

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

La convergencia del número π

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

MARÍA FERNANDA DOMÍNGUEZ CERDA

DIRECTOR

DR. FELIPE ALFARO AGUILAR

Ciudad de México, octubre de 2024.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS ©

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

El principal agradecimiento es a Dios, por las bendiciones a lo largo de este viaje académico y de investigación. Quiero expresar mi gratitud a Dios por su guía, su amor incondicional y por concederme la fortaleza y la sabiduría necesarias para superar los desafíos y completar este proyecto.

Quiero reconocer y agradecer a mi director de tesis, el profesor Felipe Alfaro Aguilar, por su orientación, apoyo, paciencia y dedicación a lo largo de este proyecto. Sus conocimientos y experiencia fueron fundamentales para el éxito de este trabajo.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los profesores: Igor Peña Ibarra, Isaías López Morales y Daniel Roberto Jardón Arcos por su invaluable contribución como lectores de esta tesis. Su experiencia, comentarios y sugerencias han sido fundamentales para mejorar la calidad y claridad de este trabajo. Aprecio profundamente el tiempo que dedicaron a revisar mi investigación y las valiosas observaciones que realizaron.

También deseo agradecer al profesor Enrique Cruz Martínez por su colaboración y asesoramiento durante el proceso de investigación, sus aportes fueron de gran ayuda para la consecución de este trabajo. Asimismo, agradezco a LACECI por brindarme los recursos y el ambiente propicio para llevar a cabo esta investigación.

Agradezco a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México por brindarme la oportunidad de desarrollar este proyecto y por su constante respaldo.

Y por último, pero no menos importante, agradezco profundamente a mi familia por su constante apoyo y comprensión, especialmente a mis padres, quienes con su amor, paciencia y sacrificio, han sido el pilar fundamental de mi éxito académico y personal.

A mi hija, quien ha sido mi fuente de inspiración durante todo este proceso, en los momentos de desafío y agotamiento, su sonrisa ha sido mi mayor motivación para seguir adelante; gracias por enseñarme el verdadero significado del amor incondicional y por ser mi inspiración constante, este logro es tuyo tanto como mío.

Y a mis queridos hermanos, quienes en los momentos de dificultad, siempre estuvieron allí para levantarme y animarme, los amo con todo mi corazón. Me siento verdaderamente bendecida por tenerlos en mi vida. Gracias por su constante aliento, por creer en mí y por guiarme en cada paso del camino. Este logro no habría sido posible sin ustedes.

A todas las personas que, de una u otra manera, contribuyeron con su tiempo, esfuerzo o simplemente una sonrisa cuando más la necesitaba.

Nada es más honorable que un corazón agradecido. No puedo encontrar palabras suficientes para expresar mi gratitud. Este logro no habría sido posible sin la colaboración y el apoyo incondicional de todas las personas mencionadas. Gracias por ser parte de este viaje.

Esta tesis fue apoyada por un proyecto interno de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México con folio CCYT-2023-INI-09.

María Fernanda Domínguez Cerda

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi amada hija, Melani Sofia Alemán Domínguez. Eres mi fuente de alegría, inspiración y motivo para superar desafíos. Durante este arduo viaje académico, tu sonrisa radiante y amor incondicional han sido mi mayor impulso. Quiero que sepas que este logro es tanto tuyo como mío, pues cada página de esta tesis lleva impresa la dedicación a un futuro mejor para ti. Que esta tesis sea un testimonio de mi compromiso contigo y de la importancia que tiene tu felicidad y éxito en mi vida. Siempre seguiré esforzándome para construir un mundo mejor para ti. Te amo con todo mi ser.

También dedico esta tesis a mis padres Fernando y Verónica, cuyo amor, apoyo constante y sacrificios innumerables han sido mi inspiración y fortaleza a lo largo de este viaje. Sin su apoyo y aliento, este logro no habría sido posible. Cada página de esta tesis lleva impreso su legado de valores y dedicación, y es un testimonio de su incansable apoyo. Los amo con todo mi corazón.

Esta tesis está dedicada a todos aquellos que creyeron en mí y me alentaron a alcanzar mis metas. Su confianza en mi capacidad fue el impulso que necesitaba para dar lo mejor de mí en este proyecto. A cada uno de ustedes, les agradezco de todo corazón por su apoyo inquebrantable.

María Fernanda Domínguez Cerda

Objetivos

Objetivos generales

- ✓ Estudiar series y secuencias que permiten aproximarse al número π con precisión arbitraria.
- ✓ El estudio se divide en tres grandes etapas que surgen de manera natural, cada etapa se distingue de la anterior en que cambian las matemáticas utilizadas. La segunda etapa empieza con la invención del Cálculo Infinitesimal y las series, y la tercera etapa empieza con el uso de la Geometría Algebraica. Entonces buscamos estudiar los distintos algoritmos que surgieron en estas tres etapas y analizar su velocidad de convergencia.
- ✓ Promover el interés en las Matemáticas.

Objetivos específicos

- ✓ Presentar un análisis de la aportación Arquimediana, considerando que en aquella época ni existían los números decimales, no existía la trigonometría.
- ✓ Abordar brevemente su historia e identificar antecedentes del número π .
- ✓ Comparar las aproximaciones antiguas con las actuales.
- ✓ Calcular π con la mayor precisión matemática posible con los recursos disponibles.
- ✓ Estudiar la velocidad de convergencia utilizando Python observando la capacidad del algoritmo para generar dígitos correctos de π , y que tan rápido lo hace.
- ✓ Estudiar la velocidad de convergencia de forma teórica, a través del análisis de error.
- ✓ Estudiar la normalidad de π .
- ✓ Realizar pruebas y validación de resultados obtenidos a medida que se calcula π , asegurándose que no haya errores en los cálculos.

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	III
Objetivos	V
Índice de figuras	X
Índice de cuadros	XII
Índice de códigos	XIII
Introducción	XV
1. Etapa geométrica	1
1.1. Proposición 1. Sobre el área del círculo	2
1.2. Proposición 3. Sobre el perímetro del círculo	5
1.2.1. Hexágono	13
1.2.2. Secuencia general	20
2. Etapa del Cálculo Infinitesimal	33
2.1. Serie de Leibniz con $x = 1$	35
2.2. Serie de Abraham Sharp con $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	38
2.3. Series tipo Machin	40
3. Etapa moderna (siglo XX)	55
3.1. Srinivasa Ramanujan (1887-1920)	55
3.2. Hermanos Chudnovsky	60
Conclusiones	67
Anexo A: Búsqueda de secuencias en el número π	69
Anexo B: Precisión arbitraria	77
Anexo C: Códigos en Python	79
Bibliografía	93
Referencias de Imágenes	96

Índice de figuras

1.	Papiro de Ahmes	XVIII
2.	Cuadratura del círculo	XVIII
1.1.	Arquímedes de Siracusa	1
1.2.	Proposición 1	3
1.3.	ABCD círculo	3
1.4.	Triángulo K. La base es el perímetro y la altura es el radio de la circunferencia.	3
1.5.	Representación gráfica correspondiente a la primera parte de la demostración de la Proposición 3.	7
1.6.	Representación gráfica correspondiente a la segunda parte de la demostración de la Proposición 3.	10
1.7.	Hexágono inscrito dividido en triángulos equiláteros.	14
1.8.	Hexágono circunscrito.	14
1.9.	Secuencia de fracciones que convergen a $\sqrt{3}$	19
1.10.	Polígono inscrito de n lados.	20
1.11.	Polígono circunscrito de n lados.	20
1.12.	Aproximaciones a π obtenidas por Arquímedes.	23
1.13.	Con 16 duplicaciones del hexágono inscrito y 18 del circunscrito se obtienen 10 decimales de π	25
1.14.	Con 165 duplicaciones del hexágono inscrito y 167 del circunscrito se obtienen 100 decimales de π	26
1.15.	Con 16,609 duplicaciones del hexágono inscrito se obtienen 10,000 decimales de π en 196 segundos.	26
1.16.	Con 16,610 duplicaciones del hexágono circunscrito se obtienen 10,000 decimales de π en 227 segundos.	26
2.1.	James Gregory	33
2.2.	Gottfried Wilhelm Leibniz	33
2.3.	Serie de Leibniz, 136 mil términos de la serie para obtener 5 dígitos de π	36
2.4.	Serie de Leibniz, 156 millones términos de la serie para obtener 8 dígitos de π	37
2.5.	Serie de Leibniz, relación n vs j , con escala logarítmica en el número de términos j	37
2.6.	Abraham Sharp	38
2.7.	Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la serie de Sharp.	40
2.8.	John Machin	43
2.9.	Fórmula de Machin, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.	45
2.10.	Leonhard Euler	46
2.11.	Fórmula de Euler, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.	48
2.12.	Fórmula de William, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.	50
2.13.	Fórmula de Shulz, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.	52

2.14. Comparación de tiempos de cálculo entre la secuencia de Arquímedes y la serie de Machin.	53
3.1. Srinivasa Ramanujan	56
3.2. Gráfica de secuencias de 1 dígito hasta una longitud de 100,000.	71
3.3. Gráfica de secuencias de 2 dígitos hasta una longitud de 100,000.	73
3.4. Gráfica de secuencias de 3 dígitos hasta una longitud de 100,000.	74
3.5. Gráfica de secuencias de 4 dígitos hasta una longitud de 100,000.	74
3.6. Gráfica de secuencias de 5 dígitos hasta una longitud de 100,000.	75

Índice de cuadros

1.	Aproximaciones de π utilizadas antes de los cálculos de Arquímedes	XXI
1.1.	Aproximaciones del número π por polígono inscrito.	22
1.2.	Aproximaciones del número π por polígono circunscrito.	22
1.3.	Datos del polígono inscrito de la Figura 1.14.	27
1.4.	Aproximaciones de π usando polígonos inscritos y circunscritos usando la fórmula de aproximación $j \approx 1.663 \cdot n$	28
1.5.	Más de un millón de dígitos de π en 13 segundos usando la fórmula de aproximación $j \approx 1.663 \cdot n$	29
1.6.	Comparación del número de lados del polígono.	30
1.7.	Aproximaciones a π con el método geométrico.	32
2.1.	Obtención de n dígitos de π sumando los primeros j términos de la serie.	36
2.2.	Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la serie de Sharp.	39
2.3.	Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de Machin.	44
2.4.	Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de Euler.	47
2.5.	Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de William Rutherford.	49
2.6.	Dígitos correctos obtenidos por Dase en menos de dos meses en 1844.	50
2.7.	Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de Shulz.	51
2.8.	Obtención de n cifras correctas en la secuencia de Arquímedes para polígonos inscritos (1.23) y la serie de Machin (2.9).	53
3.1.	Fórmula de Ramanujan. 8 dígitos de π por cada término de la serie.	58
3.2.	Resultados de términos y tiempos con la fórmula de los hermanos Chudnovsky.	61
3.3.	Hermanos Chudnovsky. 14 dígitos de π por cada término de la serie.	61
3.4.	Tabla obtenida del libro de Posamentier & Lehmann [16].	62
3.5.	Frecuencias en 200 000 000 000 dígitos de π	70
3.6.	Ejemplo: Probabilidad de encontrar cadenas en π . (Andersen, como se citó en Zhúkov, 2004, p.69).	70
3.7.	Número de veces que aparece cada secuencia de longitud 1 en los primeros n decimales.	71
3.8.	Número de veces que aparece cada secuencia (00-09) en los dígitos de π	72
3.9.	Secuencias de longitud 2 en los primeros $n + 1$ dígitos de π . Arriba datos generales y abajo casos particulares.	73
3.10.	Secuencias de longitud 3 en los primeros $n + 2$ dígitos de π	73
3.11.	Secuencias de longitud 4 en los primeros $n + 3$ dígitos de π	74

3.12. Secuencias de longitud 5 en los primeros $n + 4$ dígitos de π 75

Índice de Códigos

3.1. La secuencia de Arquímedes.	80
3.2. Secuencia de Arquímedes para aproximar π con polígonos inscritos y graficar n vs t	81
3.3. Gráfica para visualizar la convergencia de π por el método geométrico.	82
3.4. Método de la pendiente.	82
3.5. Serie de Leibniz.	83
3.6. Serie de Abraham Sharp.	84
3.7. Fórmula de John Machin.	85
3.8. Fórmula de Euler.	86
3.9. Fórmula de William.	86
3.10. Fórmula de Shulz.	87
3.11. Gráfica comparativa de la secuencia de Arquímedes vs serie de Machin	88
3.12. Fórmula de Ramanujan	89
3.13. Fórmula de los hermanos Chudnovsky.	89
3.14. Búsqueda de secuencias en el valor de π	90
3.15. Analizador de secuencias en π : Determinando la frecuencia de ocurrencia de secuencias de dígitos específicas en el valor de π	91
3.16. Análisis de frecuencia de secuencias en π	92

Introducción

“Sin Matemáticas no hay nada que hacer. Todo a tu alrededor es Matemáticas. Todo a tu alrededor son números”.

Shakuntala Devi.

Aunque π es considerado un concepto intrínseco en las Matemáticas avanzadas, su relevancia se expande más allá de los confines de las aulas universitarias. Incluso a edades tempranas, como en primaria, los estudiantes ya están informados de este número, lo que subraya la importancia de comprender π desde una edad temprana y destaca su papel fundamental en la educación Matemática.

A lo largo de los siglos, numerosos matemáticos se han dedicado a calcular π con la mayor precisión posible y comprender la naturaleza de su convergencia. La búsqueda ha conducido a descubrimientos fascinantes y ha desafiado constantemente los límites del conocimiento matemático. La importancia de π trasciende las fronteras de las Matemáticas, encontrando aplicaciones en campos tan diversos como Física, Ingeniería, Astronomía, Estadística y ciencia de la Computación.

Adentrarse en el fascinante mundo de π y sus maravillas matemáticas nos invita a explorar sus diversos aspectos. Por tanto, es fundamental iniciar nuestra discusión presentando la definición de este número.

El valor de este número se obtiene dividiendo la longitud de una circunferencia entre el diámetro y no importa el tamaño del círculo, es notable que esta proporción permanezca constante, independientemente del tamaño del círculo. Sea grande o pequeño, la relación entre estas dos medidas siempre será la misma, aproximadamente $3.14 \dots$. El número π como irracional que es, la secuencia decimal es infinita no periódica, lo que significa que no puede ser expresado de manera precisa en forma de fracción. La búsqueda de métodos para calcular π con mayor precisión, así como el estudio de sus propiedades matemáticas, ha llevado a importantes avances en el conocimiento matemático y ha generado un interés continuo en este número irracional.

En esta tesis, nos enfocaremos en el estudio de los algoritmos para calcular al número π y su velocidad de convergencia. La convergencia, en el contexto de π , se refiere a cómo las aproximaciones sucesivas del valor de este número se acercan cada vez más a su valor real, es decir, convergencia significa que el límite de la secuencia o serie existe. Exploraremos diferentes algoritmos que surgieron a lo largo de la historia, y como iban mejorando su capacidad para hallar cada vez más dígitos correctos de este número. Al comprender mejor la convergencia de π , no sólo ganamos una apreciación más profunda de esta constante matemática fundamental, sino que también obtenemos perspectivas valiosas sobre la naturaleza de la precisión matemática y los límites de la computación numérica. A través de este estudio, esperamos contribuir al cuerpo de conocimiento existente sobre esta constante y su convergencia, así como inspirar nuevas investigaciones en este apasionante campo de estudio.

Nuestro objetivo principal es analizar y comparar varios métodos de convergencia de π , desde las aproximaciones geométricas de la antigüedad hasta las sofisticadas series del siglo XX. Además, investigaremos cómo la convergencia del número π está intrínsecamente ligada a otros conceptos matemáticos, como las secuencias infinitas y las series numéricas.

A pesar de los avances significativos en el cálculo de π a lo largo de los siglos, aún existen áreas de investigación abiertas en este campo. La comprensión más profunda de la convergencia de los métodos de cálculo de π no sólo contribuirá al conocimiento teórico en Matemáticas, sino que también puede tener implicaciones prácticas en áreas como la optimización de algoritmos y la precisión numérica en cálculos computacionales.

Al presentar su relevancia histórica, espero que con este trabajo las personas despierten un mayor interés en el tema y motivarlas a aprender más sobre el número π , pues en los dígitos de esta constante puede estar la fecha de su cumpleaños, el número de su celular, tu clave interbancaria, mensajes codificados es decir que puede aparecer en cualquier secuencia finita de números. La investigación sobre los métodos de aproximación de π no sólo representa una exploración fascinante de la historia de las Matemáticas, sino que también tiene implicaciones fundamentales en diversos campos científicos y tecnológicos. Este trabajo no sólo contribuirá al cuerpo de conocimientos matemáticos, sino que también ofrecerá herramientas prácticas y perspectivas valiosas para comprender y mejorar los métodos de aproximación de π en la actualidad.

En la Tesis se presentarán los métodos matemáticos que se han empleado para la aproximación más precisa del número π . La estructura de la Tesis se divide en tres etapas: la geométrica, la del Cálculo Infinitesimal y la moderna (siglo XX).

→ **Capítulo 1. Etapa geométrica**

En esta etapa, exploramos detalladamente el método geométrico utilizado por Arquímedes de Siracusa, destacando las Proposiciones 1 y 2 de su trabajo. En este análisis, interpretamos tanto la demostración moderna como la demostración del siglo XIX, proporcionando un contexto claro para la comprensión de sus contribuciones. Este capítulo inicia la exploración detallada de las aproximaciones de π desde una perspectiva geométrica.

→ **Capítulo 2. Etapa del Cálculo Infinitesimal**

Esta fase de la investigación nos apartamos del enfoque geométrico y procedemos a introducir el método del cálculo de Gregory-Leibniz, el cual se basa en el uso de series. Luego, exploramos la influencia de Abraham Sharp en el desarrollo de este campo y cómo, a partir de sus contribuciones, se derivaron las fórmulas tipo Machin, que jugaron un papel crucial en la historia del cálculo de π .

→ **Capítulo 3. Etapa moderna (siglo XX)**

Con el siglo XX inicia una nueva etapa de fórmulas para calcular π con una velocidad de convergencia muy superior a las obtenidas en siglos anteriores. El personaje que inaugura esta etapa es el genio indio Srinivasa Ramanujan que obtiene una larga lista de series para $\frac{1}{\pi}$. En todas ellas y en todas las series y sucesiones modernas que se han obtenido desde entonces se utilizan matemáticas avanzadas, integrales elípticas y geometría algebraica.

Presentamos un apartado dedicado a los anexos.

★ Anexo A. Búsqueda de secuencias en el número π .

Este anexo se enfoca en explorar la normalidad de π mediante el análisis de secuencias en sus dígitos. Más que definir la normalidad, nos sumergimos en cómo los patrones de secuencias contribuyen a su caracterización como un número normal. Emplearemos códigos para explorar y explicar este concepto, compartiendo los resultados para detectar y analizar secuencias en los dígitos de π , lo que enriquecerá nuestra comprensión de su comportamiento.

★ Anexo B. Aritmética de precisión arbitraria.

Proporcionamos información sobre cómo realizar cálculos con precisión arbitraria en Python, utilizando la biblioteca *mpmath*, la cual empleamos en nuestros códigos. Esta capacidad para trabajar con una precisión arbitraria es crucial en el estudio de números como π , donde la exactitud numérica es esencial para obtener resultados confiables y precisos.

★ Anexo C. Códigos en Python.

En este espacio, se incluyen los programas desarrollados en Python para la aproximación de π , proporcionando a los lectores una referencia práctica y detallada de la implementación de los métodos discutidos en el texto principal.

Finalmente incluimos un apartado con las conclusiones y reflexiones finales a las que llegué después de haber realizado la Tesis, la cual fue elaborada utilizando el sistema de composición tipográfica L^AT_EX. Además, empleamos Python para los códigos elaborados, lo que permitió una mayor eficiencia en la implementación y ejecución de los algoritmos utilizados.

Cabe mencionar que para las demostraciones usaremos el siguiente signo: ■, indicando el final de cada prueba.

Las imágenes que aparecen en este trabajo han sido empleadas exclusivamente para fines académicos y sin ánimo de lucro. Todos los derechos de autor de las imágenes pertenecen a sus respectivos dueños, y se han utilizado con respeto a las normativas de uso justo o las licencias correspondientes.

En todo el documento emplearemos la forma bibliográfica APA (American Psychological Association) 2019, 7^a edición, para realizar citas y referencias bibliográficas.

Antecedentes

En esta introducción, se presentan los antecedentes históricos del número π que datan de épocas anteriores al famoso matemático griego Arquímedes. Estos antecedentes proporcionan un contexto fundamental para comprender la evolución del estudio de este número irracional a lo largo del tiempo y su significado en diversas culturas y civilizaciones.

• Cultura Egipcia

Aunque es probable que este asombroso número fuera conocido con anterioridad, las primeras evidencias documentadas de su conocimiento están en el Papiro de Ahmes, que fue descubierto en Tebas, una antigua ciudad en Egipto, en las ruinas de un edificio. También llamado papiro de Rhind en honor al escocés Alexander Henry Rhind, quien lo adquirió en una ciudad turística a orillas del Nilo en el siglo XIX. (Beckmann, 2006, p.29, [3]).



Figura 1: Papiro de Ahmes. (OpenMind BBVA, 2021).

El papiro se estima que data de alrededor del 1650 a.C. y fue escrito por el escriba egipcio Ahmes, quien dio la primer aproximación de π cuando dijo que si construimos un cuadrado con un lado cuya longitud sea ocho novenos del diámetro de un círculo, entonces el área del cuadrado será igual a la del círculo. En cambio, el desafío consistía en crear un cuadrado empleando las herramientas clásicas, como una regla sin marcas y un par de compases, de manera que su área fuera equivalente a la del círculo proporcionado. (Posamentier & Lehmann, 2004, p.42, [16]).

Navarro (2010, [14]), argumenta que dicha aproximación se encuentra en el problema número 50 de los 87 que contiene, nos dice: «Un campo circular tiene un diámetro de 9 khet (1 khet \approx 50 m). ¿Cuál es su área?». Con los conocimientos actuales, sabemos que la fórmula para calcular el área de un círculo es πr^2 , entonces tenemos que:

$$\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \pi \frac{81}{4}$$

Sin embargo, el propio papiro presenta el método para calcular el área, que consiste en:

$$\frac{64}{81}d^2$$

donde d es el diámetro. Ahora bien, como $d = 9$, sustituyendo

$$\begin{aligned} \pi \frac{81}{4} &\approx \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(9^2) = \frac{64}{81}(81) \\ \pi \frac{81}{4} &\approx 64 \\ \pi &\approx \frac{256}{81} \approx 3.160493827 \end{aligned}$$

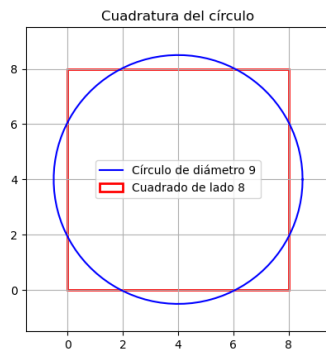


Figura 2: Un cuadrado de lado 8 equivale en superficie a un círculo de diámetro 9.

Aunque la aproximación no se expresa en términos de π , implica un valor de π de:

$$\pi = \frac{256}{81} \approx 3.160493827$$

Sin embargo, esta aproximación es menor que la obtenida, supuestamente, por lo egipcios en Giza alrededor del año 2600 a.C. La relación entre el perímetro y la altura de las pirámides de esa ciudad es de $\frac{22}{7}$, aunque se atribuye a razones divinas según los arquitectos de la época, muchos interpretan esto como una mística aproximación a π . Aceptando esta explicación, llegamos a la conclusión de que

$$\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.142 \dots,$$

una cifra bastante precisa.

Si examinamos el proceso utilizado en el Papiro de Rhind, podemos deducir cuán cerca estaban los antiguos egipcios del valor real del número π . Ésta es una aproximación razonablemente cercana a lo que sabemos actualmente.

Uno de los aspectos más destacados del papiro de Ahmes es el uso de fracciones y aproximaciones de números racionales en la aritmética y la geometría.

En la opinión de Zhúkov (2004, [19]), la presentación del escriba Ahmes se asemeja al estilo de las antiguas tablas babilónicas. En sus textos, también se encuentran métodos para resolver diversos problemas prácticos.

• Cultura babilónica

Ahora avanzamos significativamente en el tiempo hacia la época de los babilonios, que abarca desde el 2000 a.C. hasta aproximadamente el 600 a.C.

Posamentier y Lehmann (2004, [16]), expresan que en 1936, se desenterraron algunas tablillas matemáticas en Susa, ubicada cerca de Babilonia. La traducción de la tablilla de Susa se publicó parcialmente en 1950, se centra en diversas figuras geométricas. Una de estas tablillas compara el perímetro de un hexágono regular con la circunferencia de su círculo circunscrito. La manera en que llevaron a cabo esta comparación llevó a los matemáticos contemporáneos a inferir que los babilonios utilizaban $3 + \frac{1}{8} = 3.125$ como su aproximación para π .

Es importante destacar que los babilonios utilizaban un sistema sexagesimal, es decir, con base 60 en lugar de 10. Los antiguos babilonios afirmaban de que el perímetro de un hexágono es precisamente seis veces el radio del círculo circunscrito. Esta elección es evidentemente la razón por la cuál decidieron dividir el círculo en 360° , una convención que perdura hasta nuestros días. Entonces, la tablilla de Susa nos da el valor de la razón,

$$\frac{6r}{C}$$

donde r es el radio y C la circunferencia de círculo circunscrito. Al utilizar la definición de $\pi = \frac{C}{2r}$ llegamos a que:

$$\frac{3}{\pi} \approx \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$$

de donde se sigue que:

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{8} = 3.125$$

es decir, el valor de π que los babilonios probablemente emplearon para obtener la razón indicada en la tablilla.

Cultura Judía y Cristiana

A medida que avanzamos a través de la historia del número π , exploraremos cómo su presencia se reflejó en la Biblia. Desde la perspectiva de algunos autores, sugieren que este documento sagrado abordó su valor.

“Hizo asimismo el mar de metal fundido de diez codos de borde a borde, era perfectamente redondo; su altura era de cinco codos, y tenía treinta codos de circunferencia”.

I Reyes 7:23

“También hizo un mar de fundición, el cual tenía diez codos de un borde al otro, enteramente redondo; su altura era de cinco codos, y un cordón de treinta codos de largo lo ceñía alrededor”.

II Crónicas 4:2

En el primer libro de los Reyes, se describe minuciosamente la construcción de un templo por parte del maestro Hiram, encargado por Salomón, el Rey de Israel. Este edificio de veneración era adornado por una piscina destinada a la purificación de los sacerdotes llamada “mar fundido”. (Zhúkov, 2005, p.17, [19]).

De acuerdo con el par de versículos de la Biblia se infiere que la circunferencia es igual a 30 codos y el diámetro a 10 codos. La representación del valor de π en este libro sagrado es $\frac{30}{10} = 3$.

Beckmann (2006, [3]), indica que el Libro de los Reyes fue redactado por los antiguos judíos como un texto religioso alrededor del año 550 a.C., aunque sus fuentes remontan a varios siglos antes. En esa época, la aproximación a π era conocida con una precisión considerable, pero aparentemente no era así para los editores de la Biblia. El Talmud judío, que es esencialmente un comentario del Antiguo Testamento, fue editado en el año 500 d.C. A pesar de su fecha tardía, sostiene que “aquello que en una circunferencia es de tres brazas de largo tiene una braza de ancho”.

Cultura India

En la antigua India, los textos védicos del siglo IX a.C., que son una colección de escrituras sagradas de la cultura hindú, presentan diversas aproximaciones de π basadas en consideraciones prácticas: el valor más preciso se deriva de cálculos astronómicos y se halla en los Shatapatha Brahmana; donde se representa como, $\pi \approx \frac{339}{108} \approx 3.1388 \dots$. (Navarro, 2010, p.24, [14]).

Existe mucha evidencia indirecta sobre las contribuciones matemáticas de la India. No obstante, se han extraviado los registros directos, y los documentos más antiguos disponibles son los Siddhantas, tratados o escrituras en sánscrito que abordan conocimientos específicos, o sistemas de astronomía publicados alrededor del 400 d.C., aunque, por supuesto, el conocimiento en ellos tiene una procedencia más remota.

Un Siddhanta publicado en el año 680 d.C. incorpora el valor de

$$\pi \approx 3 + \frac{177}{1250} = 3.1416$$

que apenas se diferencia del valor sexagesimal

$$\pi \approx 3 + \frac{80}{60} + \frac{30}{60^2}$$

empleado por los babilonios en épocas anteriores.

La antigua sabiduría de los indios fue resumida por Aryabhata en el *Aryabhatiya* escrito en el año 499 d.C. Este texto ofrece soluciones a diversos problemas, aunque no revela explícitamente como se llegó a ellas. Uno de los problemas consiste en sumar 4 a 100, multiplicar por 8 y sumar 62,000. El resultado es aproximadamente la circunferencia de un círculo con un diámetro de 20,000. De donde se infiere

$$\pi \approx \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

como en el Siddhanta. Bashkara, quien nació en 1114 d.C., proporciona este valor y asegura su precisión, es decir, afirma que es exacto, a diferencia del valor inexacto de $3\frac{1}{7}$. (Beckmann, 2006, p.32, [3]).

Es necesario señalar que la difusión del conocimiento en esa época fue bastante reducida, y muchas otras aproximaciones, a veces bastante malas, surgieron después del descubrimiento de esos primeros valores.

A continuación, mostramos la tabla que resume las aproximaciones utilizadas por las culturas mencionadas:

Cultura	Año	Documento	Aproximación
Egiptia	1650 a.C	Papiro de Ahmes	3.16
Babilónica	2000 a.C.	Tablilla de Susa	$\frac{25}{8} = 3.125$
Judía	siglo IX a.C.	La Biblia (Reyes I, 7:23)	3
India	499 d.C.	Aryabhatiya	3.1416

Cuadro 1: Aproximaciones de π utilizadas antes de los cálculos de Arquímedes

Estas primeras aportaciones no llegaron a la precisión que Arquímedes de Siracusa obtuvo, pero muestran que desde tiempo atrás ya usaban este número.

Por lo tanto, abordaremos a continuación la figura destacada de Arquímedes de Siracusa, el renombrado matemático griego, para discutir los contenidos en los documentos que explicamos anteriormente, en lo que se usó el número π .

Cabe destacar que en la Tesis sólo incluimos procedimientos que implican una aproximación a π con cualquier precisión que se desee. Se omiten los cálculos históricos que sólo generan una aproximación aislada, como la obtenida por los egipcios, babilonios, judíos e indios, aproximaciones que se muestran en el Cuadro 1.

Capítulo 1

Etapa geométrica

En este capítulo, exploraremos las técnicas iniciales para estimar el valor de π , que fueron de tipo geométrico y prevalecieron durante alrededor de dos milenios. El famoso matemático Arquímedes de Siracusa se posiciona como el máximo representante del método geométrico. En su obra *“Sobre la Medida del Círculo”*, aparecen 3 proposiciones de las cuales la segunda es una consecuencia de la tercera, por eso nos referimos principalmente a la primera y la tercera proposición.

- La Proposición 1 trata sobre el área de un círculo, ahí se demuestra que esta área es igual al perímetro por el radio.
- La Proposición 3 trata sobre la comparación del perímetro de la circunferencia con relación a los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos, y usando el método de exhaustión se prueba que el perímetro de estos polígonos converge al perímetro de la circunferencia, que si le ponemos diámetro 1, su perímetro vale π .

“Las matemáticas revelan sus secretos solo a quienes se acercan con amor puro, por su propia belleza”.



Figura 1.1: Arquímedes de Siracusa.
(Instituto de Matemáticas UNAM, S.F.)

Arquímedes fue ingeniero, físico, astrónomo y matemático griego, es reconocido como el científico más destacado de la Antigüedad y una de las mentes más brillantes de la historia. Las contribuciones de Arquímedes a la ciencia son innumerables. En su faceta como matemático, los logros de Arquímedes son numerosos. Además de aproximarse al valor de π , se ocupó de calcular el perímetro, área, volumen y centro de gravedad de diversos cuerpos geométricos como esferas, cilindros, parábolas y espirales. También se dedicó al estudio de ecuaciones diofánticas, contribuyó en la concepción y el cálculo de grandes números, entre otros temas. La muerte de Arquímedes ocurrió en el año 212 a.C. durante el asedio de Siracusa. Plutarco cuenta que Arquímedes, al observar un esquema en la arena, le dijo al soldado romano que iba a arrestarlo: "no toques mis dibujos". Esto enfureció al soldado, quien lo mató con su espada. (Navarro, 2010, p.27, [14]).

Sus demostraciones que analizamos detalladamente en las siguientes páginas, y que tomamos del libro de Heath (1897, [11]), nos permiten sumergirnos en la mente analítica de este genio griego. Arquímedes generó un procedimiento de aproximación arbitraria al número π , aproximando el perímetro de una circunferencia mediante polígonos y doblando el número de lados, procedimiento que viene a ser el origen del cálculo infinitesimal que surgió dos milenios después. Este análisis minucioso revela la profundidad de su genialidad y su impacto duradero en la matemática. Aquí es crucial destacar la dificultad principal que enfrentó. No contaba con un sistema de numeración posicional, como al que estamos acostumbrados hoy en día. Por ejemplo, para aproximar el perímetro de la circunferencia usando un hexágono circunscrito surge la necesidad de calcular $\sqrt{3}$, que Arquímedes aproxima con la fracción $\frac{265}{153}$ sin especificar el procedimiento, pero se sabe que los griegos tenían diversos procedimientos para acercarse a este número mediante fracciones, uno de ellos es el *método de las fracciones continuas*, que los historiadores de la matemática arquimediana tienen el consenso que Arquímedes utilizó para hacer estas aproximaciones a números irracionales.

Durante los siguientes dos mil años, las nuevas aproximaciones a π consisten básicamente en incrementar el número de lados. Este proceso destaca la evolución constante y la perdurable influencia de las contribuciones de Arquímedes en la exploración y comprensión del número π .

Nota. Bajo el entendido que las demostraciones de las dos secciones siguientes son de contenido histórico, pretendemos modificarlas lo menos posible, el símbolo AB se usa de dos formas distintas, lo mismo significa el segmento rectilíneo del punto A al punto B , o la medida de ese segmento, y se deja a la madurez del lector el distinguir cuando es una cosa o la otra.

1.1. Proposición 1. Sobre el área del círculo

La demostración original de Arquímedes, redactada en griego antiguo, lamentablemente se ha perdido con el devenir del tiempo, y la información que tenemos se basa en traducciones subsistentes a lo largo de los años.

Se destaca la importancia de la bibliografía más antigua, resaltando que este autor, Thomas Heath, se apoyó en gran medida en las investigaciones del eminente filólogo danés, Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), conocido por su labor en la edición y estudio de textos antiguos, especialmente en griego antiguo. Heiberg demostró su habilidad para identificar trabajos, como evidenciado por su descubrimiento de un documento en la Biblioteca de Estambul, que inmediatamente reconoció como obras de Arquímedes. Estos trabajos estaban originalmente redactados en danés y latín.

Posteriormente, Heath llevó a cabo una edición crítica y traducción al inglés de las obras completas de Arquímedes, basándose en los manuscritos originales y en el trabajo previo de Johan Ludvig Heiberg. Su obra monumental, “The Works of Archimedes” (1897, [11]), resultó crucial al proporcionar acceso a las complejas contribuciones matemáticas de Arquímedes para el público de habla inglesa. La meticulosa labor de Heath permitió la difusión y comprensión de las ideas matemáticas de Arquímedes en el mundo anglófono, asegurando que su legado perdurara y fuera apreciado tanto en el ámbito académico como más allá. Por estas razones, citamos y reconocemos la contribución fundamental de Heath en este trabajo.

La idea de la demostración de Arquímedes consiste en aplicar el Axioma de Tricotomía para comparar el área del círculo y el área del triángulo (ver la Figura 1.2). Entonces se descarta que estas dos cantidades no pueden ser una mayor que la otra, lo que en automático implica que las dos áreas son iguales.

Axioma de Tricotomía. Dados dos números a y b , una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta: $a < b$, $a = b$ o $a > b$.

Proposición 1

El área de cualquier círculo es igual al área de un triángulo rectángulo en el que uno de los lados alrededor del ángulo recto es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo.

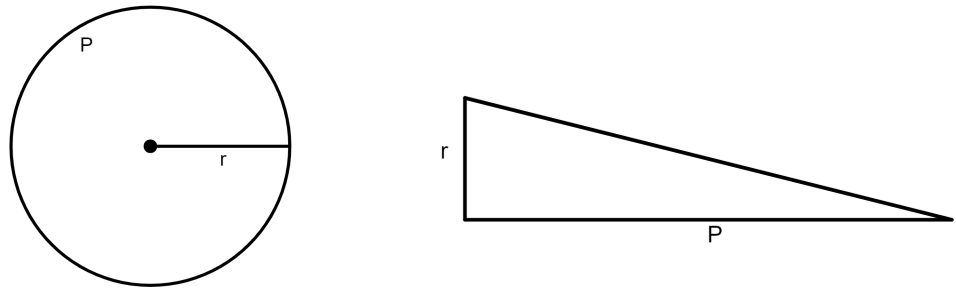


Figura 1.2: Aquí r es el radio y P el perímetro de la circunferencia.

Demostración. Esta demostración y las figuras fueron tomadas del libro de Heath (1897, [11]), y las frases en letra itálica son comentarios que agregamos para aclarar las ideas.

Sea ABCD el círculo dado y K el triángulo descrito.

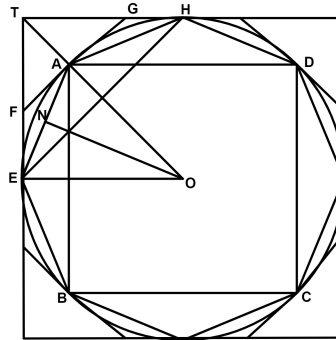


Figura 1.3: ABCD círculo



Figura 1.4: Triángulo K. La base es el perímetro y la altura es el radio de la circunferencia.

I. Supongamos que el área del círculo es mayor que el área de K.

Inscriba un cuadrado $ABCD$, biseque los arcos AB, BC, CD, DA , (observar la Figura 1.3) luego dividir (si es necesario) las mitades, lo cual aumenta al doble el número de lados del polígono. Continuar con este proceso de bisección hasta que el área del polígono sea mayor que el área del triángulo K .

En un lenguaje más simple y actual, lo anterior significa que empezamos con la hipótesis que el área del círculo A_c es mayor que el área del triángulo A_k , y ambas son cantidades fijas, cantidades que forman el intervalo $[A_k, A_c]$. Adicional a lo anterior, tenemos una secuencia de polígonos inscritos con un número de lados creciente, esto genera una secuencia creciente de áreas que en algún momento tendrá que quedar dentro del intervalo $[A_k, A_c]$.

Lo anterior es equivalente a decir que desde alguna parte de la secuencia, el área del polígono será mayor que el área del triángulo,

$$\text{área del polígono} > \text{área del triángulo } K. \quad (1.1)$$

Sea AE cualquiera de sus lados, y ON la perpendicular sobre AE desde el centro O . Entonces ON (el apotema del polígono) es menor que el radio del círculo y por lo tanto es menor que la altura de K . También el perímetro del polígono, por estar inscrito, es menor que el perímetro de la circunferencia, que es igual a la base de K . Entonces el área del polígono es menor que K .

En lenguaje actual,

$$\begin{aligned} \text{área del polígono} &= \frac{1}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{perímetro del polígono} \\ &< \frac{1}{2} \cdot \text{radio} \cdot \text{perímetro de la circunferencia} \\ &= \text{área del triángulo } K. \end{aligned}$$

Lo cual contradice a la ecuación (1.1). Por lo tanto, no es cierto que el área del círculo sea mayor que el área del triángulo K .

II. Supongamos que el área del círculo es menor que el área de K .

Circunscribe un cuadrado y permita que dos lados adyacentes, tocando el círculo en E, H , se unan en T . Biseque los arcos entre los puntos de contacto adyacentes y dibuje las tangentes en los puntos de bisección. Sea A el punto medio del arco EH y FAG la tangente en A . Entonces el ángulo TAG es un ángulo recto. Ver Figura 1.3.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} TG &> GA \\ &> GH \end{aligned}$$

De ello se deduce que el área del triángulo FTG es mayor que la mitad del área $TEAH$.

De manera similar, si se biseca el arco AH y se dibuja la tangente en el punto de bisección, se cortará del área GAH más de la mitad.

Así, al continuar el proceso, finalmente llegaremos a un polígono circunscrito tal que los espacios interceptados entre él y el círculo sean juntos menores que el exceso de K sobre el área del círculo. Por tanto, el área del polígono será menor que K .

Es decir, circunscribimos un cuadrado y vamos doblando el número de lados del polígono hasta que la resta de las áreas del polígono y del círculo sea tan pequeña como sea necesario, en particular, menor que la resta de las áreas del triángulo y del círculo. Entonces

$$\text{área del polígono} - \text{área del círculo} < \text{área de } K - \text{área del círculo}$$

así que

$$\text{área del polígono} < \text{área de } K. \tag{1.2}$$

Ahora bien, dado que la perpendicular desde cualquier lado del polígono es igual al radio del círculo, mientras que el perímetro del polígono es mayor que la circunferencia del círculo, se sigue que el área del polígono es mayor que el triángulo K .

En lenguaje actual,

$$\begin{aligned} \text{área del polígono} &= \frac{1}{2} \cdot \text{apotema} \cdot \text{perímetro del polígono} \\ &> \frac{1}{2} \cdot \text{radio} \cdot \text{perímetro de la circunferencia} \\ &= \text{área del triángulo } K. \end{aligned}$$

Lo que nos lleva a una contradicción de (1.2). Por lo tanto, no es cierto que el área del círculo sea menor que el área del triángulo K .

Entonces por tricotomía el área del círculo es igual al área de K . ■

De la igualdad de áreas, se deduce fácilmente la fórmula del área del círculo que todos conocemos

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{radio}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

Es asombroso que Arquímedes usando el método de exhaución pudo encontrar propiedades de diferentes figuras geométricas, como el área del círculo y el volumen de la esfera, entre otras. Algo realmente impresionante para la época.

La Proposición 1 representa, así, el inicio de un enfoque matemático innovador que caracteriza las contribuciones de Arquímedes a la Geometría antigua.

1.2. Proposición 3. Sobre el perímetro del círculo

A diferencia de la demostración de la Proposición 1, que implicaba la comparación de áreas, aquí trataremos sobre la comparación de perímetros de polígonos inscritos y circunscritos. Siguiendo el método de exhaución, Arquímedes duplicó el número de lados desde un hexágono hasta obtener un polígono de 96 lados, generando una secuencia de aproximaciones a π por abajo y por arriba. Es sorprendente que este método sea el antecedente más antiguo del cálculo diferencial e integral, 2000 años antes de su descubrimiento.

El método desarrollado por Arquímedes representa el primer algoritmo genuino para calcular π , que explicamos en la sección 1.2.2, ya que tiene la capacidad de generar un valor extremadamente preciso para esta constante de manera arbitraria. (Borwein, 2011, p.5, [6]).

Arquímedes de Siracusa desarrolló un método para calcular π que se mantuvo sin cambios significativos durante aproximadamente 1,900 años, resistiendo mejoras sustanciales. (Beckmann, 1971, p.3, [2]).

Proposición 3.

La razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ pero mayor que $3\frac{10}{71}$.

A continuación se presentan los cálculos que Arquímedes llevó a cabo para estimar el perímetro del polígono de 96 lados y la correspondiente aproximación a π . En la actualidad, este proceso se lleva a cabo utilizando una calculadora y un ejercicio básico de Trigonometría. Sin embargo, si eliminamos la calculadora, las funciones trigonométricas y también el sistema de numeración posicional, calcular el perímetro del polígono se convierte en un desafío que sólo un genio matemático podría haber logrado hace dos mil años.

Explicación general. La idea básica parte del hecho que el *perímetro de la circunferencia sobre el diámetro es igual a π* , y se establecen cotas por abajo y por arriba para el perímetro utilizando polígonos.

En lo que sigue AB es el diámetro de la circunferencia. Entonces

Perímetro polígono inscrito < Perímetro circunferencia < Perímetro polígono circunscrito.

$$\frac{\text{Perímetro polígono inscrito}}{AB} < \frac{\text{Perímetro circunferencia}}{AB} < \frac{\text{Perímetro polígono circunscrito}}{AB}.$$

$$\frac{\text{Perímetro polígono inscrito}}{AB} < \pi < \frac{\text{Perímetro polígono circunscrito}}{AB}.$$

La esencia de la demostración de la Proposición 3 consiste en la manera como Arquímedes se las ingenió para calcular el valor de la división del perímetro del polígono inscrito de 96 lados entre el diámetro, y análogamente con el polígono circunscrito. Primero encuentra las siguientes cotas usando fracciones.

$$\frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} < \frac{\text{Per. pol. ins.}}{AB} < \pi < \frac{\text{Per. pol. circ.}}{AB} < \frac{14688}{4673 + \frac{1}{2}}.$$

Por transitividad de las desigualdades

$$\frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673 + \frac{1}{2}}.$$

De donde obtenemos

$$3 + \frac{1137}{8069} = \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673 + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{667 + \frac{1}{2}}{4673 + \frac{1}{2}},$$

pero

$$\frac{667 + \frac{1}{2}}{4673 + \frac{1}{2}} < \frac{667 + \frac{1}{2}}{4672 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{7},$$

y

$$\frac{1137}{8069} = \frac{10 \times 113 + 7}{71 \times 113 + 46} > \frac{10 \times 113}{71 \times 113} = \frac{10}{71}.$$

Finalmente

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Nota. Con el fin de darle mayor claridad a la siguiente demostración histórica, que pretendemos modificar lo menos posible, hacemos las siguientes aclaraciones:

- El símbolo $a : b$ significa dividir a sobre b , es decir,

$$a : b \text{ es } \frac{a}{b}.$$

- Comentarios entre corchetes son agregados por el autor Heath.
- Comentarios en itálica y llaves son los que agregamos para reforzar ideas.

Demostración.

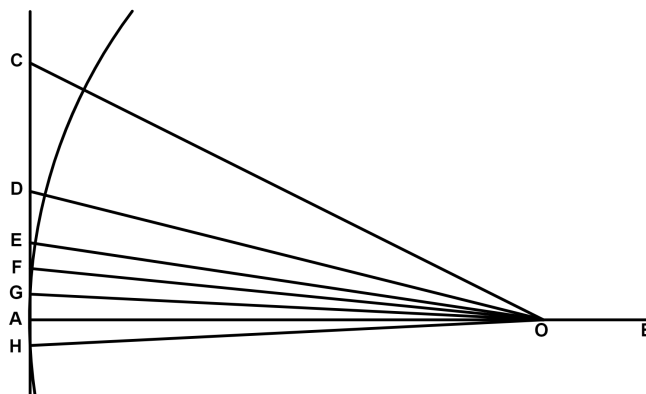


Figura 1.5: Representación gráfica correspondiente a la primera parte de la demostración de la Proposición 3.

- I. Sea AB el diámetro de cualquier círculo, O su centro, AC la tangente en A ; y sea el ángulo AOC un tercio de un ángulo recto. Entonces

$$OA : AC [= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153 \tag{1.3}$$

y

$$OC : CA [= 2 : 1] = 306 : 153 \tag{1.4}$$

Primero, dibuja OD que biseca el ángulo AOC y que se encuentra con AC en D . Según se muestra en la Figura 1.5. Ahora

$$CO : OA = CD : DA.$$

{Esta afirmación es correcta debido al Teorema de la Bisectriz, el cual afirma que en un triángulo $\triangle OAC$, la división entre dos lados es igual a la división de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz del ángulo interno opuesto, es decir, CO/OA es igual a CD/DA .}

De modo que

$$CO + OA : CA = OA : AD.$$

{Esto es cierto porque

$$\begin{aligned} \frac{CO}{OA} = \frac{CD}{DA} &\longrightarrow \frac{CO}{OA} + 1 = \frac{CD}{DA} + 1 \longrightarrow \frac{CO+OA}{OA} = \frac{CD+DA}{DA} \\ &\longrightarrow \frac{CO+OA}{OA} = \frac{CA}{DA} \longrightarrow \frac{CO+OA}{CA} = \frac{OA}{DA}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al sumar (1.3) y (1.4) tenemos

$$OA : AD > 571 : 153. \tag{1.5}$$

Así que

$$\begin{aligned} OD^2 : AD^2 &[= (OA^2 + AD^2) : AD^2 \\ &> (571^2 + 153^2) : 153^2] \\ &> 349450 : 23409, \end{aligned}$$

de modo que

$$OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153. \tag{1.6}$$

En segundo lugar, sea OE la bisectriz del ángulo AOD (ver Figura 1.5), intersectándose con AD en E .

[Entonces

$$DO : OA = DE : EA$$

de modo que

$$DO + OA : DA = OA : AE.]$$

Por lo tanto, por (1.5) y (1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} OA : AE &[> (591\frac{1}{8} + 571) : 153] \\ &> 1162\frac{1}{8} : 153. \end{aligned} \tag{1.7}$$

[Se deduce que

$$\begin{aligned} OE^2 : EA^2 &> \{(1162\frac{1}{8})^2 + 153^2\} : 153^2 \\ &> (1350534\frac{33}{64} + 23409) : 23409 \\ &> 1373943\frac{33}{64} : 23409.] \end{aligned}$$

Así

$$OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153. \quad (1.8)$$

En tercer lugar, sea OF la bisectriz del ángulo AOE , intersectándose con AE en F (ver Figura 1.5).

Obtenemos así el resultado (correspondiente a (1.5) y (1.7) anteriores), que

$$\begin{aligned} OA : AF &[> (1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}) : 153] \\ &> 2334\frac{1}{4} : 153. \end{aligned} \quad (1.9)$$

[Por lo tanto

$$\begin{aligned} OF^2 : FA^2 &> \{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2\} : 153^2 \\ &> 5472132\frac{1}{16} : 23409.] \end{aligned}$$

Así

$$OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153. \quad (1.10)$$

En cuarto lugar, dejemos que OG divida el ángulo AOF , intersectándose con AF en G (ver Figura 1.5).

Por (1.9) y (1.10), tenemos entonces

$$\begin{aligned} OA : AG &[> (2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}) : 153] \\ &> 4673\frac{1}{2} : 153. \end{aligned}$$

Ahora bien, el ángulo AOC , que es un tercio de un ángulo recto, ha sido bisecado cuatro veces, y se sigue que

$$\angle AOG = \frac{1}{48} \text{ (un ángulo recto).}$$

Haz que el ángulo AOH en el otro lado de OA sea igual al ángulo AOG , y deja que GA producido se encuentre con OH en H .

Entonces

$$\angle GOH = \frac{1}{24} \text{ (un ángulo recto).}$$

Por tanto, GH es un lado de un polígono regular de 96 lados circunscrito al círculo dado.

Y dado que

$$OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153,$$

mientras que

$$AB = 2OA, \quad GH = 2AG,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} AB : (\text{perímetro del polígono de 96 lados}) &[> 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96] \\ &> 4673\frac{1}{2} : 14688. \end{aligned}$$

Pero
$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$

$$\left[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} \right]$$

$$< 3\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, la circunferencia del círculo (siendo menor que el perímetro del polígono) es a *fortiori* (con mayor razón) menor que $3\frac{1}{7}$ veces el diámetro AB .

II. A continuación, sea AB el diámetro de un círculo (ver Figura 1.6), y sea C en el círculo tal que el ángulo CAB sea igual a un tercio de un ángulo recto. Únase BC .

Entonces

$$AC : CB [= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$$

Primero, sea AD que bisece el ángulo BAC y encuentra BC en d y el círculo en D . Une BD .

Entonces

$$\begin{aligned} \angle BAD &= \angle dAC \\ &= \angle dBD, \end{aligned}$$

y los ángulos en D, C son ambos ángulos rectos. {Esto es por el segundo Teorema de Tales, que afirma que en una circunferencia con diámetro AB y C cualquier otro punto de la misma curva, entonces el ángulo $\angle ACB = 90^\circ$ }.

Se deduce que los triángulos $ADB, [ACd], BDd$ son semejantes. Este aspecto es evidente al observar la Figura 1.6.

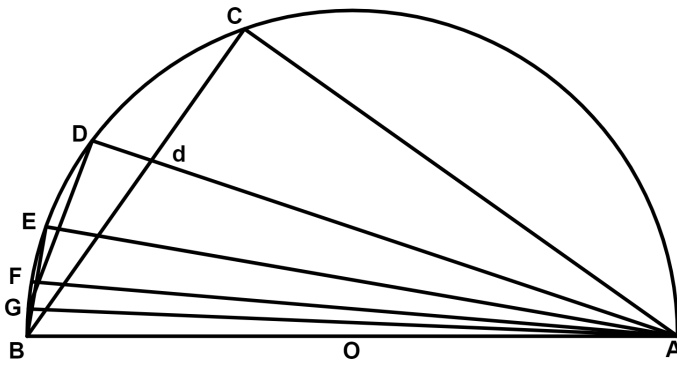


Figura 1.6: Representación gráfica correspondiente a la segunda parte de la demostración de la Proposición 3.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} AD : DB &= BD : Dd \\ &[= AC : Cd] \\ &= AB : Bd \\ &= AB + AC : Bd + Cd \\ &= AB + AC : BC \\ \text{o } BA + AC : BC &= AD : DB. \end{aligned}$$

[Pero

$$AC : CB < 1351 : 780,$$

por lo anterior, mientras que

$$\begin{aligned} BA : BC &= 2 : 1 \\ &= 1560 : 780.] \end{aligned}$$

Entonces

$$AD : DB < 2911 : 780. \tag{1.11}$$

[Por consiguiente

$$\begin{aligned} AB^2 : BD^2 &< (2911^2 + 780^2) : 780^2 \\ &< 9082321 : 608400.] \end{aligned}$$

Así

$$AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780. \tag{1.12}$$

En segundo lugar, sea AE la bisectriz del ángulo BAD , encontrándose con el círculo en E (ver Figura 1.6); y que se una a BE .

Luego demostramos, del mismo modo que antes, que

$$\begin{aligned} AE : EB &[= BA + AD : BD \\ &< (3013\frac{3}{4} + 2911) : 780], \text{ por (1.11) y (1.12)} \\ &< 5924\frac{3}{4} : 780 \\ &< 5924\frac{3}{4} \times \frac{4}{13} : 780 \times \frac{4}{13} \\ &< 1823 : 240. \end{aligned} \tag{1.13}$$

[Por lo tanto

$$\begin{aligned} AB^2 : BE^2 &< (1823^2 + 240^2) : 240^2 \\ &< 3380929 : 57600.] \end{aligned}$$

Entonces

$$AB : BE < 1838\frac{9}{11} : 240 \tag{1.14}$$

En tercer lugar, sea AF bisectriz del ángulo BAE , encontrándose con el círculo en F (ver Figura 1.6).

Así que

$$\begin{aligned} AF : FB &[= BA + AE : BE \\ &< 3661\frac{9}{11} : 240, \text{ por (1.13) y (1.14)} \\ &< 3661\frac{9}{11} \times \frac{11}{40} : 240 \times \frac{11}{40} \end{aligned}$$

$$< 1007 : 66. \quad (1.15)$$

[Se deduce que

$$\begin{aligned} AB^2 : BF^2 &< (1007^2 + 66^2) : 66^2 \\ &< 1018405 : 4356.] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$AB : BF < 1009\frac{1}{6} : 66. \quad (1.16)$$

En cuarto lugar, supongamos que el ángulo BAF sea bisecado por AG y que coincida con el círculo en G (ver Figura 1.6).

Entonces

$$\begin{aligned} AG : GB [= BA + AF : BF] \\ < 2016\frac{1}{6} : 66, \text{ por (1.15) y (1.16)}. \end{aligned}$$

[Y

$$\begin{aligned} AB^2 : BG^2 &< \{(2016\frac{1}{6})^2 + 66^2\} : 66^2 \\ &< 4069284\frac{1}{36} : 4356.] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$AB : BG < 2017\frac{1}{4} : 66,$$

donde

$$BG : AB > 66 : 2017\frac{1}{4} \quad (1.17)$$

[Ahora, el ángulo BAG que es el resultado de la cuarta bisección del ángulo BAC , o de un tercio de un ángulo recto, es igual a un cuadragésimo octavo de un ángulo recto.

Por tanto, el ángulo subtendido por BG en el centro es $\frac{1}{24}$ (un ángulo recto).]

{Dado que $\angle BAC$ se definió como un tercio de un ángulo recto, y $\angle BAG$ es la cuarta bisección de $\angle BAC$, entonces $\angle BAG = \frac{90^\circ}{3 \cdot 2^4} = \frac{90^\circ}{48}$. Además $\angle BOG = 2\angle BAG$ ya que es una propiedad general de las circunferencias que el ángulo central es el doble del ángulo inscrito para un mismo arco de circunferencia. Por lo tanto $\angle BOG = 2 \cdot \frac{90^\circ}{48} = \frac{360^\circ}{96}$. }

Por tanto BG es un lado de un polígono regular inscrito de 96 lados.

De la desigualdad (1.17) se deduce que

$$\begin{aligned} (\text{perímetro del polígono}) : AB &[> 96 \times 66 : 2017\frac{1}{4}] \\ &> 6336 : 2017\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Y

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

Mucho más entonces la circunferencia del círculo es mayor que $3\frac{10}{71}$ veces el diámetro.

{Por transitividad,

$$\frac{\text{Perímetro de la circunferencia}}{\text{Diámetro}} > \frac{\text{Perímetro del polígono inscrito}}{\text{Diámetro}} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

}

Por lo tanto, la razón de la circunferencia al diámetro, es decir, su división,

es menor que $3\frac{1}{7}$, pero mayor que $3\frac{10}{71}$.

■

El esquema de Arquímedes constituye el primer algoritmo verdadero, en el sentido de que es capaz de producir un valor arbitrariamente preciso para π . También representa el nacimiento del análisis numérico y de errores, todo ello sin notación posicional ni trigonometría moderna.

Nota. Sobre la Proposición 2, hay la polémica histórica del orden invertido, es decir, que depende la Proposición 3, lo cual no es propio de Arquímedes, por lo que se cree que es debido a alteraciones a lo largo de los dos milenios.

Proposición 2

El área de un círculo es al cuadrado de su diámetro como 11 a 14.

$$\frac{\text{Área del círculo}}{\text{Diámetro al cuadrado}} = \frac{\pi r^2}{D^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14}.$$

Si bien para un círculo mayor corresponde un área mayor, lo que esta proposición dice es que la división del área entre el diámetro es constante y proporciona una aproximación en forma de fracción, que por cierto se obtiene de la Proposición 3 cuando el polígono inscrito tiene 96 lados. Es evidente que lo que el enunciado afirma como una igualdad, en realidad es una aproximación, pero así solían escribir en la antigüedad.

1.2.1. Hexágono

En este apartado, detallaremos lo que Arquímedes realizó en el caso específico del hexágono regular. Es importante tener en cuenta que las únicas herramientas disponibles para él eran regla y compás, además de la Geometría Euclidiana que los griegos desarrollaron y dominaron en ese tiempo.

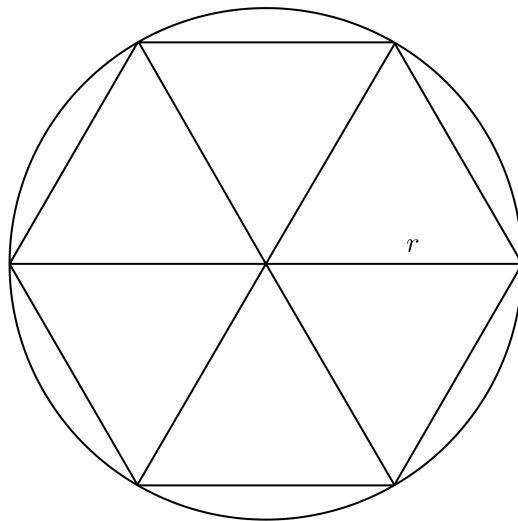


Figura 1.7: Hexágono inscrito dividido en triángulos equiláteros.

Al observar la figura anterior podemos notar que el perímetro del hexágono es $6r$, ya que los lados de los triángulos equiláteros miden lo mismo, y el radio r es uno de los lados.

Para el hexágono circunscrito dividimos de la misma manera en triángulos equiláteros, claramente los lados del hexágono ya no miden lo mismo que el radio, como sucedía en el caso del hexágono inscrito.

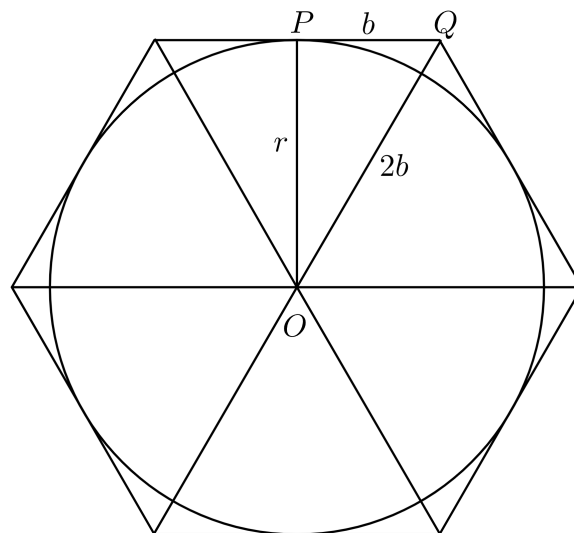


Figura 1.8: Hexágono circunscrito.

En la época de Arquímedes, sus conocimientos matemáticos se basaban en una comprensión avanzada de la Geometría y la Aritmética. Aunque carecía de las herramientas matemáticas contemporáneas, los griegos de su época poseían un sólido dominio de las operaciones aritméticas fundamentales, como la suma, resta, multiplicación y división.

Un resultado con el que ya contaban en aquella época, evidentemente, es el Teorema de Pitágoras, que aplicado al triángulo rectángulo $\triangle OPQ$ de la Figura 1.8, nos permite obtener

$$(2b)^2 = r^2 + b^2,$$

$$b = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Como puede verse del dibujo, el perímetro del hexágono circunscrito es 12 veces b , es decir, $\frac{12r}{\sqrt{3}}$. Tomando ambos resultados y comparándolos con el perímetro de la circunferencia, tenemos:

$$6r < 2\pi r < \frac{12r}{\sqrt{3}},$$

de donde obtenemos finalmente

$$3 < \pi < 2\sqrt{3}. \tag{1.18}$$

Todo lo que resta de la sección es para seguir una de las hipótesis sobre cómo Arquímedes pudo haber obtenido las aproximaciones de $\sqrt{3}$ usando fracciones.

Es crucial destacar que, a pesar de las limitaciones tecnológicas de la época, Arquímedes desempeñó un papel crucial en el desarrollo de las Matemáticas y la Geometría, sentando las bases para muchos principios que perduran en la actualidad. Su ingenioso uso de la Geometría y el razonamiento matemático lo distingue como uno de los grandes pensadores matemáticos de la antigüedad.

¿Cómo aproximó $\sqrt{3}$ usando fracciones?

Hay que resaltar que los antiguos griegos sólo trabajaban con fracciones y, con el Teorema de Pitágoras descubrieron los números irracionales; sin embargo, no podían aproximarlos con la facilidad con la que lo hacemos ahora, al no contar con un sistema numérico posicional. Lo que se sabe es que para aproximarse a estos números irracionales, necesariamente debieron desarrollar diversos procedimientos.

Es fundamental señalar que a lo largo de su demostración, Arquímedes utiliza aproximaciones racionales de ciertas raíces cuadradas sin ofrecer evidencia alguna. En ninguno de sus documentos se especifica cómo obtuvo los valores aproximados con racionales para $\sqrt{3}$, ya sea por exceso o por defecto.

Según Heath (1921, [12]), la Proposición 3, que contiene la aproximación aritmética de π , es la más interesante. El método implica calcular aproximadamente el perímetro de dos polígonos regulares de 96 lados, uno de los cuales está inscrito y el otro circunscrito. El cálculo se basa en establecer un límite superior e inferior del valor de $\sqrt{3}$, el cual Arquímedes asume sin comentarios como conocido, a saber,

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

En los tiempos de Arquímedes, las funciones trigonométricas aún no se habían desarrollado. En sus cálculos para $\sqrt{3}$, Arquímedes elegía como aproximación la fracción simple $\frac{265}{153}$. Sorprendentemente, esta aproximación posee una precisión notable: $\sqrt{3} - \frac{265}{153} < 0.000025$. En otra instancia, utilizaba la estimación $\frac{1351}{780}$, la cual aproxima aún con mayor precisión al número $\sqrt{3}$, con un error de $\frac{1351}{780} - \sqrt{3} < 0.000001$. Es importante enfatizar que estas aproximaciones son notables por su elevada exactitud, considerando la falta de herramientas matemáticas avanzadas en ese período histórico. (Zhúkov, 2005, p.27).

Aunque la descripción exacta de su método se ha perdido en gran medida, se cree que usó aproximaciones mediante fracciones continuas periódicas para aproximar $\sqrt{3}$. (Heath, 1921, p.52, [12]).

Coincidiendo con diversos autores, analizaremos el método que encontramos más convincente: el método de fracciones continuas periódicas. Para una comprensión más completa, comenzaremos proporcionando la definición de fracciones continuas simples.

Fracciones continuas

Una fracción continua es una expresión de la forma

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

en la que a_1, a_2, a_3, \dots son enteros positivos. (Hall y Knight, 1948, p.326, [10]).

O en forma abreviada

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}} \tag{1.19}$$

Ejemplo. La fracción continua que representa $\sqrt{3}$ es una secuencia periódica.

Comenzamos separando la parte entera de $\sqrt{3}$, y a lo que resta, $\sqrt{3} - 1$, lo multiplicamos por su conjugado.

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}$$

Ahora, al denominador $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ le separamos la parte entera y a lo que resta le racionalizamos el denominador multiplicando por su conjugado. Y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} + 1}{2} &= 1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 1 + \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{3} + 1)} = 1 + \frac{2}{2(\sqrt{3} + 1)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \\ \sqrt{3} + 1 &= 2 + \sqrt{3} - 1 = 2 + \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \\ \frac{\sqrt{3} + 1}{2} &= 1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 1 + \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{3} + 1)} = 1 + \frac{2}{2(\sqrt{3} + 1)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \\ \sqrt{3} + 1 &= 2 + \sqrt{3} - 1 = 2 + \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \dots \end{aligned}$$

Podemos notar que los cocientes se repiten periódicamente, generando la siguiente secuencia periódica:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \tag{1.20}$$

O en forma abreviada

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \dots$$

Una fracción reducida es aquella que se obtiene de una fracción continua cuando se detiene la operación en algún cociente. Así, a_1 es la primera reducida de la fracción continua (1.19), $a_1 + \frac{1}{a_2}$ es la segunda reducida, etc.

Lo que haremos a continuación es establecer una ley de fracciones reducidas que permitan calcular una fracción reducida a partir de las dos anteriores, de una manera sencilla y sistemática, mediante una fórmula recurrente.

Sea la fracción continua

$$a_1 + \frac{1}{a_2+} \frac{1}{a_3+} \frac{1}{a_4+} \dots$$

Las primeras tres fracciones reducidas son

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}, \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 \cdot a_2 + 1}.$$

Supongamos que se continúa la secuencia anterior. Denotemos los numeradores de estas fracciones reducidas como p_1, p_2, p_3, \dots y los denominadores como q_1, q_2, q_3, \dots , donde p_n y q_n no necesariamente son primos relativos.

Probaremos por inducción para $n \geq 3$ que para la reducida de orden (n) se cumple

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \tag{1.21}$$

Para $n = 3$, observamos en las dos primeras reducidas que $p_1 = a_1$, $q_1 = 1$, $p_2 = a_1 a_2 + 1$, $q_2 = a_2$, entonces la tercera reducida verifica $p_3 = a_3 p_2 + p_1$ y $q_3 = a_3 q_2 + q_1$.

Entonces lo que sigue es suponer que las fórmulas de recurrencia (1.21) son ciertas para n y probaremos que son ciertas para $n + 1$.

La reducida de orden $(n + 1)$ difiere de la de orden n reemplazando el cociente $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ en el lugar de a_n , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}} &= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}. \end{aligned}$$

Entonces si hacemos

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Vemos que el numerador y denominador de la reducida de orden $(n + 1)$ siguen la ley (1.21), que se supuso verdadera para la reducida enésima. Y como se demostró que la ley es verdadera para $n = 3$, entonces también es cierta para $n = 4$, y así sucesivamente; entonces es verdadera para toda $n \geq 3$.

Entonces hemos logrado demostrar el siguiente teorema para calcular una reducida a partir de las dos anteriores, usando fórmulas recurrentes. (Hall y Knight, 1948, p.329, [10]).

Teorema 1. *Ley de formación de las reducidas sucesivas. Dadas dos fracciones reducidas consecutivas $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ y $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, la siguiente reducida $\frac{p_n}{q_n}$ se calcula con las siguientes fórmulas recurrentes*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \quad (1.22)$$

para $n \geq 3$.

Observación. La utilidad del Teorema 2 es que bastan las primeras dos fracciones reducidas de una fracción continua para calcular todas las siguientes, usando las fórmulas recurrentes (1.22), y esto se puede programar en Python y generar toda la secuencia de fracciones que se van aproximando a la fracción continua.

Por ejemplo, para $\sqrt{3}$ la secuencia de fracciones que se van aproximando a este número se obtienen de las fórmulas recurrentes (1.22) y usando como coeficientes a_1, a_2, a_3, \dots los obtenidos en la secuencia periódica (1.20): $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$, obteniéndose la siguiente secuencia

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1} \\ 1 + \frac{1}{1} &= \frac{2}{1} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} &= \frac{2(2) + 1}{1(2) + 1} = \frac{5}{3} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} &= \frac{5(1) + 2}{3(1) + 1} = \frac{7}{4} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} &= \frac{7(2) + 5}{4(2) + 3} = \frac{19}{11} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}}} &= \frac{19(1) + 7}{11(1) + 4} = \frac{26}{15} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}} &= \frac{26(2) + 19}{15(2) + 11} = \frac{71}{41} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}}}} &= \frac{71(1) + 26}{41(1) + 15} = \frac{97}{56} \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}} &= \frac{97(2) + 71}{56(2) + 41} = \frac{265}{153} \end{aligned}$$

Es notable observar que la novena y la doceava reducidas, $\frac{265}{153}$ y $\frac{1351}{780}$, son las que utiliza Arquímedes en la Proposición 3. (Zhúkov, 2005, p.27, [19]).

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

o en forma decimal es aún más claro el grado de aproximación a $\sqrt{3}$

$$1.732026\dots < 1.732050\dots < 1.732051\dots$$

La Figura 1.9 muestra en forma gráfica cómo se comporta la secuencia de fracciones reducidas de $\sqrt{3}$, observemos cómo estas fracciones van oscilando y convergiendo hacia $\sqrt{3}$.

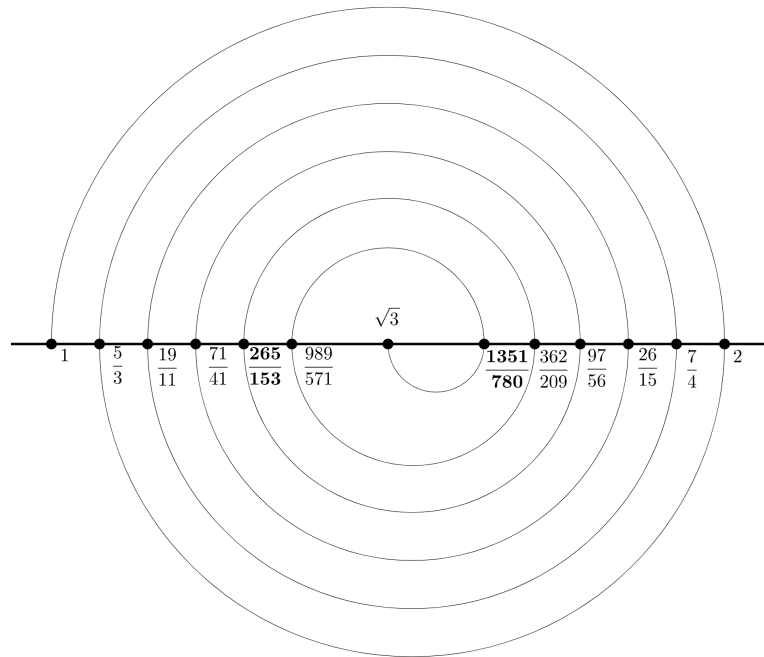


Figura 1.9: Secuencia de fracciones que convergen a $\sqrt{3}$.

A pesar de no conocerse los métodos específicos que Arquímedes utilizaba en sus cálculos numéricos, es merecedor de elogio no sólo por sus cálculos precisos en el manejo de fracciones, y el uso de un sistema de notación literal en operaciones que involucran la extracción de raíces cuadradas de números grandes. (Zhúkov, 2005, p.28, [19]).

Hoy en día, las calculadoras y software de cálculo numérico facilitan enormemente estos cálculos, pero en la época de Arquímedes, este tipo de métodos requería un agudo ingenio matemático. Su enfoque es un testimonio de su habilidad excepcional en el campo de las Matemáticas y de la inventiva de los antiguos matemáticos griegos.

1.2.2. Secuencia general

Polígono inscrito

Para el caso de un polígono regular inscrito de n lados, a partir del triángulo rectángulo mostrado en la Figura 1.10, calculamos uno de los lados del polígono usando trigonometría elemental.

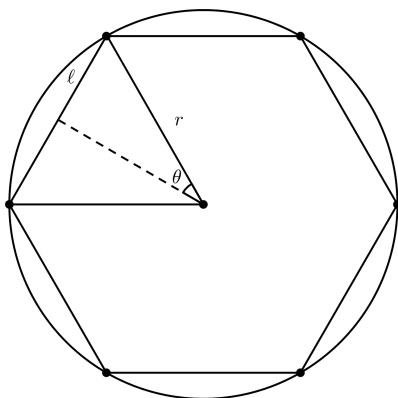


Figura 1.10: Polígono inscrito de n lados.

De la Figura 1.10 vemos que uno de los lados del polígono mide 2ℓ , entonces el perímetro del polígono es $n \cdot 2\ell$. El valor de ℓ se calcula con la función seno, obteniéndose por trigonometría de triángulos rectángulos que $\ell = r \cdot \text{sen } \theta$. De donde obtenemos

$$\text{perímetro del polígono inscrito} = 2nr \cdot \text{sen } \theta.$$

Polígono circunscrito

Para el caso de un polígono circunscrito de n lados, de manera similar a lo anteriormente expuesto, calcularemos uno de los lados del polígono usando trigonometría. De la Figura 1.11 vemos que uno de los lados del polígono mide $2s$, entonces el perímetro del polígono es $n \cdot 2s$. El valor de s se calcula con la función tangente, obteniéndose que $s = r \cdot \text{tan } \theta$. De donde obtenemos

$$\text{perímetro del polígono circunscrito} = 2nr \cdot \text{tan } \theta$$

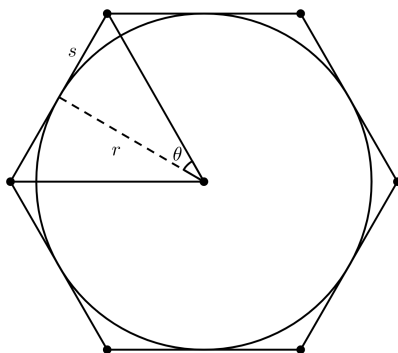


Figura 1.11: Polígono circunscrito de n lados.

Ahora uniremos los dos perímetros anteriores en la siguiente desigualdad

Perímetro polígono inscrito < Perímetro del círculo < Perímetro del polígono circunscrito

obteniendo

$$2rn \cdot \text{sen } \theta < 2\pi r < 2rn \cdot \tan \theta.$$

Finalmente

$$n \cdot \text{sen } \theta < \pi < n \cdot \tan \theta.$$

Para obtener la secuencia de Arquímedes, lo que hacemos es duplicar el número de lados, es decir, aplicaremos los siguientes cambios

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \frac{\theta}{2}, \\ n &\rightarrow 2n, \end{aligned}$$

sustituyendo en 1.2.2

$$2n \cdot \text{sen } \frac{\theta}{2} < \pi < 2n \cdot \tan \frac{\theta}{2},$$

duplicando nuevamente

$$2^2 n \cdot \text{sen } \frac{\theta}{2^2} < \pi < 2^2 n \cdot \tan \frac{\theta}{2^2},$$

repetiendo el proceso j veces

$$2^j n \cdot \text{sen } \frac{\theta}{2^j} < \pi < 2^j n \cdot \tan \frac{\theta}{2^j}.$$

El valor de θ se obtiene del polígono inicial de 6 lados, es decir, $\theta = 30^\circ$ y $n = 6$. Sustituyendo en la desigualdad anterior obtenemos

$$2^j 6 \cdot \text{sen } \frac{30^\circ}{2^j} < \pi < 2^j 6 \cdot \tan \frac{30^\circ}{2^j}. \quad (1.23)$$

Convergencia

Las desigualdades de (1.23) generan dos secuencias que se aproximan a π por arriba y por abajo, con un grado de precisión arbitrario. Es fácil probar su convergencia utilizando el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1,$$

donde x está dado en radianes.

Para el polígono inscrito definimos $x := \frac{30^\circ}{2^j} = \frac{\pi/6}{2^j}$. Claramente $j \rightarrow \infty$ implica $x \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 2^j 6 \cdot \text{sen } \frac{30^\circ}{2^j} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/6}{x} \cdot 6 \cdot \text{sen } x = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \pi.$$

De manera análoga, para el polígono circunscrito usamos la misma relación entre x y j , obteniendo

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} 2^j 6 \cdot \tan \frac{30^\circ}{2^j} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/6}{x} \cdot 6 \cdot \tan x = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\ &= \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \pi \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \pi \cdot 1 \cdot 1 = \pi. \end{aligned}$$

Nota. Todos los cálculos numéricos son ejecutados con la misma computadora, sus especificaciones de software y hardware están indicadas en la primera página del Anexo C.

Aplicando las secuencias de (1.23) para $j = 0, 1, 2, 3, 4$, que corresponden al hexágono regular y sus cuatro duplicaciones, obtenemos las siguientes tablas. Como podemos ver, con los polígonos de Arquímedes se obtienen entre dos y tres decimales de π .

Número de lados	Fórmula	$\pi \approx$
6	$(6) \sin(30^\circ)$	3
12	$2 \cdot (6) \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$	3.105828541230248
24	$4 \cdot (6) \sin\left(\frac{30^\circ}{4}\right)$	3.132628613281234
48	$8 \cdot (6) \sin\left(\frac{30^\circ}{8}\right)$	3.139350203046866
96	$16 \cdot (6) \sin\left(\frac{30^\circ}{16}\right)$	3.141031950890505

Cuadro 1.1: Aproximaciones del número π por polígono inscrito.

Número de lados	Fórmula	$\pi \approx$
6	$(6) \tan(30^\circ)$	3.464101615137754
12	$2 \cdot (6) \tan\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$	3.215390309173473
24	$4 \cdot (6) \tan\left(\frac{30^\circ}{4}\right)$	3.159659942097500
48	$8 \cdot (6) \tan\left(\frac{30^\circ}{8}\right)$	3.146086215131434
96	$16 \cdot (6) \tan\left(\frac{30^\circ}{16}\right)$	3.142714599645368

Cuadro 1.2: Aproximaciones del número π por polígono circunscrito.

Aquí presentamos la gráfica de las aproximaciones del número π :

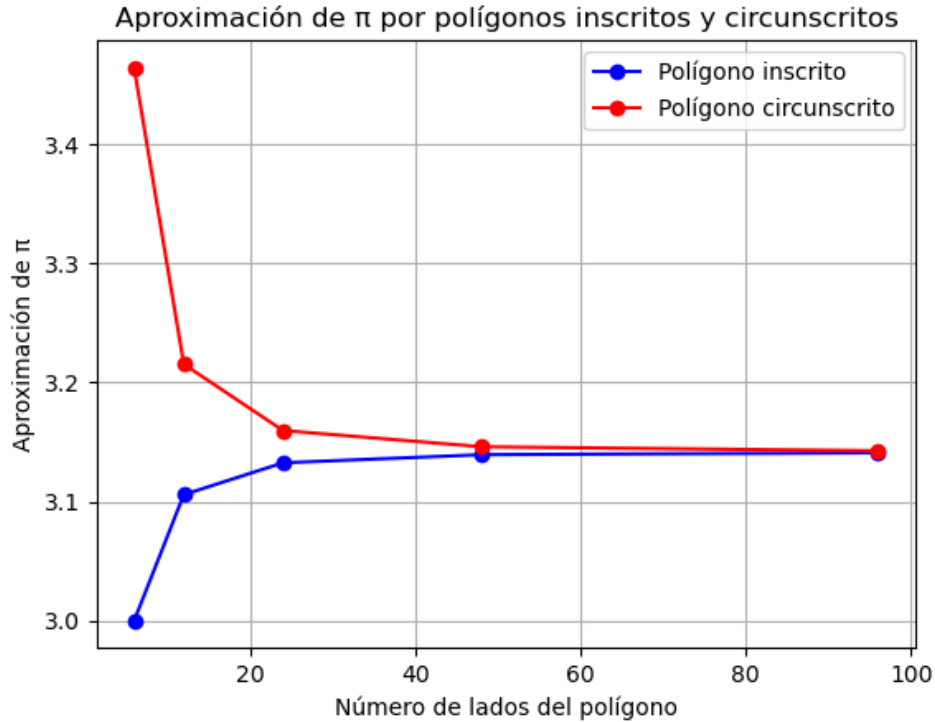


Figura 1.12: Aproximaciones a π obtenidas por Arquímedes.

En la Figura 1.12 se puede observar claramente cómo, a medida que aumenta el número de lados de la figura geométrica inscrita y circunscrita en el círculo, la aproximación al valor de π es mejor. Este fenómeno ilustra la idea fundamental del cálculo del límite: a medida que se aumenta la cantidad de lados, la figura se asemeja más y más al círculo, lo que refleja la convergencia hacia el valor de π .

Python en las secuencias de Arquímedes

En el Anexo C, hemos proporcionado un código en Python llamado “La secuencia de Arquímedes”, diseñado con la intención de calcular los dígitos de π hasta donde la capacidad de la computadora lo permita.

El primer desafío al que nos enfrentamos fue la limitación en la precisión de los cálculos aritméticos del software. Como se enseña en el curso de Métodos Numéricos, esta limitación se debe a la capacidad habitual de representar hasta 16 decimales mediante el sistema de punto *doble flotante*. (Chapra & Canale, 2011, p.59, [8]).


```

14     j=j+1
15     a=2*a
16     b=b/2
17
18     print("aprox de pi con ", n, " cifras decimales exactas es ", p_t)
19     print("j=", j)

```

Es relevante enfatizar que al ejecutar el código no implica automáticamente el cálculo de un número arbitrariamente grande de dígitos de π , sin límite alguno. Es decir, el código no es autocorrectivo. En cada ejecución, es necesario establecer explícitamente el número de dígitos con los que se realizarán las operaciones aritméticas, y este será el límite para el cálculo de los dígitos de π . Si se requieren más dígitos, será necesario ejecutar nuevamente el programa, especificando un margen mayor de precisión.

El programa solicita al usuario el número de dígitos de π que se desean obtener, denotado como n . Luego, se indica al módulo `mpmath` que utilice $n+10$ dígitos para llevar a cabo las operaciones.

¿Por qué 10 dígitos adicionales? Se considera un mínimo necesario utilizar las n cifras deseadas de π , y se agregan 10 dígitos extra de manera arbitraria. El programa procede a calcular progresivamente cada término de la secuencia. Este proceso se realiza de forma optimizada al almacenar el término anterior de la secuencia. La ejecución se detiene cuando los primeros n dígitos de nuestra aproximación de π coinciden con los primeros n dígitos del valor de π predeterminado en el módulo `mpmath`, que se considera como el “ π verdadero”.

Por ejemplo, si solicitamos calcular los primeros 100,000 dígitos de π , el programa utilizará 100,000+10 dígitos en todas sus operaciones aritméticas y luego procederá a calcular cada término de la secuencia de manera progresiva. Es fundamental destacar que el programa calcula cada término de la secuencia desde $j = 0, 1, 2, 3 \dots$ hasta 167,000 duplicaciones del hexágono. Esto provoca que el tiempo de ejecución comience a crecer de manera exponencial, como en este caso donde el tiempo requerido fue de 1234 segundos.

A continuación presentamos los resultados en forma gráfica y tabular para la secuencia (1.23) correspondiente a polígonos inscritos y circunscritos. Como se puede observar en las siguientes figuras, la relación entre el número de decimales correctos generados y el valor de j de la secuencia es casi lineal.

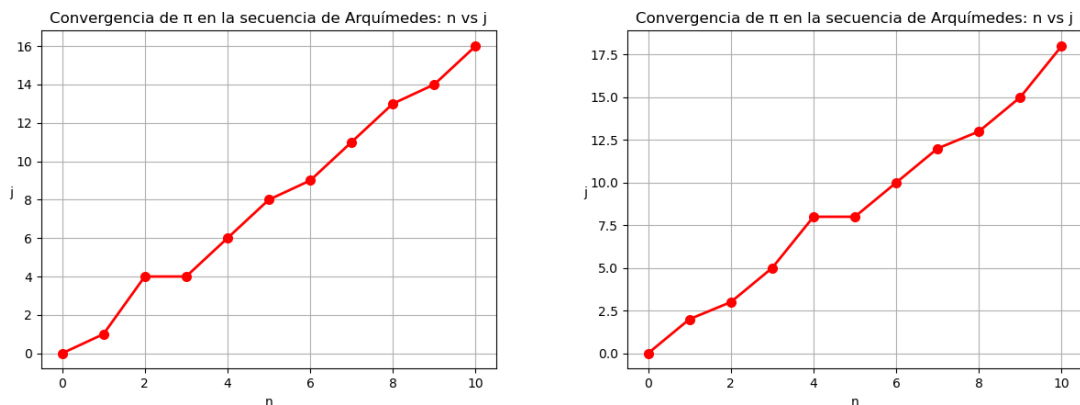


Figura 1.13: Con 16 duplicaciones del hexágono inscrito y 18 del circunscrito se obtienen 10 decimales de π .

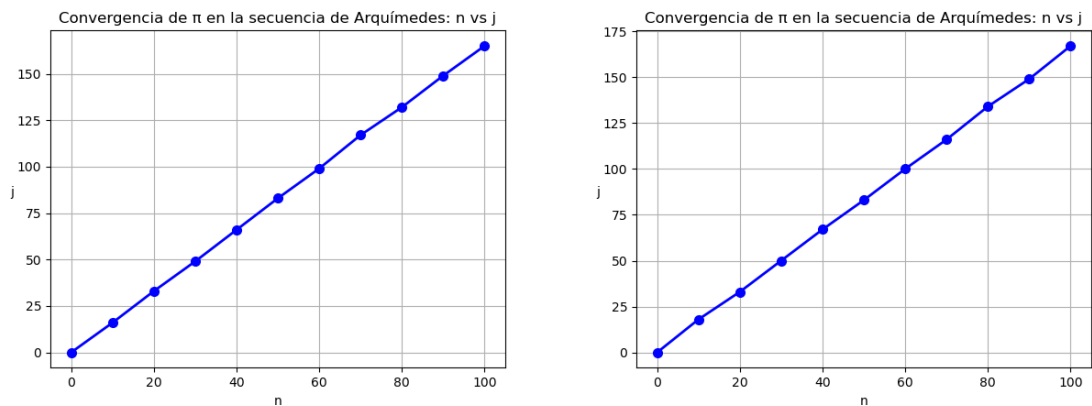


Figura 1.14: Con 165 duplicaciones del hexágono inscrito y 167 del circunscrito se obtienen 100 decimales de π .

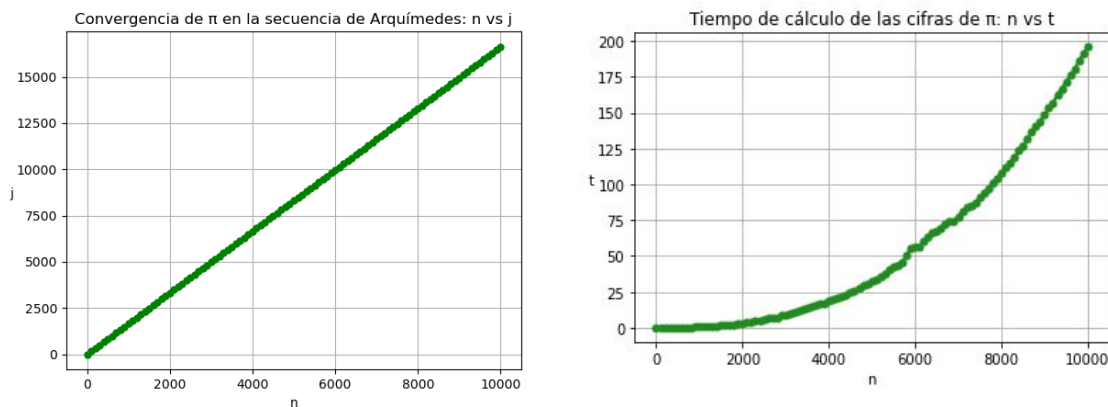


Figura 1.15: Con 16,609 duplicaciones del hexágono inscrito se obtienen 10,000 decimales de π en 196 segundos.

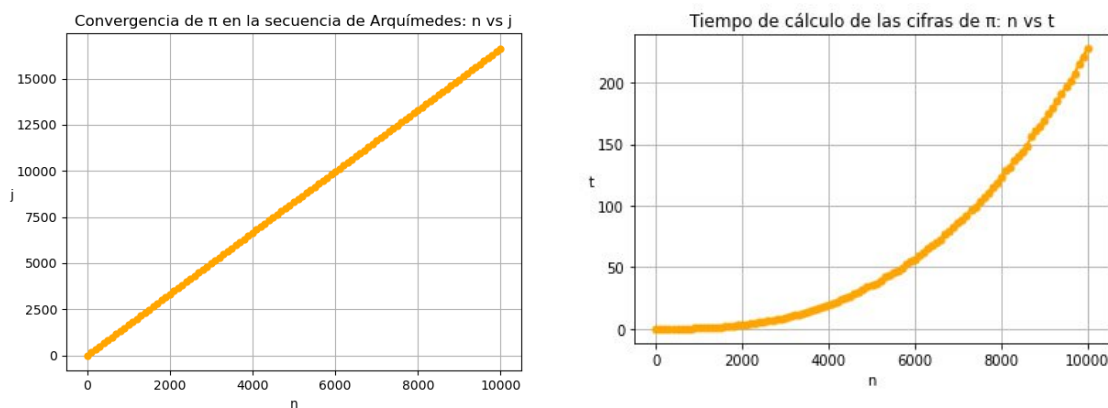


Figura 1.16: Con 16,610 duplicaciones del hexágono circunscrito se obtienen 10,000 decimales de π en 227 segundos.

Como podemos ver en las Figuras 1.14 y 1.15, el comportamiento entre n y j es casi lineal.

Entonces aplicando regresión lineal a los datos de la Figura 1.14 del polígono inscrito, es decir, ajuste por mínimos cuadrados para encontrar la recta que mejor se ajusta a estos datos, obtenemos la ecuación

$$j = 1.663 \cdot n.$$

Siendo el cuadrado del coeficiente de correlación

$$R^2 = 0.9998,$$

que como podemos ver es una correlación lineal casi perfecta.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j	1	4	4	6	8	9	11	13	14	16
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
j	17	19	21	23	25	26	27	30	31	33
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
j	34	36	38	40	41	43	45	46	47	49
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
j	53	53	54	56	58	60	61	62	65	66
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
j	67	70	71	72	75	76	78	80	83	83
n	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
j	84	87	89	89	91	93	94	96	98	99
n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
j	100	103	105	107	107	109	112	112	114	117
n	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
j	117	120	120	122	125	127	127	129	130	132
n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
j	134	136	137	141	141	142	144	146	147	149
n	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
j	151	153	155	157	157	160	160	162	164	165

Cuadro 1.3: Datos del polígono inscrito de la Figura 1.14.

Conclusiones.

Si bien la fórmula para la recta de mejor ajuste $j = 1.663 \cdot n$, se obtuvo para polígonos inscritos con $n = 100$, en relación a la Figura 1.14, la ecuación se mantiene esencialmente igual para valores mayores de n .

Desde un punto de vista geométrico, la fórmula implica que se necesitan 1.663 duplicaciones en el número de lados del polígono para obtener un dígito adicional de π .

Así, en lugar de calcular todos los valores de j desde el inicio de la secuencia $j = 0$, podemos utilizar la fórmula $j = 1.663 \cdot n$. para estimar cuántas duplicaciones del polígono serían necesarias

para obtener cualquier cantidad de dígitos de π , con un solo cálculo sin necesidad de calcular toda la secuencia. Esto nos permite ahorrar tiempo y recursos computacionales.

Si bien la ecuación $j = 1.663 \cdot n$ representa la recta de mejor ajuste, el valor de j debe ser un número entero, pero el producto $1.663 \cdot n$ no lo es, así que lo que haremos es redondearlo al primer entero superior.

Vamos a ilustrar esta idea mediante una tabla, por ejemplo, si deseamos $n = 5$ dígitos de π , sustituimos en la fórmula $j \approx 1.663 \cdot 5 = 8.315 \lesssim 9$, con este valor sustituimos en (1.23) obteniendo:

$$3.141592106 < \pi < 3.14159375$$

n	$j \approx 1.663 \cdot n$	$a < \pi < b$
5	9	$a = 3.141592106$ $b = 3.14159375$
6	10	$a = 3.141592517$ $b = 3.141592927$
7	12	$a = 3.1415926450$ $b = 3.1415926707$
8	14	$a = 3.141592653055$ $b = 3.14159265466$
9	15	$a = 3.141592653456$ $b = 3.141592653857$
10	17	$a = 3.14159265358144$ $b = 3.141592653607$
20	34	$a = 3.141592653589793238462157$ $b = 3.14159265358979323846362$
30	50	$a = 3.141592653589793238462643383279390$ $b = 3.141592653589793238462643383279729$
40	67	$a = 3.14159265358979323846264338327950288419716281$ $b = 3.1415926535897932384626433832795028841971826$
50	84	$a = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105437$ $b = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510659$

Cuadro 1.4: Aproximaciones de π usando polígonos inscritos y circunscritos usando la fórmula de aproximación $j \approx 1.663 \cdot n$.

Como podemos observar en el Cuadro 1.4, en la columna de la izquierda se indica el número de cifras correctas de π que se desean obtener, la segunda columna hace la estimación del valor de j que se necesita, es decir, el número de doblamientos del hexágono, y la tercera columna muestra la aproximación de π con polígonos inscritos y circunscritos. Se puede observar que se obtienen más

cifras correctas de las que se solicitaron al inicio.

Del cuadro 1.5 podemos observar que es notable la rapidez de este método para obtener cifras correctas de π , donde se utiliza la fórmula de aproximación $j \approx 1.663 \cdot n$, pues basta con evaluar las dos secuencias de Arquímedes para un solo valor de j . Más de un millón de dígitos de π en 13 segundos, ver Cuadro 1.4.

n	j	$b - a$	Tiempo
50	84	$1.2e - 51$	0.0004 seg
100	167	$1.2e - 101$	0.0004 seg
1,000	1,663	$2.6e - 1,002$	0.001 seg
10,000	16,630	$2.4e - 10,013$	0.02 seg
100,000	166,300	$1.1e - 100,123$	0.2 seg
1,000,000	1,663,000	$7.4e - 1,001,227$	13.1 seg

Cuadro 1.5: Más de un millón de dígitos de π en 13 segundos usando la fórmula de aproximación $j \approx 1.663 \cdot n$.

Nota. En la tercera columna se usa notación científica con la escritura que se acostumbra en programación, en particular en python, por ejemplo, $1.2e-51$ significa lo mismo que 1.2×10^{-51} .

Con las muestras obtenidas de ambos códigos para las secuencias de Arquímedes, tanto para polígonos inscritos como circunscritos, notamos que el valor de j es muy similar para un número dado de cifras decimales de π . Por ejemplo, al considerar 10 cifras decimales, observamos que para el polígono inscrito, el valor de j es 16, mientras que para el circunscrito es 18. Para 100 cifras decimales, encontramos que j es 165 para uno y 167 para el otro. De manera similar, para 10,000 cifras decimales, j es 16609 y 16610, respectivamente. De esto, podemos concluir que el polígono inscrito tiende a aproximarse al valor de π con menos duplicaciones que el circunscrito.

Matemáticos usando el método geométrico

Nos referimos a los matemáticos que aplicaron el método geométrico, gradualmente aumentando el número de lados de los polígonos. El método de aproximación de π mediante polígonos inscritos y circunscritos ha sido utilizado por diversos matemáticos a lo largo de la historia. A continuación, presentamos algunos matemáticos destacados que han contribuido a este enfoque después de la época de Arquímedes.

El método concebido por los matemáticos de la antigüedad para calcular la longitud de la circunferencia mediante polígonos inscritos y circunscritos se mantuvo relevante durante casi dos milenios. (Zhúkov, 2005, p.31, [19]).

• **Claudio Ptolomeo (c. 100-170 d.C.)**, un astrónomo, astrólogo y geógrafo egipcio de origen griego. En el siglo II (aproximadamente entre el año 100 y 170 d.C.) utilizó un polígono de 120 lados para aproximar π , obteniendo $\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3 + \frac{17}{120} \approx 3.141\bar{6}$. (Navarro, 2010, p.28, [14]).

Mientras que Zhúkov (2005, [19]), afirma que Ptolomeo obtuvo ese resultado con un polígono

regular inscrito de 720 lados.

Comparando con la fórmula (1.23) que derivamos o construimos del método de Arquímedes para el polígono inscrito tenemos:

Número de lados	Fórmula	Aproximación por polígono inscrito
120	$20 \cdot (6) \operatorname{sen} \left(\frac{30^\circ}{20} \right)$	3.1412337969447
720	$120 \cdot (6) \operatorname{sen} \left(\frac{30^\circ}{120} \right)$	3.1415826850175

Cuadro 1.6: Comparación del número de lados del polígono.

Por lo tanto, podemos deducir que el polígono de 720 lados se acerca más al valor sugerido por Claudio Ptolomeo.

- **Liu Hui (220-280 d.C.)**, en el siglo III, por el año 264 d.C. aplicó una variante del polígono inscrito arquimediano con 192 lados, obteniendo el valor $3.141024 < \pi < 3.142704$. Después, mejorando el método halló $\pi \approx 3.14159$ con un polígono inscrito de 3,072 lados. (Beckmann, 2006, p.33, [3]).

Además, incorporó el sistema decimal en sus cálculos para otorgar una apariencia más elegante a los resultados. A pesar de que el sistema decimal se originó en China, su aplicación se limitaba a cinco decimales (desde 10^{-1} , se denominaban fen, li, hao, miao y hu), y a partir del sexto decimal, los dígitos se expresaban mediante fracciones. (Jansson, 2019, p.4, [13]).

- **Zu Chongzhi (429-500 d.C.)**, incorporó el método para aproximar π en su obra matemática, *Zhui shu [x]* (*Método de composición matemática*). En registros fragmentarios, se menciona que por el año 464 d.C., Zu y su hijo Zu Geng adaptaron y mejoraron el método de Liu Hui, usando un polígono de 12,288 lados. Cómo Zu obtuvo la proporción “muy cercana” de $\frac{355}{113}$ sigue siendo desconocido. Este valor es correcto hasta el sexto decimal, y el séptimo decimal proporciona una indicación más precisa de las cifras restantes, $3.1415926 < \pi < 3.1415927$. (Berggren et al., 1991, p.24-26, [4]).

- **Aryabhata (c. 476-550 d.C.)**, destacado patriarca de los sabios indios, en el año 500 d.C., logró obtener un valor de π igual a 3.1416 utilizando un polígono de 384 lados. (Navarro, 2010, p.31, [14]).

- **Leonardo de Pisa (circa 1170-1250)**, conocido como “Fibonacci”, también se dedicó al estudio de π , utilizó un polígono de 96 lados, siguiendo la metodología de Arquímedes, pero con la ventaja de poder calcular las raíces cuadradas utilizando el novedoso sistema aritmético decimal. En 1220, presentó una aproximación de π cercana a 3.141818 en su obra “*Practica geometriae*”, utilizando de manera algo libre el método de Arquímedes. (Navarro, 2010, p.31, [14]).

- **Jamshid al-Kashi (1380-1429)**, conocido como “el de Samarcanda”, en 1424, no calculó π , sino 2π , y lo hizo utilizando el sistema sexagesimal de numeración. Al llegar a las 9 cifras en este sistema (donde, por ejemplo, $\frac{1}{60} = 0.1$ y $\frac{1}{60^2} = \frac{1}{360} = 0.01$), obtuvo una aproximación precisa de π con 16 cifras en el sistema decimal. El cálculo de al-Kashi se realizó de la siguiente manera:

$$2\pi = 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9} + \dots$$

utilizando polígonos de 3×2^{28} lados. (Navarro, 2010, p.32, [14]).

• **François Viète (1540-1603)** abogado francés y matemático aficionado, utilizó el principio de agotamiento similar al de Arquímedes, Viète aplicó esta idea a polígonos con 393,216 lados, describiendo los cálculos resultantes como un producto infinito. En su obra “*Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII*”, representó los polígonos mediante triángulos y abordó π utilizando un cuadrado en lugar de un hexágono. Al dividir el polígono en triángulos, descubrió una relación interesante entre la circunferencia de un polígono de n lados y otro de $2n$ lados, expresada como $\cos \theta$. Este enfoque llevó a la primera expresión analítica para π mediante una secuencia infinita de operaciones algebraicas. (Jansson, 2019, p.5, [13]).

En 1593, la aproximación de π fue entre 3.1415926535 y 3.1415926537. La fórmula desarrollada por Viète, vinculada a la variable n , fue clave en este contexto, aunque su aplicación se vio obstaculizada por la complejidad del cálculo, que involucraba sucesivas extracciones de raíces cuadradas. François Viète demostró lo que, en términos modernos, se expresaría como:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \cdots$$

(Navarro, 2010, p.32, [14]).

• **Adriaan van Roomen (1561-1615)**, en 1597 el geómetra holandés, presentó los resultados de su cálculo, alcanzando 17 cifras decimales de π mediante un polígono de $2^{30} = 1,073,741,824$ lados (Zhúkov, 2005, p.31, [19]).

• **Ludolph van Ceulen (1540-1610)**, profesor holandés de ciencias matemáticas y militares en la Universidad de Leiden, dedicó 25 años a calcular con alta precisión el número π . A principios del siglo XVII, utilizando el método geométrico de Arquímedes, duplicó el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos, llegando a un polígono de 35,512,254,720 lados y calculó 20 cifras decimales de π . Luego, por el año 1610, avanzó en el cálculo de las siguientes cifras de π , utilizando un polígono de 2^{62} lados, es decir, $2^{62} = 4,611,686,018,427,387,904$, donde obtuvo 35 decimales correctos para $\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950288 \dots$. Estos dígitos fueron grabados en la lápida de su tumba en Leiden, como indicó en su testamento. En memoria de este excepcional calculista, sus coetáneos lo llamaron durante mucho tiempo el *número de Ludolph*. (Zhúkov, 2005, p.32, [19]).

• **Willebrord Snel van Royen (1580-1626)**, también conocido como Snell o Snellius, alumno de Van Ceulen, abordó el cálculo de π , logrando 35 dígitos correctos publicados en 1621 en su obra *Cyclometricus*. El método de Snell resultó más eficaz que el de Van Ceulen, usando un polígono de $2^{30} = 1,073,741,824$ lados. Similarmente, mientras Arquímedes logró la precisión correcta a dos lugares con un polígono de 96 lados, Snell alcanzó la misma precisión utilizando un hexágono. Además, Snell determinó con exactitud el valor a siete lugares a partir de un polígono de 96 lados. (Berggren et al., 1991, p.220, [4]).

• **Christoph Grienberger (1561-1636)**, jesuita austriaco y astrónomo, estableció en 1630 un nuevo récord de dígitos de π , alcanzando los 39. (Navarro, 2010, p.35, [14]).

Grienberger fue uno de los últimos en utilizar el método de Arquímedes para realizar cálculos, ya que posteriormente surgió el método analítico y se abandonó la división de polígonos para calcular el valor de π . (Berggren et al., 1991, p.220, [4]).

En la siguiente tabla, mostramos las aproximaciones de cada matemático.

Método Geométrico			
Matemáticos	Año	Lados del polígono	Aproximación
Claudio Tolomeo	150	720	$\frac{377}{120} = 3.141\bar{6}$
Liu Hui	263	3,072	3.14159
Zu Chongzhi	464	12,288	3.1415926 y 3.1415927
Aryabhata	500	384	3.1416
Fibonacci	1220	96	3.141818
Jamshid al-Kashi	1424	3×2^{28}	3.1415926535897932
François Viète	1593	393, 216	3.1415926535
Adriaan van Roomen	1597	2^{30}	3.14159265358979323
Ludolph van Ceulen	1610	2^{62}	3.1415926535 8979323846264338327950288
Willebrord Snel van Royen	1621	2^{30}	3.1415926535897932384626433832795028841
Christoph Grienberger	1630	10^{40}	3.14159265358979323846264338327950288419

Cuadro 1.7: Aproximaciones a π con el método geométrico.

La destacada precisión lograda por los matemáticos chinos, muestra que poseían herramientas de cálculo más avanzadas que sus contemporáneos occidentales. Este logro no se atribuye sólo al sistema decimal, ya que el uso de esta base numérica sólo refleja la conveniencia de contar con diez dedos en lugar de un número con más divisores, como el doce. Aunque todos los pueblos adoptaron la base diez (o sus múltiplos, como veinte en los sistemas francés o danés) para la numeración, los chinos fueron innovadores al descubrir el equivalente al dígito cero. Tanto los babilonios como los chinos representaban sus números mediante potencias de su base (10 en China, 60 en Babilonia), una práctica que aún seguimos utilizando hoy en día. (Beckmann, 2006, p.34, [3]).

La admiración por Arquímedes perdura en la actualidad, es aclamado como el pensador más grande de su tiempo, con innumerables inventos ingeniosos y logros matemáticos. Como prueba de su popularidad, el 29 de octubre de 1998, un libro suyo, sobre el cálculo de áreas y volúmenes, se vendió por 2 millones de dólares en una subasta de Christie's. (Posamentier & Lehmann, 2004, p.59, [16]).

Capítulo 2

Etapa del Cálculo Infinitesimal

En este capítulo, abordaremos la significativa transformación que experimentó la metodología para calcular aproximaciones del número π . Este cambio implica la transición desde el método geométrico hacia un enfoque analítico, que se destaca por ser más eficiente y, sobre todo, su precisión mejorada. En este contexto, destacaremos las contribuciones significativas de figuras como Newton y el dúo Gregory-Leibniz, cuyos trabajos fueron fundamentales en la adopción de este enfoque más avanzado en la aproximación de π .

En esta sección, nos sumergiremos en el estudio de la serie de Gregory-Leibniz, abordando así la colaboración de ambos autores en el desarrollo de esta fórmula, analizando cómo sus esfuerzos conjuntos dieron lugar a una de las series más conocidas para la aproximación del número π .



Figura 2.1: James Gregory (1638–1675), (Britannica, 2023).



Figura 2.2: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), (Britannica, 2023).

Primero, vamos a ofrecer una breve introducción para comprender el proceso de deducción de la serie.

Deducción de la serie

Según Berggren et al. (1997, [4]), la fórmula \arctan fue obtenida de forma independiente alrededor de 1670 por Gottfried Wilhelm Leibniz, James Gregory y un matemático indio, comúnmente atribuido a Nikalantha. (p.92).

Dicho con palabras de Jansson (2019, [13]), el matemático del sur de la India, Nilakantha, conocía la fórmula ya a mediados del siglo XV. La obra de este autor, escrita en sánscrito, no fue descubierta hasta 1835, es decir, muchos años después de que Gregory y Leibniz ya hubieran presentado la fórmula.

Como expresa Zhúkov (2005, [19]), la siguiente serie:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{aquí } |x| \leq 1) \quad (2.1)$$

fue descubierta por el matemático inglés James Gregory, en el año 1670. Al parecer Gregory no se percató de que su serie tenía relación con el número π .

A continuación probaremos que la serie (2.1) converge para $|x| \leq 1$. La idea está basada en observar que $\frac{1}{1+t^2}$ es el resultado de una serie geométrica, y luego se integra término a término en el intervalo $[0, x]$.

Teorema 2. *La siguiente fórmula converge para $|x| \leq 1$*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \quad (2.2)$$

Demostración. Para analizar su convergencia utilizamos la siguiente fórmula conocida de la suma geométrica

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para $r \neq 1$. Sumamos $\frac{r^{n+1}}{1-r}$ en cada lado de la ecuación

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Sustituyendo $r = -t^2$ tenemos

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{(t^2)^{n+1}}{1+t^2}. \quad (2.3)$$

Integrando término a término en el intervalo $[0, x]$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \quad (2.4)$$

Lo que aún necesitamos demostrar es que la integral en la expresión (2.4) tiende a cero a medida que $n \rightarrow \infty$. Para $|x| \leq 1$

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt.$$

Resolviendo la segunda integral y evaluando en los límites

$$\int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^{|x|} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Debido a que $|x| \leq 1$, es claro que $|x|^{2n+3} \leq 1$ y

$$\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}. \quad (2.5)$$

Juntando los resultados anteriores

$$0 \leq \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Dado que $\frac{1}{2n+3}$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la integral en (2.4) tiende a cero.

■

2.1. Serie de Leibniz con $x = 1$

La serie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad (2.6)$$

fue descubierta en 1673 por el matemático alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz, y en su honor recibió el nombre de *serie de Leibniz*. Esto nos permite calcular π con una precisión tan grande como se desee. Bueno, sólo en teoría porque en la práctica la convergencia es extraordinariamente lenta, tiene a su favor ser de las primeras series que se usaron para calcular a π , pero como podemos ver en el Cuadro 2.1, se necesitan 1,700 millones de términos de la serie sólo para obtener 9 dígitos.

Escribiendo la serie (2.6) en forma de sumatoria

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1},$$

nos permite obtener el término genérico, y con él podemos programar un código en Python, del cual extraemos los datos del Cuadro 2.1. Para una mayor comprensión se recomienda revisar el Anexo C, *Serie de Leibniz*.

n dígitos	j términos	Tiempo de ejecución	Aproximación a π
1	18	2 seg	3.1941879092
2	118	2.9 seg	3.14999586659
3	1,687	2.2 seg	3.14100023658
4	10,793	2.8 seg	3.1415000095285
5	136,120	3.7 seg	3.14159999999479
6	1,530,011	5.5seg	3.141592000000165
7	18,660,265	35.6 seg	3.1415926000000025
8	156,001,138	4.8 min	3.1415926599999997
9	1,700,659,131	52 min	3.141592653

Cuadro 2.1: Obtención de n dígitos de π sumando los primeros j términos de la serie.

Como se puede ver en el Cuadro 2.1 se necesita mucho esfuerzo y tiempo de cómputo para generar unos pocos dígitos de π contados con los dedos de una mano. Se puede apreciar que para ir de un renglón al siguiente, el valor de n aumenta una unidad y j se multiplica aproximadamente por 10. Lo anterior se traduce en que para obtener un dígito más de π , el número de términos que se requiere de la serie se multiplica aproximadamente por 10, esto hace que el esfuerzo de cómputo y el tiempo crezca exponencialmente, lo anterior significa que para agregar un dígito mas sea cuestión de minutos en los primeros dígitos, luego el siguiente dígito en horas y el siguiente en días, el siguiente dígito puede ser semanas o meses.

Una consecuencia de lo comentado en el párrafo anterior es que al graficar los datos del Cuadro 2.1 el ascenso es casi vertical, ver Figuras 2.3 y 2.4, por lo que es muy razonable convertir a escala logarítmica la variable que crece muy rápido, en este caso, el número de términos j .



Figura 2.3: Serie de Leibniz, 136 mil términos de la serie para obtener 5 dígitos de π .

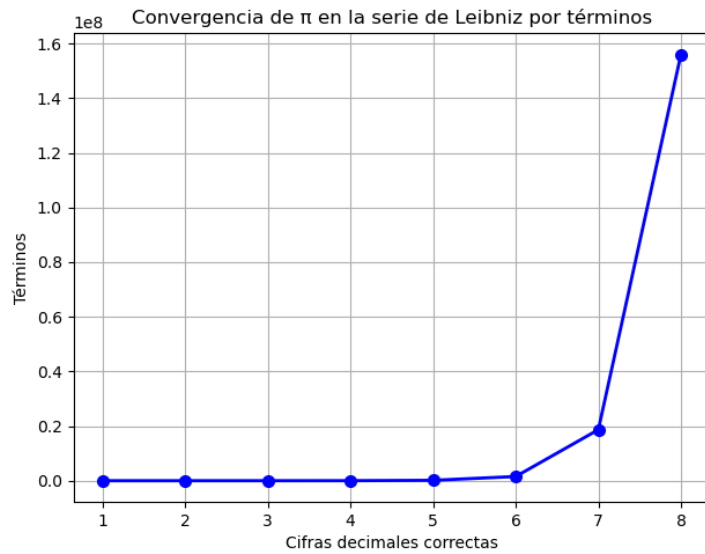


Figura 2.4: Serie de Leibniz, 156 millones términos de la serie para obtener 8 dígitos de π .

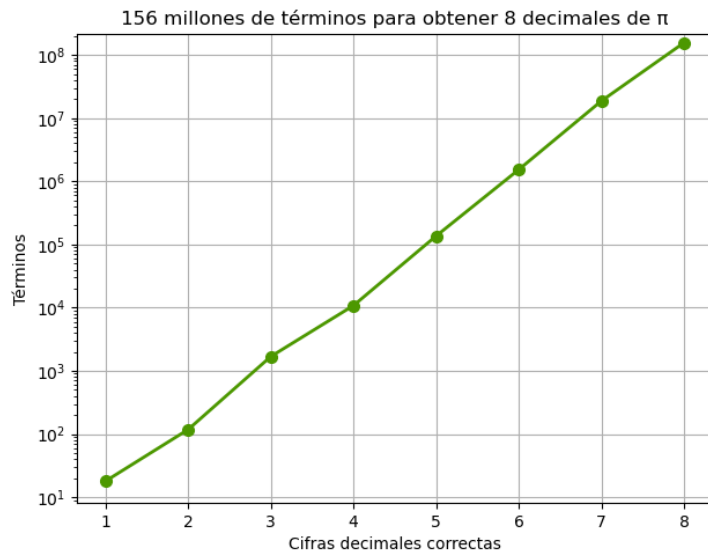


Figura 2.5: Serie de Leibniz, relación n vs j , con escala logarítmica en el número de términos j .

En términos prácticos, la fórmula de Leibniz resulta altamente ineficiente para calcular π , ya que demanda un elevado número de iteraciones para alcanzar unos pocos dígitos. Por ejemplo, para obtener 10 decimales correctos de π , según se puede ver en el Cuadro 2.1, se proyecta alrededor de unos 20 mil millones de términos de la serie.

2.2. Serie de Abraham Sharp con $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Abraham Sharp (1651-1742) en 1699 usó la serie del arcotangente (2.1) con el valor $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, obteniendo la serie

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \frac{1}{9477} - \frac{1}{32805} + \dots \right). \quad (2.7)$$

Notemos lo rápido que aumenta el denominador. Con esta serie pudo calcular una cantidad récord de 71 decimales exactas del número π . De hecho, Sharp calculó 72 decimales, pero el último resultó ser incorrecto; sin embargo, se entiende, ya que se estima que Sharp sumó aproximadamente 300 términos de su serie.



Figura 2.6: Abraham Sharp.
(Art UK, S.F.).

A continuación sustituimos $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ en la serie (2.1), y hacemos algunas manipulaciones algebraicas que facilitan el ejercicio computacional, pero que genera la misma secuencia encontrada por Sharp.

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{6 \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{6 \cdot \left(3^{-n-\frac{1}{2}}\right)}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^{-n} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}}{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{\frac{1}{2}-n}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Y es precisamente esta última sumatoria la que calculamos para aproximar a π , es decir,

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{\frac{1}{2}-n}}{2n+1}.$$

n dígitos	j términos	Tiempo	Aproximación a π
10	19	0.004 seg	3.1415926535714033818
100	205	0.01 seg	3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679496208212
1,000	2,090	0.2s seg	3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989516681463
10,000	20,950	38.2 seg	
100,000	209,580	4.3 hrs	
200,000	419169	27.738 hrs	

Cuadro 2.2: Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la serie de Sharp.

Es notable la serie de Sharp sobre la serie de Leibniz, sólo cambiando el valor de x en la serie del arco tangente, en 4.3 horas se obtienen 100 mil dígitos de π . Mientras que con la serie de Leibniz apenas llevábamos 8 dígitos con una hora de cómputo, y observando la tendencia, el noveno dígito requiere medio día, el décimo dígito alrededor de una semana, y el onceavo necesita unos tres meses. En general, en todas las series, el crecimiento en el tiempo de cómputo es exponencial.

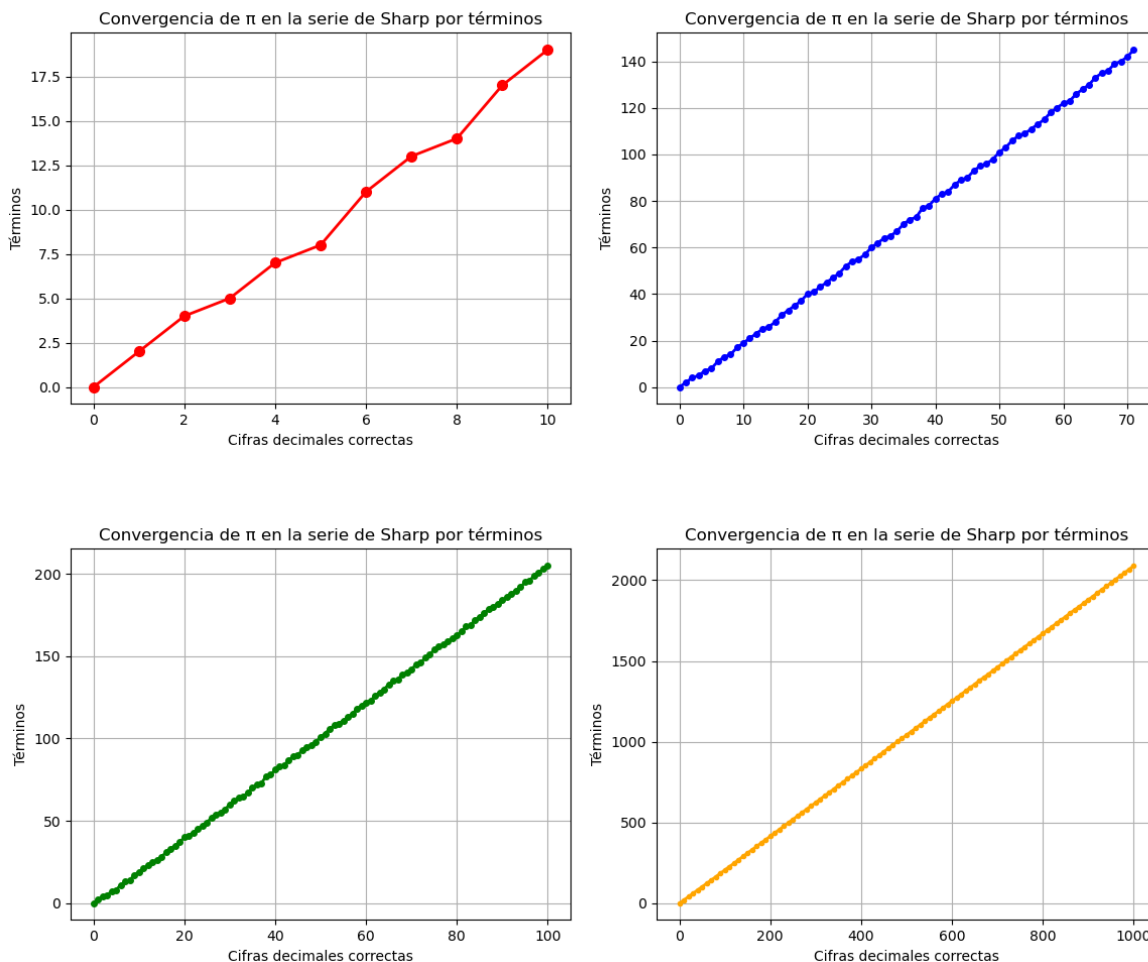


Figura 2.7: Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la serie de Sharp.

La segunda figura anterior corresponde a los 71 dígitos obtenidos por Sharp quien requirió cerca de 300 términos de la serie, y es de notar que con la tecnología actual sólo se requirieron aproximadamente la mitad.

2.3. Series tipo Machin

En esta sección analizaremos cómo ciertos matemáticos eligieron combinaciones de arcotangentes para expresarlas como una serie con convergencia más rápida que la serie de Leibniz. Las siguientes combinaciones de arcotangentes son conocidas como series tipo Machin, en honor a la primera de las cuatro combinaciones creada por John Machin (1680-1751). En el arcotangente de 1 ponemos $\frac{\pi}{4}$, y en los restantes arcotangentes usamos la sumatoria (2.8).

Teorema 3. *Series tipo Machin.*

a) *Serie de John Machin.*

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{4}{5^{2n+1}} - \frac{1}{239^{2n+1}} \right]. \quad (2.9)$$

b) *Serie de Leonhard Euler.*

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} \right].$$

c) *Serie de William Rutherford.*

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99},$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{4}{5^{2n+1}} - \frac{1}{70^{2n+1}} + \frac{1}{99^{2n+1}} \right].$$

d) *Serie de L.K.Shulz.*

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} + \frac{1}{8^{2n+1}} \right].$$

Demostración. Partimos de la fórmula de la tangente para la suma de dos ángulos

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Sustituyendo $A = \arctan a$ y $B = \arctan b$, obtenemos

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) + \tan(\arctan b)}{1 - \tan(\arctan a) \tan(\arctan b)} = \frac{a+b}{1-ab},$$

entonces

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \left(\frac{a+b}{1-ab} \right).$$

Finalmente sustituyendo $a = \frac{a_1}{b_1}$ y $b = \frac{a_2}{b_2}$, encontramos que

$$\arctan \frac{a_1}{b_1} + \arctan \frac{a_2}{b_2} = \arctan \left(\frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{b_1 b_2 - a_1 a_2} \right). \quad (2.11)$$

Repetiendo el procedimiento para la fórmula de la tangente de la resta de dos ángulos, obtenemos

$$\arctan \frac{a_1}{b_1} - \arctan \frac{a_2}{b_2} = \arctan \left(\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{b_1 b_2 + a_1 a_2} \right). \quad (2.12)$$

Y sustituyendo $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ en (2.11) obtenemos

$$2 \arctan \left(\frac{a_1}{b_1} \right) = \arctan \left(\frac{2a_1 b_1}{b_1^2 - a_1^2} \right). \quad (2.13)$$

a) Serie de John Machin. Partimos de la expresión

$$4 \arctan \frac{1}{5} = 2 \arctan \frac{1}{5} + 2 \arctan \frac{1}{5}.$$

Del lado derecho de esta ecuación, aplicamos la fórmula (2.13) en cada uno de los dos términos, es decir, $2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{5}{12}$, entonces

$$4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{5}{12} + \arctan \frac{5}{12}.$$

Ahora a esta suma le aplicamos la fórmula (2.11), o sea, $\arctan \frac{5}{12} + \arctan \frac{5}{12} = \arctan \frac{120}{119}$, por lo tanto,

$$4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119}.$$

Aquí le restamos la ecuación $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{120}{119} - \arctan 1.$$

Del lado derecho aplicamos la fórmula (2.12), a saber, $\arctan \frac{120}{119} - \arctan 1 = \arctan \frac{1}{239}$, obteniendo finalmente

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}.$$

b) Serie de Leonhard Euler. Usando la fórmula (2.11) para $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$, tenemos

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1.$$

c) Serie de William Rutherford. Lo que haremos es probar que las siguientes dos fórmulas son ciertas, de donde es inmediato que su suma es la respuesta solicitada.

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} = \arctan \frac{49}{50}.$$

$$\arctan \frac{49}{50} + \arctan \frac{1}{99} = \arctan 1.$$

Para probar que la primera de estas dos igualdades es verdadera, comenzamos con la resta

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70},$$

pero en el inciso a) probamos que $4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119}$, entonces |

$$\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{70}.$$

Para esta resta utilizamos la fórmula (2.12), dando como resultado

$$\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{70} = \arctan \frac{49}{50}.$$

Volviendo a aplicar $4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119}$ queda probada la primera fórmula. Para la segunda igualdad aplicamos la fórmula (2.11) a la suma $\arctan \frac{49}{50} + \arctan \frac{1}{99}$, y el resultado es inmediato.

d) Serie de L.K.Shulz. Aplicando la fórmula (2.11) a los primeros dos términos de la suma

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

nos da

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8}.$$

Y volviendo a aplicar (2.11) a los últimos términos de la ecuación anterior, obtenemos finalmente que

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan 1.$$

■

John Machin

Según Navarro (2010, [14]), este matemático británico ocupó el puesto de secretario de la Royal Society durante 29 años, pero su legado principal radica en una única fórmula que lleva su nombre. Esta fórmula, en combinación con la serie de Taylor, facilita el cálculo de π de manera eficiente debido a su rápida convergencia. (p.93).

Machin desempeñó un papel crucial, siendo el primero en calcular 100 decimales utilizando su fórmula, pero su verdadero impacto radica en haber allanado el camino para la investigación de la fórmula del arcotangente. En la actualidad, las fórmulas de tipo Machin son herramientas ampliamente aceptadas y han experimentado un importante desarrollo independiente. (p.40-41).

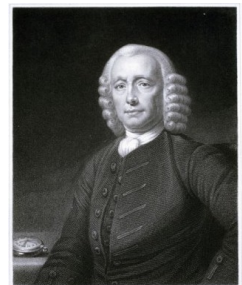


Figura 2.8: John Machin. (Mathematics, 2015).

Calculando los desarrollos en (2.8) para las funciones $\arctan \frac{1}{5}$ y $\arctan \frac{1}{239}$:

$$\arctan \frac{1}{5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots$$

$$\arctan \frac{1}{239} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots$$

Se deduce que:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots \right). \quad (2.14)$$

El último desarrollo posibilitó a John Machin calcular 100 cifras decimales del número π . Este logro fue publicado en el año 1706 por W. Jones en “Sinopsis de los logros matemáticos”, donde por primera vez se registro el uso de la letra π para representar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. (Zhúkov, 2005, p.49, [19]).

n dígitos	j términos	Tiempo	Aproximación a π
10	7	0.003 seg	3.1415926535886022287
100	70	0.2 seg	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679941505546
1000	713	39.2 seg	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679821480865 1328230664709384460955058223172535940812848111745028410 2701938521105559644622948954930381964428810975665933446 1284756482337867831652712019091456485669234603486104543 2664821339360726024914127372458700660631558817488152092 0962829254091715364367892590360011330530548820466521384 1469519415116094330572703657595919530921861173819326117 9310511854807446237996274956735188575272489122793818301 1949129833673362440656643086021394946395224737190702179 8609437027705392171762931767523846748184676694051320005 6812714526356082778577134275778960917363717872146844090 1224953430146549585371050792279689258923542019956112129 0219608640344181598136297747713099605187072113499999983 7297804995105973173281609631859502445945534690830264252 2308253344685035261931188171010003137838752886587533208 3814206171776691473035982534904287554687311595628638823 5378759375195778185778053217122680661300192787661119590 9216420198922101829

Cuadro 2.3: Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de Machin.

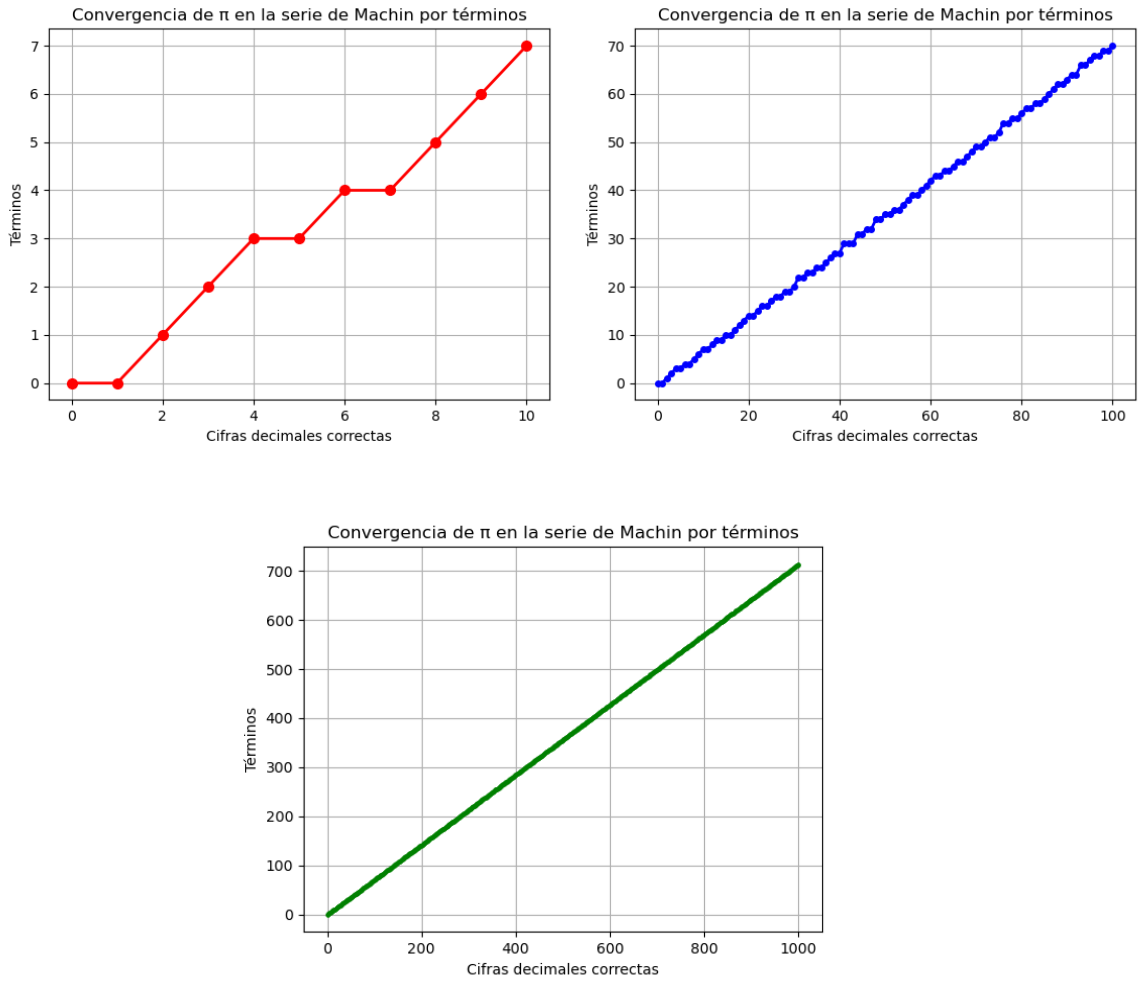


Figura 2.9: Fórmula de Machin, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.

Leonhard Euler

El suizo Leonhard Euler ha sido uno de los matemáticos más eminentes de la historia. A pesar de perder la vista, su extraordinaria memoria y habilidades para el cálculo mental le permitieron seguir trabajando hasta su fallecimiento, acaecido más de veinte años después en Rusia. Euler fue quien popularizó el uso del símbolo griego π para representar la constante π , además de introducir otras notaciones como $f(x)$ para funciones de una variable x , i para la unidad imaginaria, la constante e y el símbolo de sumatoria \sum . Sus contribuciones son vastas y han dejado una marca indeleble en áreas como el cálculo infinitesimal, las funciones, la teoría de números, la topología, la teoría de grafos, la física y la astronomía; incluso un asteroide lleva su nombre. En el campo de las series, Euler dio a conocer numerosas relacionadas con el número π . (Navarro, 2010, p.118, [14]).

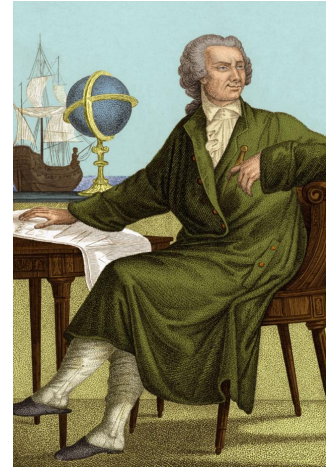


Figura 2.10: Leonhard Euler. (BBC, 2018).

Sin embargo, posiblemente lo más significativo es que el eminente Leonhard Euler (1707-1783), además de deducir serie tras serie acerca de π también sugirió que es un número trascendental, es decir, no es solución de un polinomio con coeficientes enteros. (Navarro, 2010, p.41, [14])

Reescribiendo las expansiones en (2.8) para evaluar las funciones $\arctan \frac{1}{2}$ y $\arctan \frac{1}{3}$:

$$\arctan \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots,$$

$$\arctan \left(\frac{1}{3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots$$

Obtenemos

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right).$$

n dígitos	j términos	Tiempo	Aproximación a π
10	15	0.007 seg	3.141592653578372567
100	163	0.6 seg	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679732435508
1000	1656	1.7 min.	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679821480865 1328230664709384460955058223172535940812848111745028410 2701938521105559644622948954930381964428810975665933446 1284756482337867831652712019091456485669234603486104543 2664821339360726024914127372458700660631558817488152092 0962829254091715364367892590360011330530548820466521384 1469519415116094330572703657595919530921861173819326117 9310511854807446237996274956735188575272489122793818301 1949129833673362440656643086021394946395224737190702179 8609437027705392171762931767523846748184676694051320005 6812714526356082778577134275778960917363717872146844090 1224953430146549585371050792279689258923542019956112129 0219608640344181598136297747713099605187072113499999983 7297804995105973173281609631859502445945534690830264252 2308253344685035261931188171010003137838752886587533208 3814206171776691473035982534904287554687311595628638823 5378759375195778185778053217122680661300192787661119590 92164201989498518967

Cuadro 2.4: Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de Euler.

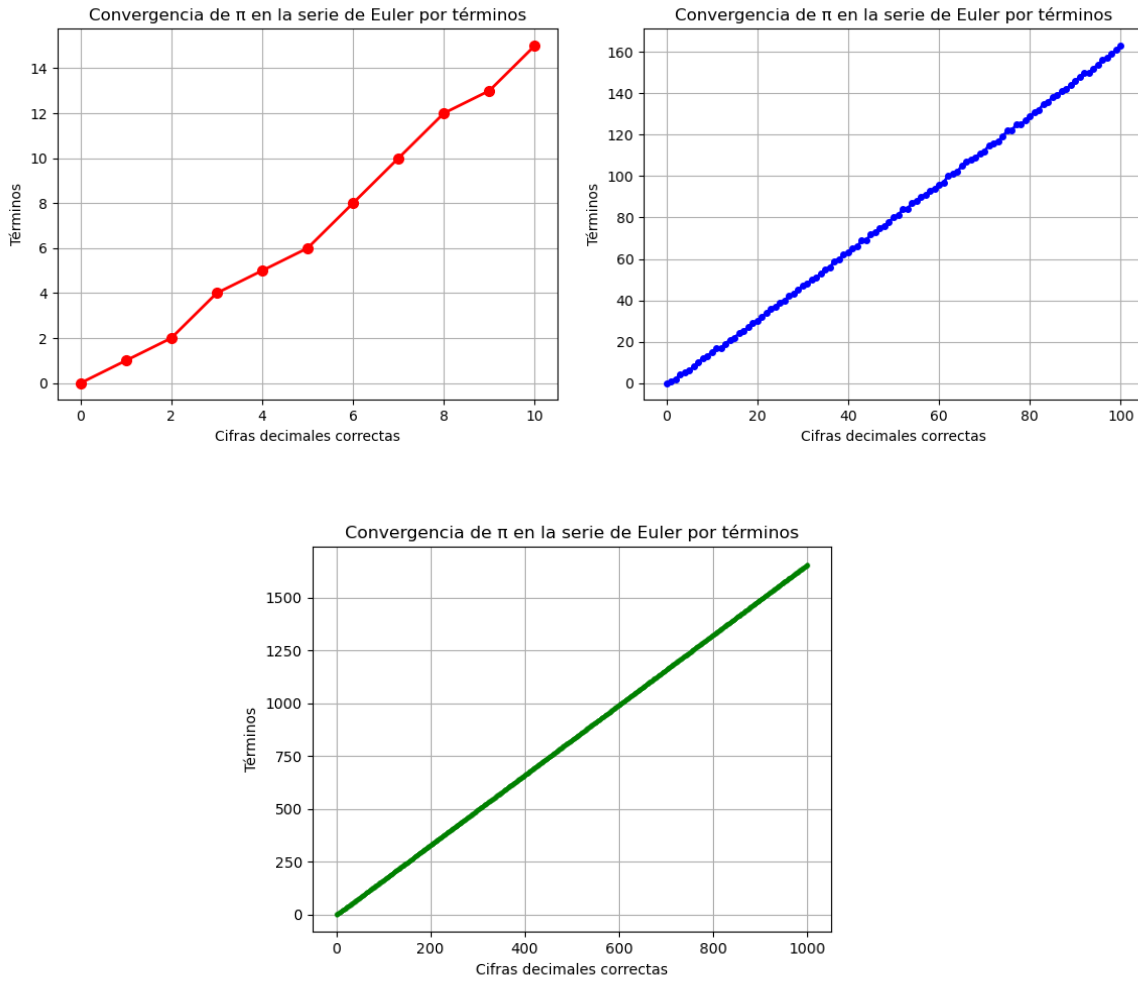


Figura 2.11: Fórmula de Euler, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.

William Rutherford

En 1841, el matemático inglés William Rutherford (1798-1871) utilizó una fórmula de Machin para calcular π hasta 208 dígitos, de los cuales 152 eran correctos. Luego, en 1853, volvió a la tarea utilizando nuevamente la fórmula de Machin y logró establecer un récord de 440 cifras. (Navarro, 2010, p.42-43, [14]).

Reescribiendo las expresiones en (2.8) para calcular los valores de $\arctan \frac{1}{5}$, $\arctan \frac{1}{70}$ y $\arctan \frac{1}{99}$:

$$\arctan \left(\frac{1}{5} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots,$$

$$\arctan \left(\frac{1}{70} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{70}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{70} - \frac{1}{3 \cdot 70^3} + \frac{1}{5 \cdot 70^5} - \frac{1}{7 \cdot 70^7} + \dots,$$

$$\arctan \left(\frac{1}{99} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{99}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{99} - \frac{1}{3 \cdot 99^3} + \frac{1}{5 \cdot 99^5} - \frac{1}{7 \cdot 99^7} + \dots,$$

Obteniendo finalmente

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right) - \left(\frac{1}{70} - \frac{1}{3 \cdot 70^3} + \frac{1}{5 \cdot 70^5} - \frac{1}{7 \cdot 70^7} + \dots \right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{3 \cdot 99^3} + \frac{1}{5 \cdot 99^5} - \frac{1}{7 \cdot 99^7} + \dots \right). \tag{2.15}$$

<i>n</i> dígitos	<i>j</i> términos	Tiempo	Aproximación a π
10	7	0.006 seg	3.141592653588602287
100	70	0.3 seg	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679941505546
1000	713	58.6 seg	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679821480865 1328230664709384460955058223172535940812848111745028410 2701938521105559644622948954930381964428810975665933446 1284756482337867831652712019091456485669234603486104543 2664821339360726024914127372458700660631558817488152092 0962829254091715364367892590360011330530548820466521384 1469519415116094330572703657595919530921861173819326117 9310511854807446237996274956735188575272489122793818301 1949129833673362440656643086021394946395224737190702179 8609437027705392171762931767523846748184676694051320005 6812714526356082778577134275778960917363717872146844090 1224953430146549585371050792279689258923542019956112129 0219608640344181598136297747713099605187072113499999983 7297804995105973173281609631859502445945534690830264252 2308253344685035261931188171010003137838752886587533208 3814206171776691473035982534904287554687311595628638823 5378759375195778185778053217122680661300192787661119590 9216420198922101829

Cuadro 2.5: Obtención de *n* dígitos de π con la suma de los primeros *j* términos de la Fórmula de William Rutherford.

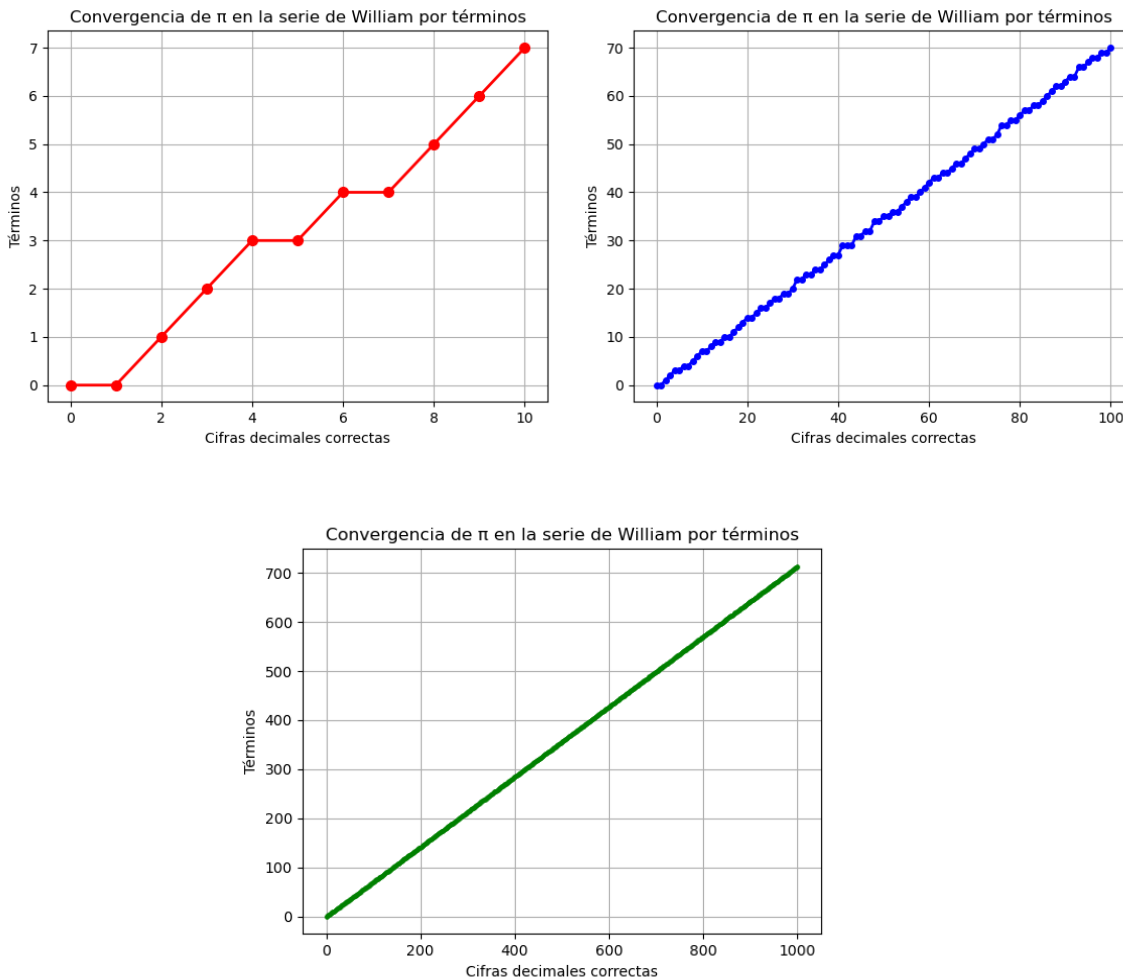


Figura 2.12: Fórmula de William, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.

L.K. Shulz

El matemático vienés L.K. Schulz von Strassnitzky (1803-1852) dedujo la fórmula de arcotangente (2.10), la cual utilizó el prodigio calculador Johann Martin Zacharias Dase en 1844 para calcular 200 decimales correctos de π en menos de dos meses. (Beckmann, 1971, p.103).

$\pi \approx$	3.14159	26535	89793	23846	26433
	83279	50288	41971	69399	37510
	58209	74944	59230	78164	06286
	20899	86280	34825	34211	70679
	82148	08651	32823	06647	09384
	46095	50582	23172	53594	08128
	48111	74502	84102	70193	85211
	05559	64462	29489	54930	38196.

Cuadro 2.6: Dígitos correctos obtenidos por Dase en menos de dos meses en 1844.

Evaluando las series en (2.8) para obtener los valores de $\arctan \frac{1}{2}$, $\arctan \frac{1}{5}$ y $\arctan \frac{1}{8}$:

$$\arctan \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots,$$

$$\arctan \frac{1}{5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots,$$

$$\arctan \left(\frac{1}{8} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{3 \cdot 8^3} + \frac{1}{5 \cdot 8^5} - \frac{1}{7 \cdot 8^7} + \dots,$$

Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) \\ &+ \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3 \cdot 8^3} + \frac{1}{5 \cdot 8^5} - \frac{1}{7 \cdot 8^7} + \dots \right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

<i>n</i> dígitos	<i>j</i> términos	Tiempo	Aproximación a π
10	15	0.008 seg	3.1415926535783725868
100	163	0.7 seg	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679732435508
1000	1656	1.9 min	3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820 9749445923078164062862089986280348253421170679821480865 1328230664709384460955058223172535940812848111745028410 2701938521105559644622948954930381964428810975665933446 1284756482337867831652712019091456485669234603486104543 2664821339360726024914127372458700660631558817488152092 0962829254091715364367892590360011330530548820466521384 1469519415116094330572703657595919530921861173819326117 9310511854807446237996274956735188575272489122793818301 1949129833673362440656643086021394946395224737190702179 8609437027705392171762931767523846748184676694051320005 6812714526356082778577134275778960917363717872146844090 1224953430146549585371050792279689258923542019956112129 0219608640344181598136297747713099605187072113499999983 7297804995105973173281609631859502445945534690830264252 2308253344685035261931188171010003137838752886587533208 3814206171776691473035982534904287554687311595628638823 5378759375195778185778053217122680661300192787661119590 92164201989498518967

Cuadro 2.7: Obtención de n dígitos de π con la suma de los primeros j términos de la Fórmula de Shulz.

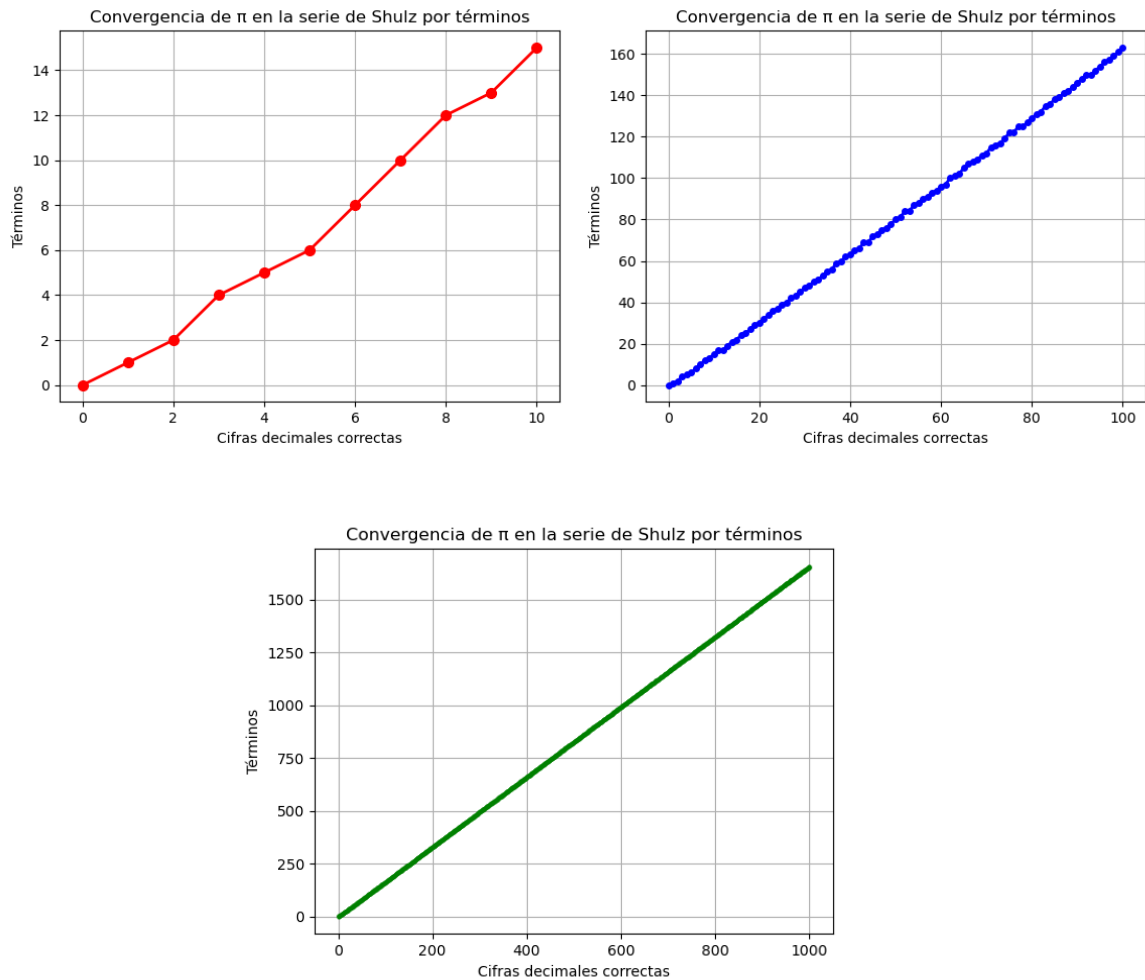


Figura 2.13: Fórmula de Shulz, número de términos de la serie para obtener n decimales correctos.

En el capítulo 2 hemos discutido varias series y métodos para calcular π , pero ninguno ofrece la combinación de rapidez y precisión de la secuencia de Arquímedes. Mientras que métodos como la serie de Machin proporcionan una forma algebraica eficiente de aproximar π , la secuencia de Arquímedes utiliza una aproximación geométrica que converge más rápidamente con menos iteraciones, especialmente cuando se utilizan polígonos de un número de lados cada vez mayor.

Presentamos a continuación el Cuadro 2.8 con resultados de comparación entre estos dos métodos, evaluando su precisión y eficiencia:

n	Secuencia de Arquímedes	Serie de Machin
10	0.005 s	0.007 s
100	0.01 s	0.2 s
1,000	0.5 s	47 s
2,000	2.4 s	7.6 min
3,000	6.6 s	26.1 min
4,000	14 s	1.1 h
5,000	25 s	2.6 h

Cuadro 2.8: Obtención de n cifras correctas en la secuencia de Arquímedes para polígonos inscritos (1.23) y la serie de Machin (2.9).

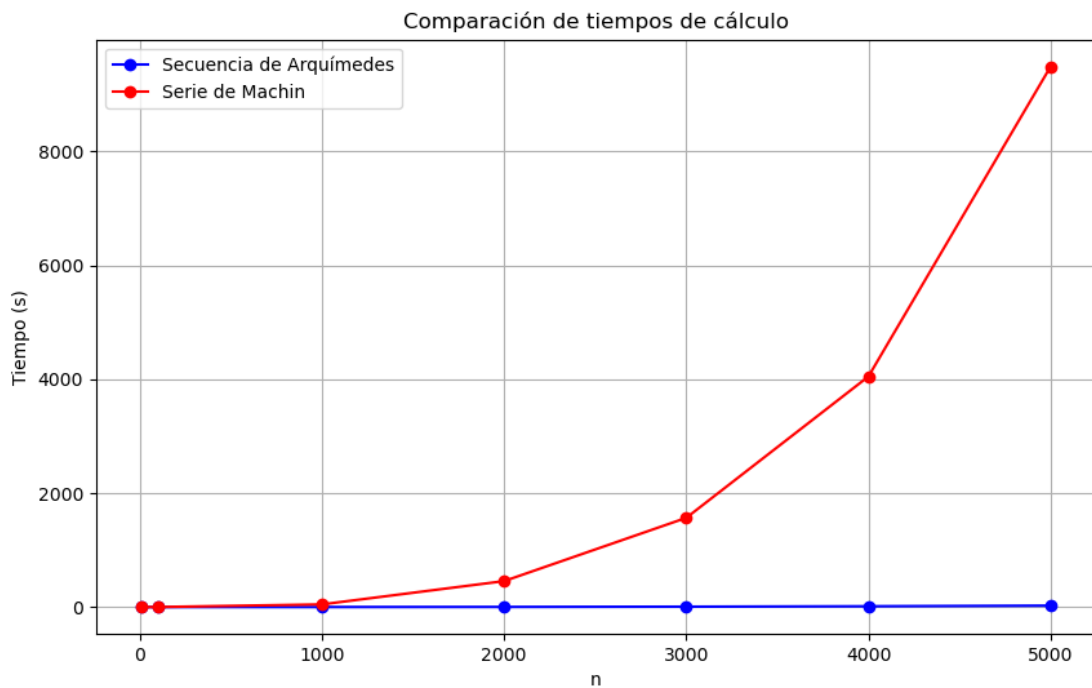


Figura 2.14: Comparación de tiempos de cálculo entre la secuencia de Arquímedes y la serie de Machin.

La capacidad de la secuencia de Arquímedes para alcanzar una precisión significativa con un número razonable de pasos iterativos la hace una herramienta poderosa y eficiente en la búsqueda de una aproximación precisa de π .

Capítulo 3

Etapa moderna (siglo XX)

Esta tercera etapa se distingue de la etapa anterior, la del cálculo infinitesimal, por dos aspectos, primero la velocidad de convergencia que es muy superior a lo conocido hasta entonces, y segundo por el tipo de Matemáticas utilizadas que, en general, se refieren a integrales elípticas y Geometría Algebraica. Quien inaugura la etapa actual de series y sucesiones es el genio indio Srinivasa Ramanujan que obtiene una larga lista de series para $\frac{1}{\pi}$.

En el presente capítulo exploramos las contribuciones de figuras muy destacadas en el estudio de π : Srinivasa Ramanujan y los hermanos Chudnovsky.

A continuación, ilustramos algunos aspectos sobre la rapidez con que se obtienen dígitos correctos de π , marcando un cambio significativo con respecto a las etapas anteriores. Esta transición se distingue por la notoria mejora en la precisión de las aproximaciones. Nos enfocaremos en la presentación del influyente trabajo de Ramanujan, cuyas contribuciones destacadas jugaron un papel fundamental en esta nueva era de aproximaciones más precisas del número π . Al igual que muchos matemáticos ilustres antes que él, Ramanujan se sintió fascinado por π : la razón entre la circunferencia y el diámetro de cualquier círculo. Basándose en su estudio de ecuaciones modulares, formuló expresiones exactas para π y derivó valores aproximados a partir de ellas.

Gracias al trabajo de varios investigadores en las décadas recientes, como los hermanos Chudnovsky y Jonathan Borwein, este último mejor conocido como el Doctor π , los métodos de Ramanujan son ahora mejor comprendidos y se han implementado como algoritmos. Además, también examinaremos las contribuciones de los hermanos Chudnovsky, quienes han enriquecido considerablemente nuestra comprensión y cálculo de números como π . Explicaremos cómo su trabajo se ha visto favorecido por la fórmula de Ramanujan, lo que les ha permitido desarrollar un algoritmo que converge mucho más rápido hacia π .

3.1. Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

En esta sección, exploraremos las aportaciones de Ramanujan en relación con la aproximación del número π .

La evolución del cálculo de π adquirió una nueva dimensión con la entrada en escena de Srinivasa Ramanujan, cuyo genio matemático dejó una huella imborrable en la historia de las matemáticas. En un momento en que el mundo aún se maravillaba con la enigmática naturaleza de esta constante, Ramanujan irrumpió con una serie de brillantes innovaciones que llevaron el conocimiento humano sobre π a nuevas alturas. Desde su humilde origen en la India hasta su reconocimiento como uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX, Ramanujan desafió las convenciones establecidas con

su enfoque singular para calcular π . Sus métodos, caracterizados por su elegancia y eficacia, abrieron puertas a nuevas posibilidades y desafiaron las expectativas de lo que se consideraba posible en el ámbito del cálculo matemático.



Figura 3.1: Srinivasa Ramanujan. (OpenMind BBVA, 2016).

Entre los enfoques recientes para calcular π , destacan los tesoros matemáticos desenterrados gracias al renovado interés en el trabajo de Ramanujan. Sin embargo, gran parte de su obra sigue siendo inaccesible para los investigadores, ya que está contenida en sus cuadernos personales, donde escribió usando su propia nomenclatura, algo similar a lo que vimos con Arquímedes. Ramanujan no solía incluir pruebas formales para sus teoremas, lo que ha generado frustración entre los matemáticos que han estudiado sus notas. Hasta donde sabemos, no existe una redacción matemática de este alcance o dificultad. (Borwein, J. M. & Borwein, P. B., 1997, p.112, [5]). Finalmente los hermanos Borwein, Jonathan y Peter, fueron los primeros en dar demostraciones completas y rigurosas de las 17 series de Ramanujan. (Guillera, 2009, p.9, [9]).

Según los relatos de sus compañeros de escuela, Ramanujan tenía un conocimiento notable de las expansiones decimales de números como e , π y otros. Utilizando su habilidad construyó las aproximaciones del número π con una precisión de 3,8,9 cifras decimales.

$$\frac{19}{16}\sqrt{7} = \mathbf{3.14182968\dots}$$

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \mathbf{3.1415926525826\dots}$$

$$\frac{63}{25} \cdot \left(\frac{17 + 15\sqrt{5}}{7 + 15\sqrt{5}}\right) = \mathbf{3.14159265380568\dots}$$

Ramanujan era capaz de manipular números enormes sin depender de ninguna técnica computacional. Su actitud hacia los números era profundamente apasionada. (Zhúkov, 2005, p.62-63, [19]).

En 1914, el prodigioso matemático hindú Srinivasa Ramanujan, presentó numerosas fórmulas para determinar el valor de π . Algunas de estas fórmulas eran sumamente complejas y requerirían la llegada de la computación para ser empleadas de manera efectiva. Estas contribuciones fueron compartidas en sus famosas “Cartas a Hardy”, correspondencia con el matemático británico G.H. Hardy, así como también en sus propios cuadernos y publicaciones matemáticas. Además, algunas de sus contribuciones fueron presentadas en conferencias y simposios matemáticos de la época. (Posamentier & Lehmann, 2004, p.71, [16]).

Una de estas fórmulas es:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}. \quad (3.1)$$

Teorema 4. *La serie de Ramanujan (3.1) satisface la siguiente relación*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{99^4}.$$

Demostración. Considerando que a_n es el término genérico de la serie, es decir,

$$a_n = \frac{(4n)!(26390n + 1103)}{(n!)^4(396)^{4n}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(4(n+1))!(26390(n+1) + 1103)}{((n+1)!)^4(396)^{4(n+1)}}}{\frac{(4n)!(26390n + 1103)}{(n!)^4(396)^{4n}}} \\ &= \frac{(4n+4)!}{(4n)!} \cdot \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)^4 \cdot \frac{396^{4n}}{396^{4n+4}} \cdot \frac{26390n + 27493}{26390n + 1103} \\ &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!}{(4n)!} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n!}{n!} \right)^4 \cdot \frac{1}{396^4} \cdot \frac{26390n + 27493}{26390n + 1103} \\ &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!}{(4n)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^4} \cdot \frac{1}{396^4} \cdot \frac{26390n + 27493}{26390n + 1103} \\ &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^4} \cdot \frac{1}{396^4} \cdot \frac{26390n + 27493}{26390n + 1103} \\ &= \frac{4n+4}{n+1} \cdot \frac{4n+3}{n+1} \cdot \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{4n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{396^4} \cdot \frac{26390n + 27493}{26390n + 1103}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{396^4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26390n + 27493}{26390n + 1103} \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{396^4} \cdot 1 = \frac{1}{99^4}. \end{aligned}$$

■

El Teorema 4 tiene dos importantes consecuencias.

1. El criterio de la razón o del cociente implica la convergencia de la serie.
2. La velocidad de convergencia.

Como es bien sabido de los cursos de análisis real, una manera de probar que una serie converge es aplicando el criterio de la razón.

Teorema 5. Criterio de la razón. *Sea la serie $\sum a_n$ y supóngase que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$, entonces la serie*

- (a) converge si $r < 1$,
- (b) diverge si $r > 1$, y
- (c) no es concluyente si $r = 1$.

Al aplicar este Teorema 5 a la serie de Ramanujan tenemos las siguientes consecuencias:

1. Dado que en el Teorema 4 ya demostramos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{99^4} < 1$, entonces la serie de Ramanujan converge.
2. Y acerca de la rapidez con la que se generan dígitos correctos de π , observemos que para n suficientemente grande

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \approx \frac{1}{99^4} = \frac{1}{96059601} \approx 1.041 \times 10^{-8} \approx 10^{-8}.$$

Por lo tanto, cada término es aproximadamente 10^{-8} del término anterior para n grande, aunque computacionalmente pudimos observar que desde los primeros valores de n ya tiene este comportamiento. Así, la convergencia es a $\frac{1}{\pi}$ agregando aproximadamente 8 dígitos por término.

Entonces

$$a_{n+1} \approx 10^{-8} a_n.$$

Así, en cada término nuevo que se agrega de la serie, el punto decimal se recorre 8 posiciones y éstas ya no modifican el valor de la suma y por tanto la aproximación de π , como puede verse en los primeros términos de la serie, $a_1 = 0.00002 \dots$, $a_2 = 0.00000000000002 \dots$, $a_3 = 0.00000000000000000002 \dots$, en cada término se agregan 8 ceros más.

Dígitos de π deseados	Número de términos de la serie	Tiempo
100	12	5.0 seg
1,000	125	3.3 seg
10,000	1250	3.6 seg
100,000	12500	47.6 seg
1,000,000	125000	6402.1s = 1.8 horas

Cuadro 3.1: Fórmula de Ramanujan. 8 dígitos de π por cada término de la serie.

En honor a Ramanujan, continuamos explorando las maravillas de π y seguimos adentrándonos con la profundidad de su misterio matemático.

Análisis del código en Python

El punto principal de esta sección es ilustrar cómo se puede optimizar un algoritmo para minimizar el número de operaciones aritméticas, lo que nos hace ganar en dos direcciones, en tiempo de cómputo y en una menor acumulación de errores. La idea básica es utilizar lo ya calculado en cada término para minimizar las operaciones en el término siguiente. Una inspección a simple vista de la sumatoria de Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}$$

nos permite observar que

- En $1103 + 26390n$ hay *1 multiplicación* y *1 suma*, la cual se optimiza guardando su valor en la memoria, y en cada iteración del bucle se realiza sólo *1 suma*, la de 26390 .

$$(1103 + 26390n) + \mathbf{26390} = 1103 + 26390(n + 1).$$

- En 396^{4n} vemos $4n - 1$ multiplicaciones, para optimizarlo se calcula 396^4 una sola vez, se le pone nombre a ese valor, y en cada iteración del bucle se multiplica por ese valor.

$$396^{4n} \cdot 396^4 = 396^{4(n+1)},$$

o sea, de $4n - 1$ *multiplicaciones* por cada paso en el ciclo, la reducimos a *1 multiplicación*.

- En la expresión $\frac{(4n)!}{(n!)^4}$ hay $1 + 4n - 2 + n - 2 + 3 = 5n$ multiplicaciones y 1 división. La estrategia para reducción de operaciones es la misma, guardar el valor de la iteración anterior $\frac{(4n)!}{(n!)^4}$, y modificarlo para obtener el siguiente valor.

$$\text{Valor anterior} = \frac{(4n)!}{(n!)^4}. \quad \text{Valor nuevo} = \frac{(4(n+1))!}{((n+1)!)^4}.$$

$$\begin{aligned} \frac{(4(n+1))!}{((n+1)!)^4} &= \frac{(4n+4)!}{((n+1)n!)^4} = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!}{(n+1)^4(n!)^4} \\ &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^4} \cdot \frac{(4n)!}{(n!)^4} \\ &= \frac{4(n+1)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)(n+1)^3} \cdot \text{Valor anterior} \\ &= \frac{4(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^3} \cdot \text{Valor anterior} \\ &= \frac{4(a^3 - a)}{(n+1)^3} \cdot \text{Valor anterior} \end{aligned}$$

donde hemos definido $a = 4n + 2$, entonces $(4n + 3)(4n + 2)(4n + 1) = (a + 1)a(a - 1) = a^3 - a$. Entonces ahora tenemos $1 + 2 + 2 = 5$ multiplicaciones y 1 división.

En resumen, hemos disminuido de $5n$ multiplicaciones a sólo 5.

- En conclusión, para el cálculo del nuevo término de la serie, si sólo tomamos en cuenta las multiplicaciones que son las operaciones que más se realizan, hemos bajado el número de $1 + 4n - 1 + 5n = 9n$ a sólo $1 + 5 = 6$.

La evolución del cálculo de π dio paso a una nueva fase donde la tecnología moderna, en forma de calculadoras, se convirtió en una herramienta indispensable. Después de las aportaciones de Ramanujan, la llegada de las calculadoras marcó un nuevo hito en la búsqueda de mayor precisión en su valor.

En 1946, D. F. Ferguson, de Inglaterra, descubrió un error en el cálculo de William Shanks, seguido por John W. Wrench Jr., de Estados Unidos, quien en enero de 1947 logró extender el cálculo a 808 lugares decimales. A pesar de un tropiezo en el lugar decimal 723, Ferguson y Wrench Jr. trabajaron juntos para corregirlo en enero de 1948, utilizando una calculadora de escritorio. No contentos con ello, al año siguiente, con el esfuerzo combinado de Wrench Jr. y Levi B. Smith, matemáticos estadounidenses, el cálculo de π se extendió aún más, alcanzando 1,120 lugares decimales, todo ello realizado únicamente con una calculadora de escritorio. Este episodio destaca la tenacidad y colaboración necesarias para desvelar los misterios de π , incluso con herramientas aparentemente simples. (Posamentier & Lehmann, 2004, p.71, [16]).

Este cambio no sólo permitió corregir errores previos, como el descubierto por D. F. Ferguson en el cálculo de William Shanks, sino que también posibilitó la ampliación significativa del número de lugares decimales calculados, como lo demostraron John W. Wrench Jr. y Levi B. Smith.

3.2. Hermanos Chudnovsky

La búsqueda del mayor número de lugares decimales para π alcanzó cifras extraordinarias con los hermanos Chudnovsky, David y Gregory. Su historia es un tanto inusual. Emigraron a los Estados Unidos desde la Unión Soviética en 1978 después de obtener doctorados en Matemáticas de la Academia de Ciencias de Ucrania. Alquilieron dos supercomputadoras para hacer sus cálculos, decididos a obtener el valor más preciso para π . Hubo algunos problemas en el camino. Gregory, cinco años más joven, padecía miastenia gravis, un trastorno autoinmune de los músculos, y tuvo que permanecer en cama la mayor parte del tiempo. Realizó la mayor parte de su trabajo desde su cama. Ambos hermanos estaban casados y durante un tiempo vivieron de los ingresos de sus respectivas esposas, mientras perseguían sus desafíos matemáticos. El gasto de las supercomputadoras eventualmente los obligó a construir las suyas propias, ocupando gran parte de su apartamento. En 1981 las cosas se facilitaron un poco cuando Gregory ganó una beca de la Fundación MacArthur en Matemáticas. Esto proporcionó un seguro médico muy necesario y resolvió sus problemas financieros inmediatos. Gregory continuó trabajando desde su cama, escribiendo fórmulas matemáticas y persiguiendo el valor de π , mientras también hacía avances en varias otras áreas de las Matemáticas. Ésta es sólo una de las muchas historias que se pueden encontrar en la rica historia de π . (Posamentier & Lehmann, 2004, p.73).

Los hermanos se especializaron principalmente en teoría de números, especialmente en aritmética modular, series infinitas de funciones hipergeométricas, funciones elípticas y otros temas avanzados. Esto los llevó al estudio de las series convergentes de π , una área que ya había sido explorada por S. Ramanujan en el siglo pasado.

La fórmula de los hermanos Chudnovsky es una poderosa herramienta para calcular el valor de π de manera altamente precisa y eficiente. Se expresa como sigue:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640,320^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} \frac{545,140,134k + 13,591,409}{640,320^{3k}}.$$

Se ha empleado para calcular una cantidad asombrosa de dígitos de π con una precisión extraordinaria.

Valor de π	Número de términos de la serie	Error	Tiempo
3.141592653589793238 46264338327950288419 7167678854846	3	$1.7e - 42$	2.9 seg
3.14159265358979323846 2643383279502884197169 39937510582098494740802	4	$1.0e - 56$	2.8 seg
3.14159265358979323846 2643383279502884197169 3993751058209749445923 078163466946902	5	$5.9e - 71$	3 seg

Cuadro 3.2: Resultados de términos y tiempos con la fórmula de los hermanos Chudnovsky.

Valor de π	Número de términos de la serie	Error	Tiempo
Aprox 100 dígitos de π	7	$2.2e - 99$	3.1 seg
Aprox 1,000 dígitos de π	72	$1.2e - 1018$	4.2 seg
Aprox 100,000 dígitos de π	7143	$5.6e - 100012$	60.6 seg
Aprox 1,000,000 dígitos de π	71429	$1.4e - 1000015$	1.4 hrs

Cuadro 3.3: Hermanos Chudnovsky. 14 dígitos de π por cada término de la serie.

Nombre	Año	Dígitos de π
Ferguson	1946	620
Ferguson Jan	1947	710
Ferguson and Wrench Sep	1947	808
Smith and Wrench	1949	1,120
Reitwiesner et al. (ENIAC)	1949	2,037
Nicholson and Jeanel	1954	3,092
Felton	1957	7,480
Genuys Jan	1958	10,000
Felton May	1958	10,021
Genuys	1959	16,167
Daniel Shanks and Wrench	1961	100,265
Guilloud and Filliatre	1966	250,000
Guilloud and Dichampt	1967	500,000
Guilloud and Bouyer	1973	1,001,250
Miyoshi and Kanada	1981	2,000,036
Guilloud	1982	2,000,050
Tamura	1982	2,097,144
Tamura and Kanada	1982	4,194,288
Tamura and Kanada	1982	8,388,576
Kanada, Yoshino, and Tamura	1982	16,777,206
Ushiro and Kanada Oct	1983	10,013,395
Gosper Oct	1985	17,526,200
Bailey Jan	1986	29,360,111
Kanada and Tamura Sep	1986	33,554,414
Kanada and Tamura Oct	1986	67,108,839
Kanada, Tamura, Kubo et al Jan	1987	134,217,700
Kanada and Tamura Jan	1988	201,326,551
Chudnovskys May	1989	480,000,000
Chudnovskys Jun	1989	525,229,270
Kanada and Tamura Jul	1989	536,870,898
Chudnovskys Aug	1989	1,011,196,691
Kanada and Tamura Nov	1989	1,073,740,799
Chudnovskys Aug	1991	2,260,000,000
Chudnovskys May	1994	4,044,000,000
Takahashi and Kanada Jun	1995	3,221,225,466
Takahashi and Kanada Aug	1995	4,294,967,286
Takahashi and Kanada Sep	1995	6,442,450,938
Takahashi and Kanada Jun	1997	51,539,600,000
Takahashi and Kanada Apr	1999	68,719,470,000
Takahashi and Kanada Sep	1999	206,158,430,000
Kanada and nine-person team at University of Tokyo Sep	2002	1,241,100,000,000

Cuadro 3.4: Tabla obtenida del libro de Posamentier & Lehmann [16].

Algoritmos modernos con alto orden de convergencia

De manera general, durante el último siglo, desde Ramanujan, podemos asegurar que la teoría de *integrales elípticas*¹ ha dominado el mundo de los algoritmos modernos para calcular al número π . Según hemos podido observar, la carrera para calcular cada vez más dígitos está pasando a un segundo plano. Ahora la novedad son los algoritmos, ya sea presentados en modo de series o de secuencias recurrentes, que en cada iteración suman una cantidad fija de dígitos, como la fórmula de Ramanujan que suma 8 dígitos en cada término, o la fórmula de los hermanos Chudnovsky que suma 14 o 15 dígitos por cada término que se agrega a la sumatoria.

Otros algoritmos de convergencia aún más poderosa son aquellos que en cada iteración multiplican el número de dígitos correctos por una cantidad fija, esto ya es un crecimiento exponencial. Por ejemplo, el algoritmo de Jonathan Borwein and Peter Borwein (1985) que incluimos en la siguiente tabla, tiene la propiedad de que su convergencia es de orden 4, esto significa que el error en la próxima iteración es aproximadamente el error anterior elevado a la cuarta potencia, y esto hace que si ya tenemos por ejemplo, 20 decimales correctos, entonces el error es $\epsilon_n \approx 10^{-20}$, y en la próxima iteración, el nuevo error es $\epsilon_{n+1} \approx \epsilon_n^4 \approx 10^{-80}$, o sea, que el número de cifras correctas se multiplicó por 4 en un solo paso.

Los datos presentados a continuación fueron extraídos del artículo de Agarwal R., Agarwal H. y Sen S. (2013, [1]), que detalla el cálculo de π hasta diez billones de dígitos. En dicho artículo, los autores exploran las contribuciones que se han hecho cronológicamente, desde los primeros registros que se conocen, es decir, desde hace 5,000 años hasta la fecha actual. Sólo se indica la época, el autor, y su contribución mediante una frase breve. Y al final una abundante bibliografía para conocer los detalles. (p.38-46).

• **1914**

Srinivasa Ramanujan (1887-1920). La más famosa de las series que creó,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1,103 + 26,390n)}{(n!)^4(396)^{4n}},$$

se ha utilizado para calcular π con un nivel de precisión nunca antes alcanzado. Cada término adicional de la serie suma aproximadamente 8 dígitos.

• **1976**

Richard Brent y Eugene Salamin descubrieron de forma independiente un algoritmo basado en una media aritmético-geométrica que modifica ligeramente el algoritmo de Gauss-Legendre. Establece $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $s_0 = \frac{1}{2}$. Para $k = 1, 2, 3, \dots$ calcula

¹Más información sobre cómo usó Ramanujan las integrales elípticas para generar sus 17 series para el número $\frac{1}{\pi}$ se puede consultar en su primer artículo publicado en 1914 fuera de la India [18].

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, \\
 b_k &= \sqrt{a_{k-1} \cdot b_{k-1}}, \\
 c_k &= a_k^2 - b_k^2, \\
 s_k &= s_{k-1} - 2^k c_k, \\
 p_k &= \frac{2a_k^2}{s_k}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Entonces p_k converge cuadráticamente a π , es decir, cada iteración duplica el número de dígitos precisos. De hecho, las iteraciones sucesivas deben producir 1, 4, 9, 20, 42, 85, 173, 347 y 697 dígitos correctos de π . La vigésimo quinta iteración debe producir 45 millones de dígitos decimales correctos de π .

• **1984**

Jonathan Borwein y Peter Borwein proporcionaron el siguiente algoritmo. Establece $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 0$ y $\alpha_0 = 2 + \sqrt{2}$. Itera

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \frac{\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}}}{2}, \\
 y_{k+1} &= \sqrt{x_k} \left(\frac{1 + y_k}{y_k + x_k} \right), \\
 \alpha_{k+1} &= \alpha_k y_{k+1} \left(\frac{1 + x_{k+1}}{1 + y_{k+1}} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces α_k converge a π cuárticamente. El algoritmo no se corrige automáticamente; cada iteración debe realizarse con el número deseado de dígitos correctos de π .

• **1985**

Jonathan Borwein y Peter Borwein dieron el siguiente algoritmo. Establece $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ y $y_0 = \sqrt{2} - 1$. Itera

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= \frac{1 - (1 - y_k^4)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1 - y_k^4)^{\frac{1}{4}}}, \\
 a_{k+1} &= a_k (1 + y_{k+1})^4 - 2^{2k+3} y_{k+1} (1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2).
 \end{aligned}$$

Entonces a_k converge cuárticamente a $\frac{1}{\pi}$, es decir, cada iteración cuadruplica aproximadamente el número de dígitos correctos.

• **1988**

Jonathan Borwein y Peter Borwein desarrollaron la serie

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (A + Bn)}{(n!)^3 (3n)! C^{n+\frac{1}{2}}},$$

donde

$$\begin{aligned} A &= 212, 175, 710, 912\sqrt{61} + 1, 657, 145, 277, 365, \\ B &= 13, 773, 980, 892, 672\sqrt{61} + 107, 578, 229, 802, 750, \\ C &= [5, 280(236, 674 + 30, 303\sqrt{61})]^3. \end{aligned}$$

Cada término adicional de la serie agrega aproximadamente 31 dígitos.

• **1989**

David y Gregory Chudnovsky desarrollaron la siguiente serie hipergeométrica generalizada de rápida convergencia:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3(3n)!} \frac{13, 591, 409 + 545, 140, 134n}{(640, 320^3)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Cada término adicional de la serie agrega aproximadamente 15 dígitos. Esta serie es una versión mejorada de la de Ramanujan (3.1). Fue utilizada por los hermanos Chudnovsky para calcular más de mil millones (exactamente 1,011,196,691) dígitos en una IBM 3090.

• **1991**

Jonathan Borwein y Peter Borwein mejoraron el algoritmo de Salamin-Brent (3.2). Establecieron $a_0 = \frac{1}{3}$ y $s_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Iteran

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \frac{3}{1 + 2(1 - s_k^3)^{\frac{1}{3}}}, \\ s_{k+1} &= \frac{r_{k+1} - 1}{2}, \\ a_{k+1} &= r_{k+1}^2 a_k - 3^k (r_{k+1}^2 - 1). \end{aligned}$$

Entonces $\frac{1}{a_k}$ converge cúbicamente a π , es decir, cada iteración aproximadamente triplica el número de dígitos correctos.

Conclusiones

Hoy en día, el número π sigue siendo esencial en Matemáticas y ciencias aplicadas, continuando su legado como un enlace fundamental entre diferentes ramas del conocimiento matemático.

Sin duda alguna, la magia y el interés por este número nunca terminará, ya son 5,000 años de historia los que posee. Con el tiempo vendrán nuevos estudios y descubrimientos, vendrán libros, artículos de investigación, nuevos teoremas, tal vez el descubrimiento de propiedades hoy desconocidas.

En esta investigación sobre la convergencia del número π , se han explorado diversas facetas de este fascinante número irracional y su relación con la convergencia de diferentes secuencias y series matemáticas.

A través del análisis de métodos numéricos, algoritmos y aproximaciones, se ha evidenciado cómo esta constante matemática fundamental ha sido crucial en el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y la tecnología. El desarrollo de los algoritmos para converger hacia el valor preciso de π no sólo ha permitido avances significativos en campos como la física, la informática y la ingeniería, sino que también ha inspirado una profunda apreciación por la belleza y la complejidad de las matemáticas.

Ha sido sumamente fascinante explorar, desde una perspectiva histórica, el origen y la evolución de los algoritmos para calcular π con una precisión arbitrariamente alta. Es crucial resaltar la eficiencia del método de Arquímedes, a pesar de que en su época, las limitaciones tecnológicas le impidieron obtener más dígitos de π . Mediante la implementación del código, hemos comprobado que este método es considerablemente más rápido que el utilizado en la etapa inicial del Cálculo Infinitesimal, basado en la serie de Gregory-Leibniz. Además, pudimos notar que, aunque se trata de una serie, la convergencia es muy lenta en comparación con las secuencias de Arquímedes.

La fórmula de Ramanujan ha sido ampliamente adoptada por su capacidad para generar un gran número de dígitos de π en relativamente pocas iteraciones. La eficiencia de esta fórmula se demostró aún más en 1987, cuando los hermanos Chudnovsky calcularon más de 1 millón de dígitos de π utilizando métodos computacionales modernos basados en la fórmula de Ramanujan. Desde entonces, esta fórmula ha sido una herramienta fundamental para investigadores y entusiastas de los números, destacando su importancia duradera en el cálculo de este número irracional fundamental.

Además, la convergencia del número π no sólo es un fenómeno matemático, sino también un símbolo de la curiosidad humana y la búsqueda incansable de la precisión y el conocimiento. A lo largo de la historia, π ha fascinado a matemáticos, científicos y entusiastas por igual, sirviendo como un recordatorio de la capacidad del ser humano para comprender y modelar el mundo que nos rodea.

Es importante destacar que este trabajo representó un desafío significativo debido a diversas

dificultades encontradas durante el proceso. En primer lugar, nos enfrentamos a la tarea de desarrollar códigos que fueran capaces de calcular π con precisión arbitraria. Esto implicaba encontrar y utilizar bibliotecas adecuadas que permitieran trabajar con este nivel de precisión, así como comprender y utilizar varias funciones matemáticas necesarias para la implementación. Además, nos encontramos con limitaciones en cuanto a la capacidad de las computadoras utilizadas, sobre todo en lo que se refiere al hardware, principalmente el procesador. El procesamiento de grandes cantidades de datos y cálculos intensivos requeridos para calcular π con alta precisión exigía un alto rendimiento de los equipos, lo que a veces resultaba en tiempos de ejecución prolongados o incluso en el bloqueo de las máquinas. Un desafío adicional surgió cuando el programa se ejecutaba durante un tiempo determinado y, por diversas razones, como cortes de energía o problemas técnicos, se interrumpía la ejecución y se perdía todo el progreso realizado hasta ese momento. Superar estas dificultades implicaba mantener una atención constante al proceso de ejecución y tomar medidas para mitigar los riesgos de interrupción.

En resumen, este trabajo representó un desafío significativo debido a las múltiples dificultades encontradas, incluida la necesidad de desarrollar códigos complejos, la limitada capacidad de las computadoras disponibles y los riesgos de interrupción durante la ejecución del programa. Sin embargo, superar estos obstáculos nos permitió aprender y crecer como investigadores, y los logros obtenidos son testimonio del compromiso y la dedicación invertidos en este proyecto.

Este recorrido a través de la historia del número π , desde sus orígenes hasta los problemas más complejos de la actualidad, sobre todo el de encontrar algoritmos cada vez más veloces, nos ofrece una valiosa oportunidad de acercarnos a una de las constantes matemáticas más fundamentales y fascinantes. A pesar de la antigüedad de este legendario número, y a pesar de los miles de años de investigación que han pasado, seguimos descubriendo nuevas facetas de sus propiedades y aplicaciones. El número π sigue siendo un enigma en muchos aspectos, y su presencia persistente en nuestra vida cotidiana es un recordatorio constante de su importancia. Desde las geometrías más simples hasta los cálculos más complejos en ciencia y tecnología, π sigue desafiando nuestra comprensión y generando preguntas fascinantes sobre la naturaleza de las matemáticas y el universo que habitamos. A pesar de los avances que hemos logrado en el estudio de π , queda mucho por descubrir y comprender. Este viaje a través de su historia nos invita a seguir explorando, investigando y asombrándonos ante las maravillas matemáticas que este número tan simple, pero tan profundo, encierra. El número π continuará siendo una fuente inagotable de inspiración y descubrimiento para generaciones venideras, asegurando que su legado perdure a lo largo del tiempo.

En última instancia, esta investigación destaca la importancia de seguir explorando y comprendiendo la convergencia del número π , no sólo por su utilidad práctica en aplicaciones científicas y tecnológicas, sino también por su capacidad para inspirar y enriquecer nuestra comprensión del universo y nuestro lugar en él.

Anexo A: Búsqueda de secuencias en el número π

“Explorar pi es como explorar el universo”.
David Chudnovsky.

Este anexo se centra en la exploración de la normalidad de π mediante el análisis de secuencias presentes en su expansión decimal. En lugar de simplemente definir la normalidad, nos sumergimos en la comprensión de cómo los patrones de secuencias contribuyen a su caracterización como un número normal. Utilizaremos códigos para explorar y explicar el concepto de secuencias, y compartiremos los resultados obtenidos a través del desarrollo de dicho código. Esto nos permitirá detectar y analizar las secuencias presentes en los dígitos de π , lo que contribuirá a nuestra comprensión de su comportamiento.

Acerca de la búsqueda de secuencias en el desarrollo decimal del número π , se cree que cualquier secuencia de una longitud dada, aparecen en la cola decimal con distribución uniforme. Esta propiedad se conoce como *normalidad*.

¿Es normal el número π ?

Aunque este es un problema abierto, el consenso entre la comunidad científica es que el número π tiene la propiedad de normalidad.

Normalidad significa que para todas las secuencias de una longitud prefijada se calcula su frecuencia relativa de aparición en una cadena de n dígitos, entonces se calcula el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Si el límite es el mismo para todas las secuencias, el número es normal.

Ejemplo de número que no es normal: $0.101010\dots$ en base dos, ya que hay secuencias que no contiene, por ejemplo “00” y “11”.

Ejemplo de número que sí es normal: $0,1234567891011121314151617\dots$, se conoce como el número de Champernowne, contiene todas las secuencias en orden creciente: del 0 al 9, luego del 10 al 99, etc.

La estrategia. Para afirmar que un número es normal, no sólo se requiere que los dígitos del 0 al 9 tengan la misma probabilidad de aparecer en su expansión decimal, sino también que todas las secuencias de dígitos de todas las longitudes posibles, como 00,01,02,...,97,98,99 para dos dígitos, 000,001,002,...,998,999 para tres dígitos, y así sucesivamente, tengan igual probabilidad de ocurrencia. Es un criterio más riguroso que implica una uniformidad estadística en todas las combinaciones posibles de dígitos en la expansión decimal del número. (Berggren et al., 1991, p.408,

[4]).

Los datos experimentales recopilados hasta entonces indican que, hasta las primeras 200,000,000,000 cifras decimales de π (excluyendo la parte entera), todas las cifras parecen ocurrir aproximadamente con la misma frecuencia:

Cifra	Cuántas veces aparece	Porcentaje
0	20 000 030 841	10.00001542 %
1	19 999 914 711	9.999957355 %
2	20 000 013 697	10.00000685 %
3	20 000 069 393	10.00003470 %
4	19 999 921 691	9.999960846 %
5	19 999 917 053	9.999958526 %
6	19 999 881 515	9.999940758 %
7	19 999 967 594	9.999983797 %
8	20 000 291 044	10.00014552 %
9	19 999 869 180	9.999934590 %

Cuadro 3.5: Frecuencias en 200 000 000 000 dígitos de π .

Como se puede apreciar en la referencia al Cuadro 3.5, la frecuencia de cada cifra decimal es prácticamente equivalente a un décimo, con un margen de error que no excede el 0.0015 %. (Zhúkov, 2004, p.69, [19]).

El programa de Dave Andersen examina las primeras 100 millones de cifras de π para encontrar cualquier número natural ingresado por el usuario y presenta los resultados de la búsqueda. (Andersen, como se citó en Zhúkov, 2004, p.69).

Longitud del número	Posibilidad de encontrar
1-5	100 %
6	Casi el 100 %
7	99.995 %
8	63 %
9	9,5 %
10	0.995 %
11	0.09995 %

Cuadro 3.6: Ejemplo: Probabilidad de encontrar cadenas en π .
(Andersen, como se citó en Zhúkov, 2004, p.69).

Ahora procederemos a explicar el concepto de secuencias y compartir los resultados obtenidos mediante el código que desarrollamos para detectar dichas secuencias en los dígitos de π .

- **Secuencias de longitud 1.** Con esta longitud hay 10 secuencias distintas posibles: 0, 1, 2, \dots , 9. Entonces en los primeros diez dígitos, cada secuencia aparece 1 vez en prome-

dio, algunas secuencias aparecerán 0 veces. En los primeros 100 dígitos cada secuencia aparece en promedio 10 veces, y así sucesivamente en los primeros 10^n dígitos, cada secuencia aparece en promedio 10^{n-1} .

Esto es en promedio, pero en la medida en que cada secuencia se acerque cada vez más al promedio, entonces se refuerza la idea de uniformidad, al menos para secuencias de longitud 1. Esto es precisamente lo que estamos observando que sucede, según los códigos que hemos elaborado en Python.

Longitud	n=10		n=100		n=1000		n=10000		n=100000	
Número	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
0	0	0	8	8	93	9.3	968	9.68	9999	9.999
1	2	20	8	8	116	11.6	1026	10.26	10137	10.137
2	1	10	12	12	103	10.3	1021	10.21	9908	9.908
3	1	10	11	11	102	10.2	974	9.74	10025	10.025
4	1	10	10	10	93	9.3	1012	10.12	9971	9.971
5	3	30	8	8	97	9.7	1046	10.46	10026	10.026
6	1	10	9	9	94	9.4	1021	10.21	10029	10.029
7	0	0	8	8	95	9.5	970	9.7	10025	10.025
8	0	0	12	12	101	10.1	948	9.48	9978	9.978
9	1	10	14	14	106	10.6	1014	10.14	9902	9.902

Cuadro 3.7: Número de veces que aparece cada secuencia de longitud 1 en los primeros n decimales.

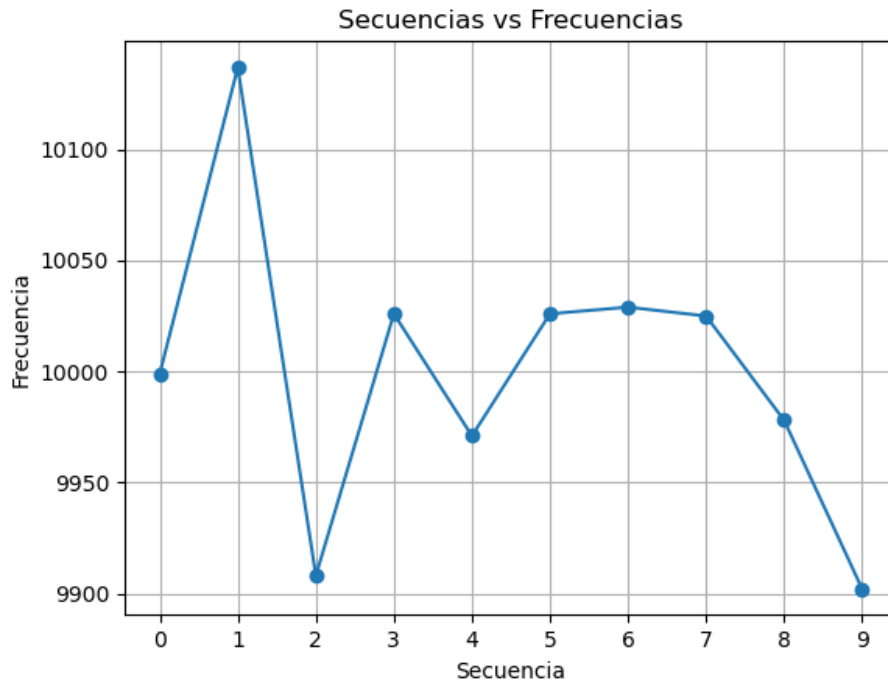


Figura 3.2: Gráfica de secuencias de 1 dígito hasta una longitud de 100,000.

- **Secuencias de longitud 2.** De acuerdo con la regla de la multiplicación de la combinatoria, con esta longitud hay $10 \times 10 = 10^2$ secuencias distintas posibles: 00, 01, 02, \dots , 98, 99.

En los primeros cuatro decimales $3.1415\dots$, aparecen 3 secuencias de longitud dos: 14, 41 y 15. Continuando con esta idea, en los primeros 10 decimales hay 9 secuencias: 14, 41, 15, 59, 92, 26, 65, 53, 35. Por lo tanto, en los primeros $10^2 + 1$ dígitos, hay 10^2 secuencias de longitud dos, justo la misma cantidad de secuencias distintas posibles, lo que da un promedio de aparición de 1 vez cada secuencia. Algunas secuencias aparecen 0 veces.

Continuando con la misma idea, en los primeros $10^3 + 1$ dígitos hay 10^3 secuencias de longitud dos, y dividiendo entre el número de secuencias posibles, que es 10^2 , nos da un promedio de 10 veces cada secuencia.

Y así sucesivamente, para los primeros $10^n + 1$ dígitos, dividimos entre 10^2 , que es el número de posibles secuencias distintas de longitud dos, obtenemos que cada secuencia aparece en promedio $\frac{10^n}{10^2} = 10^{n-2}$.

Esto es en promedio, lo que observamos en los códigos de Python es que, conforme la longitud de π va creciendo, el porcentaje de aparición de cada secuencia se va uniformizando.

Secuencia	n=10	n=100	n=1000	n=10000	n=100000
00	0	0	7	85	998
01	0	0	10	103	1027
02	0	1	10	98	962
03	0	1	9	103	993
04	0	0	4	98	968
05	0	1	14	89	1007
06	0	2	8	101	1009
07	0	1	6	93	1017
08	0	1	9	83	1001
09	0	1	16	115	1017

Cuadro 3.8: Número de veces que aparece cada secuencia (00-09) en los dígitos de π .

En los Cuadros 3.9 a 3.12 condensamos el estudio de la localización de secuencias de longitud k en los primeros $n + k - 1$ decimales utilizando frecuencias, desde la frecuencia promedio que sería el número de veces que aparecen las frecuencias si aparecieran con la misma probabilidad en un caso hipotético, luego las frecuencias mínima y máxima corresponden al caso real de búsqueda sobre el número π , y finalmente introducimos el concepto de *frecuencia escalada* que sería dividir la frecuencia real entre la frecuencia promedio. El objetivo de esta definición es que en todas las tablas la frecuencia promedio oscila alrededor del número 1, y entre más grande se hace la longitud del número π la frecuencia escalada tiende hacia 1, como se puede observar en las tablas.

	n=1,000	n=10,000	n=100,000	n=1,000,000	n=10,000,000
Frec prom	10	100	1,000	10,000	100,000
Frec min	4	80	934	9,721	99,314
Frec max	18	124	1,100	10,239	100,816
Frec esc	[0.4, 1.8]	[0.8, 1.24]	[0.93, 1.1]	[0.97, 1.02]	[0.99, 1.01]

00	7	85	998	9,938	99,662
01	10	103	1,027	9,891	100,058
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	8	100	997	10,054	100,386
99	11	91	968	10,084	100,069

Cuadro 3.9: Secuencias de longitud 2 en los primeros $n + 1$ dígitos de π . Arriba datos generales y abajo casos particulares.

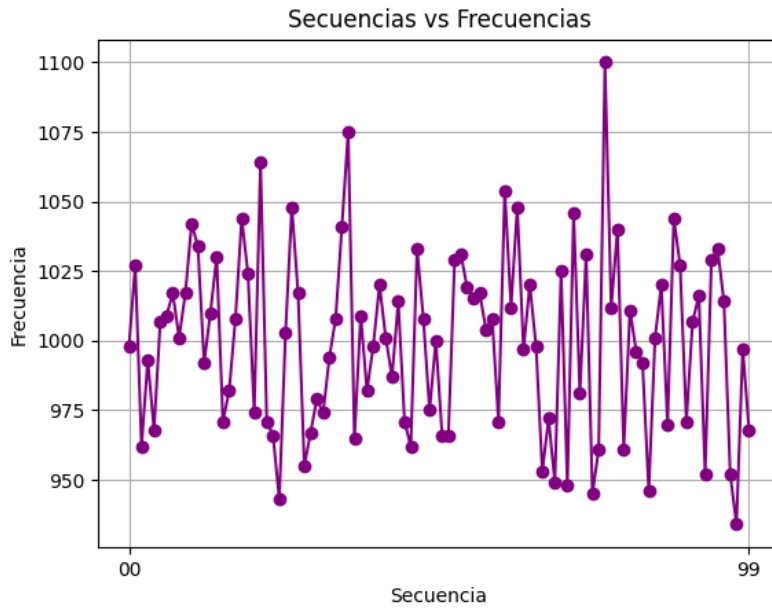


Figura 3.3: Gráfica de secuencias de 2 dígitos hasta una longitud de 100,000.

	n=10,000	n=100,000	n=1,000,000	n=10,000,000
Frec prom	10	100	1,000	10,000
Frec min	2	72	898	9,632
Frec max	21	130	1092	10,296
Frec esc	[0.2, 2.1]	[0.72, 1.3]	[0.898, 1.092]	[0.963, 1.030]
Tiempo	2.3 seg	29 seg	5.0 min	54.8 min

Cuadro 3.10: Secuencias de longitud 3 en los primeros $n + 2$ dígitos de π .

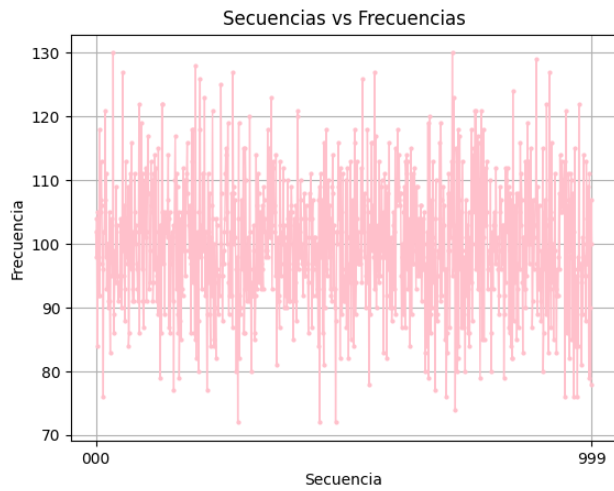


Figura 3.4: Gráfica de secuencias de 3 dígitos hasta una longitud de 100,000.

	n=100,000	n=1,000,000
Frec prom	10	100
Frec min	1	64
Frec max	24	141
Frec esc	[0.1, 2.4]	[0.64, 1.41]
Tiempo	4.3 min	49.3 min

Cuadro 3.11: Secuencias de longitud 4 en los primeros $n + 3$ dígitos de π .

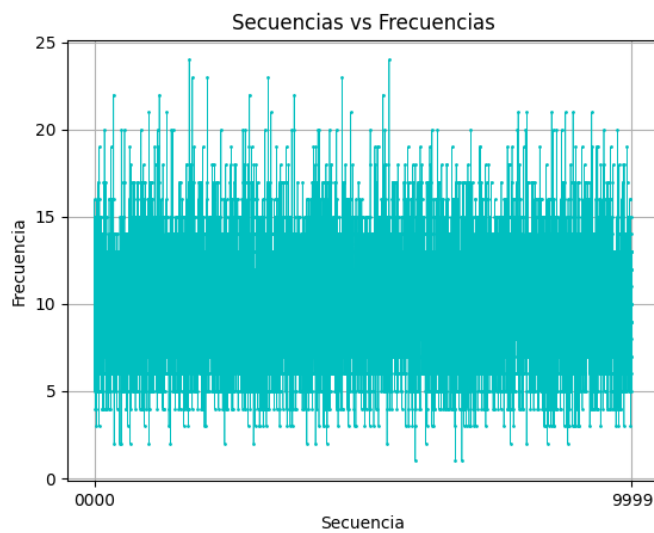


Figura 3.5: Gráfica de secuencias de 4 dígitos hasta una longitud de 100,000.

	n=1,000,000	n=10,000,000
Frec prom	10	100
Frec min	0	58
Frec max	26	147
Frec esc	[0.0, 2.6]	[0.58, 1.47]
Tiempo	7.1 hrs	4.6 días

Cuadro 3.12: Secuencias de longitud 5 en los primeros $n + 4$ dígitos de π .

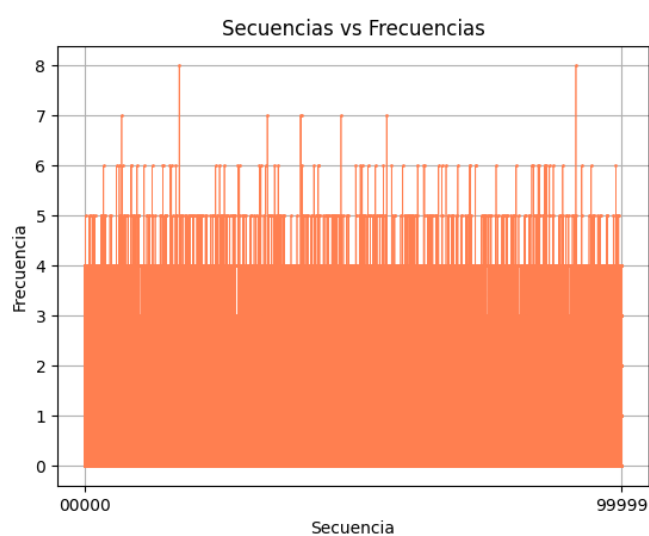


Figura 3.6: Gráfica de secuencias de 5 dígitos hasta una longitud de 100,000.

Anexo B: Aritmética de precisión arbitraria

En este apartado mencionaremos en que consiste la precisión arbitraria, exploraremos específicamente la biblioteca *mpmath*, una herramienta poderosa que permite realizar cálculos numéricos con precisión arbitraria en Python. Veremos cómo configurar la precisión, realizar operaciones básicas y aprovechar las características avanzadas de esta biblioteca.

En ocasiones, es necesario realizar operaciones aritméticas con números reales con una precisión superior a los 16 dígitos proporcionados por el tipo de dato float (doble precisión) en Python. Para abordar esta necesidad, existen diversos proyectos que ofrecen bibliotecas especializadas. La mayoría de estas bibliotecas actúan como interfaces para proyectos escritos en C++, pero aquí examinaremos una opción diferente: la biblioteca *mpmath*. Lo notable de *mpmath* es que está completamente escrita en Python, lo que, en principio, puede hacerla más lenta, pero también la hace más accesible para comprender y modificar el código. (Sanders, 2013, p.18, [15]).

Para importar la biblioteca, se utiliza la instrucción

```
1 from mpmath import *
```

Para modificar la precisión, establecemos

```
1 mp.dps = 50
```

Ahora, para generar un número decimal con la precisión mencionada, llevamos a cabo el siguiente procedimiento

```
1 x = mpf('1.0')
```

En esta expresión, el número se representa como una cadena. Cuando realizamos operaciones con x , los cálculos se ejecutan con precisión múltiple. Por ejemplo,

```
1 print(x/6., x*10)
2 print(mpf('2.0')**2**2**2**2)
```

Con *mpmath*, no hay límite del exponente que se puede manejar. También están definidas muchas funciones, por ejemplo, *sin*, *exp* y *log*. Para imprimir un número con una precisión dada, se usa el comando, que en el siguiente ejemplo implica imprimir el número x con 20 decimales.

```
1 nprint(x, 20).
```

En este apartado, hemos examinado la biblioteca *mpmath* para realizar cálculos con precisión arbitraria en Python. *mpmath* emerge como una herramienta fundamental en situaciones donde la precisión numérica desempeña un papel crucial. Es importante señalar que hemos incorporado esta biblioteca en nuestros códigos en Python para garantizar resultados precisos.

Anexo C: Códigos en Python

Este anexo presenta una recopilación de los códigos en Python empleados en cada capítulo para llevar a cabo las aproximaciones del número π . Estos códigos reflejan las distintas estrategias y métodos explorados a lo largo del trabajo con el fin de calcular con precisión arbitraria este número fundamental en matemáticas usando la biblioteca *mpmath*. Cada código proporciona una aproximación de π acompañada de los pasos necesarios para su obtención, ofreciendo así una visión completa de las diversas técnicas utilizadas en el estudio .

El módulo `sys` en Python se utiliza para realizar configuraciones específicas del sistema en un entorno de desarrollo como Spyder. Una de estas configuraciones es la precisión de las cadenas que representan números enteros, y se logra utilizando la función `sys.set_int_max_str_digits(0)`. Cuando se emplea esta función con el valor 0 como parámetro en Spyder, se indica que no hay límite en la cantidad de dígitos que se mostrarán al convertir un número entero a una cadena. Esto significa que Spyder mostrará todos los dígitos disponibles sin realizar ningún truncamiento.

Es relevante destacar que este ajuste es específico de Spyder y puede no ser necesario en otros entornos de desarrollo de Python. Por lo tanto, si están utilizando otro entorno de desarrollo para Python, es posible que no necesiten utilizar esta función y pueden omitirla sin problemas.

Datos de laptop utilizada:

Entorno de desarrollo:

- Nombre del dispositivo: LAPTOP-HP Omen 15-dc0006la
- Procesador: Intel Core i7-8750H
- RAM instalada: 8 GB DDR4

Sistema operativo:

- Edición: Linux Mint 21.3 Virginia
- Base: Ubuntu 22.04 jammy
- Kernel: 6.5.0-28-generic x86_64bits:64 compiler

Versión de Python:

- Python 3.10.9 64-bit
- Entorno de desarrollo integrado: Spyder version 5.4.1 (conda).

Etapa geométrica

- Código para aproximar π y graficar n vs j con la secuencia de Arquímedes para el polígono inscrito

Este programa en Python utiliza el método de Arquímedes y la biblioteca *mpmath* para aproximar el valor de π con una precisión específica ingresada por el usuario. Después de solicitar el número de cifras decimales correctas deseadas, el programa itera a través de diferentes precisiones, calculando la aproximación de π mediante un proceso iterativo y registrando el número de iteraciones necesarias para alcanzar la precisión deseada. Luego, grafica el número de cifras decimales en el eje x y el número de iteraciones en el eje y para visualizar cómo varía el esfuerzo computacional requerido para alcanzar la precisión deseada.

```

1 #import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from pylab import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from mpmath import * #Usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
  arbitraria
6 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
7
8 ln=[]
9 lj=[]
10 for n in range(N+1):
11     ln.append(n)
12     mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
13     pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #Truncamiento de pi exacto a n decimales
14     j=0
15     a=6
16     b=pi/6
17     Error=1
18     while Error>0:
19         p=a* sin(b) #Aprox de pi por arquimedes
20         p_t=mp.mpf(str(p)[:n+2]) #Truncamiento de pi aproximado
21         Error=abs(pi_t-p_t)
22         j=j+1
23         a=2*a
24         b=b/2
25     lj.append(j-1)
26     print("n=",n)
27     print("j=",j)
28     print("π=", p_t)
29     print("")
30     #print("ln",ln)
31     #print("lj",lj)
32
33 plt.plot(ln, lj, 'r', linewidth=2, marker='o', markersize=7) #Crea la gráfica
34
35 #Personaliza las etiquetas
36 plt.title("Convergencia de π en la secuencia de Arquímedes: n vs j")
37 plt.xlabel("n")
38 plt.ylabel("j", rotation=0)
39 plt.grid(True)
40 plt.show()

```

Código 3.1: La secuencia de Arquímedes.

Nota. Para el caso de los polígonos circunscritos es similar, sólo cambia la función seno del renglón 17 por la función tangente.

• **Estimación de π con el método de Arquímedes para polígonos inscritos utilizando mediciones de tiempo**

Este código sólo contiene la implementación destinada a medir el tiempo de ejecución del código anterior utilizando el módulo `time` en Python. Utiliza un diccionario llamado `tiempos_calculados` para almacenar los tiempos de ejecución previamente calculados. Antes de realizar los cálculos para un nuevo valor de `n`, el código verifica si el tiempo de ejecución para ese valor de `n` ya está presente en el diccionario. Si el tiempo ya está almacenado, simplemente se recupera del diccionario en lugar de volver a realizar los cálculos. Esto evita el cálculo redundante de los tiempos de ejecución para los mismos valores de `n`.

```

1 from pylab import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpmath import *
4
5 N = int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
6
7 ln = []
8 lt = []
9 tiempos_calculados = {}
10
11 for n in range(0, N + 1, 10): #Se puede cambiar valores
12     if n in tiempos_calculados:
13         tiempo = tiempos_calculados[n]
14     else:
15         inicio = time.time()
16         mp.dps = n + 10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
17         pi_t = mp.mpf(str(pi)[:n + 2]) #Truncamiento de pi aproximado
18         j = 0
19         a = 6
20         b = pi / 6
21         Error = 1
22         while Error > 0:
23             p = a * sin(b)
24             p_t = mp.mpf(str(p)[:n + 2])
25             Error = abs(pi_t - p_t)
26             j += 1
27             a *= 2
28             b /= 2
29         fin = time.time()
30         tiempo = (fin - inicio)
31         tiempos_calculados[n] = tiempo
32
33     ln.append(n)
34     lt.append(tiempo)
35
36     print("n=", n)
37     print("tiempo=", tiempo)
38     print("")
39
40 plt.plot(ln, lt, marker='o', linewidth=2, color='g', markersize=7)
41 plt.title("Tiempo de cálculo de las cifras de  $\pi$ : n vs t")
42 plt.xlabel("n")

```

```

43 plt.ylabel("t", rotation=0)
44 plt.grid(True)
45 plt.show()

```

Código 3.2: Secuencia de Arquímedes para aproximar π con polígonos inscritos y graficar n vs t .

Nota. Para el caso de los polígonos circunscritos es similar, sólo cambia la función seno del renglón 23 por la función tangente.

• **Código de la gráfica de las aproximaciones de π con la secuencia de Arquímedes**

Este código genera la Figura (1.12) que compara las aproximaciones de π utilizando polígonos inscritos y circunscritos con diferentes números de lados. Los puntos de datos representan las aproximaciones, y la línea conecta estos puntos para visualizar la tendencia.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 # Lados del polígono
4 x= [6,12,24,48,96]
5
6 # Valores de y para polígono inscrito
7 y_inscrito = [3.0000,3.1058,3.1326,3.1394, 3.1410]
8
9 # Valores de y para polígono circunscrito
10 y_circunscrito = [3.4641,3.2154,3.1597,3.1461, 3.1427]
11
12 # Graficar las funciones
13 plt.plot(x, y_inscrito, marker='o', label='Polígono inscrito',color='blue')
14 plt.plot(x, y_circunscrito, marker='o', label='Polígono circunscrito',color='
    red')
15
16 # Configurar etiquetas y título
17 plt.xlabel('Número de lados del polígono')
18 plt.ylabel('Aproximación de  $\pi$ ')
19 plt.legend()
20 plt.title('Aproximación de  $\pi$  por polígonos inscritos y circunscritos')
21
22 # Mostrar la gráfica
23 plt.grid()
24 plt.show()

```

Código 3.3: Gráfica para visualizar la convergencia de π por el método geométrico.

• **Código con el método de la pendiente.**

Este programa genera los resultados mostrados en el Cuadro (1.5) con el método de la pendiente.

```

1 import sys
2 sys.set_int_max_str_digits(0)
3
4 import time
5 ti = time.time()
6
7 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
    arbitraria

```

```

8
9 n=1009000
10 mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
11
12 j=1670000
13 a=6*2**j
14 b=(pi/6)/2**j
15
16
17 pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
18
19 p=a* sin(b) #aprox de pi por arquimedes poligonos inscrito
20 p_t=mp.mpf(str(p)[:n+2]) #truncamiento
21 q=a* tan(b) #aprox de pi por arquimedes poligonos inscrito
22 q_t=mp.mpf(str(q)[:n+2]) #truncamiento
23
24 print("n=",n-9000)
25 #print("pi pol inscrito=",p_t)
26 #print("pi pol circunscrito=",q_t)
27 print("pi circun - pi insc = ",q_t-p_t)
28 print("j=",j)
29 tf = time.time()
30 print("Tiempo: ", tf-ti)
31 print("")

```

Código 3.4: Método de la pendiente.

Etapa del cálculo infinitesimal

- Código para aproximar π con la serie de Leibniz

Este programa calcula la cantidad de términos necesarios en la serie de Leibniz para obtener una cierta precisión de π , y luego grafica la relación entre el número de términos y la precisión deseada.

```

1 from pylab import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
  arbitraria
4 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
5
6 ln=[] #numero de decimales correctos
7 lj=[] #numero de terminos
8
9 for n in range(1,N+1):
10     ln.append(n)
11     mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
12     pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
13     suma = mp.mpf(0)
14     j=0
15     Error=1
16     while Error>0:
17         suma += 4*((-1)**j/((2*j+1)))
18         suma_t=mp.mpf(str(suma)[:n+2]) #truncamiento de pi aproximado
19         Error=abs(pi_t-suma_t)
20         j=j+1

```

```

21     lj.append(j-1)
22     print("n=",n)
23     print("j=",j-1)
24     print("suma=",suma)
25
26 plt.plot(ln, lj, marker='o', linewidth=2, color='blue', markersize=5)
27
28 plt.title("Gráfica de cifras decimales correctas VS términos", fontweight='bold'
29 )
30 plt.xlabel("Cifras decimales correctas", fontweight='bold')
31 plt.ylabel("Términos", fontweight='bold')
32 plt.grid(True)
33 plt.show()

```

Código 3.5: Serie de Leibniz.

• Código para aproximar π con la serie de Abraham Sharp

Este código implementa un algoritmo para calcular el valor de π utilizando la serie de Sharp de Abraham Sharp. Comienza solicitando al usuario el número de cifras decimales correctas deseadas para la aproximación. Luego, utiliza la biblioteca mpmath para garantizar la precisión necesaria en los cálculos. A través de un bucle, calcula la suma de la serie de Sharp hasta que la diferencia entre esta suma y el valor truncado de π alcance la precisión especificada. Durante este proceso, registra el número de términos necesarios para alcanzar la precisión requerida en cada caso. Finalmente, representa gráficamente la relación entre el número de cifras decimales correctas y el número de términos empleados en la aproximación de π , ofreciendo así una visualización de la convergencia de la serie de Sharp.

```

1 import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from pylab import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
6 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
7
8 ln=[] #numero de cifras decimales correctas
9 lj=[] #numero de terminos
10 for n in range(N+1):
11     ln.append(n)
12     mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que deseess
13     pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
14     suma = mp.mpf(0)
15     j=mp.mpf(0)
16     Error=1
17     while Error>0:
18         suma += 2*(-1)**j*3**(1/2-j)/(2*j+1) #Abraham Sharp
19         suma_t=mp.mpf(str(suma)[:n+2]) #truncamiento de pi aproximado
20         Error=abs(pi_t-suma_t)
21         j=j+1
22     lj.append(j-1)
23     print("n=",n)
24     print("j=",j-1)
25     print("suma=",suma)
26
27 plt.plot(ln, lj, marker='o', linewidth=2, color='r', markersize=7)

```

```

28
29 plt.title("Convergencia de  $\pi$  en la serie de Sharp por términos")
30 plt.xlabel("Cifras decimales correctas")
31 plt.ylabel("Términos")
32 plt.grid(True)
33 plt.show()

```

Código 3.6: Serie de Abraham Sharp.

• Código para aproximar π con la serie de John Machin

El programa calcula una aproximación del número π utilizando la serie de Machin. Solicita al usuario el número de cifras decimales correctas que desea en la aproximación, luego itera sobre cada número de cifras decimales. Dentro de cada iteración, aproxima π utilizando la serie de Machin hasta alcanzar la precisión deseada. Registra el número de términos utilizados en la aproximación y lo grafica junto con el número de cifras decimales correctas.

```

1 #import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from pylab import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
   arbitraria
6 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
7
8 ln=[] #numero de cifras decimales correctas
9 lj=[] #numero de terminos
10 for n in range(N+1):
11     ln.append(n)
12     mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
13     pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
14     suma = mp.mpf(0)
15     j=mp.mpf(0)
16     Error=1
17     while Error>0:
18         suma +=4*(-1)**j/(2*j+1)*(4*5**(-2*j-1) - 239**(-2*j-1))
19         suma_t=mp.mpf(str(suma)[:n+2]) #truncamiento de pi aproximado
20         Error=abs(pi_t-suma_t)
21         j=j+1
22     lj.append(j-1)
23     print("n=",n)
24     print("j=",j-1)
25     print("suma=",suma)
26
27 plt.plot(ln,lj,marker='o',linewidth=2,color='r',markersize=7)
28
29 plt.title("Convergencia de  $\pi$  en la serie de Machin por términos")
30 plt.xlabel("Cifras decimales correctas")
31 plt.ylabel("Términos")
32 plt.grid(True)
33 plt.show()

```

Código 3.7: Fórmula de John Machin.

• Código para aproximar π con la serie de Euler

Este programa realiza una tarea similar al anterior, pero en este caso, calcula una aproximación de π utilizando la serie de Euler.

```

1 #import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from pylab import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
   arbitraria
6 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
7
8 from time import time
9 ti=time()
10
11 ln=[] #numero de cifras decimales correctas
12 lj=[] #numero de terminos
13 for n in range(N+1):
14     ln.append(n)
15     mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que deseas
16     pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
17     suma = mp.mpf(0)
18     j=mp.mpf(0)
19     Error=1
20     while Error>0:
21         suma +=4*(-1)**j/(2*j+1)*(2**(-2*j-1) + 3**(-2*j-1))
22         suma_t=mp.mpf(str(suma)[:n+2]) #truncamiento de pi aproximado
23         Error=abs(pi_t-suma_t)
24         j=j+1
25     lj.append(j-1)
26
27 tf=time()
28 tiempo=tf-ti
29 print("j=",j-1)
30 print("suma=",suma)
31 print('tiempo = ',tiempo)
32
33 plt.plot(ln,lj,marker='o',linewidth=2,color='r',markersize=7)
34 plt.title("Convergencia de  $\pi$  en la serie de Euler por términos")
35 plt.xlabel("Cifras decimales correctas")
36 plt.ylabel("Términos")
37 plt.grid(True)
38 plt.show()

```

Código 3.8: Fórmula de Euler.

• Código para aproximar π con la serie de William

Este programa comparte la funcionalidad de los anteriores, pero en este caso, emplea la fórmula de William para calcular una aproximación de π .

```

1 #import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from pylab import *
4 import matplotlib.pyplot as plt

```

```

5 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
  arbitraria
6 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
7
8 from time import time
9 ti=time()
10
11 ln=[] #numero de cifras decimales correctas
12 lj=[] #numero de terminos
13 for n in range(N+1):
14     ln.append(n)
15     mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
16     pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
17     suma = mp.mpf(0)
18     j=mp.mpf(0)
19     Error=1
20     while Error > 0:
21         suma +=4*(-1)**j/(2*j+1)*(4*5**(-2*j-1) - 70**(-2*j-1) + 99**(-2*j-1))
22         suma_t=mp.mpf(str(suma)[:n+2]) #truncamiento de pi aproximado
23         Error=abs(pi_t-suma_t)
24         j=j+1
25     lj.append(j-1)
26
27 tf=time()
28 tiempo=tf-ti
29 print("j=",j-1)
30 print("suma=",suma)
31 print('tiempo = ',tiempo)
32
33 plt.plot(ln,lj,marker='o',linewidth=2,color='r',markersize=7)
34 plt.title("Convergencia de  $\pi$  en la serie de William por términos")
35 plt.xlabel("Cifras decimales correctas")
36 plt.ylabel("Términos")
37 plt.grid(True)
38 plt.show()

```

Código 3.9: Fórmula de William.

- Código para aproximar π con la serie de Shulz

Este programa sigue la misma estructura que los anteriores, pero esta vez utiliza la fórmula de para calcular una aproximación de π .

```

1 #import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from pylab import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from mpmath import * #usamos la biblioteca mpmath para calcular con precisión
  arbitraria
6 N=int(input("Número de cifras decimales correctas: "))
7
8 from time import time
9 ti=time()
10
11 ln=[] #numero de cifras decimales correctas
12 lj=[] #numero de terminos
13 for n in range(N+1):

```

```

14 ln.append(n)
15 mp.dps=n+10 #Puedes ajustar dependiendo de lo que desees
16 pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2]) #truncamiento de pi exacto a n decimales
17 suma = mp.mpf(0)
18 j=mp.mpf(0)
19 Error=1
20 while Error>0:
21     suma +=4*(-1)**j/(2*j+1)*(2**(-2*j-1) + 5**(-2*j-1) + 8**(-2*j-1))
22     suma_t=mp.mpf(str(suma)[:n+2]) #truncamiento de pi aproximado
23     Error=abs(pi_t-suma_t)
24     j=j+1
25 lj.append(j-1)
26
27 tf=time()
28 tiempo=tf-ti
29 print("j=",j-1)
30 print("suma=",suma)
31 print('tiempo = ',tiempo)
32
33 plt.plot(ln,lj,marker='o',linewidth=2,color='r',markersize=7)
34 plt.title("Convergencia de  $\pi$  en la serie de Shulz por términos")
35 plt.xlabel("Cifras decimales correctas")
36 plt.ylabel("Términos")
37 plt.grid(True)
38 plt.show()

```

Código 3.10: Fórmula de Shulz.

• Código para comparar tiempos de cálculo: Secuencia de Arquímedes vs Serie de Machin

Este programa genera una gráfica comparando los tiempos de cálculo de la secuencia de Arquímedes y la serie de Machin según el número de iteraciones, usando *matplotlib* para visualizar cuál es más eficiente.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 # Datos
4 n = [10, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000]
5 arquimedes = [0.005, 0.01, 0.5, 2.4, 6.6, 14, 25]
6 machin = [0.007, 0.2, 47, 456, 1567, 4049, 9491]
7
8 # Crear la gráfica
9 plt.figure(figsize=(10, 6))
10 plt.plot(n, arquimedes, marker='o', linestyle='-', color='b', label='Secuencia
11     de Arquímedes')
12 plt.plot(n, machin, marker='o', linestyle='-', color='r', label='Serie de
13     Machin')
14 # Agregar títulos y etiquetas
15 plt.title('Comparación de tiempos de cálculo')
16 plt.xlabel('n')
17 plt.ylabel('Tiempo (s)')
18 plt.legend()
19 plt.grid(True)
20 # Mostrar la gráfica

```

```
21 plt.show()
```

Código 3.11: Gráfica comparativa de la secuencia de Arquímedes vs serie de Machin

Etapa del siglo XX

• Código para aproximar π con la fórmula de Ramanujan

Este código implementa la fórmula de Ramanujan para calcular una aproximación del valor de π . Primero, solicita al usuario el número de términos de la serie que desea utilizar. Luego, establece la precisión de los cálculos y realiza iteraciones para calcular la serie de Ramanujan hasta el número de términos especificado. Finalmente, utiliza la serie calculada para obtener una aproximación del valor de π y lo imprime junto con una etiqueta identificando el método utilizado.

```
1 from mpmath import mp
2 n = int(input("Cuántos términos de la serie quieres agregar a partir de 3:"))
3 precision=8*n
4 mp.dps = precision + 10 # Establecer la precisión de mpmath
5
6 divisor = mp.mpf(396) ** 4
7 aux = divisor
8 factor = mp.mpf(1103+26390)
9 incremento = mp.mpf(26390)
10 auxiliar = mp.mpf(6)
11 coeficiente = mp.mpf(24)
12 resinicial = mp.mpf(1103)
13 resfinal = resinicial + coeficiente * factor / divisor
14
15 for i in range(2,n):
16     divisor *= aux
17     factor += incremento
18     coeficiente *= 4 *(auxiliar ** 3 - auxiliar) / mp.power(i, 3)
19     auxiliar += mp.mpf(4)
20     resinicial = resfinal
21     resfinal += factor * coeficiente / divisor
22
23 pia=(9801 / (2 * mp.sqrt(2) * resfinal))
24
25
26 print("Ramanujan")
27 print("El valor de pi es", pia)
```

Código 3.12: Fórmula de Ramanujan

• Código para aproximar π con la serie de los hermanos Chudnovsky.

El código calcula una aproximación precisa del valor de π utilizando la fórmula de los hermanos Chudnovsky y proporciona información sobre la precisión de la aproximación y el tiempo necesario para calcularla.

```
1 from mpmath import *
2 from time import time
3 ti=time()
4
```

```

5 n = int(input("Cuántos términos de la serie quieres agregar a partir de 3: "))
6 precision=14*n
7 mp.dps = precision+10 # Establecer la precisión de mpmath
8
9 divisor = (-1) * mp.mpf(640320) ** 3
10 cubo = divisor
11 factor = mp.mpf(558731543)
12 incremento = mp.mpf(545140134)
13 auxiliar = mp.mpf(18)
14 coeficiente = mp.mpf(120)
15 resinicial = mp.mpf(13591409)
16 resfinal = resinicial + coeficiente * factor / divisor
17
18 for i in range(2,n):
19     divisor *= cubo
20     factor += incremento
21     coeficiente *= (auxiliar ** 3 - mp.mpf(16) * auxiliar) / mp.power(i, 3)
22     auxiliar += mp.mpf(12)
23     resinicial = resfinal
24     resfinal += factor * coeficiente / divisor
25
26 pi_a= (mp.sqrt(-1 * cubo)) / (12 * resfinal)
27 error=abs(pi-pi_a)
28 tf=time()
29 tiempo=tf-ti
30
31 # Ejemplo de uso
32 print("El valor de pi aprox es", pi_a)
33 print('numero de terminos de la serie = ', i+1)
34 print('error=', error)
35 print('tiempo = ', tiempo)

```

Código 3.13: Fórmula de los hermanos Chudnovsky.

Anexo A

• Programa 1

Este código busca y cuenta cuántas veces aparece cada secuencia de un solo dígito en las primeras n posiciones decimales de π , imprime los resultados y luego muestra un gráfico de líneas que representa las frecuencias de las secuencias.

```

1
2
3 import sys
4 from mpmath import *
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 #sys.set_int_max_str_digits(0)
7
8 n = 10**5 # longitud de pi, su parte decimal
9 p = 10**1 # secuencias de 0 hasta p-1 a buscar
10
11 mp.dps = n + 10
12 pi_t = mp.mpf(str(pi)[:n+2])
13 pi_str = str(pi_t)
14

```

```

15 print("Hasta la posición decimal #", n)
16 print("\n {:^12} {:^12} {:^12}" . format("Secuencia" , "Frecuencia" , "
    Porcentaje"))
17 lf = [] # Lista para almacenar las frecuencias
18 ls = [] # Lista para almacenar las secuencias en cada subintervalo
19
20 for m in range(p):
21     secuencia = str("{:01d}".format(m)) #secuencias de un dígito
22     j = 0
23     for i in range(len(pi_str) - len(secuencia) + 1):
24         if pi_str[i:i + len(secuencia)] == secuencia:
25             j += 1
26     lf.append(j)
27     ls.append(str(m))
28     print(" {:^12} {:^12} {:^12.2f}" . format(secuencia , j , j*100/n)) #debe
    estar dentro del for
29
30 Fmin = min(lf)
31 Fmax = max(lf)
32
33 print("\nFrecuencia mínima =", Fmin)
34 print("Frecuencia máxima =", Fmax)
35
36
37 # Gráfica de líneas
38 plt.plot(ls , lf , marker='o' , linestyle='-')
39 plt.title("Secuencias vs Frecuencias")
40 plt.xlabel("Secuencia")
41 plt.ylabel("Frecuencia")
42 plt.grid(True)
43 plt.show()

```

Código 3.14: Búsqueda de secuencias en el valor de π .

• Programa 2

El código busca y cuenta cuántas veces aparece cada secuencia de un solo dígito en las primeras n posiciones decimales de π , e imprime el resultado para cada secuencia junto con su porcentaje en relación con la longitud total de π . Luego muestra una gráfica de líneas que representa las frecuencias de las secuencias.

```

1 import sys
2 from mpmath import *
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 #sys.set_int_max_str_digits(0)
5
6 n = 10**5 # longitud de pi , su parte decimal
7 p = 10**2 # secuencias de 0 hasta p-1 a buscar , es la secuencia máxima de
    longitud 2
8
9 mp.dps = n + 10
10 pi_t = mp.mpf(str(pi) [:n+2])
11 pi_str = str(pi_t)
12
13 print("Hasta la posición decimal #", n)
14 print("\n {:^12} {:^12} {:^12}" . format("Secuencia" , "Frecuencia" , "
    Porcentaje"))

```

```

15 lf = [] # Lista para almacenar las frecuencias
16 ls = [] # Lista para almacenar las secuencias en cada subintervalo
17
18 for m in range(p):
19     secuencia = str("{:02d}".format(m)) #02 es para buscar secuencias de
    longitud 2
20     j = 0
21     for i in range(len(pi_str) - len(secuencia) + 1):
22         if pi_str[i:i + len(secuencia)] == secuencia:
23             j += 1
24     lf.append(j)
25     ls.append(str(m))
26     print(" {:^12} {:^12} {:.12.2f}" .format(secuencia, j, j*100/n)) #debe
    estar dentro del for
27
28 Fmin = min(lf)
29 Fmax = max(lf)
30
31 print("\nFrecuencia mínima =", Fmin)
32 print("Frecuencia máxima =", Fmax)
33
34
35 # Gráfica de líneas
36 plt.plot(ls, lf, marker='o', linestyle='--')
37 plt.title("Secuencias vs Frecuencias")
38 plt.xlabel("Secuencia")
39 plt.ylabel("Frecuencia")
40 plt.grid(True)
41 plt.show()

```

Código 3.15: Analizador de secuencias en π : Determinando la frecuencia de ocurrencia de secuencias de dígitos específicas en el valor de π .

• Programa 3

Este código busca analizar la distribución de secuencias de dígitos dentro del valor de π hasta una longitud específica. Utiliza la biblioteca mpmath para obtener una aproximación precisa de π con la longitud deseada y luego examina la frecuencia de ocurrencia de cada secuencia de dígitos (de 0 a p-1). El proceso implica buscar cada secuencia en la cadena de dígitos de π y contar cuántas veces aparece. Finalmente, imprime una tabla que muestra cada secuencia, su frecuencia de ocurrencia y el porcentaje correspondiente en relación con la longitud total de π . Este análisis proporciona información sobre la distribución de dígitos en π y puede ser útil para estudios estadísticos o para satisfacer la curiosidad matemática sobre la naturaleza de π .

```

1 import sys
2 #sys.set_int_max_str_digits(0)
3 from mpmath import *
4
5 n=10**5 # longitud de pi, su parte decimal
6 p=1001 # secuencias de 0 hasta p-1 a buscar
7
8 mp.dps=n+10
9 pi_t=mp.mpf(str(pi)[:n+2])
10 pi_str=str(pi_t)
11
12 print("Hasta la posición decimal # ", n)

```

```
13 print("\n {:^12} {:^12} {:^12}" . format("Secuencia" , "Frecuencia" , "  
    Porcentaje"))  
14 for m in range(p):  
15     secuencia = str("{:01d}".format(m))  
16     j=0  
17     encontrada = False  
18     for i in range(len(pi_str) - len(secuencia) + 1):  
19         if pi_str[i:i + len(secuencia)] == secuencia:  
20             encontrada = True  
21             j+=1  
22     print(" {:^12} {:^12} {:^12.2f}" .format(secuencia , j , j*100/n))  
23 #     print(secuencia , "frecuencia: ",j, "   frecuencia relativa: ", j*100/n,  
    "%")
```

Código 3.16: Análisis de frecuencia de secuencias en π .

Bibliografía

- [1] Agarwal, Ravi P., Hans Agarwal, & Syamal K. Sen. (2013). *Birth, growth and computation of pi to ten trillion digits*. Advances in difference equations: 1-59.
- [2] Beckmann, P. (1971). *A History of π* . St. Martin's Press.
- [3] Beckmann, P. (2006). *Historia de π* . (Zadunaisky, P, Trad.). St. Martin's Press. (Obra original publicada en 1071).
- [4] Berggren, L., Borwein, J. & Borwein, P. (1991). *Pi: A Source Book*. (2da ed.). Springer.
- [5] Borwein, J.M. & Borwein, P.B. (1997). Ramanujan and Pi. *Pi: A Source Book* (Vol. 617). Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2736-4_62
- [6] Borwein, J. M. (2011). *The Life of Pi: From Archimedes to Eniac and Beyond 1*. Berggren Festschrift Draft IV.3. Laureate Professor & Director CARMA. Research currently supported by the Australian Research Council.
- [7] Carrión, P. (2009). *La medida del círculo de Arquímedes: Figura y texto de la proposición 1*. CFC (G): Estudios griegos e indoeuropeos, 19, 65-88. <https://core.ac.uk/download/pdf/38829203.pdf>
- [8] Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. (Sarmiento, S. M., Trad.). (Sexta ed.). McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- [9] Guillerá, J. (2009). *History of the formulas and algorithms for pi*. arXiv preprint arXiv:0807.0872.
- [10] Hall, H.S. & Knight, S.R. (1948). Fracciones continuas. En R. García Díaz (Ed.), *Álgebra superior*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- [11] Heath, T. L. (Ed.). (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.
- [12] Heath, T. L. (Ed.). (1921). *A History of Greek Mathematics*. Cambridge University Press. Vol II.
- [13] Jansson, M. (2019). *Approximation of Pi*. [Tesis de licenciatura, Lund University / LTH]. Repositorio institucional LUP Student Papers LUND UNIVERSITY LIBRARIES. <https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=8983341&fileId=8983342>. Fecha de consulta: 28-04-2023.
- [14] Navarro, J. (2010). *Los secretos del número π : ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.
- [15] Sanders, D. (2013). *Python para el cómputo científico*. Curso de Actualización Académica de la DGAPA-UNAM. Facultad de Ciencias.

- [16] Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2004). *π : a biography of the world's most mysterious number*. [Versión digital]. Prometheus Books.
- [17] Python Software Foundation. (2001-2024). *Tutorial de Python*. Python.org. <https://docs.python.org/es/3/tutorial/index.html>
- [18] Ramanujan, S. (1914). *Modular equations and approximations to π* . Quarterly Journal of Mathematics, 45, 350–372.
- [19] Zhúkov, A.V. (2005). *El omnipresente número π* . Editorial URSS, Moscú.

Referencias de Imágenes

- Figura 1: OpenMind BBVA. (2021). *Papiro de Ahmes*. [Fotografía]. Recuperado de <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/historia-del-numero-pi/>. Fecha de consulta: 15-02-2022.
- Figura 1.1: Instituto de Matemáticas UNAM, (S.F.). *Arquímedes de Siracusa*. [Fotografía]. Recuperado de <https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias/biografias-de-matematicos/biografias-de-matematicos-a-e/arquimedes-de-siracusa>. Fecha de consulta: 05-01-2022.
- Figura 2.1: Britannica. (2023). *James Gregory*. [Fotografía]. Recuperado de <https://www.britannica.com/biography/James-Gregory>. Fecha de consulta: 23-03-2023.
- Figura 2.2: Britannica. (2023). *Gottfried Wilhelm Leibniz*. [Fotografía]. Recuperado de <https://www.britannica.com/biography/Gottfried-Wilhelm-Leibniz>. Fecha de consulta: 23-03-2023.
- Figura 2.6: Art UK. (S.F.). *Abraham Sharp*. [Fotografía]. Recuperado de <https://artuk.org/discover/artworks/abraham-sharp-16511742-23612>. Fecha de consulta: 14-04-2023.
- Figura 2.8: Mathematics. (2015). *John Machin*. [Fotografía]. Recuperado de <https://mathematics2.webnode.cl/album/siglo-xviii/a1706-jpg/>. Fecha de consulta: 14-04-2023.
- Figura 2.10: BBC. (2018). *Leonhard Euler*. [Fotografía]. Recuperado de <https://www.bbc.com/mundo/noticias-44085063>. Fecha de consulta: 14-04-2023.
- Figura 3.1: OpenMind BBVA. (2016). *Srinivasa Ramanujan*. [Fotografía]. Recuperado de <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/grandes-personajes/ramanujan-el-hombre-que-vio-en-suenos-el-numero-pi/>. Fecha de consulta: 14-02-2022.