \lambda \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \frac{1}{\lambda^3} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \nabla^2 [-\lambda^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, s)] ds \quad (4.128)$$

$$= \lambda \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, s) ds \quad (4.129)$$

$$= \lambda \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) [-\lambda^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, s)] ds \quad (4.130)$$

$$= \lambda \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \lambda \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \mathbf{h}(\mathbf{x}, s) ds \quad (4.131)$$

$$= \lambda \psi_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \lambda \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)] - \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \} ds \quad (4.132)$$

$$= \lambda \psi \quad (4.133)$$

De esta manera, se ha demostrado que ψ es efectivamente un campo de Beltrami. Dado que ψ es un campo de Beltrami, el término conectivo se simplifica de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + [\nabla \times (\nabla \times \psi)] \times (\nabla \times \psi) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + [\nabla \times (\lambda \psi)] \times (\lambda \psi) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + \lambda^2 \psi \times (\lambda \psi) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2 + \lambda^3 \psi \times \psi \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{v}\|^2
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (4.126) en la ecuación (4.17), obtenemos:

$$\partial_t (\nabla \times \psi) + \frac{1}{2} \nabla \|\nabla \times \psi\|^2 - \alpha \nabla^2 (\nabla \times \psi) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.134)$$

Procedemos a calcular el rotacional de la expresión (4.134), como se ilustra a continuación:

$$\partial_t [\nabla \times (\nabla \times \psi)] - \alpha \nabla^2 [\nabla \times (\nabla \times \psi)] = \nabla \times \mathbf{f} \quad (4.135)$$

Utilizando la propiedad (4.95), y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \psi = 0$ debido a que ψ es un campo de Beltrami, obtenemos:

$$\partial_t (-\nabla^2 \psi) - \alpha \nabla^2 [-\nabla^2 \psi] = \nabla \times \mathbf{f} \quad (4.136)$$

o bien

$$\nabla^2 (\partial_t \psi + \alpha \lambda^2 \psi) = -\nabla \times \mathbf{f} \quad (4.137)$$

Para verificar la ecuación (4.137), comenzaremos calculando la derivada temporal de (4.124):

$$\begin{aligned}
 \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) &= -\alpha \lambda \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) - \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)] - \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \} ds \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda^3} \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] - \nabla^2 \mathbf{f} \}
 \end{aligned} \quad (4.138)$$

Ahora multiplicamos ψ por $\alpha \lambda^2$ la función (4.124):

$$\alpha \lambda^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \alpha \lambda \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \exp(-\alpha \lambda^2 t) + \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^t \exp(-\alpha \lambda^2 (t-s)) \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)] - \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \} ds \quad (4.139)$$

Por lo tanto, al sumar (4.139) y (4.138) obtenemos:

$$\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) + \alpha \lambda^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\lambda^3} \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] - \nabla^2 \mathbf{f} \} \quad (4.140)$$

Considerando la solución dada en (4.120), la ecuación (4.140) se reescribe como:

$$\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) + \alpha \lambda^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \quad (4.141)$$

Aplicando el operador laplaciano a la ecuación (4.141) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla^2 [\partial_t \psi(\mathbf{x}, t) + \alpha \lambda^2 \psi(\mathbf{x}, t)] = \nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \quad (4.142)$$

Para que se cumpla la igualdad de (4.142), se tiene que cumplir $\nabla^2 \mathbf{h} = -\nabla \times \mathbf{f}$ y esta se cumple en (4.120), donde se considero que \mathbf{h} es un campo de Beltrami.

Por lo tanto, hemos confirmado que se cumple la igualdad de la ecuación (4.137). En consecuencia, hemos demostrado que la solución dada en (4.126) es una solución de la ecuación de Navier-Stokes (4.17), considerando a ψ como un campo de Beltrami.

En este escenario, se asume que el campo de velocidades \mathbf{v} está dado por el rotor de un campo de Beltrami ψ , es decir, $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$. La solución correspondiente a esta suposición se encuentra

formalmente en (4.126), donde el campo de Beltrami ψ satisface las condiciones específicas de autoad-juntabilidad y alineamiento con su propio rotor.

Para caracterizar el comportamiento del flujo en este caso, se emplea nuevamente el número de Reynolds, definido en (4.1.1). El número de Reynolds en este contexto se calcula de la siguiente forma:

$$Re = \frac{\rho \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\| \ell}{\mu} \quad (4.143)$$

En este caso, la velocidad característica ℓ_v se define como la magnitud del campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, que está relacionado con el campo de Beltrami ψ a través de:

$$\ell_v = \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\| = \|\nabla \times \psi(\mathbf{x}, t)\|$$

De manera similar al caso anterior, el cálculo local del número de Reynolds, dependiendo de la posición \mathbf{x} y el tiempo t , permite evaluar si el flujo es laminar o turbulento. Aunque la estructura del campo de velocidades como un rotor sugiere un flujo más complejo, esto no asegura que el flujo sea laminar. Incluso con un campo de Beltrami, pueden existir inestabilidades que conduzcan a un régimen turbulento.

4.4.2. Simulación

Se realizaron varias simulaciones en Matlab con el objetivo de analizar el comportamiento del flujo del fluido bajo nuestra suposición en (4.89), donde ψ es un campo de Beltrami. Sin embargo, solo se mostrarán los resultados de dos de estas simulaciones. En particular, se empleó la solución presentada en (4.126). El código utilizado para llevar a cabo esta simulación se encuentra en el Apéndice C (C.0.2). En este caso, la velocidad inicial debe ser un campo de Beltrami, tal como se establece en la ecuación (4.123). Además, se considerará un campo de aceleración externa que depende tanto de la posición como del tiempo. Se supondrán condiciones de no deslizamiento, es decir, la velocidad del fluido en la frontera del dominio será cero. La simulación se llevará a cabo en un cubo centrado en el origen, con un lado de $4m$. Los parámetros definidos para esta simulación son los siguientes:

- Coeficiente de Beltrami: $\lambda = -1m^{-1}$.
- Densidad: $\rho = 1,2kgm^{-3}$.
- Viscosidad Dinámica: $\mu = 1 \times 10^{-3} Nsm^{-2}$ y $\mu = 1 Nsm^{-2}$.
- Longitud característica: $\ell = 4m$.
- Aceleración externa:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \cos(x + y + z)\sin(t) \\ \sin(x + y + z)\sin(t^2) \\ \cos(y) + z + t \end{pmatrix} ms^{-1} \quad (4.144)$$

Eligimos a la velocidad como un campo vectorial que cumple la condición de ser un campo de Beltrami:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(y) + \cos(z) \\ \sin(z) + \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(y) \end{pmatrix} \quad (4.145)$$

Para verificar que este es un campo de Beltrami, necesitamos que se cumpla la condición (4.123) para alguna constante λ .

Calculamos el rotacional $\nabla \times \mathbf{v}_0$ para ver si es proporcional al campo \mathbf{v}_0 :

Derivada parcial de $v_{0z} = \sin(x) + \cos(y)$ respecto a y : $-\sin(y)$.

Derivada parcial de $v_{0y} = \sin(z) + \cos(x)$ respecto a z : $\cos(z)$.

Derivada parcial de $v_{0x} = \sin(y) + \cos(z)$ respecto a z : $-\sin(z)$.

Derivada parcial de $v_{0z} = \sin(x) + \cos(y)$ respecto a x : $\cos(x)$.

Derivada parcial de $v_{0y} = \sin(z) + \cos(x)$ respecto a x : $-\sin(x)$.

Derivada parcial de $v_{0x} = \sin(y) + \cos(z)$ respecto a y : $\cos(y)$.

Así:

$$\nabla \times \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -\sin(y) - \cos(z) \\ -\sin(z) - \cos(x) \\ -\sin(x) - \cos(y) \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_0$$

Entonces, se cumple que:

$$\nabla \times \mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_0$$

Esto demuestra que el campo (4.145) es un campo de Beltrami con $\lambda = -1$.

De igual forma que en la primera simulación utilizaremos el valor crítico de $Re = 2000$ para determinar el régimen de flujo.

A continuación se presentan algunos valores del número de Reynolds Re en función del tiempo. Como se puede observar, en todo momento el flujo se mantiene en régimen turbulento cuando la viscosidad dinámica del fluido es de $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$:

Tiempo (t)	Reynolds (Re)	Estado
0	11753.4292	Flujo Turbulento
0.050505	11769.698	Flujo Turbulento
0.25253	11845.313	Flujo Turbulento
1.6667	20829.7249	Flujo Turbulento
1.8182	21932.0028	Flujo Turbulento
1.8687	22267.8486	Flujo Turbulento
2.1212	23847.4464	Flujo Turbulento
2.8788	27373.4115	Flujo Turbulento
2.9798	27582.8504	Flujo Turbulento
3.0303	27646.5501	Flujo Turbulento
3.9394	25489.5235	Flujo Turbulento
3.9899	25216.146	Flujo Turbulento
4.0404	24913.1421	Flujo Turbulento
4.899	19477.0526	Flujo Turbulento
4.9495	19145.9709	Flujo Turbulento
5	18872.2835	Flujo Turbulento

Cuadro 4.3: Solución 2: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo considerando $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$

La gráfica (4.7) ilustra la simulación de cada componente del vector de velocidad. En este caso, el fluido presenta un comportamiento turbulento, aunque moderado, ya que el número de Reynolds no es lo suficientemente alto para generar una turbulencia completamente caótica.

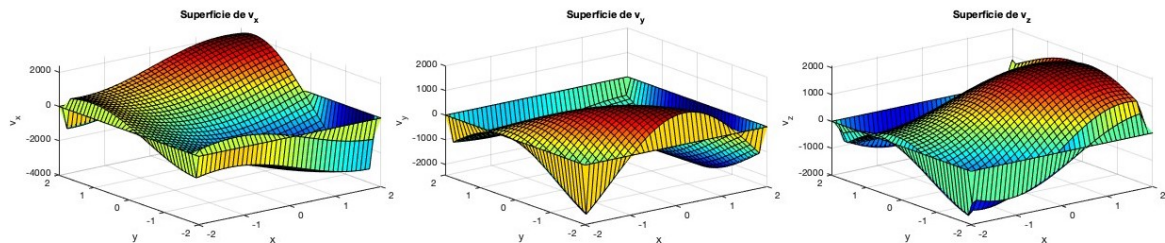


Figura 4.7: Solución 2: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$

A continuación se presenta el campo de velocidad, en el cual los vectores exhiben un desplazamiento caótico, evidenciando la presencia de turbulencia, como se ilustra en la figura (4.8).

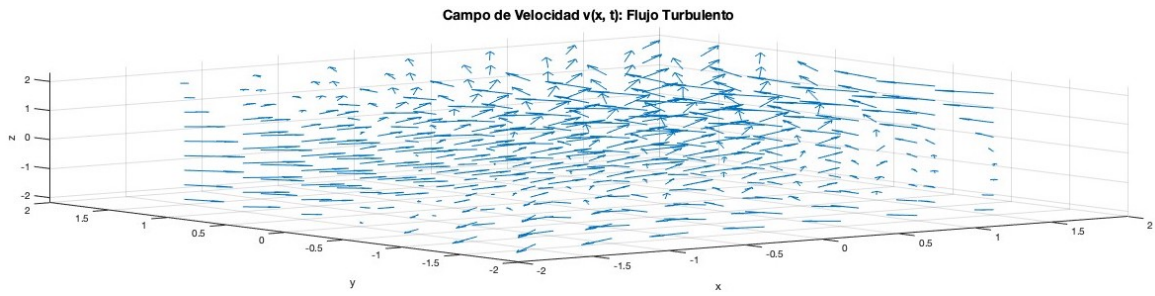


Figura 4.8: Solución 2: Visualización del flujo turbulento con $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$

A partir de la gráfica, se observa que el campo de velocidad del fluido tiende a ser turbulento. Esto sugiere la presencia de estructuras complejas en el flujo, lo que puede influir en la dinámica del sistema.

De forma análoga se presentan algunos valores del número de Reynolds Re en función del tiempo. Como se puede observar, en todo momento el flujo se mantiene en régimen laminar cuando la viscosidad dinámica del fluido es de $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$.

Tiempo (t)	Reynolds (Re)	Estado
0	11.7534	Flujo Laminar
0.050505	11.2858	Flujo Laminar
0.25253	9.6108	Flujo Laminar
1.6667	9.0353	Flujo Laminar
1.8182	9.0601	Flujo Laminar
1.8687	9.054	Flujo Laminar
2.1212	8.9155	Flujo Laminar
2.8788	7.3925	Flujo Laminar
2.9798	6.9698	Flujo Laminar
3.0303	6.7446	Flujo Laminar
3.9394	2.6526	Flujo Laminar
3.9899	2.5093	Flujo Laminar
4.0404	2.2082	Flujo Laminar
4.899	6.0033	Flujo Laminar
4.9495	6.2516	Flujo Laminar
5	6.4564	Flujo Laminar

Cuadro 4.4: Solución 2: Valores del Número de Reynolds en función del tiempo considerando $\mu = 1 \text{ NSm}^{-2}$

La siguiente gráfica (4.9) muestra el comportamiento del fluido para cada componente del vector de velocidad. En este caso, cada componente exhibe un patrón suave y predecible, característico del flujo laminar, donde no se observan fluctuaciones bruscas ni cambios caóticos en la dirección o magnitud de los vectores.

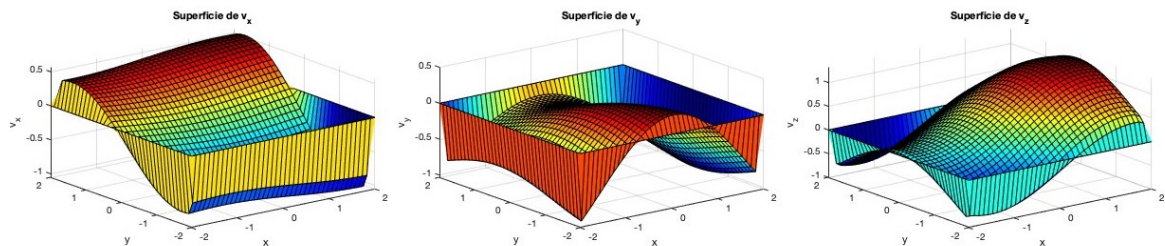


Figura 4.9: Solución 2: Simulación del campo de velocidad en Matlab para $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$

De forma similar a las simulaciones anteriores, se presenta el campo de velocidad. Aquí los vectores se desplazan ordenadamente, lo que indica que el fluido está en un estado laminar, como se observa en la figura (4.10).

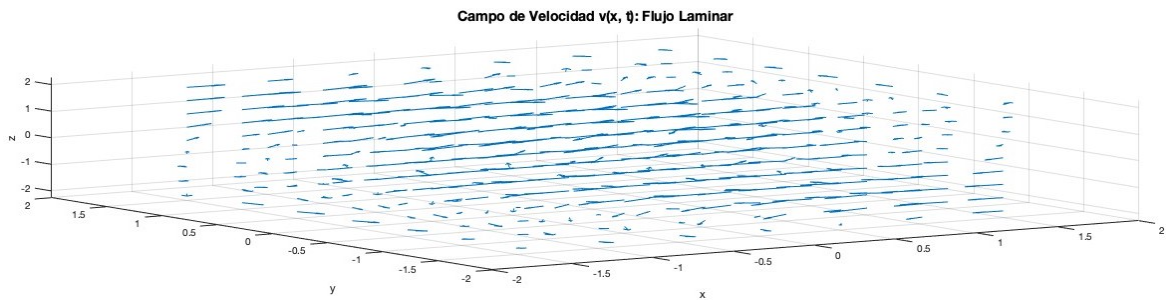


Figura 4.10: Solución 2: Visualización del flujo laminar con $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-2}$

4.4.3. Conclusiones

En las simulaciones, se analizaron varios casos para la viscosidad dinámica μ . Es importante tener en cuenta que la turbulencia no depende únicamente de μ , sino también de otros factores como la densidad del fluido, la velocidad y la longitud característica del problema. Estos elementos son cruciales para determinar si un flujo es laminar o turbulento.

- Para valores de μ más pequeñas, como $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Nsm}^{-1}$, el flujo muestra un comportamiento con baja turbulencia, sin alcanzar niveles significativos de turbulencia intensa. En este caso, el número de Reynolds Re es algo elevado, lo que sugiere que las fuerzas inerciales tienen una influencia mayor que las fuerzas viscosas. Esto favorece la formación de vórtices, aunque estos son muy pequeños y la turbulencia observada es de carácter débil.
- En el caso $\mu = 1 \text{ Nsm}^{-1}$, el flujo presenta un comportamiento laminar, con un número de Reynolds menor a 2000. Esto significa que las fuerzas viscosas son suficientes para disipar la energía cinética y mantener el flujo suave y ordenado. Este es un flujo típico donde la viscosidad es lo suficientemente grande para prevenir la turbulencia.

En este caso, se confirma nuestra intuición, ya que para el flujo conservativo el comportamiento con respecto a μ resultó ser opuesto. Tras realizar diversas simulaciones, se observó que al disminuir los valores de μ , el comportamiento del fluido tiende a volverse más inestable. En particular, cuando μ se aproxima a cero, el flujo exhibe características asociadas a la turbulencia, con un aumento significativo en el número de Reynolds. No obstante, a pesar de que el número de Reynolds es elevado, el flujo sigue conservando estructuras bien organizadas, aunque con mayor presencia de vorticidad.

Es relevante señalar que el comportamiento del flujo también está condicionado por las condiciones iniciales $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ y el campo de aceleración externa $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Estos parámetros desempeñan un papel crucial en la dinámica del fluido, modulando la evolución del flujo a lo largo del tiempo. En resumen, la transición hacia un flujo con características turbulentas depende principalmente de la viscosidad, pero también está influenciada por la densidad, la velocidad, la longitud característica y las fuerzas externas aplicadas.

Conclusiones

Conclusión 1: Deducción Rigurosa de las Ecuaciones de Navier-Stokes

El primer objetivo de esta tesis, que consistió en llevar a cabo una deducción matemática rigurosa de las ecuaciones de Navier-Stokes, se ha cumplido con éxito. La importancia de esta deducción radica en su capacidad para proporcionar una comprensión clara y precisa de la formulación matemática que subyace a estas ecuaciones esenciales en la mecánica de fluidos. A lo largo del trabajo, se ha llevado a cabo un análisis exhaustivo de los teoremas y principios matemáticos que sustentan estas ecuaciones, prestando especial atención a la conservación del momento lineal.

El enfoque sistemático y detallado utilizado ha permitido abordar cada componente de las ecuaciones sin dejar poros o lagunas que pudieran comprometer su validez. Este proceso ha llevado a una clarificación de los fundamentos físicos involucrados, así como a la articulación de una base teórica sólida que respalda la dinámica de los fluidos. La rigurosidad de esta deducción no solo enriquece el conocimiento en el campo de la modelación matemática, sino que también proporciona herramientas valiosas para la comprensión de fenómenos complejos que involucran el comportamiento de los fluidos en diferentes contextos.

Este trabajo facilita el aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones de Navier-Stokes en diversas carreras, incluyendo las Licenciaturas en Modelación Matemática, Matemáticas y Física. Al ofrecer un marco formal y detallado, se contribuye a que los estudiantes de estas disciplinas puedan abordar el tema con mayor claridad y confianza. La formalización y rigor presentados en esta tesis son pasos claves hacia una comprensión más profunda y completa de las interacciones fluidas.

Conclusión 2: Solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes

Se logró cumplir con el segundo objetivo de esta tesis, que consistió en calcular soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo las suposiciones de velocidad conservativa y velocidad rotacional en campos de Beltrami. Dado que las funciones de velocidad resultaron ser complejas, fue necesario utilizar MATLAB para analizarlas, permitiendo así una comprensión más clara del comportamiento del flujo.

En primer lugar, se modeló el flujo bajo la suposición de que la velocidad se conserva, analizando el estado del fluido en función del número de Reynolds. En este contexto, se observó que el flujo es laminar. Posteriormente, se exploró un segundo modelo en el que la velocidad se definió como el rotacional de una función. En este caso, se concluyó que el fluido tiende a ser turbulento para valores muy pequeños de la viscosidad, resultado que también se deriva del análisis del número de Reynolds. Esta metodología facilitó una comparación clara entre los diferentes escenarios analizados.

Se evidenció que los campos de Beltrami, definidos por una relación específica entre la rotacionalidad y la velocidad, permiten obtener soluciones que satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes bajo ciertas condiciones. No obstante, este enfoque resalta la complejidad inherente al análisis de flujos rotacionales en comparación con sus contrapartes irrotacionales.

Además, al suponer que la velocidad se conserva, se llega a la ecuación de calor, que incluye una fuente G . Esta ecuación puede resolverse de manera más sencilla que las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que subraya la utilidad de esta suposición en el análisis de flujos.

Por lo tanto, aunque la resolución en campos rotacionales es factible en escenarios concretos como los campos de Beltrami, es necesario un mayor desarrollo teórico para extender estas soluciones a un espectro más amplio de flujos rotacionales. Esto abre nuevas líneas de investigación en el campo

de la mecánica de fluidos.

Con esta última reflexión, se concluye esta tesis, reafirmando la importancia de continuar explorando y profundizando en el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes en diferentes contextos de flujo.

Apéndice A

Notación Índicial

Este apéndice se centra en la notación indicial, que es decisiva para el desarrollo de las ecuaciones de conservación del momento angular. La notación indicial simplifica significativamente los cálculos matemáticos involucrados en esta deducción, permitiendo una representación más clara y compacta de las operaciones tensoriales y vectoriales.

Se introducirá de forma muy resumida la notación indicial, ya que resulta esencial para obtener el término conectivo y demostrar la simetría de la matriz de esfuerzos, así como para simplificar la divergencia de esta matriz. Dominar esta notación y familiarizarse con las convenciones y operaciones descritas en las secciones anteriores de este apéndice es crucial para la comprensión y resolución de los cálculos que se llevarán a cabo.

A.1. Introducción

La notación de índices, también conocida como notación de Einstein, es una herramienta matemática poderosa que simplifica la representación de sumas y productos en expresiones algebraicas. Introducida por Albert Einstein en 1916, esta notación es particularmente útil en física avanzada y otras disciplinas que manejan vectores, matrices y tensores (ver sección 1.1 [10]).

Convenciones Generales:

- **Índices Repetidos (Suma de Einstein):** Cuando un índice aparece repetido en una expresión, se asume que se está sumando sobre todos sus posibles valores. Esta convención simplifica la notación y evita la escritura explícita de sumas.
- **Índices Mudos y Libres:** Los índices que aparecen dos veces en una expresión se denominan índices mudos y se someten a la convención de suma de Einstein. Por otro lado, los índices que aparecen una sola vez se denominan índices libres y representan diferentes casos o componentes.

Coordenadas:

- **Coordenadas Cartesianas:** Las coordenadas (x, y, z) pueden expresarse utilizando índices como variables de control x_i para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$.
- **Coordenadas Cilíndricas:** De manera similar, las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se pueden expresar como x_i para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ y $x_3 = z$.
- **Coordenadas Esféricas:** Las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) también se pueden expresar utilizando índices como x_i para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ y $x_3 = \phi$.

Suma de Einstein

La notación de índices permite simplificar expresiones complejas. Por ejemplo, la suma de los cuadrados de las coordenadas en un sistema tridimensional se expresa como:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 = x_i x_i$$

En esta expresión, el subíndice i se repite dos veces, lo que indica una suma sobre i .

A.2. Delta de Kronecker

En el contexto de la teoría de tensores y la notación índice, es fundamental utilizar el símbolo de Kronecker, que se define de la siguiente manera (ver sección 1.1 pág. 2 [10]):

Definición

La delta de Kronecker, denotada por δ_{ij} , es una función matemática que simplifica la notación en expresiones algebraicas y en la notación de índice.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde i y j son índices que pueden tomar valores en un conjunto finito de números enteros.

Propiedades:

- **Identidad de Kronecker:** La delta de Kronecker actúa como la matriz identidad en el espacio de índices. Esto significa que para cualquier vector \mathbf{v} y un índice i :

$$\sum_j \delta_{ij} v_j = v_i$$

- **Ortogonalidad:** La delta de Kronecker se utiliza para expresar la ortogonalidad de vectores en espacios euclidianos. Si \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_j son vectores ortogonales en una base, entonces:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

- **Simplificación de Expresiones:** En la notación de índice, δ_{ij} permite simplificar la manipulación de tensores y matrices. Por ejemplo, en una suma sobre índices, la delta de Kronecker selecciona términos específicos:

$$\sum_k A_{ik} \delta_{kj} = A_{ij}$$

- **Relación con la Notación de Índice:** La delta de Kronecker facilita el trabajo con la notación de índice al proporcionar una forma de simplificar expresiones que involucran sumas sobre índices repetidos. En la notación de Einstein, δ_{ij} ayuda a expresar y manipular términos en las ecuaciones de manera compacta y eficiente.

Algunos ejemplos

Ejemplo A.2.1. El producto punto de dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$, se define como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i) \cdot (v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i$$

Las coordenadas cartesianas se representan como x_i para $i = 1, 2, 3$.

Ejemplo A.2.2. La derivada de x con respecto a cada una de las coordenadas es:

$$\partial_x x = 1, \quad \partial_y x = 0, \quad \partial_z x = 0$$

Estas derivadas se pueden expresar de manera compacta utilizando la delta de Kronecker:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = \delta_{ij}$$

Este mismo principio se aplica en coordenadas cilíndricas y esféricas de manera análoga.

A.3. Símbolo de Levi-Civita

La inclusión del símbolo de Levi-Civita en nuestros desarrollos es esencial debido a su capacidad para simplificar la representación de productos vectoriales y la formulación de identidades en espacios tridimensionales. Este símbolo es especialmente útil en la representación compacta de operaciones como el producto vectorial y el cálculo de determinantes en notación tensorial (ver sección 1.1 pág. 8 [10]).

Definición

El símbolo de Levi-Civita, denotado como ε_{ijk} , es un tensor completamente antisimétrico que se utiliza para representar productos cruzados y determinantes en el espacio tridimensional.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{si alguno de los índices es igual.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Para una mejor comprensión del símbolo de Levi-Civita y sus permutaciones, consulte la figura (A.1):

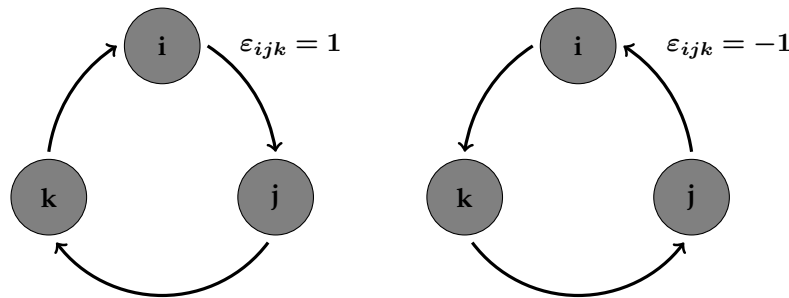


Figura A.1: Representación gráfica del símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} . La imagen muestra las permutaciones de los índices (i, j, k) y el signo asociado: $\varepsilon_{ijk} = 1$ para permutaciones pares y $\varepsilon_{ijk} = -1$ para permutaciones impares.

Geoméricamente, el símbolo de permutación se puede visualizar como un cubo que representa las permutaciones de los índices.

La figura (A.2) muestra cómo las permutaciones de los índices (i, j, k) se corresponden con los diferentes signos del símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} .

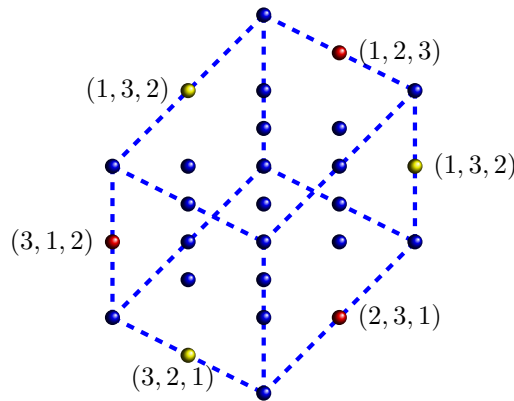


Figura A.2: Representación geométrica del símbolo de Levi-Civita como un cubo con permutaciones de índices.

En la figura (A.2), los puntos azules representan configuraciones donde al menos dos coordenadas son idénticas, y por lo tanto el valor asociado es 0. Los puntos rojos corresponden a permutaciones de índices que resultan en un valor de 1, mientras que los puntos amarillos indican configuraciones con un valor de -1.

Propiedades

- **Antisimetría:** El símbolo de Levi-Civita es antisimétrico respecto a la permutación de cualquier par de índices. Es decir, si se intercambian dos índices, el signo del símbolo cambia:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$$

- **Producto Cruzado:** En notación de índice, el producto cruzado de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} se puede expresar utilizando el símbolo de Levi-Civita. Si $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$, el producto cruzado $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k$$

- **Determinante:** El símbolo de Levi-Civita también se relaciona con el cálculo de determinantes. En una matriz 3×3 , el determinante puede ser expresado usando el símbolo de Levi-Civita como:

$$\det(A) = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

- **Relación con la Notación de Índice:** En la notación de índice, el símbolo de Levi-Civita facilita la manipulación de productos tensoriales y la formulación de identidades vectoriales. Su uso permite expresar de manera compacta operaciones como la divergencia y el rotacional en términos de componentes.

Para ilustrar el uso del símbolo de Levi-Civita, consideremos el producto cruzado de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} :

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk} u_i v_j$$

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 = \varepsilon_{123} u_2 v_3 + \varepsilon_{132} u_3 v_2,$$

y así sucesivamente para los otros componentes.

Algunos ejemplos

Ejemplo A.3.1. Consideremos el triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ en notación indicial, donde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Este producto se puede expresar como:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

Utilizando la notación indicial, esto se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= u_i \mathbf{e}_i \cdot (v_j \mathbf{e}_j \times w_k \mathbf{e}_k) \\ &= u_i \mathbf{e}_i \cdot (v_j w_k (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)) \\ &= u_i v_j w_k [\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)] \\ &= u_i v_j w_k \varepsilon_{ijk} \\ &= \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k \end{aligned}$$

Aquí, ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita, que representa el producto escalar del producto vectorial de \mathbf{v} y \mathbf{w} con el vector \mathbf{u} .

Ejemplo A.3.2. Vamos a desarrollar el siguiente triple producto vectorial en notación de índices:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w},$$

donde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

Para ello, consideramos la k -ésima componente del triple producto vectorial:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]_k &= \varepsilon_{ijk} u_i [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]_j \\ &= \varepsilon_{ijk} u_i \varepsilon_{nmj} v_n w_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{nmj} u_i v_n w_m \\ &= (\delta_{kn} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{in}) u_i v_n w_m \\ &= \delta_{kn} \delta_{im} u_i v_n w_m - \delta_{km} \delta_{in} u_i v_n w_m \\ &= u_i v_k w_i - u_n v_n w_k \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) v_k - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) w_k \\ &= [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}]_k \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

Notamos que el desarrollo en notación de índices facilita la manipulación y el entendimiento de este tipo de productos vectoriales.

Como se observa, los subíndices en el símbolo de Levi-Civita son libres. Por lo tanto, podemos expresar ε_{ijk} en términos de ε_{ljk} usando la delta de Kronecker:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ljk}\delta_{li}$$

Al desarrollar este producto, podemos obtener una propiedad importante.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{ljk}\delta_{li} = \varepsilon_{lmk}\delta_{li}\delta_{mj} = \varepsilon_{lmn}\delta_{li}\delta_{mj}\delta_{nk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \varepsilon_{lmn}\delta_{li}\delta_{mj}\delta_{nk} \\ &= \varepsilon_{123}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} + \varepsilon_{231}\delta_{2i}\delta_{3j}\delta_{1k} + \varepsilon_{312}\delta_{3i}\delta_{1j}\delta_{2k} + \varepsilon_{132}\delta_{1i}\delta_{3j}\delta_{2k} + \varepsilon_{321}\delta_{3i}\delta_{2j}\delta_{1k} \\ &\quad + \varepsilon_{213}\delta_{2i}\delta_{1j}\delta_{3k} \\ &= \delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} + \delta_{2i}\delta_{3j}\delta_{1k} + \delta_{3i}\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{1i}\delta_{3j}\delta_{2k} - \delta_{3i}\delta_{2j}\delta_{1k} - \delta_{2i}\delta_{1j}\delta_{3k} \\ &= \delta_{1i}(\delta_{2j}\delta_{3k} - \delta_{3j}\delta_{2k}) + \delta_{2i}(\delta_{3j}\delta_{1k} - \delta_{1j}\delta_{3k}) + \delta_{3i}(\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{2j}\delta_{1k}) \\ &= \delta_{1i}\det \begin{pmatrix} \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} - \delta_{2i}\det \begin{pmatrix} \delta_{1j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} + \delta_{3i}\det \begin{pmatrix} \delta_{1j} & \delta_{2j} \\ \delta_{2k} & \delta_{1k} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Podemos considerar el producto de permutaciones, como el producto de ε_{ijk} y ε_{pqr} . Además, dado que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$, donde \mathbf{A} es una matriz 3×3 , podemos realizar la siguiente operación:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q} \\ \delta_{1r} & \delta_{2r} & \delta_{3r} \end{pmatrix}^T \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{pmatrix} \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{1i}\delta_{1p} + \delta_{2i}\delta_{2p} + \delta_{3i}\delta_{3p} & \delta_{1i}\delta_{1q} + \delta_{2i}\delta_{2q} + \delta_{3i}\delta_{3q} & \delta_{1i}\delta_{1r} + \delta_{2i}\delta_{2r} + \delta_{3i}\delta_{3r} \\ \delta_{1j}\delta_{1p} + \delta_{2j}\delta_{2p} + \delta_{3j}\delta_{3p} & \delta_{1j}\delta_{1q} + \delta_{2j}\delta_{2q} + \delta_{3j}\delta_{3q} & \delta_{1j}\delta_{1r} + \delta_{2j}\delta_{2r} + \delta_{3j}\delta_{3r} \\ \delta_{1k}\delta_{1p} + \delta_{2k}\delta_{2p} + \delta_{3k}\delta_{3p} & \delta_{1k}\delta_{1q} + \delta_{2k}\delta_{2q} + \delta_{3k}\delta_{3q} & \delta_{1k}\delta_{1r} + \delta_{2k}\delta_{2r} + \delta_{3k}\delta_{3r} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cada elemento de la matriz puede expresarse utilizando la notación de suma de Einstein. Por ejemplo, el primer elemento se escribe como:

$$\delta_{1i}\delta_{1p} + \delta_{2i}\delta_{2p} + \delta_{3i}\delta_{3p} = \delta_{mi}\delta_{mp} = \delta_{ip},$$

Por tanto, el producto de permutaciones es:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{pmatrix},$$

Si $r = q$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por ultimo, se desarrolla el determinante, quedando como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} &= \delta_{kp}(\delta_{iq}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jq}) - \delta_{kq}(\delta_{ip}\delta_{jk} - \delta_{jp}\delta_{ik}) + 3(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \\ &= \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + 3\delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\end{aligned}$$

Obteniendo la siguiente propiedad:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}} \quad (\text{A.3})$$

A.4. Producto Tensorial

El producto tensorial, también conocido como producto exterior, es una operación que combina dos espacios vectoriales para formar un nuevo espacio vectorial. Es clave en la teoría de espacios vectoriales y en muchas aplicaciones de la física y la ingeniería (ver [17]).

Definición

Dados dos espacios vectoriales V y W sobre un campo \mathbb{F} , el producto tensorial de V y W , denotado por $V \otimes W$, es un espacio vectorial construido de manera que satisfaga ciertas propiedades universales. En otras palabras, para cada par de espacios vectoriales V y W , existe un espacio vectorial $V \otimes W$ junto con un mapeo lineal bilineal

$$\begin{array}{l} \otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \end{array} \quad (\text{A.4})$$

que satisface la propiedad de bilinealidad. Es decir, para cualquier espacio vectorial Z y cualquier par de aplicaciones lineales $f : V \rightarrow Z$ y $g : W \rightarrow Z$, existe una única aplicación lineal $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow Z$ tal que:

$$(f \otimes g)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) \cdot g(\mathbf{w})$$

Notación y Propiedades

En notación índice, el producto tensorial de dos tensores o matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} se denota como $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$. Si \mathbf{A} tiene componentes A_{ij} y \mathbf{B} tiene componentes B_{kl} , entonces el tensor producto $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ tiene componentes

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

Algunas propiedades importantes del producto tensorial incluyen:

- **Bilinealidad:** Para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, y para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2$$

$$(\alpha \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$$

- **Asociatividad:** El producto tensorial es asociativo hasta isomorfismo. Es decir, para cualquier espacio vectorial U , se cumple que

$$(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$$

- **Distribución sobre la suma:**

$$(V \oplus U) \otimes W \cong (V \otimes W) \oplus (U \otimes W)$$

$$V \otimes (W \oplus U) \cong (V \otimes W) \oplus (V \otimes U)$$

Algunos ejemplos

Ejemplo A.4.1. Producto Tensorial de Vectores

Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, el producto tensorial $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ es una matriz 2×3 cuyas componentes están dadas por:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo A.4.2. Producto Tensorial de Tensores

Consideremos dos tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} con componentes A_{ij} y B_{kl} . El producto tensorial $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ es un tensor de cuarto orden cuyas componentes son:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

Este tensor puede ser utilizado en diversas aplicaciones, como en la descripción de sistemas físicos o en la solución de ecuaciones diferenciales en múltiples dimensiones.

A.5. Operadores Diferenciales

Los operadores diferenciales son herramientas esenciales en el análisis matemático y en la formulación de ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos. A continuación, se presentan algunos operadores diferenciales comunes utilizando notación índice (ver sección 2.9 pág. 64 [9]).

- **Operador Gradiente:** El operador gradiente, denotado por ∇ , se aplica a una función escalar $f(x_i)$ para obtener un campo vectorial. En notación índice, el gradiente se expresa como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{e}_i = \partial_i f \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.5})$$

donde x_i representa las coordenadas espaciales x , y , y z en un sistema de coordenadas tridimensional. El gradiente ∇f indica la dirección y magnitud del mayor aumento de f .

- **Operador Divergencia:** El operador divergencia se aplica a un campo vectorial \mathbf{F} para medir la expansión o compresión en un punto dado. En notación índice, la divergencia de \mathbf{F} se define como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \partial_i F_i, \quad (\text{A.6})$$

donde la suma sobre el índice repetido i se realiza de acuerdo con la convención de Einstein. La divergencia proporciona una medida de la generación o absorción de flujo en el campo.

- **Operador Rotacional:** El operador rotacional, o curl, se usa para encontrar la rotación de un campo vectorial \mathbf{F} . En notación índice, el rotor se expresa como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i F_j \mathbf{e}_k, \quad (\text{A.7})$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita y F_j son las componentes del campo vectorial. El rotor mide la tendencia de un campo vectorial a rotar alrededor de un punto.

- **Operador Laplaciano:** El operador Laplaciano se aplica a funciones escalares para medir la tendencia de una función a ser mayor o menor en comparación con sus vecinos. En notación índice, el Laplaciano de una función f se define como:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \partial_i^2 f, \quad (\text{A.8})$$

donde doble derivada parcial suma las contribuciones de todas las direcciones espaciales i . El laplaciano es fundamental en la formulación de ecuaciones diferenciales parciales, como la ecuación de Poisson y la ecuación de calor.

Algunos ejemplos

Hasta ahora hemos visto que la notación indicial es una herramienta indispensable para simplificar cálculos, especialmente cuando nos enfrentamos a expresiones complejas en álgebra vectorial. Sin embargo, esta notación no siempre es necesaria, ya que en muchos casos los cálculos sencillos pueden realizarse de forma directa utilizando la notación vectorial habitual. Es común, además, trabajar simultáneamente con ambas notaciones, aprovechando la claridad de la notación vectorial cuando es posible y recurriendo a la indicial cuando los cálculos lo requieren. A continuación, mostraremos algunos ejemplos de propiedades del cálculo vectorial en ambas notaciones, destacando cómo se complementan entre sí.

Ejemplo A.5.1. Verificaremos la siguiente identidad vectorial:

$$\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) = (\nabla \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g}, \quad (\text{A.9})$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{g} son campos vectoriales.

Para comprobar esta igualdad, comenzamos analizando el lado izquierdo de la ecuación. Consideramos la k -ésima componente del vector resultante:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g})]_k &= \varepsilon_{ijk} f_i (\nabla \times \mathbf{g})_j \\
&= \varepsilon_{ijk} f_i \varepsilon_{nmj} \partial_n g_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{nmj} f_i \partial_n g_m \\
&= (\delta_{kn} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{in}) f_i \partial_n g_m \\
&= \delta_{kn} \delta_{im} f_i \partial_n g_m - \delta_{km} \delta_{in} f_i \partial_n g_m \\
&= f_i \partial_k g_i - f_n \partial_n g_k \\
&= (\partial_k g_i) f_i - f_n \partial_n g_k
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Finalmente, multiplicando ambos lados de la ecuación (A.10) por el vector unitario \mathbf{e}_k , obtenemos la verificación deseada de la propiedad:

$$\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) = (\nabla \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g}$$

Ejemplo A.5.2. Verificaremos la siguiente identidad vectorial más compleja:

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}), \tag{A.11}$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{g} son campos vectoriales.

Empezamos expandiendo el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} \\
&= \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} - (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} \\
&= (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} + \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} - (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Finalmente, aplicando la propiedad previamente demostrada (A.9) en la ecuación (A.12), obtenemos:

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f})$$

Esto concluye la verificación de la segunda propiedad vectorial.

Si suponemos que \mathbf{f} y \mathbf{g} son iguales, obtenemos la siguiente propiedad. De acuerdo con la ecuación (A.11), se tiene:

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) &= (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{f}) \\
&= 2(\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f} + 2\mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{f}) \\
&= 2(\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f} - 2(\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Alternativamente, la ecuación (A.13) puede escribirse de la siguiente manera:

$$(\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{f}\|^2 + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{f} \tag{A.14}$$

Esta última propiedad será útil para la resolución de la ecuación de Navier-Stokes (4.5), bajo las dos suposiciones relacionadas con el campo de velocidad.

Ejemplo A.5.3. Verifiquemos la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\psi \mathbf{f}) = (\nabla \psi) \times \mathbf{f} + \psi (\nabla \times \mathbf{f}), \tag{A.15}$$

donde ψ es un campo escalar y \mathbf{f} un campo vectorial.

Para demostrar esta identidad, utilizamos la notación de índices en el término del lado izquierdo $\nabla \times (\psi \mathbf{f})$, lo cual nos da:

$$[\nabla \times (\psi \mathbf{f})]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\psi f_k),$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita y ∂_j indica la derivada parcial respecto a la coordenada x_j .

Aplicando la regla del producto a la derivada, obtenemos:

$$\partial_j (\psi f_k) = (\partial_j \psi) f_k + \psi (\partial_j f_k)$$

Sustituyendo esto en la expresión inicial, tenemos:

$$[\nabla \times (\psi \mathbf{f})]_i = \varepsilon_{ijk} [(\partial_j \psi) f_k + \psi (\partial_j f_k)]$$

Al separar los términos, resulta en:

$$[\nabla \times (\psi \mathbf{f})]_i = \varepsilon_{ijk} (\partial_j \psi) f_k + \varepsilon_{ijk} \psi (\partial_j f_k)$$

El primer término, $\varepsilon_{ijk} (\partial_j \psi) f_k$, corresponde al i -ésimo componente del producto cruzado $(\nabla \psi) \times \mathbf{f}$, según la definición del producto cruzado:

$$[(\nabla \psi) \times \mathbf{f}]_i = \varepsilon_{ijk} (\partial_j \psi) f_k$$

El segundo término, $\varepsilon_{ijk} \psi (\partial_j f_k)$, puede reescribirse como $\psi \varepsilon_{ijk} (\partial_j f_k)$, que es el i -ésimo componente de $\psi (\nabla \times \mathbf{f})$, es decir:

$$[\psi (\nabla \times \mathbf{f})]_i = \psi \varepsilon_{ijk} (\partial_j f_k)$$

Por lo tanto, combinando ambos términos, obtenemos:

$$[\nabla \times (\psi \mathbf{f})]_i = [(\nabla \psi) \times \mathbf{f}]_i + [\psi (\nabla \times \mathbf{f})]_i$$

Con esto, hemos comprobado la identidad propuesta.

Resumen de las Notaciones en Índices

A continuación, se presenta una tabla que resume las notaciones en índices y tensoriales que serán útiles para el desarrollo de conceptos en el segundo capítulo. Esta tabla facilita la comparación entre diferentes formas de notación y proporciona una referencia rápida para los operadores y símbolos utilizados en el contexto de la teoría de tensores y operadores diferenciales.

Operación	Notación Tensorial	Notación Índicial
Vector	\mathbf{u}	$u_i \mathbf{e}_i$
Tensor	\mathbf{T}	$T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
Producto Escalar	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$u_i v_i$
Delta de Kronecker	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	δ_{ij}
Símbolo de Levi-Civita	$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación de } (1, 3, 2) \\ 0 & \text{si } i, j \text{ o } k \text{ se repiten} \end{cases}$	ε_{ijk}
Producto Vectorial	$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	$\varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k$
Producto Tensorial Vector-Vector	$\mathbf{u} \mathbf{v}^T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	$u_i v_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
Traza de un Tensor	$\text{tr}(\mathbf{T})$	T_{ii}
Producto Tensor-Vector	$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$	$T_{ij} v_j \mathbf{e}_i$
Determinante de un Tensor	$\det(\mathbf{T})$	$\varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$
Producto Tensorial Escalar Vector-Vector	$(\alpha \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$	$\alpha u_i v_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
Función Vectorial	\mathbf{F}	$f_i \mathbf{e}_i$
Divergencia de una Función Escalar	$\nabla \cdot f$	$\partial_i f$
Laplaciano de una Función Escalar	$\nabla^2 f$	$\partial_i^2 f$
Divergencia de una Función Vectorial	$\nabla \cdot \mathbf{F}$	$\partial_i f_i$
Divergencia de un Tensor	$\nabla \cdot \mathbf{T}$	$\partial_j T_{ij} \mathbf{e}_i$
Gradiente de una Función Escalar	∇f	$\partial_i f \mathbf{e}_i$
Gradiente de una Función Vectorial	$\nabla \mathbf{F}$	$\partial_j f_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
Rotacional de una Función Vectorial	$\nabla \times \mathbf{F}$	$\varepsilon_{ijk} \partial_i f_j \mathbf{e}_k$

Cuadro A.1: Resumen de Símbolos en Notación Índicial

Apéndice B

Teoremas, Lemas y Definiciones Relevantes

B.1. Lemas y definiciones

En este apéndice, se presentarán de forma concisa algunas definiciones, lemas y teoremas que sirven como apoyo para la comprensión del contenido de la tesis. Estas contribuciones son esenciales para contextualizar los conceptos tratados a lo largo del trabajo.

Las siguientes dos definiciones nos ayudarán a entender de mejor forma el teorema de la fórmula de Jacobi.

Definición B.1.1. Cofactor. Sean C y M matrices $n \times n$, el cofactor C tiene entradas C_{ij} , dadas por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

donde la matriz C es llamada matriz de cofactores de M .

Definición B.1.2. Determinante de una matriz. Sea M una matriz $n \times n$, el determinante de M está dado por

$$\det(M) = C_{11}M_{11} + C_{12}M_{12} + \cdots + C_{1n}M_{1n} = \sum_{k=1}^n C_{1k}M_{1k}$$

La última expresión es llamada expansión por cofactores.

B.1.1. Teorema del Valor Medio para Integrales de Superficie y Volumen de Campos Vectoriales

En este trabajo, utilizamos una generalización del Teorema de Valor Medio a varias variables basada en [18], aplicada al tetraedro de Cauchy-Euler. Esto permitió aproximar las integrales de superficie evaluando el campo vectorial en puntos específicos sobre cada cara del tetraedro, simplificando los cálculos de manera significativa.

Los siguientes teoremas complementan la parte matemática del capítulo 2, donde se discute el tensor de esfuerzo. Estas formulaciones son claves para entender la relación entre los campos vectoriales y las integrales de superficie y volumen, y proporcionan una base sólida para el análisis posterior.

Teorema B.1.1. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 parametrizada por una función $\mathbf{x} = \Phi(u, v)$, que mapea un dominio compacto y convexo D en el plano uv a la superficie en \mathbb{R}^3 . Supongamos que \mathbf{F} es una función vectorial continua sobre S . Entonces, existen puntos $(u_i, v_i) \in D$ para cada componente F_i , tales que:

$$\int_S \mathbf{F}(\Phi(u, v)) dS = \begin{pmatrix} F_1(\Phi(u_1, v_1)) \\ F_2(\Phi(u_2, v_2)) \\ F_3(\Phi(u_3, v_3)) \end{pmatrix} A,$$

donde $\mathbf{x}_i = \Phi(u_i, v_i)$ para cada $i = 1, 2, 3$ y A es el área total de la superficie S .

Aquí, el teorema de valor medio se aplica individualmente a cada componente de \mathbf{F} , resultando en puntos (u_i, v_i) distintos para cada componente.

Demostración:

La función vectorial \mathbf{F} está definida como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ F_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\Phi(u, v)) \\ F_2(\Phi(u, v)) \\ F_3(\Phi(u, v)) \end{pmatrix}$$

Consideremos la integral de superficie de cada componente F_i de la función vectorial \mathbf{F} sobre la superficie \mathbf{S} :

$$\int_{\mathbf{S}} F_i(\Phi(u, v)) dS = \int_{\mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv,$$

donde $\|\Phi_u \times \Phi_v\|$ es el factor de escala que convierte el área diferencial en el dominio \mathbf{D} al área diferencial en la superficie \mathbf{S} en \mathbb{R}^3 .

El área total de la superficie \mathbf{S} es:

$$A = \int_{\mathbf{D}} \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv \quad (\text{B.1})$$

Dado que \mathbf{D} es compacto, la función $F_i \circ \Phi$ alcanza sus valores extremos en \mathbf{D} . Es decir, existen:

$$m_i = \min_{(u,v) \in \mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v)) \quad \text{y} \quad M_i = \max_{(u,v) \in \mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v))$$

Entonces, tenemos las desigualdades:

$$m_i \leq F_i(\Phi(u, v)) \leq M_i$$

Multiplicamos por $\|\Phi_u \times \Phi_v\|$:

$$m_i \|\Phi_u \times \Phi_v\| \leq F_i(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| \leq M_i \|\Phi_u \times \Phi_v\|$$

Integrando sobre \mathbf{D} , obtenemos:

$$m_i \int_{\mathbf{D}} \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv \leq \int_{\mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv \leq M_i \int_{\mathbf{D}} \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv$$

Simplificamos sustituyendo (B.1):

$$m_i A \leq \int_{\mathbf{S}} F_i(\Phi(u, v)) dS \leq M_i A$$

Dividiendo por A :

$$m_i \leq \frac{1}{A} \int_{\mathbf{S}} F_i(\Phi(u, v)) dS \leq M_i \quad (\text{B.2})$$

Para aplicar la convexidad de \mathbf{D} a cada componente F_i , consideramos dos puntos arbitrarios \mathbf{P}_i y \mathbf{Q}_i en \mathbf{D} . La convexidad del dominio \mathbf{D} garantiza que el segmento de línea que conecta estos dos puntos está contenido dentro de \mathbf{D} . Parametrizamos este segmento de línea mediante:

$$\mathbf{g}_i(t) = (1-t)\mathbf{P}_i + t\mathbf{Q}_i \quad \text{para} \quad t \in [0, 1]$$

Aquí, $\mathbf{g}_i(t)$ es una función lineal que describe el segmento de línea entre los puntos \mathbf{P}_i y \mathbf{Q}_i en el dominio \mathbf{D} . La convexidad de \mathbf{D} asegura que para cada $t \in [0, 1]$, el punto $\mathbf{g}_i(t)$ pertenece a \mathbf{D} .

Debido a la continuidad de la función F_i y a que \mathbf{D} es convexo, el valor de F_i sobre el segmento de línea $\{\mathbf{g}_i(t)\}_{t \in [0,1]}$ tomará todos los valores entre m_i y M_i . En otras palabras, existe un punto $(u_i, v_i) \in \mathbf{D}$ tal que, por (B.2), podemos expresar:

$$\frac{1}{A} \int_{\mathbf{S}} F_i(\Phi(u, v)) dS = F_i(\Phi(u_i, v_i))$$

Esto implica que:

$$\int_{\mathbf{S}} \mathbf{F}(\Phi(u, v)) dS = \mathbf{F}(\Phi(u_i, v_i)) A$$

Esto completa la demostración del teorema.

Q.E.D.

Teorema B.1.2. Sea Ω una región tridimensional en \mathbb{R}^3 parametrizada por una función $\mathbf{x} = \Phi(u, v, w)$ que mapea un dominio compacto y convexo \mathbf{D} en el espacio uvw a la región Ω en \mathbb{R}^3 . Sea \mathbf{F} una función vectorial continua en Ω , es decir, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces, existen puntos $(u_i, v_i, w_i) \in \mathbf{D}$ tal que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\Phi(u, v, w)) dV = \begin{pmatrix} F_1(\Phi(u_1, v_1)) \\ F_2(\Phi(u_2, v_2)) \\ F_3(\Phi(u_3, v_3)) \end{pmatrix} V,$$

donde $\mathbf{x}_i = \Phi(u_i, v_i, w_i)$ y V es el volumen total de la región Ω .

Demostración:

La función vectorial es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ F_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\Phi(u, v)) \\ F_2(\Phi(u, v)) \\ F_3(\Phi(u, v)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Consideremos la integral de volumen de cada componente F_i de la función vectorial \mathbf{F} sobre la región Ω :

$$\int_{\Omega} F_i(\Phi(u, v, w)) dV = \int_{\mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v, w)) |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| du dv dw,$$

donde $\|\Phi_u \times \Phi_v \cdot \Phi_w\|$ es el factor de escala que convierte el volumen diferencial en el dominio \mathbf{D} al volumen en \mathbb{R}^3 .

El volumen total de la región Ω es:

$$V = \int_{\mathbf{D}} |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| du dv dw$$

Dado que \mathbf{D} es compacto, la función $F_i \circ \Phi$ alcanza sus valores extremos en \mathbf{D} . Es decir, existen:

$$m_i = \min_{(u,v,w) \in \mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v, w)) \quad \text{y} \quad M_i = \max_{(u,v,w) \in \mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v, w))$$

Entonces, tenemos las desigualdades:

$$m_i |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| \leq F_i(\Phi(u, v, w)) |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| \leq M_i |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w|$$

Integrando sobre \mathbf{D} , obtenemos:

$$\begin{aligned} m_i \int_{\mathbf{D}} |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| du dv dw &\leq \int_{\mathbf{D}} F_i(\Phi(u, v, w)) |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| du dv dw \\ &\leq M_i \int_{\mathbf{D}} |(\Phi_u \times \Phi_v) \cdot \Phi_w| du dv dw \end{aligned}$$

Simplificando, tenemos:

$$m_i V \leq \int_{\Omega} F_i(\Phi(u, v, w)) dV \leq M_i V$$

Dividiendo por V :

$$m_i \leq \frac{1}{V} \int_{\Omega} F_i(\Phi(u, v, w)) dV \leq M_i \quad (\text{B.4})$$

Para aplicar la convexidad de \mathbf{D} a cada componente F_i , consideramos dos puntos arbitrarios \mathbf{P}_i y \mathbf{Q}_i en \mathbf{D} . La convexidad del dominio \mathbf{D} garantiza que el segmento de línea que conecta estos dos puntos está contenido dentro de \mathbf{D} . Parametrizamos este segmento de línea mediante:

$$\mathbf{g}_i(t) = (1-t)\mathbf{P}_i + t\mathbf{Q}_i \quad \text{para} \quad t \in [0, 1]$$

Aquí, $\mathbf{g}_i(t)$ es una función lineal que describe el segmento de línea entre los puntos \mathbf{P}_i y \mathbf{Q}_i en el dominio \mathbf{D} . La convexidad de \mathbf{D} asegura que para cada $t \in [0, 1]$, el punto $\mathbf{g}_i(t)$ pertenece a \mathbf{D} .

Debido a la continuidad de la función F_i y a que \mathbf{D} es convexo, el valor de F_i sobre el segmento de línea $\{\mathbf{g}_i(t)\}_{t \in [0,1]}$ tomará todos los valores entre m_i y M_i . En otras palabras, existe un punto $(u_i, v_i, w_i) \in \mathbf{D}$ tal que, por (B.4), podemos expresar:

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} F_i(\Phi(u, v, w)) dV = F_i(\Phi(u_i, v_i, w_i))$$

Esto implica que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\Phi(u, v, w)) dV = \mathbf{F}(\Phi(u_i, v_i, w_i))V$$

Esto completa la demostración del teorema.

Q.E.D.

B.1.2. Lema de Conmutatividad en Exponenciales Matriciales

De [19] redactamos el siguiente lema, el cual nos ayudará a completar la parte matemática del capítulo 3, permitiendo así finalizar la búsqueda de la forma de la función isotrópica \mathbf{G} .

Lema B.1.1. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} matrices en $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, entonces:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}.}$$

Demostración:

Si \mathbf{A} y \mathbf{B} conmutan, se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n}{n!} \\ &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2) + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2) + \dots \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \dots)(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \dots) \\ &= e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Q.E.D.

B.2. Descomposición de Matrices Simétricas y Proyección en Espacios Propios

En esta sección del Apéndice B se enunciarán los lemas necesarios para demostrar el Teorema de la Representación para Isótopos, lo cual es de gran interés ya que, con la ayuda de estos lemas, encontraremos una forma específica de la matriz de esfuerzos, que se calculará en la sección (3.2) del capítulo 3. Consideremos los valores propios y vectores propios de la matriz \mathbf{D} . Esta consideración es crucial porque permite descomponer la matriz de deformaciones en componentes fundamentales, facilitando así la comprensión de cómo \mathbf{G} se relaciona con \mathbf{D} (ver [13]). De manera formal, introducimos la siguiente ecuación:

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \|\mathbf{u}_i\| = 1,$$

donde λ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) son los valores propios de \mathbf{D} y \mathbf{u}_i son los vectores propios asociados. Esta ecuación nos permitirá examinar cómo \mathbf{D} puede ser descompuesta y utilizada para deducir la forma específica de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

Para facilitar esta descomposición, introducimos el operador de proyección $\mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}$, el cual proyecta un vector \mathbf{v} sobre el vector propio \mathbf{u}_i :

$$\boxed{\mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}\mathbf{u}_i = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i} \quad (\text{B.5})$$

Este operador de proyección es útil porque nos permite expresar cualquier vector \mathbf{v} en términos de los vectores propios de \mathbf{D} . Así, podemos descomponer \mathbf{D} en componentes ortogonales, lo cual es esencial para analizar la forma de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

Ahora, para formalizar esta descomposición, presentamos el siguiente lema que establece la relación entre \mathbf{D} y sus vectores y valores propios:

Lema B.2.1. Sea D una matriz simétrica con una base ortonormal de vectores propios $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$. Entonces, D se puede expresar como:

$$D = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}_{\mathbf{u}_i},$$

donde $\mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}$ es el operador de proyección sobre el vector propio \mathbf{u}_i .

Demostración:

Para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos escribirlo en una combinación lineal ver figura (B.1):

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad (\text{B.6})$$

noté que $\lambda_i \mathbf{u}_i$ está expresado en su forma indicial.

Recordando $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, ya que la base es ortonormal, entonces podemos definir a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_j$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_j = \lambda_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j,$$

de manera equivalente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i$, por lo que al sustituir en (B.6), obtenemos:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$$

Usando el hecho de que $D\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ para cualquier i y teniendo en cuenta (B.5), podemos aplicar D a \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} D\mathbf{v} &= D \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) D\mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) \lambda_i \mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}_{\mathbf{u}_i} \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Dado que esto es cierto para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos concluir que:

$$D = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}_{\mathbf{u}_i}$$

Esto demuestra el lema (B.2.1.)

Q.E.D.

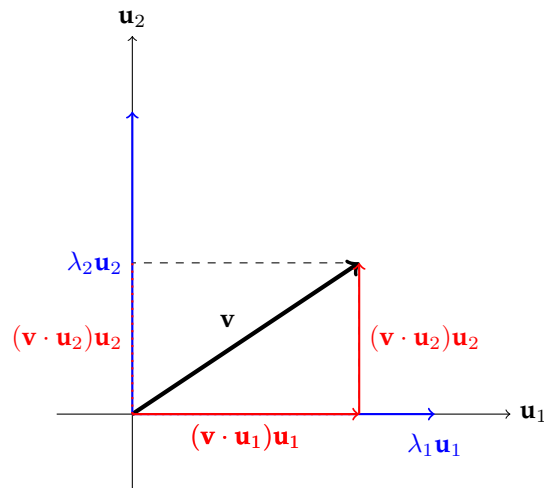


Figura B.1: Descomposición de \mathbf{v} en términos de vectores propios.

Ahora, con esta idea de descomponer \mathbf{D} en términos de las proyecciones, podemos introducir un segundo lema. Este lema nos permitirá representar \mathbf{D} de una manera específica utilizando una base ortonormal de vectores propios, donde uno de los vectores tiene un valor propio distinto y los vectores ortogonales a este comparten un valor propio común.

Lema B.2.2. Si \mathbf{D} es una matriz simétrica y \mathbf{u} es vector propio de \mathbf{D} con valor propio λ_1 tal que para cualquier vector normal \mathbf{v} perpendicular a \mathbf{u} , \mathbf{v} es un vector propio de \mathbf{D} con valor propio λ_2 , entonces \mathbf{D} admite la representación:

$$\mathbf{D} = \lambda_2 \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{P}_u.$$

Demostración:

La proyección de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} es $\mathbf{P}_u \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$.

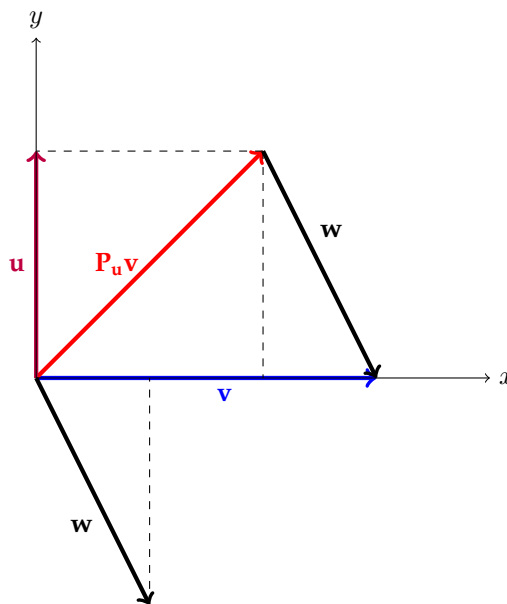


Figura B.2: Proyección de un vector en el subespacio generado por un vector propio

Siguiendo la figura (B.2) \mathbf{w} toma la forma

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{P}_u \mathbf{v}$$

Ahora despejamos \mathbf{v} y sustituimos (B.5), obteniendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{P}_u \mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (\text{B.7})$$

Como $\mathbf{D}\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$ y $\mathbf{D}\mathbf{w} = \lambda_2\mathbf{w}$, entonces sustituyendo (B.7) en $\mathbf{D}\mathbf{v}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\mathbf{v} &= \mathbf{D}[\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] \\
 &= \mathbf{D}\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{D}\mathbf{u} \\
 &= \lambda_2\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\lambda_1\mathbf{u} \\
 &= \lambda_2(\mathbf{v} - \mathbf{P}_u\mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\lambda_1\mathbf{u} \\
 &= \lambda_2(\mathbf{I} - \mathbf{P}_u)\mathbf{v} + \lambda_1\mathbf{P}_u\mathbf{v} \\
 &= (\lambda_2\mathbf{I} - \lambda_2\mathbf{P}_u + \lambda_1\mathbf{P}_u)\mathbf{v} \\
 &= [\lambda_2\mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{P}_u]\mathbf{v}
 \end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene que

$$\mathbf{D} = \lambda_2\mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{P}_u$$

Q.E.D.

Para analizar la matriz \mathbf{D} en términos de proyecciones, es esencial comprender cómo se representa la proyección sobre un vector propio específico. Para un vector \mathbf{v} y un vector propio \mathbf{u} , la proyección $\mathbf{P}_u\mathbf{v}$ se puede expresar de diversas maneras equivalentes:

$$\mathbf{P}_u\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} \quad (\text{B.8})$$

Aquí, $\mathbf{P}_u\mathbf{v}$ se representa utilizando el producto tensorial $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, que proporciona una forma concisa para expresar la proyección en términos de tensores:

$$\mathbf{P}_u = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (\text{B.9})$$

Ahora, con esta comprensión de la proyección en términos de tensores, podemos enunciar y demostrar un lema importante que describe cómo las proyecciones se transforman.

Lema B.2.3. *Sea \mathbf{u} un vector en \mathbb{R}^n y \mathbf{P}_u la proyección sobre el subespacio generado por \mathbf{u} . Para cualquier matriz \mathbf{D} , se cumple que:*

$$\mathbf{D}\mathbf{P}_u\mathbf{D}^T = \mathbf{P}_{\mathbf{D}\mathbf{u}},$$

donde $\mathbf{P}_{\mathbf{D}\mathbf{u}}$ representa la proyección sobre el subespacio generado por $\mathbf{D}\mathbf{u}$.

Demostración:

Dado que $\mathbf{P}_u = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ por (B.9), podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\mathbf{P}_u\mathbf{D}^T &= \mathbf{D}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{D}^T \\
 &= \mathbf{D}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{D}^T \\
 &= (\mathbf{D}\mathbf{u})(\mathbf{D}\mathbf{u})^T \\
 &= (\mathbf{D}\mathbf{u}) \otimes (\mathbf{D}\mathbf{u}) \\
 &= \mathbf{P}_{\mathbf{D}\mathbf{u}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$\mathbf{D}\mathbf{P}_u\mathbf{D}^T = \mathbf{P}_{\mathbf{D}\mathbf{u}}$$

Q.E.D.

Este lema es de crucial importancia para la demostración del Teorema de la Representación para Isótopos, ya que nos proporciona herramientas clave para entender la relación entre la matriz \mathbf{D} y la forma específica de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

Para avanzar en la demostración, es esencial introducir y analizar la matriz de reflexión en torno al vector \mathbf{u} . Esta matriz de reflexión, denotada como \mathbf{R}_u (ver figura B.3), juega un papel importante en la descomposición y análisis de la matriz \mathbf{D} . Su relevancia se destaca en el hecho de que permite establecer una conexión directa entre los vectores propios de \mathbf{D} y los de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

La reflexión es una transformación simétrica que proporciona un caso particular interesante para estudiar cómo las matrices simétricas se comportan bajo tales transformaciones. Esto es útil para analizar la estructura interna de matrices simétricas en términos de sus vectores y valores propios.

Además, en el Teorema de Representación para Isótopos, $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ debe ser invariante bajo todas

las rotaciones y reflexiones que preservan las propiedades de simetría de \mathbf{D} . Esto se debe a que las propiedades físicas de un medio isótropo no deben depender de la orientación del sistema de coordenadas. En otras palabras, las características intrínsecas del medio deben permanecer inalteradas ante cualquier rotación o reflexión del sistema de referencia. La invariancia bajo estas transformaciones asegura que $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ represente correctamente las propiedades del medio sin introducir artefactos debidos a la elección del sistema de coordenadas.

La matriz \mathbf{R}_u es una herramienta útil para construir y analizar $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ de manera que se mantenga esta invariancia. Esto nos permitirá deducir una forma precisa y aplicable de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ que sea consistente con los principios de isotropía y simetría del medio continuo en estudio.

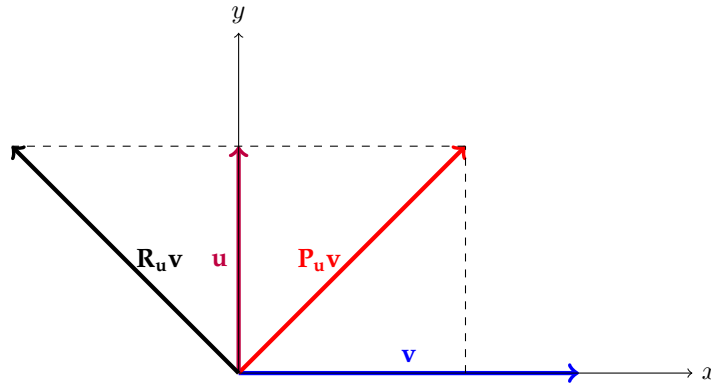


Figura B.3: Reflexión de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} .

Específicamente, la matriz de reflexión nos ayudará a demostrar que cada vector propio de la matriz simétrica \mathbf{D} también es un vector propio de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$. Este resultado es de gran utilidad ya que facilita la formulación y prueba del Teorema de la Representación para Isótopos de manera formal. La relación entre \mathbf{D} y $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ que se establece a través de la reflexión será crucial para comprender la estructura y las propiedades de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$, permitiendo una representación detallada y precisa en el contexto de sistemas isótopos.

A continuación, procederemos a analizar la matriz de reflexión \mathbf{R}_u en relación con la proyección sobre el subespacio generado por el vector \mathbf{u} .

Siguiendo la figura (B.3), podemos expresar la matriz de reflexión en términos de \mathbf{P}_u de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{P}_u \mathbf{v} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}_u) \mathbf{v}$$

De aquí, se deduce que la matriz de reflexión \mathbf{R}_u se puede expresar como:

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}_u \quad (\text{B.10})$$

Esta expresión proporciona una forma compacta y útil de representar la matriz de reflexión en términos de la matriz de proyección \mathbf{P}_u .

Utilizando la ecuación (B.9), podemos expresar (B.10) de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{R}_u = \mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} \quad (\text{B.11})$$

Para aplicar la definición de isotropía más adelante, es crucial que $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ sea invariante bajo la rotación de \mathbf{R}_u , lo que implica que \mathbf{R}_u debe ser una matriz ortogonal. Esta propiedad de la matriz \mathbf{R}_u será esencial para demostrar que cualquier vector propio de la matriz simétrica \mathbf{D} es también vector propio de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$. Siguiendo esta idea, presentamos el siguiente lema:

Lema B.2.4. *La matriz \mathbf{R}_u , definida como la reflexión respecto al vector \mathbf{u} , es ortogonal. Es decir, cumple la siguiente propiedad:*

$$\boxed{\mathbf{R}_u \mathbf{R}_u^T = \mathbf{I},}$$

donde $\mathbf{R}_u = \mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$.

Demostración:

Para demostrar que la matriz \mathbf{R}_u es ortogonal, debemos verificar que cumple con la relación $\mathbf{R}_u \mathbf{R}_u^T = \mathbf{I}$, como se muestra a continuación:

Recordando que $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u} \mathbf{u}^T$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u \mathbf{R}_u^T &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^T \\ &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})[\mathbf{I} - 2(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^T] \\ &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})[\mathbf{I} - 2(\mathbf{u} \mathbf{u}^T)^T] \\ &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \mathbf{u}^T)(\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \mathbf{u}^T) \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{u} \mathbf{u}^T + 4(\mathbf{u} \mathbf{u}^T)(\mathbf{u} \mathbf{u}^T) \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{u} \mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}^T \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{u} \mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}\|\mathbf{u}\|^2\mathbf{u}^T \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{u} \mathbf{u}^T + 4\mathbf{u} \mathbf{u}^T \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que \mathbf{R}_u es una matriz ortogonal, ya que:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{R}_u^T = \mathbf{I}.$$

Q.E.D.

Para avanzar en la demostración del Teorema de la Representación para Isótopos, necesitamos establecer una relación crucial entre la matriz de reflexión \mathbf{R}_u y los vectores propios asociados. El siguiente lema será fundamental en este análisis, ya que afirma que si \mathbf{v} es llevado a su opuesto por la reflexión respecto a \mathbf{u} , entonces \mathbf{v} debe ser un múltiplo escalar de \mathbf{u} . Esta propiedad es clave para demostrar que los vectores propios de \mathbf{D} son también vectores propios de $\mathbf{G}(\mathbf{D})$.

Lema B.2.5. Si $\mathbf{R}_u \mathbf{v} = -\mathbf{v}$, entonces \mathbf{v} es un múltiplo escalar de \mathbf{u} . Es decir, existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$.

Demostración:

La matriz de reflexión \mathbf{R}_u está definida como $\mathbf{R}_u = \mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ según (B.11). Entonces, aplicando \mathbf{R}_u a \mathbf{v} , obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u \mathbf{v} &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \tag{B.12}$$

Dado que $\mathbf{R}_u \mathbf{v} = -\mathbf{v}$, sustituimos en la ecuación (B.12):

$$-\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

Reorganizando, obtenemos:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

Esto implica que \mathbf{v} es un múltiplo escalar de \mathbf{u} , donde $\lambda = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Por lo tanto, $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$.

Q.E.D.

Para avanzar en la demostración del Teorema de la Representación para Isótopos, es crucial establecer algunos resultados preliminares que nos ayudarán a comprender mejor la estructura de las matrices involucradas y sus propiedades bajo transformaciones específicas. En este contexto, presentamos dos lemas que facilitarán el desarrollo y la comprensión del teorema.

Primero, consideramos el siguiente lema:

Lema B.2.6. Dados \mathbf{u} y \mathbf{v} como vectores normales, existe una matriz ortogonal \mathbf{Q} tal que $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Demostración:

En el lema (B.2.4) demostramos que \mathbf{R}_w es ortogonal, como se define en (B.11). Ahora consideramos el vector \mathbf{w} definido por:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|}$$

Dado que:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = 2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

se deduce que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_w \mathbf{u} &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})\mathbf{u} \\
&= (\mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T)\mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T \mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} - 2 \left(\frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|} \right) \left(\frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|} \right)^T \mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} - \frac{2}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2} (\mathbf{u} - \mathbf{v})(\mathbf{u}^T - \mathbf{v}^T)\mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} - \frac{2}{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})} (\mathbf{u}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{v}\mathbf{u}^T + \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} - \frac{2}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2} (\mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{u} - \mathbf{v}\mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{u})
\end{aligned}$$

El producto punto se puede representar como $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_w \mathbf{u} &= \mathbf{u} - \frac{2}{2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} [\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})] \\
&= \mathbf{u} - \frac{1}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} [\mathbf{u}\|\mathbf{u}\|^2 - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{v}\|\mathbf{u}\|^2 + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})] \\
&= \mathbf{u} - \frac{1}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} [\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})] \\
&= \mathbf{u} - \frac{1}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} [\mathbf{u}(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{v}(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})] \\
&= \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Este lema (B.2.6) establece que para cualquier par de vectores normales \mathbf{u} y \mathbf{v} , siempre es posible encontrar una matriz ortogonal que transforme \mathbf{u} en \mathbf{v} . La capacidad de encontrar tal matriz ortogonal es esencial para analizar cómo las transformaciones afectan los vectores propios y las estructuras simétricas. Este resultado nos permitirá manejar de manera más efectiva las transformaciones y rotaciones en el espacio de vectores, lo cual es crucial para el lema (3.2.1) de la sección (3.2) del capítulo 3.

Apéndice C

Códigos de Matlab

Código C.0.1. Código para la segunda solución de la ecuación de Navier-Stokes.

```

1 clear all;
2 clc;
3
4 % Parametros
5 rho = 1.2; % Densidad del fluido (ejemplo: aire en kg/m^3)
6 mu = 0.01; % Viscosidad dinamica
7 alpha = mu / rho; % Viscosidad cinematica
8 c = 1; % Fuente para G=c
9
10 % Dimensiones del elipsoide
11 a = 3; % Semi-eje en la direccion x
12 b = 2; % Semi-eje en la direccion y
13 c = 1; % Semi-eje en la direccion z
14
15 % Longitud caracteristica
16 L = (a * b * c)^(1 / 3); % Longitud caracteristica
17
18 % Tiempo
19 t_i = 0.1; % Tiempo inicial
20 t_f = 5;
21 N = 100; % Particiones del intervalo de tiempo
22 t_vals = linspace(t_i, t_f, N); % Valores de tiempo
23 num_frames = length(t_vals);
24
25 % Definimos la malla en el espacio
26 n = 0.5; % Espaciado de la malla (aumentado para mayor densidad)
27 [x, y, z] = meshgrid(-a:n:a, -b:n:b, -c:n:c);
28
29 % Creamos una mascara logica para los puntos dentro del elipsoide
30 elipsoide_mask = (x.^2 / a^2 + y.^2 / b^2 + z.^2 / c^2) <= 1;
31
32 % Campo inicial (vector de velocidad inicial v0(y))
33 [y1, y2, y3] = meshgrid(-a:n:a, -b:n:b, -c:n:c);
34
35 % Definimos la velocidad inicial
36 v0x = sin(y1 + y2) .* cos(y3);
37 v0y = cos(y1) .* sin(y2 + y3);
38 v0z = sin(y1 + y2 + y3) .* cos(y1 + y2 + y3);
39
40 % Parametrizar la curva r(l)
41 l = linspace(0, 1, 100); % Valores de l
42 y1_param = l; % y1(l) = l
43 y2_param = l.^2; % y2(l) = l^2
44 y3_param = l.^3; % y3(l) = l^3
45
46 % Derivadas de la parametrizacion
47 dy1_dl = 1; % Derivada de y1(l) = 1
48 dy2_dl = 2.*l; % Derivada de y2(l) = 2*l

```

```

49 dy3_dl = 3.*l.^2;           % Derivada de y3(l) = 3*l^2
50
51 % Inicializar el vector integrand
52 integrand = zeros(size(l)); % Inicializar el vector integrand
53
54 % Evaluar el campo en los puntos parametrizados (con interp3 en lugar de interp2)
55 for i = 1:length(l)
56     % Interpolar los valores de v0x, v0y y v0z
57     v0x_interp = interp3(y1, y2, y3, v0x, y1_param(i), y2_param(i), y3_param(i));
58     v0y_interp = interp3(y1, y2, y3, v0y, y1_param(i), y2_param(i), y3_param(i));
59     v0z_interp = interp3(y1, y2, y3, v0z, y1_param(i), y2_param(i), y3_param(i));
60
61     % Calcular el integrando
62     integrand(i) = ...
63         v0x_interp * dy1_dl + ...
64         v0y_interp * dy2_dl(i) + ...
65         v0z_interp * dy3_dl(i);
66 end
67
68 % Calcular la integral de linea usando la regla del trapecio
69 integral_value = trapz(l, integrand); % Usando la regla del trapezoide
70 % Parametrizacion de la curva sobre el elipsoide
71 l = linspace(0, 1, 100); % Parametro l para recorrer la curva
72 theta_param = l * pi; % Ejemplo: theta(l) linealmente varia entre 0 y pi
73 phi_param = l * pi / 2; % Ejemplo: phi(l) varia entre 0 y pi/2
74
75 % Parametrizacion de la curva sobre el elipsoide
76 y1_param = a * cos(theta_param) .* sin(phi_param);
77 y2_param = b * sin(theta_param) .* sin(phi_param);
78 y3_param = c * cos(phi_param);
79
80 % Derivadas con respecto al parametro l
81 dy1_dl = a * (-sin(theta_param) .* sin(phi_param));
82 dy2_dl = b * (cos(theta_param) .* sin(phi_param));
83 dy3_dl = c * (-sin(phi_param));
84
85 % Evaluar la integral sobre la curva parametrizada
86 integrand = zeros(size(l)); % Inicializar el vector integrand
87
88 for i = 1:length(l)
89     % Interpolar el campo de velocidad en la curva parametrizada
90     v0x_interp = interp3(y1, y2, y3, v0x, y1_param(i), y2_param(i), y3_param(i));
91     v0y_interp = interp3(y1, y2, y3, v0y, y1_param(i), y2_param(i), y3_param(i));
92     v0z_interp = interp3(y1, y2, y3, v0z, y1_param(i), y2_param(i), y3_param(i));
93
94     % Calcular el integrando
95     integrand(i) = ...
96         v0x_interp * dy1_dl(i) + ...
97         v0y_interp * dy2_dl(i) + ...
98         v0z_interp * dy3_dl(i);
99 end
100
101 % Calcular la integral de linea
102 integral_value = trapz(l, integrand);
103
104
105 % Inicializar la figura
106 figure('Position', [100, 100, 1400, 800]);
107 colormap jet;
108 shading interp;
109 axis tight;
110
111 % Inicializamos las superficies y el campo de flechas
112 subplot(2, 2, 1);
113 surf_vx = surf(x(:, :, 1), y(:, :, 1), zeros(size(v0x(:, :, 1))));
114 title('Superficie de v_x');

```

```

115 xlabel('x');
116 ylabel('y');
117 zlabel('v_x');
118 set(gca, 'Position', [0.05, 0.55, 0.25, 0.35]);
119
120 subplot(2, 2, 2);
121 surf_vy = surf(x(:,:,1), y(:,:,1), zeros(size(v0y(:,:,1))));
122 title('Superficie de v_y');
123 xlabel('x');
124 ylabel('y');
125 zlabel('v_y');
126 set(gca, 'Position', [0.35, 0.55, 0.25, 0.35]);
127
128 subplot(2, 2, 3);
129 surf_vz = surf(x(:,:,1), y(:,:,1), zeros(size(v0z(:,:,1))));
130 title('Superficie de v_z');
131 xlabel('x');
132 ylabel('y');
133 zlabel('v_z');
134 set(gca, 'Position', [0.65, 0.55, 0.25, 0.35]);
135
136 % Hacemos la ventana del campo de flechas mas grande (quiver3)
137 subplot(2, 1, 2);
138 quiver3_field = quiver3(x, y, z, zeros(size(v0x)), zeros(size(v0y)),
139     zeros(size(v0z)));
140 xlabel('x');
141 ylabel('y');
142 zlabel('z');
143 axis tight;
144 set(gca, 'Position', [0.1, 0.05, 0.8, 0.4]);
145
146 % Condiciones de frontera para el campo de velocidad
147 for i = 1:num_frames
148     t = t_vals(i);
149
150     % Inicializar campo de velocidad para este t
151     arg = zeros(size(x));
152
153     % Integral sobre y1, y2, y3 en el elipsoide
154     for y1 = -a:0.1:a
155         for y2 = -b:0.1:b
156             for y3 = -c:0.1:c
157                 % Verificar si el punto esta dentro del elipsoide
158                 if (y1^2/a^2 + y2^2/b^2 + y3^2/c^2) <= 1
159                     % Exponencial en la integral
160                     exp_factor = exp(-((x - y1).^2 + (y - y2).^2 + ...
161                         + (z - y3).^2) / (4 * alpha * t) + ...
162                         - (c * t) / (2 * alpha) + ...
163                         - 1 / (2 * alpha) * integral_value);
164                     arg = arg + exp_factor;
165                 end
166             end
167         end
168     end
169
170     % Normalizar por el factor de integral
171     factor = 1 / ((4 * pi * alpha * t)^(3/2));
172     arg = arg * factor;
173
174     % Condiciones de frontera: No deslizamiento
175     %(campo de velocidad igual a cero en la frontera)
176     % Aplicamos la condicion de no deslizamiento en las fronteras del elipsoide
177     for ix = 1:length(x)
178         for iy = 1:length(y)
179             for iz = 1:length(z)
180                 % Condicion de frontera para el elipsoide

```

```

181         if (x(ix)^2 / a^2 + y(iy)^2 / b^2 + z(iz)^2 / c^2) > 1
182             % No deslizamiento: ponemos la velocidad a cero
183             vx(ix, iy, iz) = 0;
184             vy(ix, iy, iz) = 0;
185             vz(ix, iy, iz) = 0;
186         end
187     end
188 end
189 end
190
191 % Gradiente de la velocidad
192 [grad_vx_x, grad_vy_y, grad_vz_z] = gradient(arg, 0.1, 0.1, 0.1);
193
194 % Velocidad
195 vx = -2 * alpha * grad_vx_x;
196 vy = -2 * alpha * grad_vy_y;
197 vz = -2 * alpha * grad_vz_z;
198
199 % Calculamos la magnitud del campo de velocidad
200 v_magnitud = sqrt(vx.^2 + vy.^2 + vz.^2);
201
202 % Calculamos el numero de Reynolds en cada punto
203 Re = (rho * v_magnitud * L) / mu;
204
205 % Determinar el estado del flujo basado en el numero de Reynolds
206 if any(Re(:) > 10000)
207     flujo_estado = 'Flujo Turbulento';
208 elseif any(Re(:) >= 2000)
209     flujo_estado = 'Flujo de Transicion';
210 else
211     flujo_estado = 'Flujo Laminar';
212 end
213
214 % Actualizar las superficies
215 set(surf_vx, 'ZData', vx(:,:,1));
216 set(surf_vy, 'ZData', vy(:,:,1));
217 set(surf_vz, 'ZData', vz(:,:,1));
218
219 % Actualizar el campo de flechas
220 set(quiver3_field, 'UData', vx, 'VData', vy, 'WData', vz);
221
222 % Actualizar el titulo
223 title(sprintf('Campo de Velocidad v(x, t): %s', flujo_estado)
224 , 'FontSize', 14);
225
226 % Pausar para crear el efecto de animacion
227 pause(0.1);
228 disp(['Tiempo: ' num2str(t) ', Re: ' num2str(max(Re(:))) ',
229 Estado: ' flujo_estado]);
230 end

```

Código C.0.2. Código para la segunda solución de la ecuación de Navier-Stokes.

```

1 clear all; clc;
2
3 % Parametros:
4 lambda = -1; % 1/m
5 rho = 1.2; % Densidad del fluido (ejemplo: aire en kg/m^3)
6 mu = 0.001; % Viscosidad dinamica
7 alpha = mu / rho; % Viscosidad cinematica
8 L = 4; % Longitud caracteristica del fluido en un cubo
9
10 a = 0; % Intervalo de tiempo [a, b]
11 b = 5;
12 N = 100; % Particiones del intervalo de tiempo
13 t_vals = linspace(a, b, N); % Valores de tiempo

```

```

14 num_frames = length(t_vals);
15 ds = t_vals(2) - t_vals(1); % Paso de tiempo
16
17 % Hacemos la malla
18 n = 0.1;
19 [x, y, z] = meshgrid(-L/2:n:L/2, -L/2:n:L/2, -L/2:n:L/2);
20
21 % Campo vectorial inicial v0(x)
22 v0x = sin(y) + cos(z);
23 v0y = sin(z) + cos(x);
24 v0z = sin(x) + cos(y);
25
26 % Inicializar la figura
27 figure('Position', [100, 100, 1400, 800]);
28 colormap jet;
29 axis tight;
30
31 % Inicializar las superficies y el campo de flechas
32 subplot(2,3,1);
33 surf_vx = surf(x(:,:,1), y(:,:,1), zeros(size(v0x(:,:,1))));
34 title('Superficie de v_x');
35 xlabel('x');
36 ylabel('y');
37 zlabel('v_x');
38 set(gca, 'Position', [0.05, 0.55, 0.25, 0.35]); % Hace el grafico mas chico
39
40 subplot(2,3,2);
41 surf_vy = surf(x(:,:,1), y(:,:,1), zeros(size(v0y(:,:,1))));
42 title('Superficie de v_y');
43 xlabel('x');
44 ylabel('y');
45 zlabel('v_y');
46 set(gca, 'Position', [0.35, 0.55, 0.25, 0.35]);
47
48 subplot(2,3,3);
49 surf_vz = surf(x(:,:,1), y(:,:,1), zeros(size(v0z(:,:,1))));
50 title('Superficie de v_z');
51 xlabel('x');
52 ylabel('y');
53 zlabel('v_z');
54 set(gca, 'Position', [0.65, 0.55, 0.25, 0.35]);
55
56 % Hacemos la ventana del campo de flechas mas grande (quiver3)
57 subplot(2,1,2);
58 quiver3_field = quiver3(x, y, z, zeros(size(v0x)), zeros(size(v0y)),
59 zeros(size(v0z)));
60 xlabel('x');
61 ylabel('y');
62 zlabel('z');
63 axis tight;
64 % Hace el grafico de quiver3 mas grande
65 set(gca, 'Position', [0.1, 0.05, 0.8, 0.4]);
66
67
68 % Bucle sobre los valores de t
69 for i = 1:num_frames
70     t = t_vals(i);
71
72     % Termino exponencial
73     exp_factor = exp(-alpha * lambda^2 * t);
74
75     % Calcular el rotacional de v0(x) numericamente
76     [curl_v0x, curl_v0y, curl_v0z] = curl(x, y, z, v0x, v0y, v0z);
77     vx = (1 / lambda) * curl_v0x * exp_factor;
78     vy = (1 / lambda) * curl_v0y * exp_factor;
79     vz = (1 / lambda) * curl_v0z * exp_factor;

```

```

80
81 % Inicializar el termino integral
82 integral_term_x = zeros(size(x));
83 integral_term_y = zeros(size(x));
84 integral_term_z = zeros(size(x));
85
86 % Aproximacion de la integral con suma discreta
87 for j = 1:i
88     s = t_vals(j);
89
90     % Definir el campo vectorial f(s, t)
91     fx = cos(x + y + z).*sin(s);
92     fy = sin(x + y + z).*sin(s.^2);
93     fz = cos(y) + z + s;
94
95     exp_integral_factor = exp(-alpha * lambda^2 * (t - s));
96
97     % Calcular el rotacional de f(x, s)
98     [curl_fx, curl_fy, curl_fz] = curl(x, y, z, fx, fy, fz);
99
100    % Aproximar el laplaciano del rotacional
101    laplacian_curl_fx = del2(curl_fx, n);
102    laplacian_curl_fy = del2(curl_fy, n);
103    laplacian_curl_fz = del2(curl_fz, n);
104
105    % Sumar contribuciones al termino de la integral
106    integral_term_x = integral_term_x +...
107    - (1 / lambda^3) * laplacian_curl_fx * exp_integral_factor * ds;
108    integral_term_y = integral_term_y +...
109    - (1 / lambda^3) * laplacian_curl_fy * exp_integral_factor * ds;
110    integral_term_z = integral_term_z +...
111    - (1 / lambda^3) * laplacian_curl_fz * exp_integral_factor * ds;
112 end
113
114 % Sumar las contribuciones
115 vx_total = vx + integral_term_x;
116 vy_total = vy + integral_term_y;
117 vz_total = vz + integral_term_z;
118
119 % Aplicar condiciones de frontera (no deslizamiento)
120 vx_total([1, end], :, :) = 0;
121 vx_total(:, [1, end], :) = 0;
122
123
124 vy_total([1, end], :, :) = 0;
125 vy_total(:, [1, end], :) = 0;
126
127
128 vz_total([1, end], :, :) = 0;
129 vz_total(:, [1, end], :) = 0;
130
131
132 % Calcular la magnitud del campo de velocidad
133 v_magnitud = sqrt(vx_total.^2 + vy_total.^2 + vz_total.^2);
134
135 % Calcular el numero de Reynolds
136 Re = (rho * v_magnitud * L) / mu;
137
138 % Determinar el estado del flujo basado en el numero de Reynolds
139 if any(Re(:) > 10000) % Flujo turbulento
140     flujo_estado = 'Flujo Turbulento';
141 elseif any(Re(:) >= 2000) % Flujo de transicion
142     flujo_estado = 'Flujo de Transicion';
143 else % Flujo laminar
144     flujo_estado = 'Flujo Laminar';
145 end

```

```
146
147     % Escalar la visualizacion de la velocidad (opcional)
148     scale_factor = 1 / mu; % Aumentar o reducir la velocidad visualmente
149     vx_total_scaled = vx_total * scale_factor;
150     vy_total_scaled = vy_total * scale_factor;
151     vz_total_scaled = vz_total * scale_factor;
152
153     % Actualizar las superficies
154     set(surf_vx, 'ZData', vx_total_scaled(:,:,1));
155     set(surf_vy, 'ZData', vy_total_scaled(:,:,1));
156     set(surf_vz, 'ZData', vz_total_scaled(:,:,1));
157
158     % Actualizar el campo de flechas
159     set(quiver3_field, 'UData', vx_total_scaled, 'VData', vy_total_scaled,
160         'WData', vz_total_scaled);
161
162     % Actualizar el titulo
163     title(sprintf('Campo de Velocidad v(x, t): %s', flujo_estado),
164         'FontSize', 14);
165
166     % Pausa para animacion
167     pause(0.1);
168     disp(['Tiempo: ' num2str(t) ', Re: ' num2str(max(Re(:))) ',
169         Estado: ' flujo_estado]);
170 end
```

Bibliografía

- [1] Isaac Newton. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- [2] Daniel Bernoulli. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli
- [3] Jean le Rond d'Alembert. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%27Alembert
- [4] Leonhard Paul Euler. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- [5] Claude-Louis Henri Navier. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Claude-Louis_Henri_Navier
- [6] George Gabriel Stokes. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes
- [7] Holmes, M. H. (2008). *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics* (2nd ed., Vol. 56). Springer.
- [8] Papadopoulos, P. (2020). *ME185 Introduction to Continuum Mechanics*. University of California, Berkeley.
- [9] Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2015). *Fluid Mechanics*. Academic Press.
- [10] Heinbockel, J. H. (1996). Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. Copyright by Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.
- [11] Massachusetts Institute of Technology (MIT). *Lecture notes on continuum mechanics*. Retrieved from <http://web.mit.edu/13.021/demos/lectures/lecture3.pdf>
- [12] Chorin, A. J., & Marsden, J. E. (1979). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer.
- [13] Gurtin, M. E. (1974). A short proof of the representation theorem for isotropic, linear stress-strain relations. *Journal of Elasticity*, 4(3), September. Noordhoff International Publishing. Leyden, The Netherlands. Received March 22, 1974.
- [14] Zamora Picón, J., Puertas López, M., & Del Logo, A. (2021). *Soluciones a la ecuación de Navier-Stokes: Trabajo Fin de Grado en Matemáticas*. [Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad de Almería].
- [15] Giraldo Buesaquillo, V. G., & Alejandro, P. (2014). Soluciones de la ecuación fraccional de Burgers no homogénea - Solutions of the nonhomogeneous fractional Burgers equation. *SciELO*, 19(1), 123-135.
- [16] Roe, P. L. (1986). Indicial notation for the control of fluid dynamics equations. *Journal of Computational Physics*, 65(1), 69-79. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90121-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90121-5)
- [17] Grothendieck, A. (1957). Produit tensoriel de deux espaces vectoriels topologiques. *Sém. Math. Sup. (Montreal)*, 1, 1-17.
- [18] Faculty of Mathematics, University of Waterloo. (n.d.). *AMATH 731 Course Notes: Mean Value Theorem*. University of Waterloo. Retrieved from <https://links.uwaterloo.ca/amath731docs/meanvalue.pdf>

- [19] Weisstein, E. W. (n.d.). Matrix Exponential. In MathWorld – A Wolfram Web Resource. Retrieved from <https://mathworld.wolfram.com/MatrixExponential.html>
- [20] Cadence. (2022). Overview of the Critical Reynolds Number. Retrieved from <https://resources.system-analysis.cadence.com/blog/msa2022-overview-of-the-critical-reynolds-number>