

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE OSCILADORES FRACCIONARIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

P R E S E N T A

DAVID FERNANDO VIZUET MORALES

DIRECTOR DE LA TESIS

DR. CARLOS ISLAS MORENO

CODIRECTOR

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE DEL 2024

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS ©

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento y reconocimiento a mis asesores, el Dr. Pablo Padilla Longoria y el Dr. Carlos Islas Moreno por su orientación, paciencia y valiosas contribuciones a lo largo de este trabajo. Sus conocimientos y experiencia han sido clave en mi crecimiento académico y me han impulsado a abordar este tema con profundidad y rigor.

Agradezco a mis lectores, el Mtro. Marco Antonio Prado Záyago, el Dr. Juan Antonio Nido Valencia y el Dr. Felipe Humberto Contreras Alcalá quienes han dedicado su tiempo y conocimiento a revisar mi trabajo y a ofrecer observaciones y sugerencias valiosas.

A la Mtra. Guadalupe Sagaon, los profesores, colegas y personas que he conocido en estos últimos años y me han brindado su gran amistad.

Al Dr. Armando Bautista, agradezco su apoyo constante y su amistad.

A mi madre y mis hermanos. A mi padre quien ha sido un gran guía en esta parte de mi vida.

A mi amada esposa Yesica, le agradezco su apoyo incondicional y el recordarme siempre la importancia de seguir adelante.

Índice general

Agradecimientos	I
1. Introducción	1
2. Sistemas Dinámicos y Sincronización	4
2.1. Sistemas Dinámicos	4
2.1.1. Puntos fijos o de equilibrio	5
2.1.2. Sistemas lineales	6
2.1.3. Análisis del plano fase	7
2.2. Sistemas no lineales	15
2.2.1. Existencia y unicidad de soluciones	15
2.3. Sistemas dinámicos caóticos	22
2.3.1. Modelo de Lorenz	23
2.3.2. Exponentes de Lyapunov	26
2.4. Sincronización	29
3. Oscilador de Chua	31
3.1. Modelo de Chua	31
3.2. Sincronización del caos	38
3.3. Sincronización de dos circuitos caóticos de Chua	40
3.3.1. Acoplamiento bidireccional en x	42
3.3.2. Acoplamiento bidireccional en y	46
3.3.3. Acoplamiento bidireccional en z	48

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
4. Cálculo Fraccionario	52
4.1. Funciones especiales	52
4.1.1. Función Gamma	52
4.1.2. Función Beta	55
4.1.3. Función de Mittag-Leffler	57
4.2. Integrales y derivadas fraccionarias	59
4.2.1. Derivada e Integral de Grünwald-Letnikov	59
4.2.2. Derivada e Integral de Riemann-Liouville	61
4.2.3. Derivada de Caputo	70
4.3. Ecuaciones diferenciales fraccionarias	72
4.3.1. Sistemas de ecuaciones fraccionarias y estabilidad	73
4.3.2. Solución numérica a EDFs	75
5. Oscilador de Chua de orden fraccionario	79
5.1. Modelo Chua de orden fraccionario	79
5.2. Sincronización de dos osciladores de Chua fraccionarios	87
5.2.1. Acoplamiento bidireccional en x (caso fraccionario)	89
5.2.2. Acoplamiento bidireccional en y (caso fraccionario)	93
5.2.3. Acoplamiento bidireccional en z (caso fraccionario)	97
6. Resultados	101
7. Conclusiones	103
Apéndice A. Implementación Numérica	105
Bibliografía	114

Índice de figuras

2.1. Nodo estable.	11
2.2. Nodo inestable.	11
2.3. Nodo estrella estable.	11
2.4. Nodo estrella inestable.	12
2.5. Foco estable.	12
2.6. Foco inestable.	13
2.7. Centro.	13
2.8. Punto silla.	14
2.9. Plano fase del sistema no lineal 2.2.4.	18
2.10. Plano fase del sistema no lineal 2.2.5.	21
2.11. Ciclo límite estable.	22
2.12. Atractor caótico del modelo de Lorenz tomando los parámetros $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$ y las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (10, 20, 10)$	25
2.13. Comportamiento dinámico de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ a lo largo del tiempo t en el modelo de Lorenz.	26
2.14. Separación de dos trayectorias con condiciones iniciales muy cercanas.	27
2.15. Cálculo de la pendiente mediante mínimos cuadrados [1].	27
2.16. Interpretación del exponente de Lyapunov positivo.	28
3.1. Diagrama del diodo Chua.	32
3.2. Memsistor (resistor no lineal).	32
3.3. Evolución de la dinámica en el circuito de Chua, variando solamente $\alpha \in [1, 11]$	37

3.4. Circuito de Chua condiciones iniciales, verde $(0.5, 0.1, 0)$, rojo $(0.5, 0.1, 0.1)$ y azul $(0.5, 0.2, 0.2)$	38
3.5. Esquema de acoplamiento bidireccional en x de dos osciladores de Chua. . .	43
3.6. Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0$ y $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$	45
3.7. Osciladores completamente sincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0, \delta_x = 5.57$ y $\delta_y = \delta_z = 0$	45
3.8. Esquema de acoplamiento bidireccional en y de dos osciladores de Chua. . .	46
3.9. Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0$ y $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$	47
3.10. Osciladores completamente sincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0, \delta_y = 4.5$ y $\delta_x = \delta_z = 0$	48
3.11. Esquema de acoplamiento bidireccional en z de dos osciladores de Chua. . .	48
3.12. Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0$ y $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$	49
3.13. Osciladores completamente sincronizados.	50
3.14. Dinámica del error de sincronización para el acoplamiento bidireccional. . . .	51
5.1. Dinámica del oscilador de Chua fraccionario tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0$ y distintos valores en el orden de la derivada fraccionaria de Caputo en los cuales se presenta estabilidad.	84
5.2. Dinámica del oscilador de Chua fraccionario tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0$ y distintos valores en el orden de la derivada fraccionaria de Caputo, $\gamma \in (0.96, 0.97)$	85

5.3. Dinámica del oscilador de Chua fraccionario tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0$ y distintos valores en el orden de la derivada fraccionaria de Caputo en los cuales se presenta inestabilidad.	86
5.4. Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.97$	92
5.5. Osciladores sincronizados. Tomando $\delta_x = 5.57, \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.97$	92
5.6. Dinámica de la diferencia de valores entre el sistema maestro y el sistema esclavo.	93
5.7. Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\delta_x = 0, \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.98$	95
5.8. Osciladores sincronizados parcialmente. Tomando $\delta_x = 0, \delta_y = 4, \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.98$	96
5.9. Comportamiento de la dinámica del sistema diferencia 5.2.8.	96
5.10. Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\delta_x = 0, \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.98$	99
5.11. Osciladores no sincronizados. Tomando $\delta_x = \delta_y = 0, \delta_z = 1$	99
5.12. Comportamiento de la dinámica del sistema diferencia 5.2.12	100

Capítulo 1

Introducción

La teoría del caos es una rama de las matemáticas y la física que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos altamente sensibles a las condiciones iniciales. Se trata de sistemas que aparentemente son aleatorios, pero que en realidad tienen un comportamiento determinista. La sincronización, por otro lado, se refiere al fenómeno en el que dos o más sistemas dinámicos acoplados de alguna manera comienzan a moverse juntos en un patrón coordinado. La sincronización es un fenómeno común en la naturaleza y se encuentra en sistemas que van desde relojes biológicos hasta redes neuronales. La teoría del caos y la sincronización están estrechamente relacionadas, ya que ambos fenómenos pueden observarse en sistemas dinámicos complejos. De hecho, la sincronización puede ser vista como un mecanismo para controlar el caos y lograr la estabilidad en sistemas dinámicos complejos [2].

El sistema caótico de Chua es un ejemplo de un sistema dinámico no lineal que exhibe comportamiento caótico. Fue propuesto por el físico teórico Leon Chua, y ha sido ampliamente estudiado en las áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería. La importancia de este sistema radica en que ha sido utilizado como un modelo para el estudio de una amplia variedad de fenómenos en sistemas dinámicos complejos, tales como la sincronización de osciladores y la generación de señales caóticas. En particular, el sistema de Chua puede mostrar oscilaciones caóticas y bifurcaciones en respuesta a pequeñas perturbaciones en los parámetros del sistema.

Es posible considerar el sistema caótico de Chua fraccionario, que es una extensión del sistema de Chua original, en el cual se incluyen elementos de cálculo fraccionario. El cálculo fraccionario es una rama de las matemáticas que estudia las derivadas y las integrales de orden fraccionario, lo que permite modelar fenómenos complejos que no pueden ser descritos por la teoría clásica del cálculo. En este sentido, se utilizan herramientas de cálculo fraccionario para modelar la interacción no lineal entre los componentes del sistema de Chua; esto da lugar a un comportamiento caótico aún más complejo que del sistema original. En las investigaciones matemáticas recientes, es de interés un esquema del sistema de Chau acoplado, que consiste en dos o más osciladores de Chau interactuando entre sí. Este estudio no solo busca comprender mejor los comportamientos caóticos y sincronizados en estos sistemas, sino también aplicar estas ideas en la creación de métodos para controlar el caos y estabilizar sistemas dinámicos complejos.

En el capítulo 2 se presentan las herramientas sobre Sistemas Dinámicos, las cuales permiten el tratamiento del estudio de sistemas no lineales. El capítulo 3 está dedicado a la revisión de la construcción del oscilador de Chua con derivada entera, su estudio general, así como el estudio de la sincronización de dos osciladores de Chua con derivada entera.

Por otro lado, en el capítulo 4 se desarrolla parte de la teoría fundamental del Cálculo Fraccionario. Se realiza una revisión de los conceptos básicos, algunas propiedades y los criterios necesarios para poder construir sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias con derivada de Caputo con condiciones iniciales. Así como una breve descripción de la metodología empleada en las implementaciones numéricas que permiten aproximar las soluciones.

La parte central de este trabajo se encuentra en el capítulo 5, donde se presenta el estudio del modelo de Chua de orden fraccionario, explorando cómo el orden de la derivada influye en las propiedades de memoria del sistema y en sus características dinámicas, convirtiéndolo en una herramienta valiosa para analizar el comportamiento caótico y la estabilidad en sistemas dinámicos complejos. En particular, se aborda el acoplamiento bidireccional en el modelo de Chua de orden fraccionario, lo que permite estudiar una rica dinámica que varía con el ajuste de parámetros clave. Entre estos parámetros destacan el orden de la derivada de Caputo y los factores de acoplamiento, que determinan la intensidad de interacción entre los osciladores

de Chua, así como la modulación del grado de sincronización entre los osciladores. Además se realizan simulaciones numéricas para mostrar distintos comportamiento de estos sistemas caóticos, de tal manera que se presenta sincronización completa o parcial dependiendo del orden de la derivada de Caputo y los factores de acoplamiento.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos y Sincronización

La comprensión de la naturaleza de los sistemas caóticos sigue siendo un desafío, sin embargo el estudio de estos sistemas ha permitido avances significativos en la modelación, simulación, control y sincronización de sistemas complejos en el mundo real.

A continuación presentamos algunos conceptos y definiciones básicas centrales que serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo. Todos los conceptos mencionados ha sido obtenidos completamente de las referencias [3–6].

2.1. Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico determinista se refiere a la formalización matemática de la idea general de un proceso determinista. Si conocemos su estado actual y las leyes que gobiernan su evolución, es posible predecir hasta cierto punto los estados pasados y futuros de distintos sistemas físicos, biológicos, químicos, económicos, ecológicos e incluso sociales. Si estas leyes no cambian con el tiempo, podemos considerar que el comportamiento de tal sistema se define por su estado inicial. Por lo tanto, un sistema dinámico se refiere a un conjunto de estados potenciales y a una ley que regula la evolución de un estado a lo largo del tiempo.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x), \tag{2.1.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave en algún subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si el lado derecho de la ecuación 2.1.1 es explícitamente independiente del tiempo, entonces el sistema se denomina *autónomo*. Las trayectorias de un sistema de este tipo no cambian con el tiempo. Por otro lado, si el lado derecho de la 2.1.1 tiene dependencia explícita del tiempo el sistema se denomina no *autónomo*.

Decimos que el *campo vectorial* de f genera el flujo $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ es una función suave definida para cada $x \in U$, t en algún intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y ϕ_t satisface 2.1.1 en el sentido de que

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, t)) \Big|_{t=\tau} = f(\phi(x, \tau)), \quad (2.1.2)$$

para cada $x \in U$ y $\tau \in I$.

A menudo se dan una condición inicial para el tiempo t_0

$$x(t_0) = x_0 \in U, \quad (2.1.3)$$

en tal caso se busca una solución $\phi(x_0, t)$ tal que

$$\phi(x_0, t_0) = x_0.$$

Decimos que $\phi(x_0, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ define una *curva solución*, *trayectoria* u *órbita* de la ecuación diferencial 2.1.1.

En este trabajo nos interesan sistemas dinámicos no lineales que describiremos más adelante, para los cuales se utilizan las técnicas cualitativas que nos permitan tener una perspectiva del comportamiento del sistema sin la necesidad de resolver o conocer la solución exacta.

2.1.1. Puntos fijos o de equilibrio

Al estudiar sistemas dinámicos, tiene sentido que primero consideremos la solución más simple al problema. Éstas son los denominados **puntos fijos** o **puntos de equilibrio**. Un punto x^* se llama fijo si $f(x^*) = 0$, y por lo tanto $\phi_t(x^*) = x^* \forall t \in \mathbb{R}$. Ésta noción es

importante para analizar el comportamiento local de un sistema.

En las aplicaciones es importante conocer los puntos fijo en un sistema, debido a que en ellos es posible observar los lugares donde no cambia la dinámica del sistema. Ahora supongamos que el sistema está en equilibrio. Si cambiamos repentinamente el valor de las variables y nos preguntamos si el sistema permanecerá cerca de x^* para cualquier tiempo t futuro. Se dice que el punto de equilibrio será estable si soluciones cercanas no se alejan “demasiado”. Formalmente, se enuncian las siguientes definiciones de estabilidad.

Definición 2.1.1. (*Estabilidad*) Se dice que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es estable (en el sentido de Lyapunov) si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ verifica que si $|x_0 - x^*| < \delta$, entonces $|x(t) - x^*| < \varepsilon, \forall t \geq 0$.

Definición 2.1.2. (*Estabilidad asintótica*) Se dice que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es asintóticamente estable si es estable y además $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$, si x_0 es un punto suficientemente próximo a x^* .

Por último, se dice que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es *inestable* si no es estable.

2.1.2. Sistemas lineales

En los sistemas dinámicos, el sistema más elemental de estudio es el llamado sistema lineal. Diremos que un sistema es lineal si:

$$\dot{x} = f(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1.4)$$

donde $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es una matriz de coeficientes constantes. No es difícil ver que las soluciones de 2.1.4 son de la forma ([4], pág. 16):

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad (2.1.5)$$

donde $e^{tA} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ se define por:

$$e^{At} = 1 + At + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (2.1.6)$$

Además, la solución general a 2.1.4 puede obtenerse de la combinación lineal de n soluciones linealmente independientes, es decir:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t). \quad (2.1.7)$$

Teorema 2.1.1. (*Teorema fundamental de los sistemas lineales*) Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, el problema del valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

tiene una solución única dada por:

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (2.1.9)$$

Demostración. Véase [4], pág. 17 y 18. □

En la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos se estudian a profundidad sistemas lineales de la forma

$$\dot{x} = Ax,$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y A es una matriz de 2×2 , los cuales muestran distintos comportamientos en el plano fase.

2.1.3. Análisis del plano fase

En las aplicaciones, a menudo nos encontramos con sistemas lineales de dos ecuaciones diferenciales (o ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden), ya sea porque el modelo subyacente es lineal o porque está linealizado alrededor de un punto de equilibrio. Los sistemas bidimensionales son especialmente fáciles de analizar en detalle y ofrecen algunas configuraciones dinámicas básicas interesantes. Además, en la práctica, es imposible o no es sencillo determinar con precisión los valores propios y vectores propios de matrices de grado

mayor que dos. Por tanto, dedicamos este apartado a los sistemas dinámicos continuos en el plano.

Consideremos el sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en el plano xy representado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{2.1.10}$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden en todo el plano xy . Las soluciones $(x(t), y(t))$ de 2.1.10 pueden ser representadas en el plano xy al que se denomina *plano fase* del sistema. A medida que la variable t incrementa, $(x(t), y(t))$ traza una curva dirigida en el plano fase. Esta curva se denomina *trayectoria de fase*, o simplemente *trayectoria del sistema*. El *retrato de fase* es el conjunto de todas las trayectorias cualitativamente diferentes del sistema dibujadas en el plano fase.

Tomando la expansión en series de Taylor de primer orden de $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ en una vecindad del punto (x_0, y_0) , se tiene que:

$$\begin{aligned}P(x, y) &= P(x_0, y_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} + \dots \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} + \dots\end{aligned}$$

Debido a que (x_0, y_0) es un punto de equilibrio, entonces $P(x_0, y_0) = 0$ y $Q(x_0, y_0) = 0$. Los subíndices inferiores indican que las derivadas parciales se evalúan en (x_0, y_0) . Despreciando los términos cuadráticos y de orden superior se tiene que

$$\begin{aligned}P(x, y) &\approx ax + by \\ Q(x, y) &\approx cx + dy,\end{aligned}\tag{2.1.11}$$

donde las cantidades a , b , c y d son evaluadas en (x_0, y_0) , es decir:

$$a = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_0, \quad b = \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_0, \quad c = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Big|_0, \quad \text{y } d = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) \Big|_0$$

Por último, el sistema 2.1.10 lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Usando notación matricial para el sistema anterior

$$\dot{X} = AX, \tag{2.1.13}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 con coeficientes reales y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector en \mathbb{R}^2 .

En el estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, la caracterización de los puntos de equilibrio de los sistemas en la forma de 2.1.13 es de la siguiente manera:

Del sistema 2.1.13 se tiene que la matriz asociada A es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2.1.14}$$

Si $\det(A) \neq 0$, el único punto de equilibrio, el cual $\dot{x} = 0 = \dot{y}$, es si $x = 0 = y$.

El polinomio característico es

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A) + \det(A), \end{aligned}$$

cuyos valores propios asociados son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta} \right),$$

donde $\Delta \equiv ([\text{tr}(A)]^2 - 4 \det(A))$ es llamado el *discriminante*. Por ejemplo, para el sistema 2.1.13 el discriminante es

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + d)^2 - 4(ad - bc) \\ &= (a - d)^2 + 4bc. \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra la clasificación de los puntos de equilibrio según el determinante y la traza de la matriz asociado al sistema dinámico.

Puntos de equilibrio			
$\det(A)$	$\text{tr}(A)$	Δ	Tipo de punto
$\det(A) > 0$	$\text{tr}(A) > 0$	$\Delta > 0$	Nodo inestable
		$\Delta = 0$	Nodo estrella inestable
		$\Delta < 0$	Foco inestable
	$\text{tr}(A) = 0$	$\Delta < 0$	Centro estable
	$\text{tr}(A) < 0$	$\Delta > 0$	Nodo estable
		$\Delta = 0$	Nodo estrella estable
$\Delta < 0$		Foco estable	
$\det(A) < 0$	$\text{tr}(A) < 0, \text{tr}(A) = 0, \text{tr}(A) > 0$	$\Delta > 0$	Punto silla, inestable

Tabla 2.1: Clasificación de puntos de equilibrio.

En el estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, la caracterización de los puntos de equilibrio de los sistemas en la forma de 2.1.13 es de la siguiente manera:

- *Nodo estable*: Todas las órbitas se dirigen al punto de equilibrio y tiende a él. Los valores propios λ_1, λ_2 son reales, negativos y distintos entre sí.

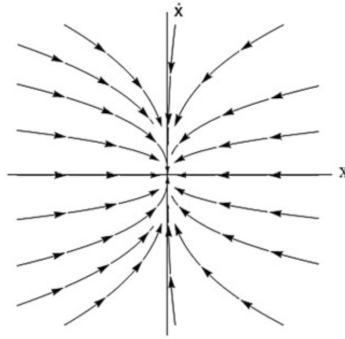


Figura 2.1: Nodo estable.

- *Nodo inestable*: Las trayectorias salen del punto de equilibrio y divergen. Los valores propios λ_1, λ_2 son reales, positivos y distintos entre ellos.

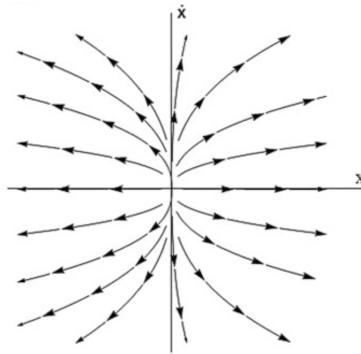


Figura 2.2: Nodo inestable.

- *Nodo estrella estable*: Las trayectorias convergen al punto de equilibrio con la misma tasa de rapidez. Los valores propios λ_1, λ_2 son reales, negativos e iguales.

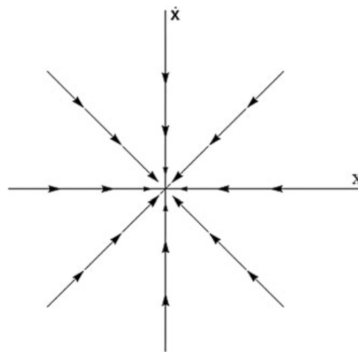


Figura 2.3: Nodo estrella estable.

- *Nodo estrella inestable*: Las trayectorias divergen al punto de equilibrio con la misma tasa de rapidez. Los valores propios λ_1, λ_2 son reales, positivos e iguales.

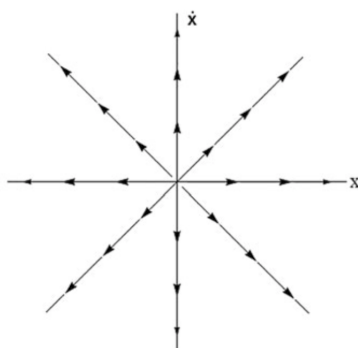


Figura 2.4: Nodo estrella inestable.

- *Foco estable*: Todas las órbitas tienden al punto de equilibrio en espiral. Los valores propios λ_1, λ_2 son complejos conjugados con parte real negativa.

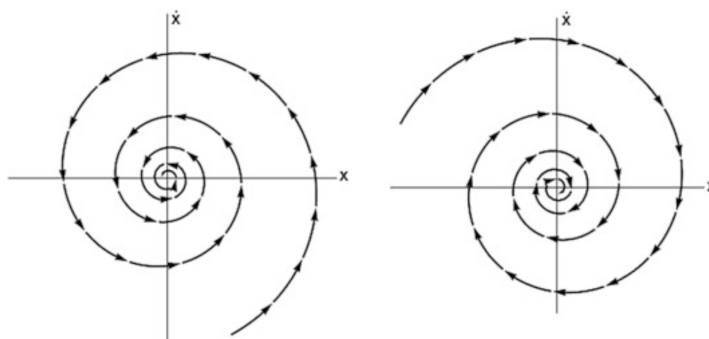


Figura 2.5: Foco estable.

- *Foco inestable*: Las órbitas se alejan del punto de equilibrio en espiral. Los valores propios λ_1, λ_2 son complejos con parte real positiva.

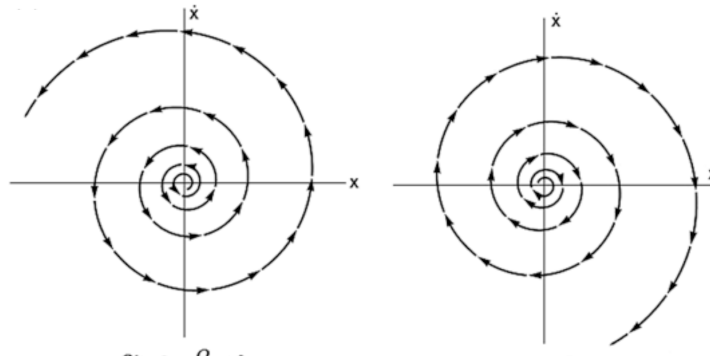


Figura 2.6: Foco inestable.

- *Centro*: Todas la órbitas próximas al punto de equilibrio son cerradas, ninguna de ellas entra ni sale. Este punto de equilibrio es llamado estable. Los valores propios λ_1, λ_2 son complejos con parte real igual a cero.

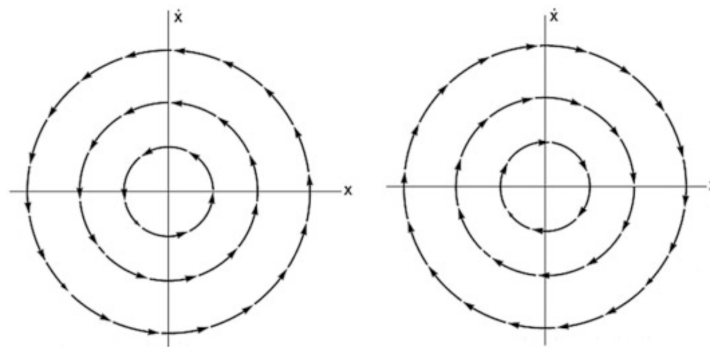


Figura 2.7: Centro.

- *Punto silla*: Inicialmente las trayectorias tienden al punto de equilibrio, pero después divergen. Es considerado un punto inestable. Los valores propios λ_1, λ_2 son reales y con signos opuestos.

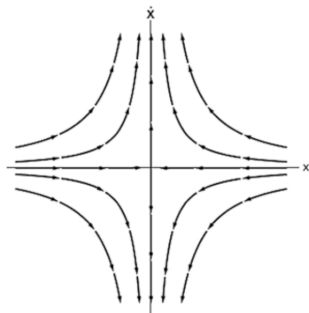


Figura 2.8: Punto silla.

Las figuras anteriores fueron tomadas de [1].

En términos generales, un atractor es un conjunto al que convergen todas las trayectorias vecinas. Algunos ejemplos son los puntos fijos estables y los ciclos límite estables. Más concretamente, se define un atractor como un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades (véase [1], pág. 359):

1. A es un conjunto invariante: Cualquier trayectoria $x(t)$ que comience en A permanece en A durante todo el tiempo.
2. A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales: Existe un conjunto abierto U que contiene a A tal que si $x(0) \in U$, entonces la distancia de $x(t)$ a A tiende a cero a medida que $t \rightarrow \infty$. Esto significa que A atrae a todas las trayectorias que comienzan suficientemente cerca de ella. La mayor de dichas U se denomina cuenca de atracción de A .
3. A es mínimo: No existe ningún subconjunto propio de A que satisfaga las condiciones 1 y 2.

En algunos casos, las cuencas de atracción se cruzan como si estuvieran entrelazadas, de modo que cada punto de una cuenca se aproxima a otro punto de otra cuenca de atracción.

2.2. Sistemas no lineales

Un sistema dinámico continuo no lineal está caracterizado por n variables y por un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \quad (2.2.1)$$

donde $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector, t es la variable independiente y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua definida en un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Para un tiempo dado t_0 y el valor conocido de $x(t_0)$.

2.2.1. Existencia y unicidad de soluciones

Definición 2.2.1. Una función $f(x, t)$ se llama *lipschitziana* (o que cumple el criterio de Lipschitz) respecto a x si $|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$, para todo y y x en el dominio de la función, donde $|\cdot|$ es una norma de \mathbb{R}^n y $Lip(f) = L < \infty$ la constante de Lipschitz para f .

El siguiente resultado hace referencia a la *existencia y unicidad* de las soluciones cuando consideramos la función que define la ecuación diferencial, es continua, lipschitziana y autónoma.

Teorema 2.2.1. (Existencia y Unicidad de Soluciones de EDOs) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y lipschitziana. Sea $x_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $a > 0$ y una solución $x(t)$, de $\dot{x} = f(x)$ definida para $t_0 - a < t < t_0 + a$ tal que $x(t_0) = x_0$. Además, si $y(t)$ es otra solución con $y(t_0) = x_0$, entonces $x(t) = y(t)$ en dicho intervalo.

Demostración. Véase [3]. □

En forma análoga, una buena manera de comenzar a abordar el estudio de los sistemas no lineales es buscando los puntos de equilibrio del sistema y caracterizar el comportamiento de las soluciones en torno a ellos.

Un primer análisis es linealizar el sistema no lineal y estudiar su estabilidad, la cual debe determinarse por métodos que no requieran el conocimiento de sus soluciones, es decir,

usar el análisis cualitativo mencionado anteriormente. Partiendo con el método basado en la aproximación lineal, consideremos de nuevo el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales del sistema 2.2.1 con un punto fijo x^* . Supongamos, como suele hacerse, que f es diferenciable en cada una de las n variables del vector x . Una aproximación lineal local del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio x^* viene dada por la expansión en una serie de Taylor de las funciones de coordenadas f_i (los elementos del vector f) truncados después de los términos de primer orden. Sea $\xi = x - x^*$, por lo que $\dot{\xi} = \dot{x}$.

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= f_1(x^*) + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \xi_n \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x^*) + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \xi_n \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= f_n(x^*) + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \xi_n.\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Si consideramos que el primer término del lado derecho de cada ecuación del sistema es igual a cero, el sistema linealizado puede escribirse de forma compacta como:

$$\dot{\xi} = Df(x^*)\xi,$$

donde la matriz Jacobiana $Df(x)$ es la matriz de primeras derivadas parciales

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.\tag{2.2.3}$$

Existe un resultado general en la teoría de ecuaciones diferenciales conocido como el teorema de Hartman-Grobman, el cual garantiza que, bajo condiciones apropiadas, en una vecindad del punto de equilibrio las propiedades cualitativas del sistema no lineal son pre-

servadas por la linealización.

Definición 2.2.2. *Un punto fijo de un sistema de ecuaciones diferenciales es **hiperbólico** si la matriz jacobiana calculada en un punto no tiene valores propios nulos o puramente imaginarios (ningún valor propio tiene parte real igual a cero).*

Teorema 2.2.2. (Hartman-Grobman) *Si x^* es un punto fijo hiperbólico de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ entonces existe un homeomorfismo h definido en alguna vecindad N de x^* en \mathbb{R}^n que manda órbitas locales del sistema no lineal hacia el sistema lineal. La función h preserva el sentido de las órbitas que también puede ser elegido para preservar la parametrización por el tiempo.*

Teorema 2.2.3. *Si x^* es un punto de equilibrio estable de 2.2.1, ningún valor propio de $Df(x^*)$ tiene parte real positiva.*

Sea x^* el punto de equilibrio del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Si todos los valores propios de la matriz $Df(x^*)$ tienen parte real negativa, el sistema será asintóticamente estable. Únicamente los valores propios con partes reales positivas son suficientes para hacer que el sistema sea inestable. Si la parte real de cualquier valor propio de $Df(x^*)$ es igual a 0, el estudio de un sistema linealizado no es suficiente para describir el comportamiento cualitativo del sistema. Además, los modelos de sistemas físicos suelen depender de parámetros. Modificarlos pueden provocar cambios en el comportamiento cualitativo de la solución.

Ejemplo 2.2.1. *Sea el siguiente sistema dinámico:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^3 \\ \dot{y} &= -2y.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

Notemos que los únicos valores que satisfacen $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$ son $x = 0, 1, -1$ y $y = 0$. Por lo que los puntos de equilibrio son $x_1^ = (0, 0)$, $x_2^* = (1, 0)$ y $x_3^* = (-1, 0)$.*

Por otro lado, sea

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ -2y \end{pmatrix},$$

entonces la matriz Jacobiana asociada al sistema 2.2.4 es

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando los puntos de equilibrio en la matriz Jacobiana se tiene lo siguiente.

- Para el punto $x_1^* = (0, 0)$:

$$Df(x_1^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En este caso podemos ver que $\text{tr}(Df(x_1^*)) = -3 < 0$, $\det(Df(x_1^*)) = 2 > 0$ y $\Delta = (-3)^2 - 4(2) = 1 > 0$. Por lo tanto el punto x_1^* es un nodo estable.

- Para el punto $x_2^* = (1, 0)$ y $x_3^* = (-1, 0)$:

$$Df(x_2^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = Df(x_3^*).$$

En este caso podemos ver que $\text{tr}(Df(x_2^*)) = \text{tr}(Df(x_3^*)) = 0$, $\det(Df(x_2^*)) = \det(Df(x_3^*)) = -4 < 0$ y $\Delta = (0)^2 - 4(-2) = 8 > 0$ en ambos casos. Por lo tanto los puntos x_2^* y x_3^* son puntos silla.

El comportamiento del sistema 2.2.4 alrededor de los puntos de equilibrio se muestra en la siguiente gráfica.

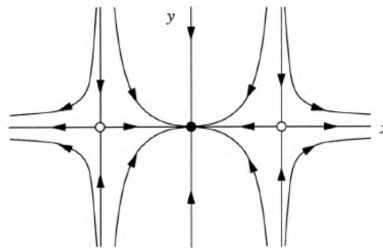


Figura 2.9: Plano fase del sistema no lineal 2.2.4.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos un caso particular de las ecuaciones de Olver-Rosenau (para mayores detalles técnicos veáse [7])

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(13 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= 12 - x(13 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Para obtener los puntos de equilibrio es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = y(13 - x^2 - y^2) = 0 \quad (2.2.6)$$

$$\dot{y} = 12 - x(13 - x^2 - y^2) = 0. \quad (2.2.7)$$

Notemos que en la ecuación 2.2.6 puede ocurrir que $y = 0$ o que $13 - x^2 - y^2 = 0$. Si sustituimos $13 - x^2 - y^2 = 0$ en la ecuación 2.2.7 entonces se tiene que $12 = 0$, y es una contradicción. Por lo que sólo puede ocurrir que $y = 0$.

Si tomamos a $y = 0$ y sustituimos en la ecuación 2.2.7, nos queda que:

$$\begin{aligned} 12 - x(13 - x^2 - 0^2) &= 12 - x(13 - x^2) \\ &= x^3 - 13x + 12 \\ &= (x - 1)(x - 3)(x + 4) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, los puntos de equilibrio asociados al sistema son $x_1^* = (1, 0)$, $x_2^* = (3, 0)$ y $x_3^* = (-4, 0)$. Sea

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(13 - x^2 - y^2) \\ 12 - x(13 - x^2 - y^2) \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana asociada al sistema 2.2.5 es:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy & 13 - x^2 - 3y^2 \\ -13 + 3x^2 + y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Evaluando los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana se tiene lo siguiente.

- Para el punto de equilibrio $x_1^* = (1, 0)$:

$$Df(x_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso podemos ver que $\text{tr}(Df(x_1^*)) = 0$, $\det(Df(x_1^*)) = 120 > 0$ y

$\Delta = (0)^2 - 4(120) = -480 < 0$. Por lo tanto el punto x_1^* es un centro estable.

- Para el punto de equilibrio $x_2^* = (3, 0)$:

$$Df(x_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso podemos ver que $\text{tr}(Df(x_2^*)) = 0$, $\det(Df(x_2^*)) = -56 < 0$ y

$\Delta = (0)^2 - 4(-56) = 224 > 0$. Por lo tanto el punto x_2^* es un punto silla.

- Para el punto de equilibrio $x_3^* = (-4, 0)$:

$$Df(x_3^*) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 35 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso podemos ver que $\text{tr}(Df(x_3^*)) = 0$, $\det(Df(x_3^*)) = 105 > 0$ y

$\Delta = (0)^2 - 4(105) = -420 < 0$. Por lo tanto el punto x_3^* es un centro estable.

Un sistema puede tener múltiples atractores, y dependiendo de las condiciones iniciales será el que corresponda a una dinámica determinada. El conjunto de todas las condiciones iniciales que convergen a un atractor dado se denomina cuenca de atracción, que puede tener una geometría muy compleja.

Para que el conjunto sea un atractor, las trayectorias que le sean suficientemente próximas han de permanecer próximas incluso si son ligeramente perturbadas. Geométricamente, un atractor puede ser un punto, una curva, o un conjunto extremadamente complicado.

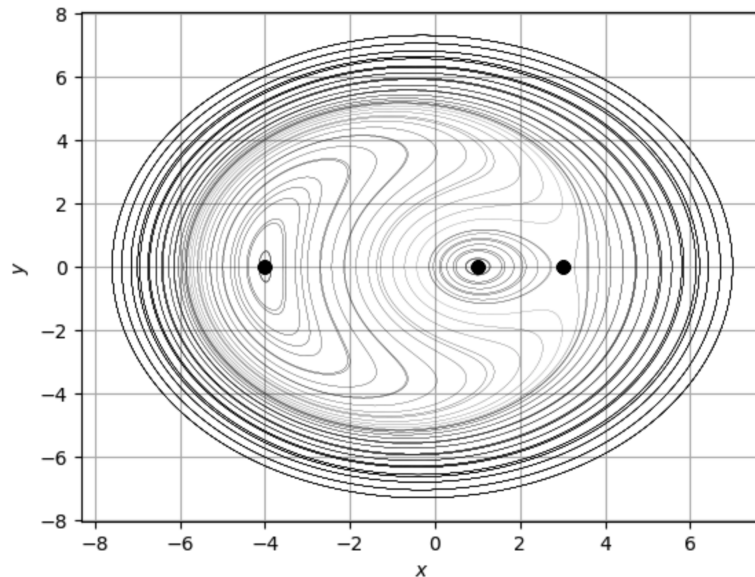


Figura 2.10: Plano fase del sistema no lineal 2.2.5.

La trayectoria del sistema dinámico en el atractor no tiene que satisfacer ninguna propiedad especial excepto la de permanecer en el atractor; puede ser periódica, caótica o de cualquier otro tipo. El punto de equilibrio y el ciclo límite son atractores simples o clásicos. Cuando los conjuntos son complicados de describir, nos encontramos ante un atractor extraño.

Algunos tipos de atractores son los *puntos de equilibrio*, *ciclo límite*, *atractor caótico*. Un ciclo límite es una trayectoria periódica a las trayectorias cercanas a él se mueven en espiral, acercándose o alejándose del ciclo límite. Si todas las trayectorias cercanas se acercan al ciclo, se dice que es estable. Si las trayectorias cercanas se alejan del ciclo, el ciclo es inestable; en casos extraños, el ciclo es semiestable porque algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a estar cerca de él. Los ciclos límite no pueden ocurrir en sistemas lineales; solo pueden ocurrir en sistemas no lineales.

El atractor caótico aparece en sistemas no lineales que tienen una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Se abordará este tipo de atractor en la siguiente sección.

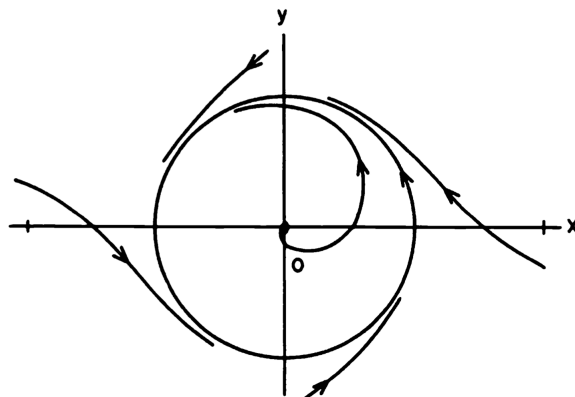


Figura 2.11: Ciclo límite estable.

2.3. Sistemas dinámicos caóticos

En la actualidad, al tratar de predecir ciertos comportamientos, se encuentran desórdenes de la atmósfera y del mar; fluctuaciones en las poblaciones de animales y plantas; y oscilaciones del corazón y el cerebro, entre otras cosas, pero cuando se trabaja con sistemas dinámicos y modelos matemáticos, se olvida con frecuencia que puede ser la vida real. La ciencia ha encontrado un problema con el comportamiento irregular de la naturaleza y sus aspectos discontinuos y variables.

Se ha estudiado la estabilidad de una solución durante mucho tiempo. Esto significa si una solución sobrevive a una perturbación infinitesimal y cómo cambia cuando cambia el número de soluciones.

El objetivo principal del método experimental clásico es determinar las relaciones causa-efecto en los eventos naturales. Durante su investigación, Henri Poincaré descubrió que incluso cambios mínimos en las condiciones iniciales de los parámetros de ciertas ecuaciones podían alterar significativamente el resultado final de un proceso dinámico específico [8]. El caos determinista es un proceso dinámico que incluye esta observación. Aunque el comportamiento del sistema parezca aleatorio, este caos es determinista porque son deterministas las ecuaciones que rigen el movimiento.

El matemático Steven Strogatz define a los sistemas caóticos como sistemas dinámicos deterministas que, pese a seguir reglas precisas, muestran un comportamiento altamente impredecible debido a su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, de modo que pequeñas

variaciones pueden generar resultados completamente diferentes a largo plazo [1].

En un sistema caótico, las trayectorias de las variables de estado del sistema se vuelven extremadamente difíciles de predecir y parecen ser aleatorias. Aunque el sistema sigue una regla de evolución determinista, la interacción no lineal entre las variables hace que el sistema sea altamente complejo y no se pueda pronosticar a largo plazo.

En 1963, después de la publicación de un artículo de Lorenz [9] sobre el flujo no periódico y la turbulencia, se encontró que había soluciones aperiódicas en un modelo simplificado de las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que abrió la puerta a nuevos temas de estudio.

Esta contribución proporcionó una variedad de enfoques de investigación en los que sistemas determinísticos muy simples producen trayectorias dinámicas que están fuertemente influenciadas por la sensibilidad a las condiciones iniciales. Incluso si se conocen las reglas de evolución de un sistema dinámico de manera precisa, es imposible hacer una predicción a largo plazo debido a la divergencia exponencial que la dinámica experimenta ante pequeñas perturbaciones.

2.3.1. Modelo de Lorenz

De manera general, mostramos el esquema presentado en [10] donde se aborda el estudio del modelo de Lorenz. Para el análisis cualitativo se consideran los valores usuales de los parámetros $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, mientras que $\rho > 0$ se considera un parámetro de control.

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{2.3.1}$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \tag{2.3.2}$$

$$\dot{z} = xy - \beta z. \tag{2.3.3}$$

Los puntos de equilibrio se obtiene igualando a cero cada una de las tres ecuaciones del

sistema 2.3.1:

$$\sigma(y - x) = 0 \quad (2.3.4)$$

$$x(\rho - z) - y = 0 \quad (2.3.5)$$

$$xy - \beta z = 0, \quad (2.3.6)$$

entonces

$$x = y$$

$$xz = \rho x - y$$

$$xy = \beta z.$$

No es difícil ver que, al realizar algunas operaciones algebraicas los puntos de equilibrio son:

- $C_0 = (0, 0, 0)$, existe $\forall \rho \in \mathbb{R}$.
- $C_+ = \left(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right)$, existe $\forall \rho \geq 1$.
- $C_- = \left(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1 \right)$, existe $\forall \rho \geq 1$.

La matriz Jacobiana asociada al sistema 2.3.1 es:

$$Df = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

En [1, 9, 10] se estudia en profundidad el modelo de Lorenz, donde se caracterizan los puntos de equilibrio encontrados anteriormente. Se sabe que la estabilidad de dichos puntos para distintos valores de ρ es la siguiente: Si $0 < \rho < 1$ el único punto de equilibrio es el punto C_0 y es asintóticamente estable. Si $\rho > 1$ el punto C_0 siempre es inestable y además se cumple que para $1 < \rho < \frac{470}{19}$ los puntos C_+ y C_- son asintóticamente estables. Además, si $\rho > \frac{470}{19}$, los puntos C_+ y C_- son inestables.

De esta forma, se han encontrado los valores del parámetro ρ necesarios para garantizar la existencia y estabilidad de los tres posibles equilibrios del Sistema de Lorenz.

Debido a la no linealidad del modelo se emplea la aproximación numérica a las soluciones utilizando la implementación ode45 en MatLab. A continuación se presentan algunas simulaciones para distintos valores de parámetros y diferentes condiciones iniciales.

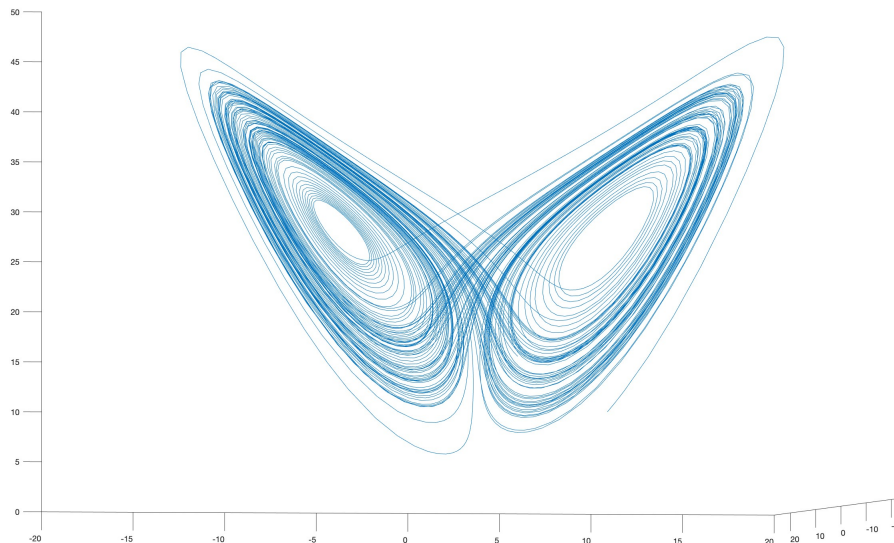


Figura 2.12: Atractor caótico del modelo de Lorenz tomando los parámetros $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$ y las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (10, 20, 10)$.

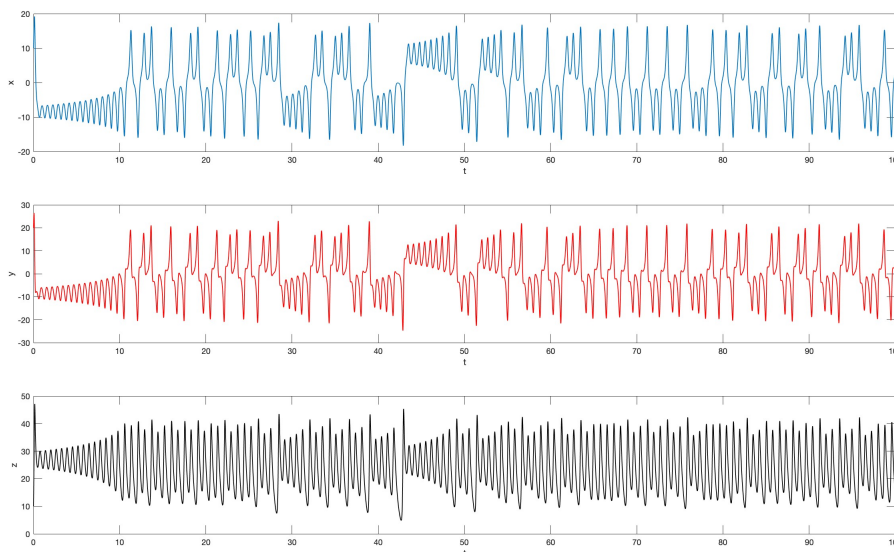


Figura 2.13: Comportamiento dinámico de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ a lo largo del tiempo t en el modelo de Lorenz.

2.3.2. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una herramienta útil para determinar si un atractor es caótico.

Es importante destacar que un punto de equilibrio nodo estable es el atractor más básico que podemos encontrar en un sistema dinámico. Los ciclos límite y los atractores extraños, también conocidos como atractores caóticos, son otros tipos de atractores. La dependencia sensible a las condiciones iniciales es la principal característica que define el caos. Cuando se promedian a lo largo de la trayectoria, dos condiciones iniciales cercanas en el atractor están separadas por una distancia que crece exponencialmente en el tiempo, lo que resulta en imprevisibilidad a largo plazo.

La tasa promedio de crecimiento de esta distancia es el exponente de Lyapunov, con un valor mayor que cero que indica dependencia sensible a las condiciones iniciales, es decir, caos, un valor cero que indica periodicidad y un valor negativo que indica un equilibrio estable [11]. Los sistemas dinámicos “hipercaóticos” [12] tienen más de un exponente de Lyapunov positivo. El exponente de Lyapunov se llama así en honor a Aleksandr Lyapunov,

un matemático ruso que fue uno de los primeros en investigar la estabilidad dinámica.

Consideremos una condición inicial en la vecindad del atractor y dejemos que la órbita evolucione en el tiempo. Después del período de decaimiento transitorio, la trayectoria se establecerá en la región del atractor. Supongamos que $x(t)$ es un punto en el atractor en un tiempo t y consideremos un punto cercano $x(t) + \delta(t)$, donde δ es un vector de separación diminuto de longitud inicial $\|\delta_0\|$, Fig 2.14.

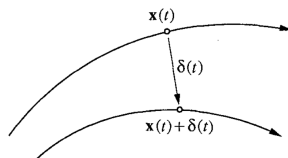


Figura 2.14: Separación de dos trayectorias con condiciones iniciales muy cercanas.

Ahora vea cómo $\delta(t)$ crece. En estudios numéricos del atractor de Lorenz, se encuentra que

$$\|\delta(t)\| \approx \|\delta_0\| e^{\lambda t},$$

donde $\lambda \approx 0.9$. Por lo tanto las trayectorias vecinas se separan exponencialmente rápido. Equivalentemente, si graficamos $\|\delta(t)\|$ contra t , encontramos una curva parecida a una línea recta con pendiente positiva λ , vea la Figura 2.15 [1].

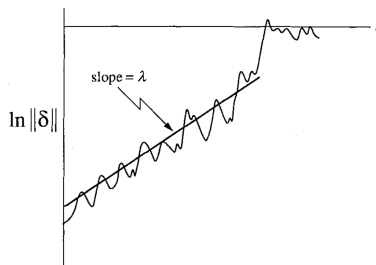


Figura 2.15: Cálculo de la pendiente mediante mínimos cuadrados [1].

Necesitamos precisar algunos aspectos [1]:

1. En la gráfica de la Figura 2.15 la curva no es necesariamente una recta. Esta puede presentar oscilaciones debido a que la fuerza de la divergencia exponencial varía un poco a lo largo del atractor.

2. La divergencia exponencial debe detenerse cuando la separación es comparable al “diámetro” del atractor, las trayectorias no pueden alejarse más que eso. Esto explica la nivelación o la saturación de la curva en la Figura 2.15.
3. El valor λ es llamado el *exponente de Lyapunov*, teniendo en cuenta las siguientes razones de su uso: En primer lugar, en realidad se tienen n diferentes exponentes de Lyapunov para un sistema n -dimensional, que se define de la siguiente manera. Consideremos la evolución de una esfera infinitesimal de condiciones iniciales perturbadas. Durante su evolución, la esfera se distorsionará en un elipsoide infinitesimal. Sea $\delta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, la longitud del k -ésimo eje principal del elipsoide. Entonces $\delta_k(t) \approx \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$ donde λ_k son los exponentes de Lyapunov. Para valores de t grandes, el diámetro del elipsoide es controlado por el valor λ_k más grande. Así el λ es en realidad el *Máximo Exponente de Lyapunov* [1].

Cuando un sistema tiene un exponente de Lyapunov positivo, existe un horizonte temporal más allá del cual se rompe la predicción, como se muestra en la Figura 2.16.

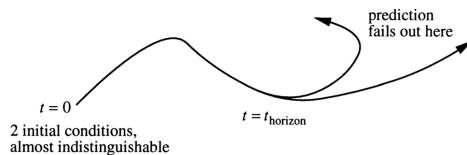


Figura 2.16: Interpretación del exponente de Lyapunov positivo.

Supongamos que medimos las condiciones iniciales de un sistema experimental con mucha precisión. Sin embargo, ninguna medición es perfecta, siempre hay algún error $\|\delta_0\|$ entre nuestra estimación y el verdadero estado inicial. Después de un tiempo t , la discrepancia crece hasta $\|\delta(t)\| \approx \|\delta_0\| e^{\lambda t}$. Sea a una medida de nuestra tolerancia, es decir, si una predicción está dentro de a del estado verdadero, la consideramos aceptable. Entonces nuestra predicción se vuelve intolerable cuando $\|\delta(t_0)\| \geq a$. Esto ocurre después de un tiempo

$$t_{\text{horizon}} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\|\delta_0\|} \right).$$

2.4. Sincronización

Según el contexto en el que se mencione, el término “*sincronización*” puede tener una variedad de significados. Uno de los enfoques más comunes en la literatura es el sugerido por Pikovsky, Rosenblum y Kurths [13], que define la sincronización como “*un ajuste de los ritmos de objetos oscilantes producido por una interacción débil*”. En este sentido, muchos trabajos se han enfocado en aclarar conceptos como: objeto oscilante, ritmo, interacción y ajuste de ritmo. Sin embargo, una definición general de sincronización no implica necesariamente objetos oscilantes. La sincronización es el acoplamiento de los estados que interactúan entre sí.

Desde el trabajo de Huygens en 1673 sobre péndulos interconectados, se ha estudiado la sincronización entre sistemas acoplados. Después, se implementaron estas ideas en varios sistemas, pero a principios del siglo XX se descubrió que también se pueden aplicar a los sistemas eléctricos y electromecánicos [13]. Se ha demostrado recientemente que es posible sincronizar sistemas que muestran este comportamiento a través de estudios de oscilaciones caóticas. Pecora y Carroll demostraron experimentalmente que los comportamientos caóticos aparentemente aleatorios e impredecibles pueden fusionarse en una sola trayectoria, lo que generó nuevas expectativas sobre la teoría del caos [2]. En el siguiente capítulo se estudiará la sincronización del acoplamiento de dos circuitos de Chua.

En el problema de la sincronización, dos sistemas caóticos que evolucionan inicialmente sobre atractores distintos, al acoplarse de alguna manera, finalmente siguen una trayectoria común. De esta manera, la sincronización entre dos sistemas ocurre cuando uno de ellos cambia su trayectoria a la segunda por el otro sistema o bien cuando ambos sistemas establecen una nueva trayectoria común.

Si las oscilaciones de dos (o más) sistemas caóticos coinciden en todo momento a lo largo del tiempo, a pesar de partir de condiciones iniciales distintas o incluso iguales, se dice que están sincronizados. La conformidad en el tiempo de dos o más procesos caóticos, caracterizada por una métrica entre algunas variables de estos procesos, se conoce como sincronización caótica.

La sincronización puede ser vista como una manifestación de la tendencia a la auto-organización en sistemas complejos. A continuación se da una definición formal.

Definición 2.4.1. (*Sincronización*) Consideremos un sistema dado por $\dot{x} = f(x)$ y otro por $\dot{y} = g(y)$, donde f y g son campos vectoriales definidos en $x, y \in \mathbb{R}$. Se dice que ambos sistemas se sincronizan si se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0, \quad x_0 \neq y_0. \quad (2.4.1)$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ representan los estados de los sistemas, y $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ son las condiciones iniciales.

Capítulo 3

Oscilador de Chua

3.1. Modelo de Chua

El circuito de Chua es utilizado en muchos trabajos sobre caos como un ejemplo tradicional de un sistema caótico debido a su robustez, bajo costo y por la gran variedad de comportamientos dinámicos que presenta. Además, es simple de construir, lo que permite manipular fácilmente algunos de sus parámetros y mostrar una amplia gama de fenómenos relacionados con el comportamiento caótico. Además, en investigaciones recientes se ha estudiado el concepto de *acoplamiento bidireccional*, que hace referencia a la forma en que dos sistemas caóticos se conectan para que puedan influir entre sí. Este tipo de acoplamiento es interesante para el estudio de sistemas dinámicos y caos porque permite observar fenómenos como la sincronización del caos y la generación de dinámicas complejas. En [14] se muestra exitosamente el acoplamiento bidireccional de dos circuitos de Chua, el cual daremos las generalidades más adelante.

El circuito está formado por un inductor lineal L , una resistencia lineal R , dos condensadores lineales C_1 y C_2 y una resistencia no lineal N_R conocido como *diodo* de Chua.

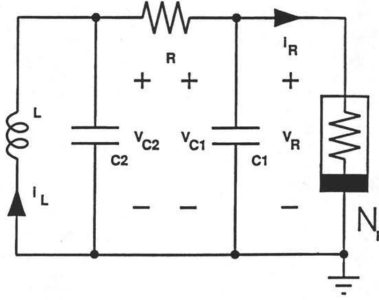


Figura 3.1: Diagrama del diodo Chua.

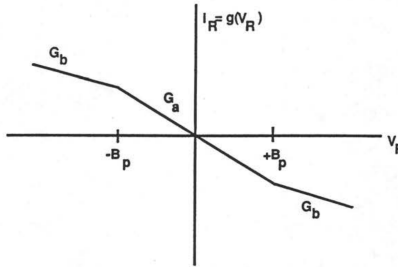


Figura 3.2: Memsistor (resistor no lineal).

La gran parte de los estudios analíticos de circuitos se han centrado en una forma de ecuaciones diferenciales que se obtienen reescalando los parámetros de los sistemas [14]. Es decir, si se toman las variables

$$x = v_{C1}/B_p, \quad y = v_{C2}/B_p, \quad z = i_L/(B_p G), \quad \tau = tG/C_2$$

$$a = RG_a, \quad b = RG_b, \quad \alpha = C_2/C_1, \quad \beta = C_2 R^2/L,$$

el circuito de Chua puede escribirse en forma adimensional como se presenta a continuación [14]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha (y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

donde α, β son constantes y el diodo de Chua se representa por la función por partes:

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(b-a)(|x+1| - |x-1|) = \begin{cases} bx - (a-b) & \text{si } x \leq -1 \\ ax & \text{si } |x| \leq 1 \\ bx + (a-b) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Cabe señalar que las ecuaciones que rigen el circuito son simétricas con respecto al origen, es decir, son invariantes bajo la transformación $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$.

En el estudio cualitativo del sistema no lineal 3.1.1, en primera instancia debemos encontrar los puntos de equilibrio

$$p_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \text{ tales que } \begin{bmatrix} f_1(x_e) \\ f_2(y_e) \\ f_3(z_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y posteriormente analizar la estabilidad de éstos a través de la caracterización de los valores propios asociados a la matriz Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio.

Para ello consideramos tres casos según la función definida por partes $f(x)$:

- **Caso 1** Para $x \in (-\infty, -1]$ tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \alpha [y_e - x_e - bx_e + (a-b)] &= 0 \\ x_e - y_e + z_e &= 0 \\ -\beta y_e &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que el punto de equilibrio es

$$p_{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{1+b} \\ 0 \\ -\frac{a-b}{1+b} \end{bmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Además, la matriz Jacobiana asociada, evaluada en el punto p_{e_1} es:

$$J_1(p_{e_1}) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Caso 2** Para $x \in [1, \infty)$ tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \alpha [y_e - x_e - bx_e - (a - b)] &= 0 \\ x_e - y_e + z_e &= 0 \\ -\beta y_e &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que el punto de equilibrio es

$$p_{e_2} = \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{1+b} \\ 0 \\ \frac{a-b}{1+b} \end{bmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Además, la matriz Jacobiana asociada, evaluada en el punto p_{e_2} es:

$$J_2(p_{e_2}) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Caso 3** Para $x \in [-1, 1]$ tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \alpha [y_e - x_e - ax_e] &= 0 \\ x_e - y_e + z_e &= 0 \\ -\beta y_e &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que el punto de equilibrio es

$$p_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Además, la matriz Jacobiana asociada, evaluada en el punto p_{e_3} es:

$$J_3(p_{e_3}) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+a) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que el factor no lineal $f(x)$ está presente únicamente en la primer ecuación del sistema 3.1.1, lo cual hace que en las matrices Jacobianas encontradas anteriormente solo aparezcan los parámetros constantes α, β, a y b . Esto ha llevado a que el estudio de la estabilidad sea más robusto cambiando los parámetros.

En general, para el estudio de la estabilidad podemos expresar el sistema linealizado de 3.1.1 como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x - x_{p_e} \\ y - y_{p_e} \\ z - z_{p_e} \end{pmatrix}, \quad (3.1.5)$$

donde L es la matriz Jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio p_e dada por:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{p_e} = \begin{bmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}_{p_e}, \quad (3.1.6)$$

donde c es:

$$c = \begin{cases} b + 1 & \text{para } x \geq 1 \\ b + 1 & \text{para } x \leq -1 \\ a + 1 & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Es claro que la dinámica en el sistema no lineal de Chua se ve modificada según cambien los parámetros α y β , así como las condiciones iniciales. Por ejemplo, si consideramos los

valores de $\alpha = 1, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$ y las condiciones iniciales $x_0 = 0.5, y_0 = 0.1$ y $z_0 = 0$, entonces

$$L = \begin{bmatrix} -\alpha(a+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix},$$

cuyos valores propios (calculados en MatLab) son:

$$\lambda_1 \approx -0.509479 + 3.69254i$$

$$\lambda_2 \approx -0.509479 - 3.69254i$$

$$\lambda_3 \approx 0.288957.$$

A continuación se muestra distintas simulaciones, tomando el parámetro $\alpha \in [1, 11]$, el valor fijo $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$ y las condiciones iniciales $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.1$ y $z_0 = 0$.

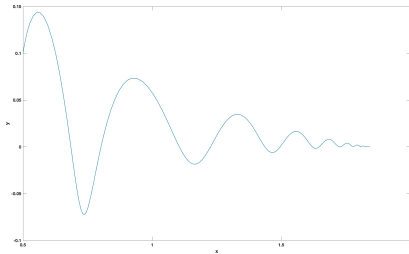
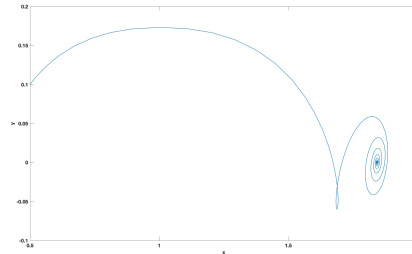
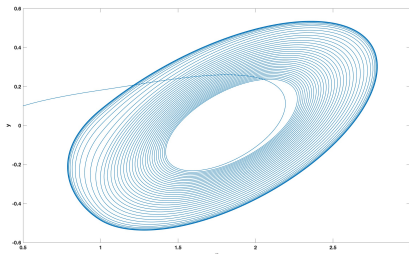
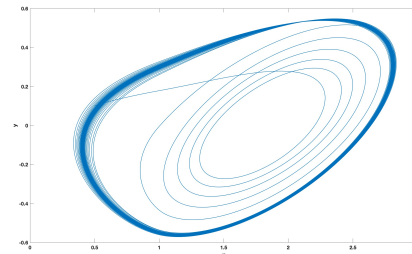
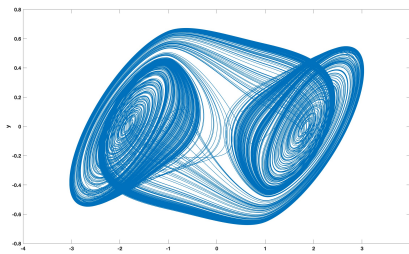
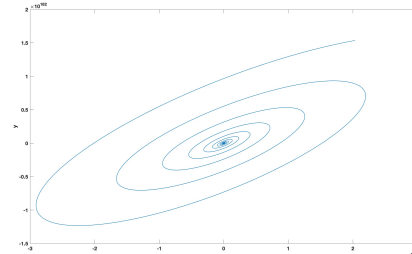
(a) $\alpha = 1$.(b) $\alpha = 3.9$.(c) $\alpha = 6$.(d) $\alpha = 7.0.1$.(e) $\alpha = 9.8$.(f) $\alpha = 11$.

Figura 3.3: Evolución de la dinámica en el circuito de Chua, variando solamente $\alpha \in [1, 11]$. En todas las simulaciones se consideró $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$ y las condiciones iniciales $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.1$ y $z_0 = 0$.

Podemos observar que para $\alpha = 9.8, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$ y las condiciones iniciales $x_0 = 0.5, y_0 = 0.1$ y $z_0 = 0$, el modelo de Chua presenta un comportamiento caótico. De modo que, si tomamos los mismos valores de α, β, a y b pero cambiando las condiciones iniciales se tienen los distintos comportamientos del modelo de Chua. En la figura 3.4 se puede ver más a detalle la sensibilidad a las condiciones iniciales. Además podemos ver que las trayectorias de las distinta simulaciones se concentran en las mismas regiones del plano fase.

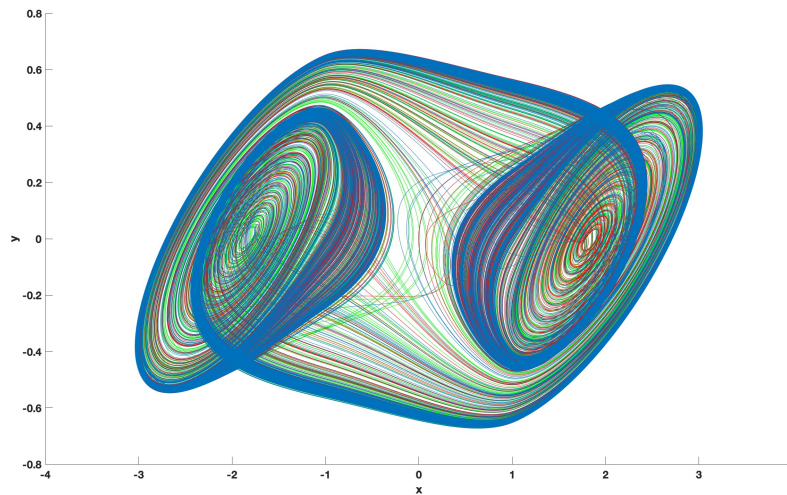


Figura 3.4: Circuito de Chua condiciones iniciales, verde $(0.5, 0.1, 0)$, rojo $(0.5, 0.1, 0.1)$ y azul $(0.5, 0.2, 0.2)$.

3.2. Sincronización del caos

En este apartado nos concentraremos en el problema de la sincronización entre sistemas caóticos idénticos, es decir, cuando dos o más circuitos caóticos tienen la misma trayectoria caótica.

Para comenzar, consideremos el sistema caótico autónomo en el cual la evolución temporal está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{u} = F(u), \quad (3.2.1)$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$, F es un campo vectorial definido como $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. El esquema de Pecora y

Carroll consiste en suponer que el sistema dinámico 3.2.1 puede ser dividido en los siguientes dos subsistemas:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= G(v, w) \\ \dot{w} &= H(v, w),\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

donde $v = (u_1, \dots, u_m)$, $w = (u_{m+1}, \dots, u_n)$, $G = (F_1(u), \dots, F_m(u))$ y $H = (F_{m+1}(u), \dots, F_n(u))$. Entonces, consideramos un segundo sistema dinámico (idéntico al primero) en el que las variables v se envían al subsistema

$$\dot{w}' = H(v, w').\tag{3.2.3}$$

El sistema 3.2.2 es conocido como *sistema maestro*, mientras que el subsistema 3.2.3 representa a un *sistema esclavo*. En esta situación, una señal de control u dirige la evolución del sistema maestro. La igualdad entre las trayectorias del sistema esclavo w y un duplicado w' de este $\dot{w}' = H(v, w')$ para la misma señal caótica maestra $u(t)$ es lo que se conoce como sincronización completa. El sistema esclavo es asintóticamente estable, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

donde $e(t) = \|w - w'\|$ define el *error de sincronización*, si existe sincronización completa. En otros términos, el sistema esclavo “olvida” sus condiciones iniciales, a pesar de que evoluciones en un atractor caótico. Cabe mencionar que la estabilidad en el esquema de Pecora-Carroll se sigue de la definición de caos dada por la definición 2.4.1.

Se ha demostrado que este tipo de sincronización puede ocurrir siempre que todos los exponentes de Lyapunov del sistema esclavo bajo la acción del maestro (también conocidos como exponentes condicionales de Lyapunov) sean negativos. Si $u(t)$ es una señal sincronizada, esta condición puede ser identificada. Sin embargo, en un sistema caótico, no todas las señales de control conducen a un estado sincronizado.

3.3. Sincronización de dos circuitos caóticos de Chua

En esta sección presentaremos la sincronización completa de dos circuitos de Chua, en los cuales se exhiben comportamientos caóticos.

Para ello, es necesario abordar el planteamiento matemático de un acoplamiento de dos circuitos de Chua y posteriormente hacer una comparación entre resultados numéricos.

Como hemos visto en el apartado anterior, las ecuaciones adimensionales para el circuito de Chua se pueden escribir en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y,\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

donde $f(x) = bx + \frac{1}{2}(b - a)(|x + 1| - |x - 1|)$.

Por otro lado, el sistema de Chua acoplado es un sistema dinámico no lineal que consiste en dos sistemas de Chua interconectados mediante un factor de acoplamiento, el cual no es posible encontrar la solución analítica. El primer sistema de Chua está compuesto por tres variables dinámicas x , y , y z ; mientras que al segundo sistema le asociamos las variables x' , y' y z' . Con esto es posible definir el sistema diferencia [14]:

$$\begin{aligned}p(\tau) &= x(\tau) - x'(\tau) \\ q(\tau) &= y(\tau) - y'(\tau) \\ r(\tau) &= z(\tau) - z'(\tau).\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Así el circuito de Chua acoplado es:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha (y - x - f(x)) + \delta_x (x' - x) \\
 \dot{y} &= x - y + z + \delta_y (y' - y) \\
 \dot{z} &= -\beta y + \delta_z (z' - z) \\
 \dot{x}' &= \alpha (y' - x' - f(x')) + \delta_x (x - x') \\
 \dot{y}' &= x' - y' + z' + \delta_y (y - y') \\
 \dot{z}' &= -\beta y' + \delta_z (z - z'),
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

donde δ_x, δ_y y δ_z son parámetros de acoplamiento. Los factores de acoplamiento indican la interacción entre los sistemas duplicados. Notemos que si $\delta_x = 0$, $\delta_y = 0$ y $\delta_z = 0$ entonces el sistema no está acoplado y se recuperan las ecuaciones del circuito de Chua.

Proposición 3.3.1. *Supongamos que existen valores (δ_1, δ_2) tales que $\delta_1 < \delta < \delta_2$, donde δ denota δ_x, δ_y o δ_z , y la parte real de todos los eigenvalores de las matrices*

$$\begin{bmatrix}
 -\alpha(1+a) - 2\delta_x & \alpha & 0 \\
 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\
 0 & -\beta & -2\delta_z
 \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

y

$$\begin{bmatrix}
 -\alpha(1+b) - 2\delta_x & \alpha & 0 \\
 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\
 0 & -\beta & -2\delta_z
 \end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

son negativos. Entonces la subvariedad $\{x, y, z, x', y', z' : x = x', y = y', z = z'\}$ en el espacio fase \mathbb{R}^6 del sistema 3.3.3 es estable, para cada $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$, en el caso de que todas las trayectorias de los dos sistemas se aproximan entre sí asintóticamente, independientemente de las condiciones iniciales, siempre que se encuentren en la cuenca de atracción.

Los detalles técnicos de la demostración se pueden consultar en [14]. Sin embargo, la idea general es considerar la linealización del sistema 3.3.3 a través de las matrices Jacobianas

3.3.4 y 3.3.5 para obtener el sistema

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \alpha q - \alpha p - \alpha [f(x) - f(x')] - 2\delta_x p \\ \dot{q} &= p - q + r - 2\delta_y q \\ \dot{r} &= -\beta q - 2\delta_z r,\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

de modo que se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},\tag{3.3.7}$$

donde la matriz B es de la forma como en 3.3.4 o 3.3.5. Esto con el fin de saber la estabilidad del sistema de Chua acoplado. Si la parte real de todos los valores propios de éstas matrices son negativos entonces el punto de equilibrio de 3.3.7 es estable.

Para implementar el acoplamiento bidireccional entre dos circuitos de Chua, se suelen utilizar resistencias de acoplamiento que conectan puntos equivalentes de ambos circuitos, como los nodos de voltaje. El acoplamiento puede ser resistivo, capacitivo, o inductivo, dependiendo de cómo se quiera influir en las corrientes y voltajes de los circuitos. Siguiendo con el esquema de Pecora-Carroll y con el fin de realizar experimentos numéricos en el sistema 3.3.3 se consideran los parámetros $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$ y $b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ y $x'_0 = 0.2$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$ para el sistema maestro y esclavo respectivamente.

3.3.1. Acoplamiento bidireccional en x

La configuración del esquema en la figura 3.5 muestra el acoplamiento en su forma experimental. El circuito de la izquierda representa al sistema maestro y el circuito de la derecha es el sistema esclavo. En el resto de esta sección se mantendrá esta estructura.

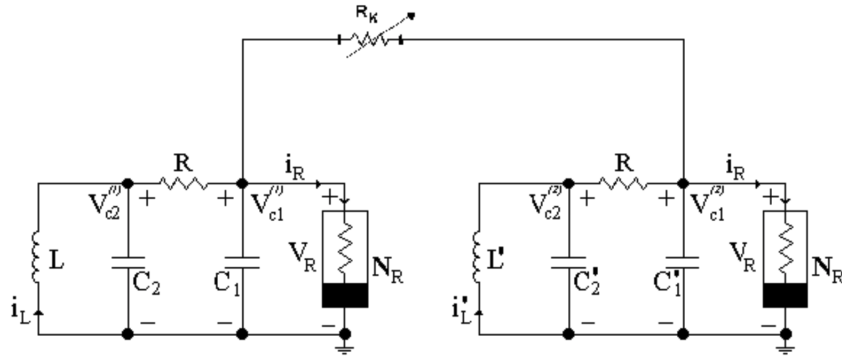


Figura 3.5: Esquema de acoplamiento bidireccional en x de dos osciladores de Chua.

De tal forma que el sistema 3.3.3 para el acoplamiento bidireccional queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha (y - x - f(x)) + \delta_x (x' - x) \\
 \dot{y} &= x - y + z \\
 \dot{z} &= -\beta y \\
 \dot{x}' &= \alpha (y' - x' - f(x')) + \delta_x (x - x') \\
 \dot{y}' &= x' - y' + z' \\
 \dot{z}' &= -\beta y',
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

donde los coeficientes de acoplamiento son considerados como $\delta_x \neq 0, \delta_y = 0 = \delta_z$. En este caso el sistema maestro corresponde a las ecuaciones de \dot{x}, \dot{y} y \dot{z} , así como el sistema esclavo asociadas a las ecuaciones \dot{x}', \dot{y}' y \dot{z}' respectivamente en el sistema 3.3.8.

Las ecuaciones del sistema diferencia son:

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= \alpha q - \alpha p - s_i \alpha p - 2\delta_x p \\
 \dot{q} &= p - q + r \\
 \dot{r} &= -\beta q,
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - s_i\alpha - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$

donde $s_i = a, b; i = 1, 2$. Además, el polinomio característico asociado al sistema anterior es:

$$\lambda^3 + (\alpha + s_i\alpha + 2\delta_2 + 1)\lambda^2 + (s_i\alpha + 2\delta_x + \beta)\lambda + \beta(\alpha + s_i\alpha + 2\delta_x) = 0 \quad (3.3.10)$$

o

$$\lambda^3 + \kappa\lambda^2 + \rho\lambda + \sigma = 0.$$

Si $\sigma > 0, \rho > 0$ y $\kappa\rho - \sigma > 0$ entonces se garantiza que las raíces del polinomio 3.3.10 son negativas. En consecuencia, el sistema diferencia es asintóticamente estable, es decir, $(p, q, r) \rightarrow (0, 0, 0)$ y por lo tanto los subsistemas se sincronizan. Experimentalmente y numéricamente se sabe que la sincronización del sistema 3.3.9 se alcanza cuando $\delta_x > 5.56$ (véase [14]).

La figura 3.6 muestra que si $\delta_x = 0$, implica que el sistema de ecuaciones 3.3.9 no está acoplado y, además, no hay sincronización de las trayectorias. Mientras que en la figura 3.7 podemos observar que cuando tomamos $\delta_x = 5.57$, las trayectorias del sistema 3.3.8 tienden al origen. Esto significa que, en el acoplamiento bidireccional en x , la evolución dinámica del error de sincronización tiende a cero; como se muestra en la figura 3.14(a).

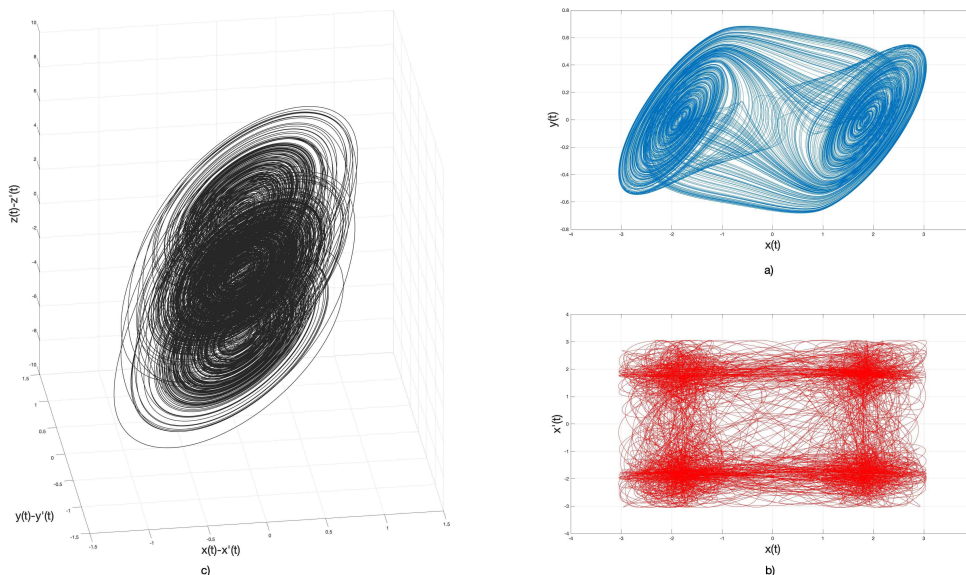


Figura 3.6: Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $x'_0 = 0.2$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$ y $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$.

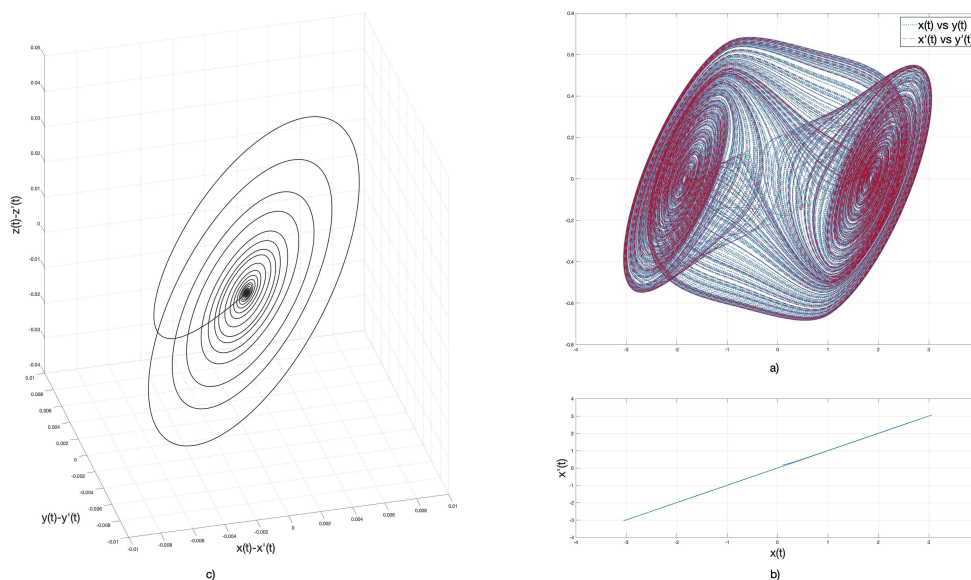


Figura 3.7: Osciladores completamente sincronizados. Tomando $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $x'_0 = 0.2$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$, $\delta_x = 5.57$ y $\delta_y = \delta_z = 0$.

3.3.2. Acoplamiento bidireccional en y

El esquema de acoplamiento en la variable y se muestra en la figura 3.8.

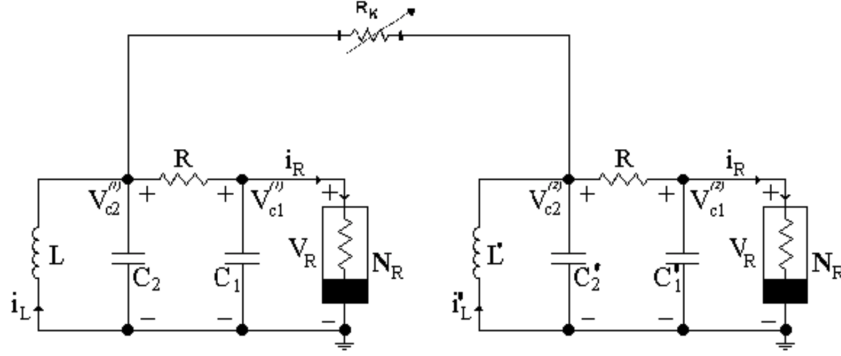


Figura 3.8: Esquema de acoplamiento bidireccional en y de dos osciladores de Chua.

Así como las ecuaciones que describen dicho esquema están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\
 \dot{y} &= x - y + z + \delta_y(y' - y) \\
 \dot{z} &= -\beta y \\
 \dot{x}' &= \alpha(y' - x' - f(x')) \\
 \dot{y}' &= x' - y' + z' + \delta_y(y - y') \\
 \dot{z}' &= -\beta y',
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

donde los coeficientes de acoplamiento son considerados como $\delta_y \neq 0, \delta_x = 0 = \delta_z$. Nuevamente, el sistema maestro son las primeras tres ecuaciones de 3.3.11 y las últimas tres son las asociadas al sistema esclavo.

Observación 3.3.1. *Desafortunadamente no podemos aplicar la Proposición 3.3.1 en este caso porque se ha encontrado que al menos una matriz en ésta proposición tiene valores propios positivos. Sin embargo, esto no implica que el sistema acoplado en y nunca se sincronizará. Experimentalmente, se sabe que el sistema estará sincronizado cuando $\delta_y > 5.5$*

y numéricamente existe evidencia de que el sistema estará sincronizado tomando a $\delta_y > 1$. Similarmente podemos decir que para el acoplamiento en z , la evidencia numérica muestra que si se toma $0.7 < \delta_z < 2$ se alcanza la sincronización. Con esto, nos limitaremos a las simulaciones numéricas tales que permitan encontrar la sincronización en los sistemas bidireccionales correspondientes (para mayor detalle sobre esta observación véase [14]).

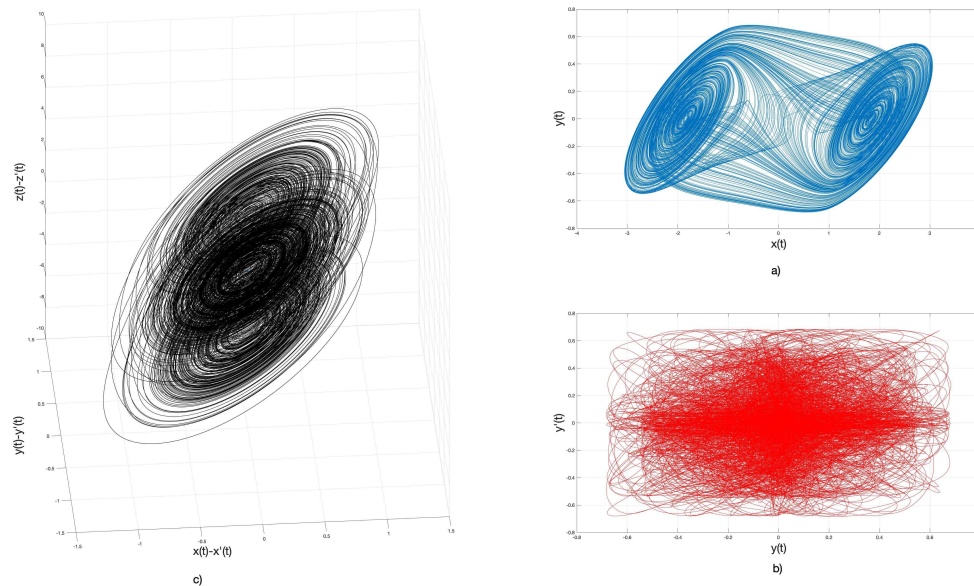


Figura 3.9: Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0$ y $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$.

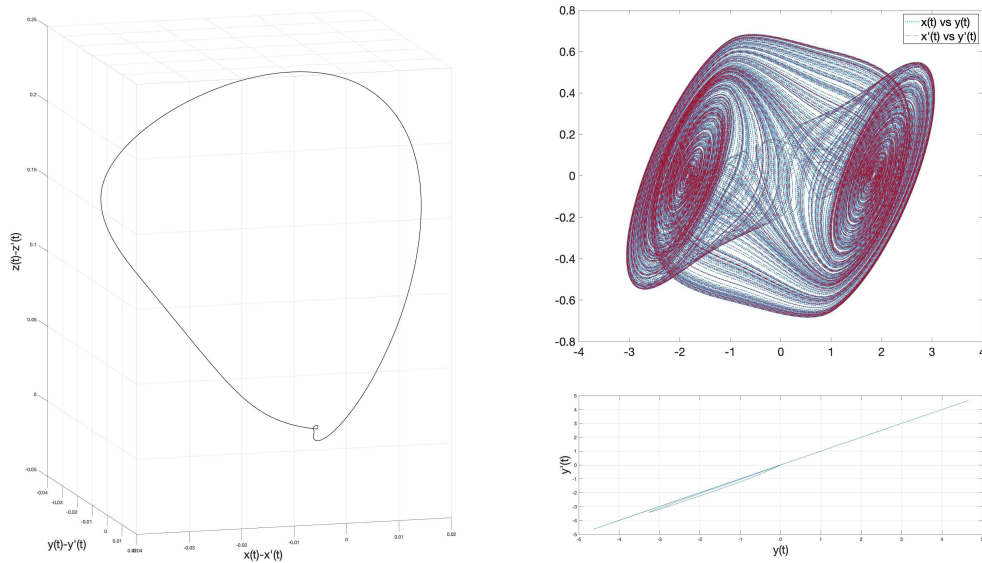


Figura 3.10: Osciladores completamente sincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0, \delta_y = 4.5$ y $\delta_x = \delta_z = 0$.

3.3.3. Acoplamiento bidireccional en z

El esquema de acoplamiento en la variable z se muestra en la figura 3.11. En este caso, sólo revisamos numéricamente el circuito mediante simulaciones.

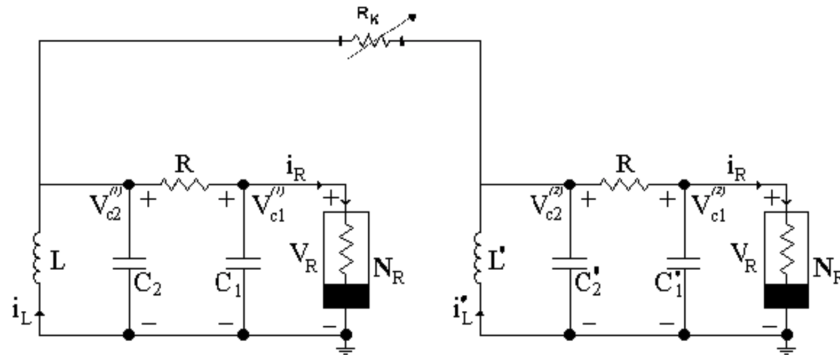


Figura 3.11: Esquema de acoplamiento bidireccional en z de dos osciladores de Chua.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\
\dot{y} &= x - y + z \\
\dot{z} &= -\beta y + \delta_z(z' - z) \\
\dot{x}' &= \alpha(y' - x' - f(x')) \\
\dot{y}' &= x' - y' + z' \\
\dot{z}' &= -\beta y' + \delta_z(z - z'), \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

donde los coeficientes de acoplamiento son considerados como $\delta_z \neq 0, \delta_x = 0 = \delta_y$. Nuevamente, el sistema maestro son las primeras tres ecuaciones de 3.3.12 y las últimas tres son las asociadas al sistema esclavo.

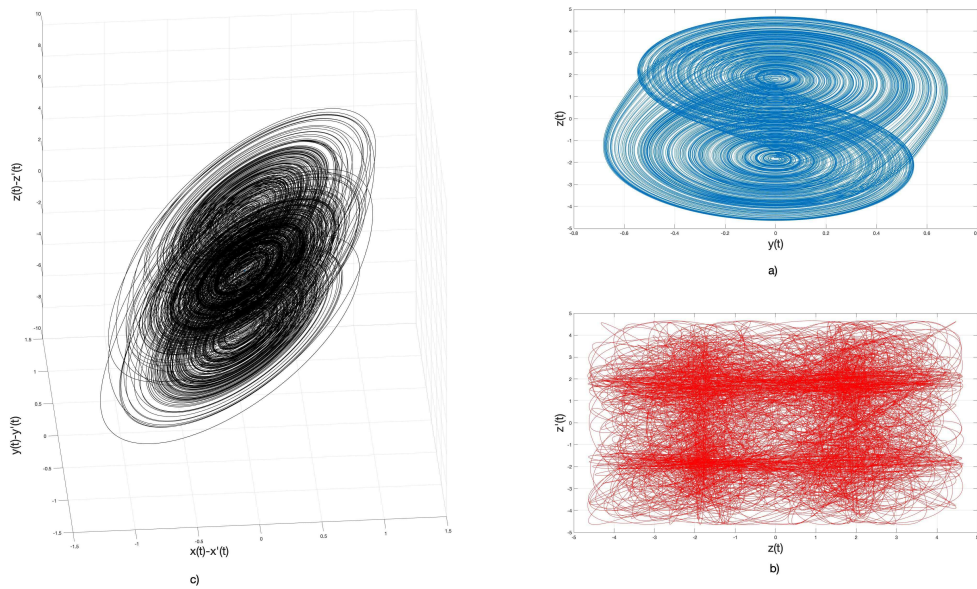


Figura 3.12: Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0, x'_0 = 0.2, y'_0 = 0, z'_0 = 0$ y $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$.

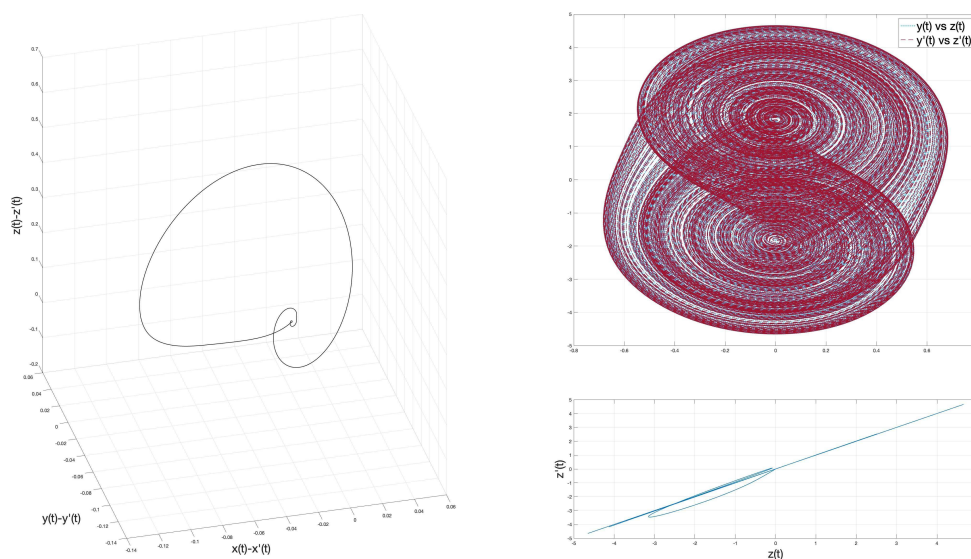


Figura 3.13: Osciladores completamente sincronizados.

Podemos observar en las simulaciones numéricas (véase figura 3.14) que la sincronización bidireccional es efectiva en las variables x , y y z . El esquema de acoplamiento bidireccional permite una mayor estabilidad y control en la sincronización de los circuitos de Chua.

Más adelante estudiaremos el modelo clásico de Chua, así como el modelo del acoplamiento de dos de ellos utilizando las herramientas del Cálculo Fraccionario.

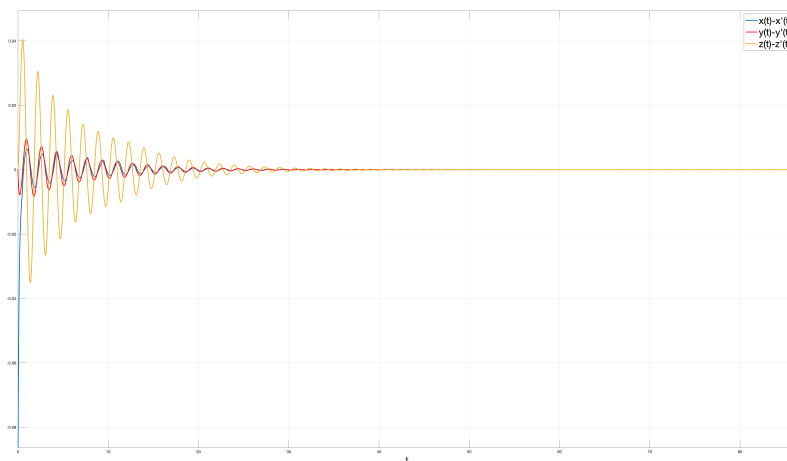
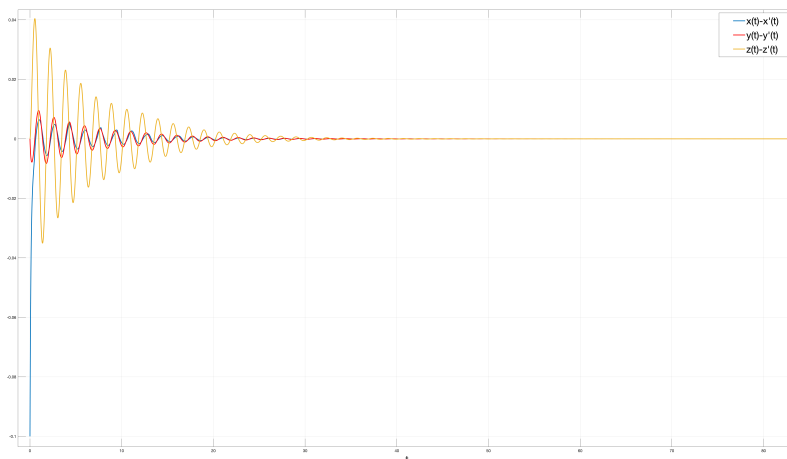
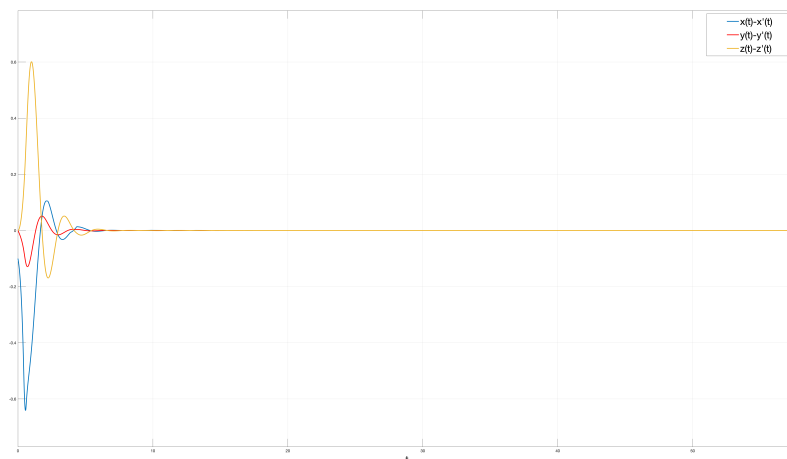
(a) Error de sincronización en el acoplamiento bidireccional en x .(b) Error de sincronización en el acoplamiento bidireccional en y .(c) Error de sincronización en el acoplamiento bidireccional en z .

Figura 3.14: Dinámica del error de sincronización para el acoplamiento bidireccional.

Capítulo 4

Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario se enfoca en el estudio de funciones que contienen derivadas e integrales de orden no entero o fraccionario. Estas funciones se llaman funciones fraccionarias. Las derivadas e integrales fraccionarias tienen propiedades diferentes a las derivadas e integrales de orden entero.

En este apartado se expondrán diversas funciones que han demostrado ser de utilidad en el análisis del cálculo fraccionario. Entre ellas, destaca la función gamma y la función de Mittag-Leffler, que se consideran fundamentales y se utilizan con frecuencia en procesos de integración y diferenciación fraccional. Asimismo, algunas de estas funciones surgen al aplicar la derivación e integración fraccional en determinadas funciones estándar, y se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias.

4.1. Funciones especiales

4.1.1. Función Gamma

La forma más simple de interpretar esta función es considerarla como una generalización del factorial para números reales.

Definición 4.1.1. *La función gamma se define en términos de la siguiente integral impropia:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (4.1.1)$$

donde $z \in \mathbb{C}$.

En particular, si elegimos $z = 1$, tenemos que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = (-e^{-t}) \Big|_0^{\infty} = 1.$$

La propiedad más conocida y utilizada tal vez sea la siguiente:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0. \quad (4.1.2)$$

Para verificar lo anterior, notemos que, de la definición (4.1.1) se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt}_{(*)} \end{aligned}$$

Integrando por partes la expresión (*)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt &= (-te^{-t}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} zt^{z-1} dt \\ &= z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \\ \therefore \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Notemos que si $z = n \in \mathbb{N}$ y usando repetidamente (4.1.2) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Gamma(1+1) &= \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1! \\ \Gamma(2+1) &= \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2! \\ \Gamma(3+1) &= \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(1) = n!.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma(n+1) = n!$.

Ejemplo 4.1.1. Calcular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2t} \rightarrow t = u^2/2 \\ dt = u du \end{array} \right] \\ &= \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-u^2/2} du.\end{aligned}$$

Como la función $e^{-u^2/2}$ es par, entonces

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2} du,$$

multiplicando y dividiendo por $\sqrt{\pi}$, podemos concluir que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2} du = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

Finalmente, como $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$ es la función de densidad de la distribución normal $N(0, 1)$ y su integral vale uno, de modo que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4.1.2. Función Beta

La función Beta resulta de una combinación de la función Γ evaluada en distintos valores.

Su definición clásica es

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx, \text{ con } \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (4.1.3)$$

Proposición 4.1.1. *La función Beta es simétrica. Es decir*

$$B(z, w) = B(w, z), \forall \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Demostración: De la relación 4.1.3 y haciendo un cambio de variable, se tiene que:

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx = \left[\begin{array}{l} u = 1 - x \Rightarrow du = -dx \\ \text{si } x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ \text{si } x = 1 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right] \\ &= - \int_1^0 (1-u)^{z-1} u^{w-1} du \\ &= - \left(- \int_0^1 (1-u)^{z-1} u^{w-1} du \right) \\ &= \int_0^1 u^{w-1} (1-u)^{z-1} du = B(w, z) \\ &\therefore B(z, w) = B(w, z). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.1.2. *La relación de la función beta con $\Gamma(z)$ y $\Gamma(w)$ está dada por*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}; \forall \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

Demostración: Por definición

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx.$$

Sea

$$g(t) = \int_0^t x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx \quad \forall t > 0. \quad (4.1.4)$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados se tiene

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx\right\}.$$

Por la convolución de funciones se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{t^{z-1} * t^{w-1}\} \\ &= \mathcal{L}\{t^{z-1}\} \mathcal{L}\{t^{w-1}\} \\ &= \frac{(z-1)!}{s^{z-1+1}} \cdot \frac{(w-1)!}{s^{w-1+1}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}. \end{aligned}$$

Si se aplica la transformada de Laplace inversa se obtiene:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}\right\},$$

como $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ es con respecto a s , entonces $\Gamma(z)\Gamma(w)$ es una constante, por lo que

$$\begin{aligned} g(t) &= \Gamma(z)\Gamma(w) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{z+w}}\right\} \\ &= \Gamma(z)\Gamma(w) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(z+w-1)!}{(z+w-1)!} \cdot \frac{1}{s^{z+w}}\right\} \\ &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{(z+w-1)!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(z+w-1)!}{s^{z+w}}\right\} \\ &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{(z+w-1)!} \cdot t^{z+w-1}. \end{aligned}$$

Como $\Gamma(z+w) = (z+w-1)!$, entonces

$$g(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \cdot t^{z+w-1}.$$

De la expresión 4.1.4:

$$g(t) = \int_0^t x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \cdot t^{z+w-1}, \quad \forall t > 0.$$

En particular, si $t = 1$ se obtiene

$$g(1) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \cdot (1)^{z+w-1}.$$

Por lo tanto

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

□

4.1.3. Función de Mittag-Leffler

Como bien se sabe, la solución más común para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es la función exponencial. Ahora, se generaliza esta función y se considera una función cuyo papel más importante es resolver ecuaciones de orden fraccionario y estabilidad de la solución.

La función de Mittag-Leffler es una función especial que generaliza la función exponencial, fue introducida por primera vez por el matemático sueco Gesta Mittag-Leffler y su definición clásica es la siguiente.

Definición 4.1.2.

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0,$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y α es una constante compleja con parte real positiva.

De igual manera, la definición de la función de Mitag-Leffler para dos parámetros que define Podlubny en [15] (véase pág. 17) es la siguiente:

Definición 4.1.3.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y $z \in \mathbb{C}$.

Observaciones 4.1.1.

1. Si $\alpha = \beta = 1$ y por la definición 4.1.2 podemos observar que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z),$$

es decir, la función Mittag-Leffler coincide con la función exponencial.

2. Si $\beta = 1$, de la definición 4.1.3 se tiene que

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_{\alpha}(z).$$

Además de generalizar la función exponencial es posible obtener otras funciones conocidas, para ciertos valores de α y β .

Ejemplo 4.1.2. Consideremos la función $\cos x$ y $\cosh x$ expresadas como series de potencias. Cuando tomamos $\alpha = 2$, $\beta = 1$ y aplicando la propiedad $\Gamma(n+1) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$ se obtiene:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = E_{2,1}(-x^2)$$

y

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = E_{2,1}(x^2).$$

En el cálculo diferencial tradicional, la derivada se define como el límite de la pendiente de una recta secante que conecta dos puntos cercanos en la gráfica de una función. Al aplicar esta idea al orden fraccionario, podemos entender los operadores fraccionarios como extensiones de esta noción de derivada.

4.2. Integrales y derivadas fraccionarias

4.2.1. Derivada e Integral de Grünwald-Letnikov

En este trabajo se presentarán las definiciones de las derivadas e integrales fraccionarias en el sentido de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo, respectivamente.

De la definición usual sabemos que

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

Además,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2t}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned}$$

De manera similar podemos considerar $f'''(t)$

$$f'''(t) = \frac{d^3f}{dt^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2f}{dt^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}.$$

En general, podemos considerar la derivada n -ésima iterada:

$$f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh),$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Para comenzar, consideremos la cantidad $\alpha, n \in \mathbb{N}$.

$$f_h^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh). \quad (4.2.1)$$

Si $\alpha \leq n$, se tiene que:

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(\alpha)}(t).$$

Para extender la expresión anterior a órdenes enteros negativos, es necesario desarrollar el coeficiente binomial de la siguiente manera.

$$\binom{-\alpha}{0} = 1 \text{ y } \binom{-\alpha}{k} = \frac{-\alpha(-\alpha-1)(-\alpha-2)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!},$$

para $\alpha, k \in \mathbb{N}$. Por conveniencia lo escribimos como

$$\left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)}{k!},$$

para $\alpha, k \in \mathbb{N}$, con el fin de tener la relación

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^\alpha \left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right].$$

Lo anterior nos permite reemplazar α por $-\alpha$ en 4.2.1, obteniendo la siguiente expresión para $\alpha, n \in \mathbb{N}$:

$$f_h^{(-\alpha)}(t) = h^\alpha \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right] f(t - kh). \quad (4.2.2)$$

Notemos que si $n \in \mathbb{N}$ es fija y si $h \rightarrow 0$, entonces la relación 4.2.2 se anula. Para que esta cantidad no se anule, debemos considerar que $n \rightarrow \infty$ cuando $h \rightarrow 0$, lo cual se logra si tomamos $h = \frac{t-a}{n}$ donde $a \in \mathbb{R}$ tal que $t > a$. Este límite se denota como

$${}_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-\alpha)}(t).$$

Definición 4.2.1. *Integral Fraccionaria de Grünwald-Letnikov.*

Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tales que $\alpha > 0$ y $t > a$. Se define la integral fraccionaria de orden α de f como

$${}_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} f(t - kh).$$

Más aún, se puede mostrar (vea [15], pág. 50) que se obtiene la igualdad

$${}_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

y si se tiene la suficiente regularidad sobre la función f , entonces integrando por partes se llega a la expresión

$${}_a\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + k + 1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t - \tau)^{-(\alpha+m)}} d\tau.$$

Definición 4.2.2. *Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov.*

Sean $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tales que $\alpha > 0$ y $t > a$. Se define la derivada fraccionaria de orden α de f como

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh).$$

4.2.2. Derivada e Integral de Riemann-Liouville

La derivada e integral fraccionaria de Grünwald-Letnikov son métodos que aproximan la derivada e integral de una función mediante diferencias finitas y sumas de Riemann, respectivamente. Estas técnicas son útiles para obtener aproximaciones de la derivada e integral de funciones que no tienen una forma analítica o son difíciles de calcular, lo que las convierte en una opción práctica en situaciones donde se requiere una estimación precisa en un punto específico.

A continuación y, a diferencia de la técnica mostrada anteriormente, se establecen algunas definiciones de derivadas fraccionarias a partir de la generalización de una integral.

De igual importancia, se emplean las integrales iteradas de forma similar a su uso en el cálculo convencional. No obstante, primero daremos lugar a integrales de orden entero y más adelante se extenderá la idea a integrales de orden fraccionario.

Comencemos con denotar a la integral de $f(x)$, desde a hasta x por:

$${}_a I_x f(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (4.2.3)$$

De la misma forma,

$${}_a I_x g(x) = \int_a^x g(x_1) dx_1$$

y si consideramos la función

$$g(x_1) = {}_a I_{x_1} f(x_1),$$

entonces

$${}_a I_x g(x) = \int_a^x g(x_1) dx_1 = \int_a^x \left(\int_a^{x_1} f(t) dt \right) dx_1.$$

De este modo, con lo anterior y usando la notación de 4.2.3 se obtiene la segunda integración de la función $f(x)$, desde a hasta x , es decir:

$$\begin{aligned} {}_a I_x^2 f(x) &= {}_a I_x g(x) = \int_a^x g(x_1) dx_1 \\ &= \int_a^x \left(\int_a^{x_1} f(t) dt \right) dx_1 \\ &= \int_a^x \int_t^x f(t) dx_1 dt \\ &= \int_a^x f(t) \int_t^x dx_1 dt \\ &= \frac{1}{1!} \int_a^x f(t)(x-t) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$${}_a I_x^2 f(x) = \frac{1}{1!} \int_a^x f(t)(x-t) dt.$$

Para la integral iterada de tercer orden se procede de manera análoga al caso anterior:

$$\begin{aligned}
{}_a I_x^3 f(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} f(t) dt dx_2 dx_1 \\
&= \int_a^x \int_a^{x_1} f(t)(x_1 - t) dt dx_1 \\
&= \int_a^x \int_t^x f(t)(x_1 - t) dx_1 dt \\
&= \int_a^x f(t) \left[\frac{(x_1 - t)^2}{2} \right] \Big|_t^x dt \\
&= \frac{1}{2!} \int_a^x f(t)(x - t)^2 dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$${}_a I_x^3 f(x) = \frac{1}{2!} \int_a^x f(t)(x - t)^2 dt.$$

Así pues, para la integral iterada de orden n se tendría:

$${}_a I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t)(x - t)^{n-1} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.2.4)$$

La expresión anterior se conoce como *Fórmula de Cauchy para integrales iteradas*.

Para generalizar la integral iterada 4.2.4 de orden $n \in \mathbb{N}$ a orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se utiliza la función gamma de manera que la integral queda expresada a través de la siguiente definición.

Definición 4.2.3. Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $a \geq 0$. La integral de Riemann-Liouville de orden α se denota como

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x - t)^{\alpha-1} dt.$$

A continuación, se presentan algunas propiedades fundamentales de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Aquí es donde se exhiben las similitudes y diferencias con el operador clásico de la integral.

Proposición 4.2.1. Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$). Entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x),$$

en casi todo punto del intervalo $[a, b]$.

Proposición 4.2.2. (*Linealidad.*) Sean $f, g \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$).

Entonces

$${}_a I_x^\alpha [\lambda f + \mu g] = \lambda {}_a I_x^\alpha f + \mu {}_a I_x^\alpha g, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Demostración: La demostración es inmediata utilizando la definición 4.2.3. □

Proposición 4.2.3. (*Semigrupo y conmutatividad.*) Sea $f \in L_1(a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$) y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) > 0$). Entonces

$${}_a I_x^\alpha ({}_a I_x^\beta f(x)) = {}_a I_x^\beta ({}_a I_x^\alpha f(x)) = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x),$$

en casi todo punto del intervalo $[a, b]$.

Demostración:

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha ({}_a I_x^\beta f(x)) &= {}_a I_x^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\rho)(x-\rho)^{\beta-1} d\rho \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau f(\rho)(\tau-\rho)^{\beta-1} d\rho \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\rho) \underbrace{\left[\int_\rho^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} d\tau \right]}_{(*)} d\rho, \quad (\text{por el Teorema de Fubini}). \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable para la integral (*) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\rho}^x (x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\rho)^{\beta-1} d\tau &= \left[\begin{array}{l} u = \frac{\tau-\rho}{x-\rho} \Rightarrow du = \frac{1}{x-\rho} d\tau \\ \tau = u(x-\rho) + \rho \\ \text{si } \tau = \rho \Rightarrow u = 0 \\ \text{si } \tau = x \Rightarrow u = 1 \end{array} \right] \\
&= \int_0^1 [(x-\rho)(1-u)]^{\alpha-1} (x-\rho)^{\beta} u^{\beta-1} du \\
&= (x-\rho)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} du \\
&= (x-\rho)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) \\
&= (x-\rho)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
{}_a I_x^{\alpha} ({}_a I_x^{\beta} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\rho) \left[\int_{\rho}^x (x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\rho)^{\beta-1} d\tau \right] d\rho \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\rho) \left[(x-\rho)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right] d\rho \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\rho)(x-\rho)^{\alpha+\beta-1} d\rho \\
&= {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$${}_a I_x^{\alpha} ({}_a I_x^{\beta} f(x)) = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x).$$

□

Para ilustrar el resultado anterior veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. Sean $f(x) = 1$, $a = 0$, $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/2$. Entonces se desea verificar que:

$${}_0 I_x^{1/2} ({}_0 I_x^{1/2} 1) = {}_0 I_x^{1/2+1/2} (1).$$

Primero calculamos

$$\begin{aligned}
 {}_0I_x^{1/2}(1) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (1)(x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \left[\begin{array}{l} u = x-t \\ \text{si } t=0 \Rightarrow u=x \\ \text{si } t=x \Rightarrow u=0 \end{array} \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 u^{-1/2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-1/2} du \\
 &= \frac{2u^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \Big|_0^x = \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}.
 \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
 {}_0I_x^{1/2}({}_0I_x^{1/2}1) &= {}_0I_x^{1/2}\left(\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \left(\frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) (x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{t^{1/2}}{\sqrt{x-t}} dt = \left[\begin{array}{l} u = \frac{t}{x} \Rightarrow t = ux, du = \frac{dt}{x} \\ \text{si } t=0 \Rightarrow u=0 \\ \text{si } t=x \Rightarrow u=1 \end{array} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{(ux)^{1/2}}{\sqrt{x-ux}} \cdot x du = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 u^{1/2} (1-u)^{-1/2} du \\
 &= \frac{2x}{\pi} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{2x}{\pi} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{2x}{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2x}{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\
 &= \frac{2x}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) (\sqrt{\pi})}{1} = x.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
 {}_0I_x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(1) &= {}_0I_x^1(1) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x (1)(x-t)^{1-1} dt \\
 &= \int_0^x 1 dt = x - 0 = x.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$${}_0I_x^{1/2}({}_0I_x^{1/2}1) = x = {}_0I_x^{1/2+1/2}(1).$$

Definición 4.2.4.

Sean $f \in L_1(a, b)$, $\alpha > 0$ y $n = [\alpha] + 1$; la función

$${}^RL\mathcal{D}_x^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n {}_aI_x^{n-\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt \right]$$

recibe el nombre de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α .

Podemos observar que si se toma a $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces $n = \alpha + 1$; así que la derivada de Riemann-Liouville coincide con la derivada clásica de orden entero.

$$\begin{aligned} {}^RL\mathcal{D}_x^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} ({}_aI_x^{(\alpha+1)-\alpha} f(x)) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} ({}_aI_x f(x)) \\ &= \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) \right] = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Notemos que la derivada de Riemann-Liouville es un operador no local. Se basa en una integral que depende de los valores que se tomen a lo largo de un intervalo, esto quiere decir que éste tipo de derivadas contienen comportamiento parcial o total de la función.

Del mismo modo que la derivada de orden entero, la derivada fraccionaria de una función existe en condiciones más restrictivas que la integral correspondiente. No es suficiente, como en el caso de ${}_aI_x^\alpha f$, que $f \in L_1$.

A continuación se presenta el concepto de continuidad absoluta, el cual es necesario para enunciar el resultado principal sobre existencia de la derivada fraccionaria (para mayores detalles técnicos véase [16, 17]).

Definición 4.2.5. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es absolutamente continua en el intervalo finito $[a, b]$, $f \in AC[a, b]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, se verifica que si

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \text{ entonces } \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

El espacio de funciones absolutamente continuas $AC[a, b]$ coincide con el espacio de primitivas de funciones Lebesgue integrables:

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = k + \int_a^x \varphi(t) dt \quad \left(\int_a^x |\varphi(t)| dt < \infty, k \in \mathbb{R} \right).$$

y en consecuencia, una función f absolutamente continua tiene por derivada a $f'(x) = \varphi(x)$ en casi todo punto del intervalo $[a, b]$ y $k = f(a)$ (véase [16], pág. 1-5).

Definición 4.2.6. Denotemos a $AC^n([a, b])$, donde $n = 1, 2, \dots$ y $[a, b]$ es un intervalo finito, al espacio de funciones $f(x)$ que tiene derivadas continuas hasta el orden $n - 1$ en $[a, b]$ tales $f^{(n-1)}(x) \in AC([a, b])$ se denota por:

$$AC^n([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ y } (D^{n-1}f(x)) \in AC([a, b]), \left(D = \frac{d}{dx} \right) \right\}.$$

En particular, $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$.

Teorema 4.2.1. Sea $f \in AC^n[a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$), $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$ y $[Re(\alpha)] + 1 \leq n$. Entonces ${}^{RL}\mathcal{D}_x^\alpha f$ existe en casi todo punto de $[a, b]$.

Demostración: Véase en [16]. □

Propiedades de la derivada de Riemman-Liouville. Las demostraciones pueden ser consultadas en [16, 17].

Proposición 4.2.4. (Linealidad). Sean $f, g \in L_1(a, b)$, $(-\infty < a < b < \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$. Entonces

$${}^{RL}\mathcal{D}_x^\alpha [\lambda f + \mu g] = \lambda {}^{RL}\mathcal{D}_x^\alpha f + \mu {}^{RL}\mathcal{D}_x^\alpha g, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Proposición 4.2.5. Sea $f \in L_1(a, b)$, $(-\infty < a < b < \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$. Entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} ({}^{RL}\mathcal{D}_x^\alpha f)(x) = f(x).$$

La derivada de Riemann-Liouville no posee ciertas características clave, como la propiedad de ser un semigrupo, que sí está presente en la integral de Riemann-Liouville de orden fraccionario como se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.6. *Sea $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) y $\alpha + \beta < n$, y sea $f \in L_1(a, b)$ y $f_{m-\alpha} \in AC^m([a, b])$. Entonces*

$$({}_a\mathcal{D}_x^\alpha {}_a\mathcal{D}_x^\beta f)(x) = ({}_a\mathcal{D}_x^{\alpha+\beta} f)(a) - \sum_{j=1}^m ({}_a\mathcal{D}_x^{\beta-j} f)(a) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}.$$

Demostración: (véase en [16]) □

Una distinción adicional, en comparación con el caso de las derivadas de orden entero es que, en términos generales, la derivada de orden fraccionario de una constante distinta de cero no resulta ser cero.

Ejemplo 4.2.2. *Sean la función $f(x) = 1$, $a = 0$ y $\alpha = \frac{1}{2}$. En este caso, $n = [1/2] + 1 = 1$. Por la definición 4.2.4 y del ejemplo 4.2.1 se tiene que:*

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}\mathcal{D}_x^{1/2}(1) &= \frac{d}{dx} ({}_0I_x^{1/2}(1)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (1)(x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{-1/2} dt \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \right) \\ &= \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto ${}_0^{RL}\mathcal{D}_x^{1/2}(1) \neq 0$.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville ha sido un componente fundamental en el desarrollo teórico del cálculo fraccionario y ha demostrado ser eficaz en aplicaciones matemáticas rigurosas. Sin embargo, cuando intentamos aplicar este concepto a la modelación matemática de fenómenos físicos reales a través de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge un desafío crucial relacionado con las condiciones iniciales, las cuales también deben ser de naturaleza fraccionaria para ser coherentes. Esto plantea la necesidad de adaptar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

4.2.3. Derivada de Caputo

La derivada fraccionaria de Caputo, por su parte, utiliza derivadas enteras como condiciones iniciales, es decir, los valores iniciales son físicamente comprensibles a la manera tradicional. Su definición representa un importante paso práctico hacia el estudio de los fenómenos físicos. Es una generalización de la derivada de Riemann-Liouville que tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema.

Definición 4.2.7. *La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ de una función f se define como*

$${}^C\mathcal{D}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt, \quad (4.2.5)$$

donde $n = [\alpha] + 1$.

A diferencia de la derivada de Riemann-Liouville, en la derivada de Caputo primero se deriva n veces y luego se integra. Esto implica que la derivada de Caputo sea más restrictiva. Además, esta definición requiere que la derivada n -ésima de $f^{(n)}$ sea integrable y que $f \in AC^n([a, b])$ siga siendo condición suficiente para asegurar la existencia de la derivada de orden α .

A su vez, la derivada de Caputo se reduce a una derivada de orden entero n cuando $\alpha \rightarrow n$, lo cual se verifica integrando por partes la expresión 4.2.5 y calculando el límite

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C\mathcal{D}_x^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(x-\alpha)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^{n-\alpha} dt \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt \\ &= f^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

lo cual es posible debido a que el término $(x-t)^{n-\alpha}$ no converge cuando $x=t$ y teniendo en cuenta que $n > \alpha$.

La siguiente proposición muestra la relación entre la derivada de Riemann-Liouville y la derivada de Caputo.

Proposición 4.2.7. *Sea $\alpha > 0$ no entero, $n = [\alpha] + 1$ y $f \in L_1(a, b)$ una función para la que existen la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, entonces*

$${}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha f(x) = {}_a^{RL} \mathcal{D}_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}.$$

De la proposición anterior se puede observar que si se toman

$$f(a) = f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

entonces la derivada fraccionaria de Caputo coincide con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

En el ejemplo 4.2.2 se mostró que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función constante es distinto de cero. En contraste, para $f(x) = 1$, $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $n = [1/2] + 1 = 1$ y usando la derivada fraccionaria de Caputo se tiene que

$${}_0^C \mathcal{D}_x^{1/2}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x f^{(1)}(t) (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} dt,$$

en este caso $f^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt}(1) = 0$. Entonces

$${}_0^C \mathcal{D}_x^{1/2}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^x (0) (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} dt.$$

Por lo tanto ${}_0^C \mathcal{D}_x^{1/2}(1) = 0$.

Retomando la comparación entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Caputo, podemos mencionar la propiedad de semigrupo a través de la siguiente proposición.

Proposición 4.2.8. (Linealidad.) *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ tales que $n = [\alpha] + 1$. Sean f y g dos funciones tal que sus derivadas fraccionarias de Caputo existan. Entonces*

$${}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha (\lambda f(x) + \gamma g(x)) = \lambda {}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha f(x) + \gamma {}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha g(x).$$

Proposición 4.2.9. (*No conmutatividad*) *La derivada fraccionaria de Caputo no conmuta, es decir,*

$${}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha ({}_a^C \mathcal{D}_x^\beta) \neq {}_a^C \mathcal{D}_x^\beta ({}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha).$$

Sin embargo, la derivada de Caputo sí satisface la propiedad de semigrupo, es decir,

$${}_a^C \mathcal{D}_x^\alpha ({}_a^C \mathcal{D}_x^\beta f(x)) = {}_a^C \mathcal{D}_x^{\alpha+\beta} f(x).$$

4.3. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

Presentaremos el teorema de existencia y unicidad para el caso de ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales (EDF) generales. No mostraremos la demostración exacta, sólo esbozaremos sus ideas principales. Para más información de los detalles técnicos puede consultarse [15, 16].

Sabemos que una ecuación diferencial de orden n es una expresión de la forma

$$y^n(t) = \frac{d^n y}{dt^n} = f[t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)],$$

donde t es la variable independiente. Y se llama problema de valor inicial a una ecuación diferencial de orden n con condiciones iniciales

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, y''(t_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

En el caso de las derivadas fraccionarias, es posible plantear una ecuación diferencial lineal de orden fraccionario con condiciones iniciales de la siguiente manera (véase [15], pág. 131):

$$\begin{aligned} {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_m} y(t) + \sum_{j=1}^{m-1} p_k(t) {}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_m-j} y(t) + p_k(t) y(t) &= f(t), \\ [{}_0\mathcal{D}_t^{\sigma_{k-1}} y(t)]_{t=0} &= b_k(t), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

donde $k = 1, \dots, m$ y $0 < t < T < \infty$.

Cuando las funciones $a_k(t)$ y $b_k(t)$ son constantes, se dice que la EDF lineal 4.3.1 es de **coeficientes constantes**. En el caso de que $b(t) = 0$, la EDF lineal 4.3.1 denomina **homogénea**.

Es natural preguntarse por las condiciones iniciales de una ecuación diferencial de orden fraccionario, de manera que, para diferentes tipos de operadores fraccionarios, como la derivada de Riemann-Liouville y la derivada de Caputo se tienen las siguientes observaciones.

Observaciones 4.3.1.

1. Utilizando la derivada de Riemann-Liouville se plantea la EDF con condiciones iniciales

$${}^a{}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t).$$

Teorema 4.3.1. (Existencia y unicidad de una EDF) Si $f(t)$ es acotada en $[0, T]$ y p_k para $k \in 0, \dots, m - 1$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $[0, T]$, entonces el problema de valores iniciales 4.3.1 tiene una única solución $y(t) \in L_1(0, T)$.

Demostración: Véase [15], página 124. □

4.3.1. Sistemas de ecuaciones fraccionarias y estabilidad

Consideremos las ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDFs) que implican la derivada de Riemann-Liouville o la derivada de Caputo.

$${}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\bar{\alpha}}x(t) = f(t, x), \quad (4.3.2)$$

con valores iniciales adecuados $x_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}]^T \in \mathbb{R}^n$ ($k = 0, 1, \dots, m - 1$), $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$, $m - 1 < \alpha_i < m \in \mathbb{Z}_+$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ${}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\bar{\alpha}}x(t) = [{}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\alpha_1}x_1(t), {}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\alpha_2}x_2(t), \dots, {}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\alpha_n}x_n(t)]^T$, $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde ${}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\alpha_i}x_i(t)$.

En particular, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, entonces la ecuación diferencial fraccionaria 4.3.2 puede ser escrita como el siguiente lineal del mismo orden:

$${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha x(t) = Ax(t). \quad (4.3.3)$$

En el caso de un sistema de ecuaciones fraccionarias lineal y autónomo con condiciones iniciales se consideran las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} {}_{t_0}\mathfrak{D}_t^\alpha x(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

En [18] se introduce la siguiente definición relacionada con la estabilidad.

Definición 4.3.1. *Se dice que el sistema 4.3.4 es*

1. *estable ssi $\forall x_0, \exists M > 0, \forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M$;*
2. *asintóticamente estable ssi $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.*

Las demostraciones de los siguientes teoremas se pueden encontrar en [19].

Teorema 4.3.2. *El sistema autónomo del mismo orden que el sistema 4.3.3 con derivada de Caputo y condiciones iniciales $x_0 = x(0)$, donde $0 < \alpha \leq 1$ es*

- *asintóticamente estable si y solo si $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$. En este caso, las componentes del estado decaen hacia 0 como a $t^{-\alpha}$.*
- *estable si y sólo si, o bien es asintóticamente estable, o bien aquellos eigenvalores críticos que satisfacen $|\arg(\text{spec}(A))| = \frac{\alpha\pi}{2}$ tienen multiplicidad geométrica uno, $\text{spec}(A)$ denota los valores propios de la matriz A .*

Teorema 4.3.3. *Supongamos que α'_i s son números racionales entre 0 y 1, para $i = 1, 2, \dots, n$. Sea M el mínimo común múltiplo de los denominadores u_i de α'_i s, donde $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}$, $(u_i, v_i) = 1$, $u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, 2, \dots, n$, y establezca $\gamma = \frac{1}{M}$. Entonces la solución cero al sistema 4.3.3 con derivada de Caputo y condiciones iniciales $x_0 = x(0)$ es:*

- *asintóticamente estable si y solo si cualquier solución cero del polinomio*

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A)$$

satisface que $|\arg(\lambda)| > \frac{\gamma\pi}{2}$, las componentes son las variables de estado $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ decaen hacia 0 como a $t^{-\alpha_1}, t^{-\alpha_2}, \dots, t^{-\alpha_n}$, respectivamente.

- estable si y solo si o bien es asintóticamente estable o bien aquellas soluciones críticas cero λ del polinomio anterior satisfacen $|\arg(\lambda)| = \gamma\pi/2$ tiene multiplicidad geométrica uno.

El análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos, que incluye ecuaciones diferenciales fraccionarias, se basa en el teorema de Hartman-Grobman, también conocido como teorema de la linealización. Según este teorema, el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal es similar al de su versión linealizada cerca de un punto de equilibrio hiperbólico. El siguiente resultado es la versión del Teorema de Hartman-Grobman en el caso de tener derivadas de orden fraccionario.

Teorema 4.3.4. *(Teorema de Hartman-Grobman para sistemas diferenciales fraccionarios)* Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n contenido en el origen, sea $f \in \mathbb{C}^1(E)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal 4.3.1. Supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene eigenvalores con parte real cero. Entonces, existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U contenido en el origen sobre un conjunto V contenido en el origen tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero tal que para cada $x_0 \in U$ y $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = E_\alpha (At^\alpha) H(x_0), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

4.3.2. Solución numérica a EDFs

En la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales, existen casos en el que la no linealidad del problema complica la búsqueda de la solución analítica. Una forma de resolver ésta dificultad es aproximar la solución al problema mediante métodos numéricos. En este sentido, en los problemas aplicados, en el trabajo de Roberto Garrappa (véase [20]), se utiliza el método numérico para calcular la solución de los sistemas de orden fraccionario con el esquema predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton [21]. Este esquema se basa en el

operador diferencial de Caputo 4.2.5 que nos permite especificar tanto condiciones iniciales tanto homogéneas y no homogéneas.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial fraccionaria:

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_x^\alpha(1)y(t) &= f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq T; \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

La solución de 4.3.5 está dada por la ecuación integral del tipo Volterra como:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} f(z, y(z)) dz. \quad (4.3.6)$$

En [21] se muestra la existencia única de la solución de 4.3.5 en algún intervalo $[0, T]$. Por lo que estamos interesados en una en una solución numérica en la rejilla uniforme $\{t_n = nh \mid n = 0, 1, \dots, N\}$ con algún entero N y tamaño de paso $h = T/N$, entonces la expresión 4.3.6 se puede reemplazar por una un forma discreta para obtener el *corrector* siguiente:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

donde

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j = 0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} \\ \quad - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n+1 \end{cases}.$$

Además, el *predictor* está dado por:

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \quad (4.3.8)$$

donde

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha). \quad (4.3.9)$$

Por último, el error de ésta aproximación es:

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = \mathcal{O}(h^P), \quad (4.3.10)$$

donde $P = \min(2, 1 + \alpha)$.

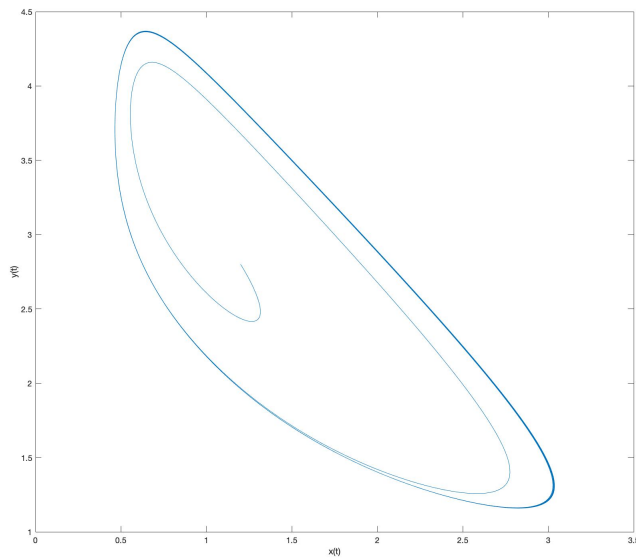
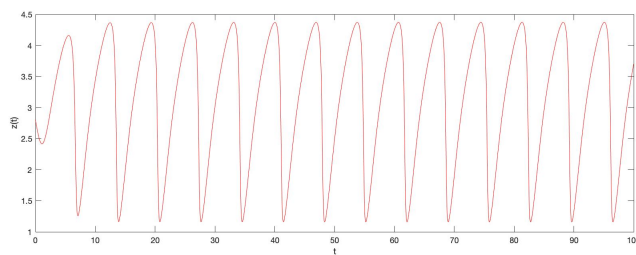
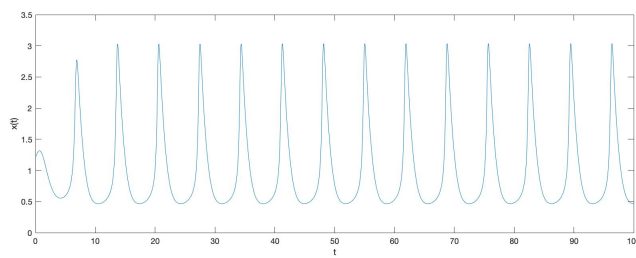
Para familiarizarnos con la implementación numérica veamos un ejemplo mostrado en [20].

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales con la derivada de Caputo y orden $\alpha = 0.7$.

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^{0.7} x(t) &= A - (B+1)x(t) + x(t)^2 z(t) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^{0.7} z(t) &= Bx(t) - x(t)^2 z(t), \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $z(t_0) = z_0$.

Sean $A = 1$, $B = 3$, con las condiciones iniciales $x_0 = 1.2$ y $z_0 = 2.8$. Aplicando el código *fde12.m* se obtienen los siguientes comportamientos de las dinámicas del sistema anterior.

(a) Dinámica de $x(t)$ contra $z(t)$.(b) Gráfica de $x(t)$ y $z(t)$ con respecto al tiempo t .

Capítulo 5

Oscilador de Chua de orden fraccionario

5.1. Modelo Chua de orden fraccionario

Un circuito de Chua de orden fraccionario es una extensión del circuito de Chua clásico. En este caso, las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario sustituyen las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento del circuito. En lugar de usar derivadas de orden entero, estas ecuaciones utilizan derivadas fraccionarias, lo que permite modelar fenómenos de memoria y dinámica compleja con comportamiento caótico.

El siguiente sistema de ecuaciones es una adaptación del modelo de Chua considerando la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\gamma \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha(y - x - f(x)) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

donde α, β son constantes y la función definida por partes

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(b-a)(|x+1| - |x-1|) = \begin{cases} bx - (a-b) & \text{si } x \leq -1 \\ ax & \text{si } |x| \leq 1 \\ bx + (a-b) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

Además, como vimos en el modelo de Chua 3.1.1 podemos analizar tanto los puntos de equilibrio como la estabilidad del sistema según sea la forma que toma la función $f(x)$. Por otro lado, las simulaciones numéricas hechas anteriormente muestran que si tomamos los valores de $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$ y $b = -0.68$, entonces el circuito de Chua presenta un comportamiento caótico. Para ser consistentes, mantendremos éstos parámetros en lo que resta de este apartado.

La idea principal es descomponer el sistema dinámico fraccionario 5.1.1 y así hacer un análisis de estabilidad por casos. El Teorema 4.3.2 garantiza la estabilidad asintótica si y sólo si $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\gamma\pi}{2}$, es decir, si $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\gamma\pi}{2}$, donde los λ_i son los valores propios a la matriz Jacobiana A .

Primero consideremos cuando $x \in (-\infty, -1)$. En ésta situación se tiene que $f(x) = bx - (a - b)$, de tal forma que se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} {}_0^C\mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha(y - x - bx + (a - b)) \\ {}_0^C\mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z \\ {}_0^C\mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Así, el punto de equilibrio del sistema anterior es

$$x_{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{1+b} \\ 0 \\ -\frac{a-b}{1+b} \end{bmatrix}. \tag{5.1.3}$$

Además, la matriz Jacobiana asociada, evaluada en el punto x_{e_1} y sustituyendo los valores de los parámetros es:

$$J_1(x_{e_1}) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(10)(1-0.68) & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico asociado a $J_1(x_{e_1})$ es:

$$p_1(\lambda) = -\lambda^3 - 4.2\lambda^2 - 8.07\lambda - 47.584. \quad (5.1.4)$$

Los valores propios asociados son:

$$\lambda_1 = 0.2298 + 3.1873i,$$

$$\lambda_2 = 0.2298 - 3.1873i,$$

$$\lambda_3 = -4.6597.$$

Notemos que:

$$|\arg(\lambda_1)| \approx 1.49882 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \text{si } \gamma < 0.95,$$

$$|\arg(\lambda_2)| \approx 1.49882 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \text{si } \gamma < 0.95,$$

$$|\arg(\lambda_3)| = \pi > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1).$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio x_{e_1} es asintóticamente estable localmente cuando el orden de la derivada satisfaga que $\gamma < 0.95$. De lo contrario, el punto de equilibrio es inestable.

De manera similar, en el caso de que $x \in (1, \infty)$. En ésta situación se tiene que $f(x) = bx + (a - b)$ de tal forma que se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha(y - x - bx - (a - b)) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Con esto, el punto de equilibrio del sistema anterior es

$$x_{e_2} = \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{1+b} \\ 0 \\ \frac{a-b}{1+b} \end{bmatrix}. \quad (5.1.6)$$

De igual forma, la matriz Jacobiana asociada, evaluada en el punto x_{e_2} y sustituyendo los valores de los parámetros es:

$$J_2(x_{e_2}) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(10)(1-0.68) & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico asociado a $J_2(x_{e_2})$ es:

$$p_2(\lambda) = -\lambda^3 - 4.2\lambda^2 - 8.07\lambda - 47.584. \quad (5.1.7)$$

Los valores propios asociados son:

$$\lambda_1 = 0.2298 + 3.1873i,$$

$$\lambda_2 = 0.2298 - 3.1873i,$$

$$\lambda_3 = -4.6597.$$

Igualmente como en el caso anterior tenemos que:

$$|\arg(\lambda_1)| \approx 1.49882 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \text{si } \gamma < 0.95,$$

$$|\arg(\lambda_2)| \approx 1.49882 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \text{si } \gamma < 0.95,$$

$$|\arg(\lambda_3)| = \pi > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1).$$

Se concluye que, el punto de equilibrio x_{e_2} es asintóticamente estable localmente cuando el

orden de la derivada satisfaga que $\gamma < 0.95$. De lo contrario, el punto de equilibrio es inestable.

Por último, consideremos $x \in [-1, 1]$ de manera que $f(x) = ax$ y el sistema asociado es.

$$\begin{aligned} {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha(y - x - ax) \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z \\ {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y. \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Así mismo, el punto de equilibrio del sistema anterior es

$$x_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1.9}$$

Además, la matriz Jacobiana asociada, evaluada en el punto x_{e_3} y sustituyendo los valores de los parámetros es:

$$J_3(x_{e_3}) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+a) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(10)(1-1.27) & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico asociado a $J_3(x_{e_3})$ es:

$$p_3(\lambda) = -\lambda^3 - 1.7\lambda^2 - 2.17\lambda + 40.149. \tag{5.1.10}$$

Los valores propios asociados son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.0739 + 3.0465i, \\ \lambda_2 &= -1.0739 - 3.0465i, \\ \lambda_3 &= 3.8477. \end{aligned}$$

Notemos que $|\arg(\lambda_3)| = 0 < \frac{\gamma\pi}{2}$. Por lo tanto, el punto de equilibrio x_{e_3} es inestable.

A continuación presentamos algunas simulaciones numéricas considerando que si $\gamma \in (0, 95)$ el sistema 5.1.1 presenta estabilidad en dos de sus puntos de equilibrio.

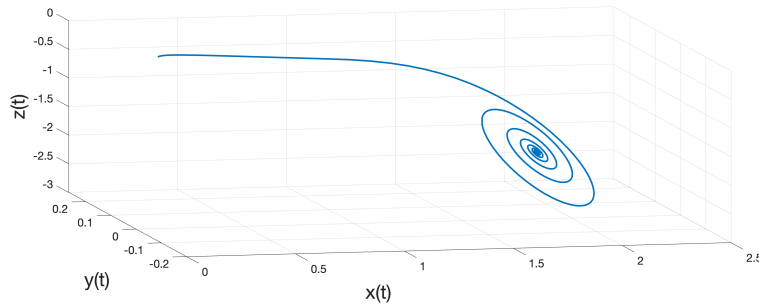
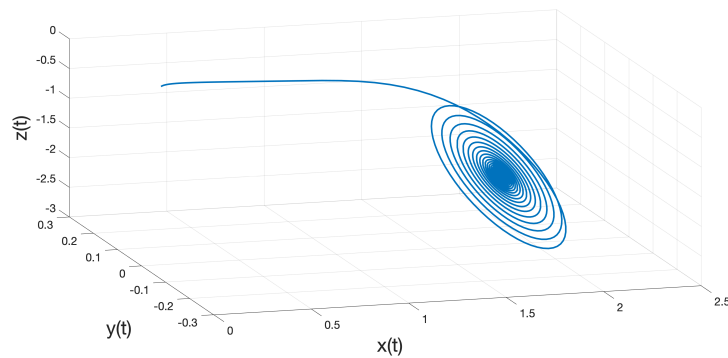
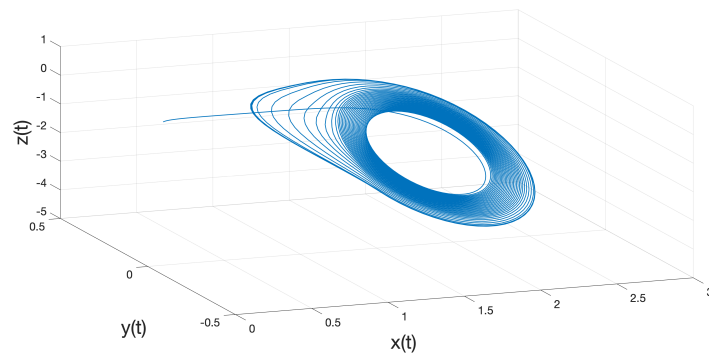
(a) $\gamma = 0.9$.(b) $\gamma = 0.94$.(c) $\gamma = 0.9555555556$.

Figura 5.1: Dinámica del oscilador de Chua fraccionario tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1, y_0 = 0, z_0 = 0$ y distintos valores en el orden de la derivada fraccionaria de Caputo en los cuales se presenta estabilidad.

Por otro lado, si consideramos al orden de la derivada $\gamma \in (0.95, 1)$, el sistema 5.1.1 presenta un comportamiento caótico como se muestra en las siguientes figuras.

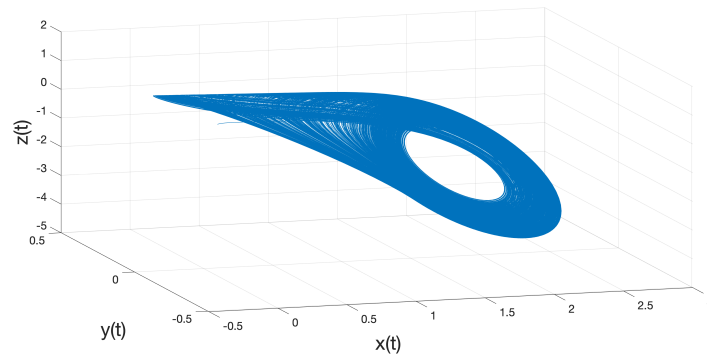
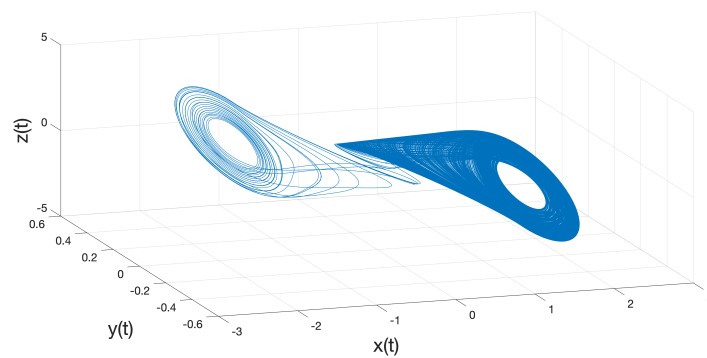
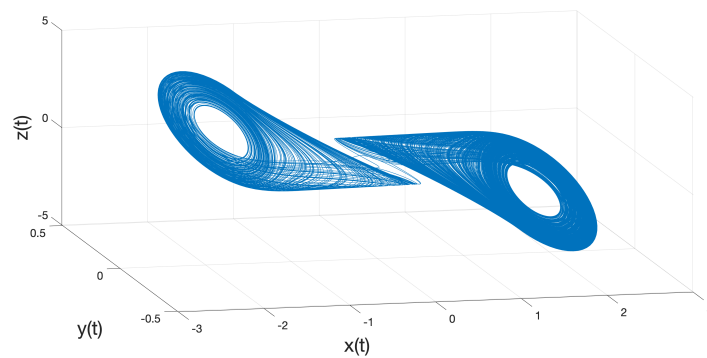
(a) $\gamma = 0.9645$.(b) $\gamma = 0.9648465$.(c) $\gamma = 0.96484583$.

Figura 5.2: Dinámica del oscilador de Chua fraccionario tomando $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ y distintos valores en el orden de la derivada fraccionaria de Caputo, $\gamma \in (0.96, 0.97)$.

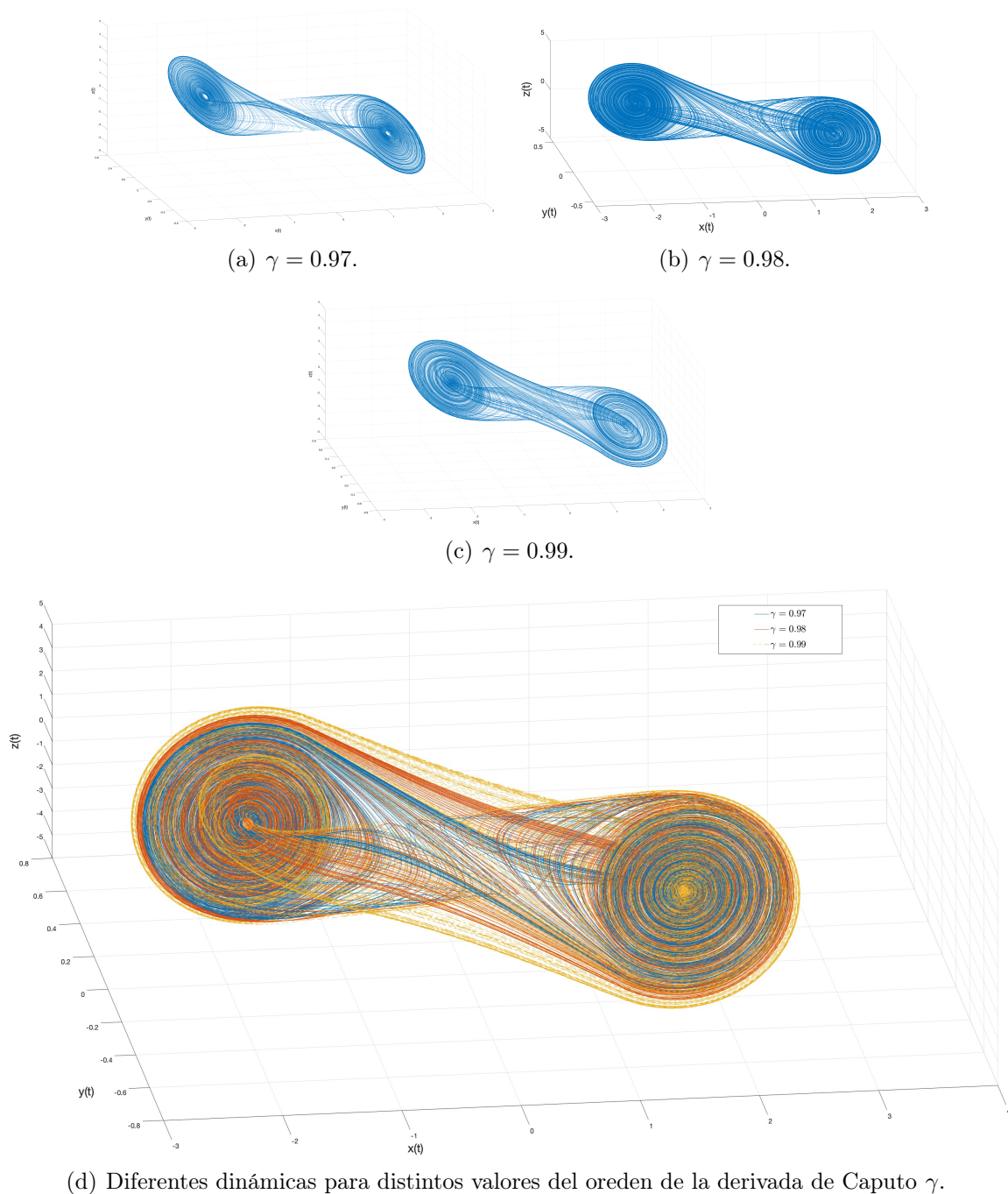


Figura 5.3: Dinámica del oscilador de Chua fraccionario tomando $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ y distintos valores en el orden de la derivada fraccionaria de Caputo en los cuales se presenta inestabilidad.

5.2. Sincronización de dos osciladores de Chua fraccionarios

En este apartado nos concentraremos en estudiar la sincronización de dos circuitos de Chua fraccionarios, tomando la derivada de Caputo de orden γ (donde $\gamma \in (0, 1)$). Como vimos en la sección 3.3, la sincronización de dos circuitos de Chua se realiza de forma exitosa siguiendo el esquema de Pecora-Carroll, que bajo ciertas condiciones en los parámetros, se presenta comportamiento caótico. Continuando con este esquema, se plantean las ecuaciones fraccionarias que describen el acoplamiento de los sistemas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha(y - x - f(x)) + \delta_x(x' - x) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z + \delta_y(y' - y) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y + \delta_z(z' - z) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x' &= \alpha(y' - x' - f(x')) + \delta_x(x - x') \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y' &= x' - y' + z' + \delta_y(y - y') \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z' &= -\beta y' + \delta_z(z - z'),
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

donde $f(x)$ y $f(x')$ son funciones definidas como en 5.1.1.

Nuevamente, y en lo que resta de ésta sección, las primeras tres ecuaciones corresponden al sistema maestro y las tres restantes al sistema esclavo.

Consideremos el sistema diferencia:

$$\begin{aligned}
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= \alpha q - \alpha p - \alpha[f(x) - f(x')] - 2\delta_x p \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - q + r - 2\delta_y q \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q - 2\delta_z r,
 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

donde $p(t) = x(t) - x'(t)$, $q(t) = y(t) - y'(t)$, $r(t) = z(t) - z'(t)$, condiciones iniciales $p(0) =$

$x(0) - x'(0), q(0) = y(0) - y'(0), r(0) = z(0) - z'(0)$ y puntos de equilibrio

$$x_{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{1+b} \\ 0 \\ -\frac{a-b}{1+b} \end{bmatrix}, x_{e_2} = \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{1+b} \\ 0 \\ \frac{a-b}{1+b} \end{bmatrix} \text{ y } x_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema anterior se puede escribir en su forma linealizada como:

$$\begin{bmatrix} {}^C_0\mathcal{D}_t^\gamma p \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\gamma q \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\gamma r \end{bmatrix} = C_i \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (*)$$

donde

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\alpha(1+a) - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}$$

o

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}.$$

con C_1 (evaluada en los puntos x_{e_1} y x_{e_2}) y C_2 (evaluada en x_{e_3}) las matrices Jacobianas asociadas.

Observación 5.2.1. *Garantizar la estabilidad asintótica del sistema diferencia 5.2.2 implica la sincronización de dos circuitos de Chua acoplados 5.2.1. Esto se debe a que la estabilidad asintótica asegura que las soluciones del sistema convergen hacia un punto de equilibrio, lo que permite que los circuitos se sincronicen en su comportamiento dinámico.*

Además, se cuenta con el Teorema de Hartman-Grobman, el cual proporciona una conexión entre el sistema no lineal y su versión linealizada. Este resultado describe que el comportamiento cualitativo del sistema no lineal fraccionario cerca del origen (alrededor del punto de equilibrio x_e) es equivalente al del sistema lineal fraccionario en un entorno local. Esto implica que, cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, la dinámica del sistema no

lineal puede ser estudiada a través de su aproximación linealizada.

La observación anterior resulta razonable a partir de las definiciones 2.4.1 y 4.3.1, con esto, es posible centrar nuestro estudio en el punto de equilibrio x_{e3} , que es el vector cero. En otras palabras, estudiamos que si el sistema diferencia es asintóticamente estable en el origen entonces las diferencia de las dinámicas del sistema maestro y el sistema esclavo se sincronizan. Es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t)\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x'(t)\| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t)\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y'(t)\| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|r(t)\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - z'(t)\| = 0.\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

En este trabajo nos limitaremos a seguir manteniendo ciertas condiciones iniciales y valores de los parámetros para facilitar las simulaciones numéricas. El objetivo es que haya un punto de partida consistente entre metodologías, con el propósito de considerar parámetros específicos y factores de acoplamiento con los cuales hemos revisado que es posible la sincronización en el circuito de Chua clásico. Además se expondrán a continuación las extensiones de los sistemas fraccionarios asociados a un acoplamiento bidireccional en términos del factor δ_x , δ_y o δ_z .

5.2.1. Acoplamiento bidireccional en x (caso fraccionario)

Consideremos dos circuitos de Chua, los cuales interactúan mutuamente a través del factor δ_x , siendo $\delta_y = \delta_z = 0$. Por lo que el sistema bidireccional en x es:

$$\begin{aligned}
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha(y - x - f(x)) + \delta_x(x' - x) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x' &= \alpha(y' - x' - f(x')) + \delta_x(x - x') \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y' &= x' - y' + z' \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z' &= -\beta y'.
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Así mismo, el sistema diferencia asociado es:

$$\begin{aligned}
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= \alpha q - \alpha p - \alpha[f(x) - f(x')] - 2\delta_x p \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - q + r \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q.
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Y cuya linealización entorno al origen se escribe como:

$$\begin{aligned}
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= [-\alpha(1 + a) - 2\delta_x]p + \alpha q \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - q + r \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q.
 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Tomando $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$ y $\delta_x = 5.57$ se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha(1 + a) - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.44 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico asociado a la matriz Jacobiana A es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 9.44\lambda^2 - 13.31\lambda - 125.503.$$

Valores propios asociados al polinomio anterior :

$$\lambda_1 \approx -9.4386,$$

$$\lambda_2 \approx -0.000701192 + 3.6467i,$$

$$\lambda_3 \approx -0.000701192 - 3.6467i.$$

Ahora calculamos el valor absoluto del argumento de cada uno de los valores propios encontrados anteriormente.

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1),$$

$$|\arg(\lambda_2)| \approx 1.570988608 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1),$$

$$|\arg(\lambda_3)| \approx 1.570988608 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1).$$

Notemos que la parte real de los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 es distinta de cero. Según la extensión del Teorema de Hartman-Grobman 4.3.4 podemos entender el comportamiento local del sistema no lineal fraccionario 5.2.5 a través del sistema linealizado fraccionario 5.2.6.

Por otra parte, como $|\arg(\lambda_1)| > \frac{\gamma\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| > \frac{\gamma\pi}{2}$ y $|\arg(\lambda_3)| > \frac{\gamma\pi}{2} \quad \forall \gamma \in (0, 1)$ satisface la condición necesaria del Teorema 4.3.2 entonces podemos garantizar la estabilidad asintótica en el origen del sistema 5.2.6. Por lo tanto, el acoplamiento bidireccional en x presenta sincronización.

Si consideramos las condiciones iniciales cerca del origen; digamos $(x(0), y(0), z(0)) = (0.06, 0.06, 0.06)$ y $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (0.05, 0.05, 0.05)$, manteniendo los parámetros $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$ y el factor de acoplamiento $\delta_x = 5.57$ se realizan las siguientes simulaciones:

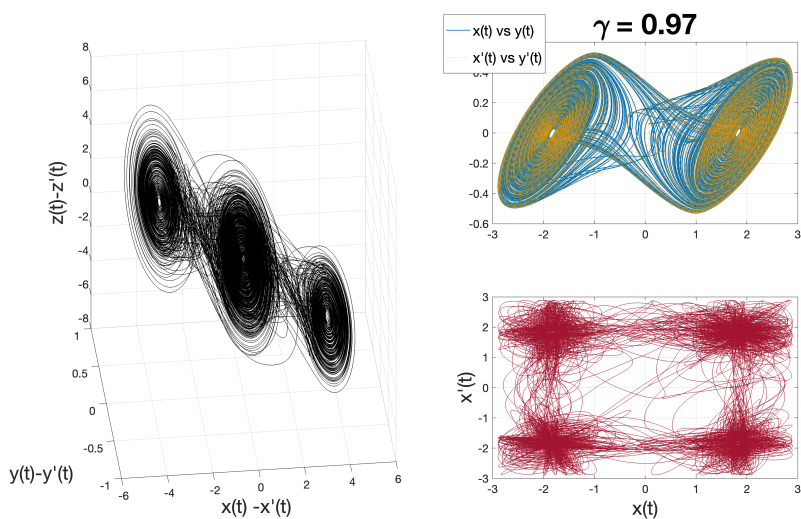


Figura 5.4: Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.97$.

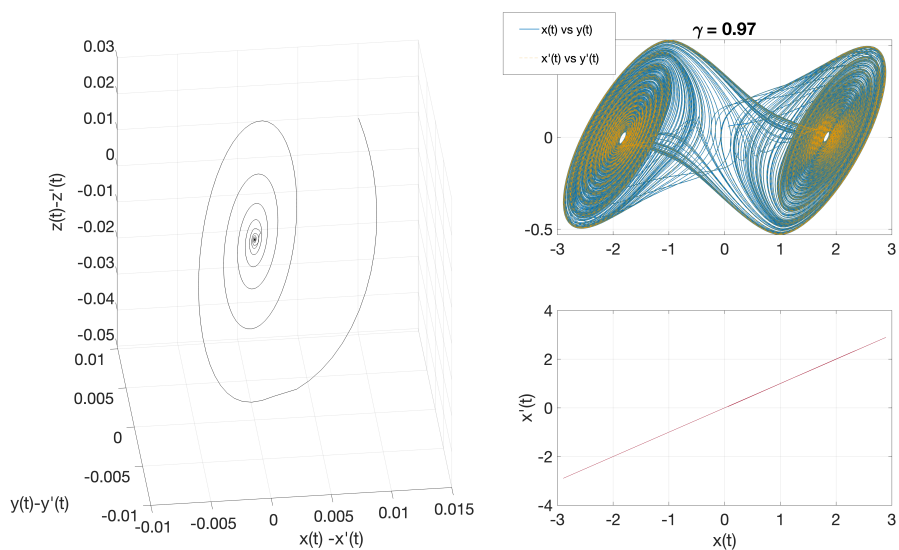


Figura 5.5: Osciladores sincronizados. Tomando $\delta_x = 5.57$, $\delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.97$.

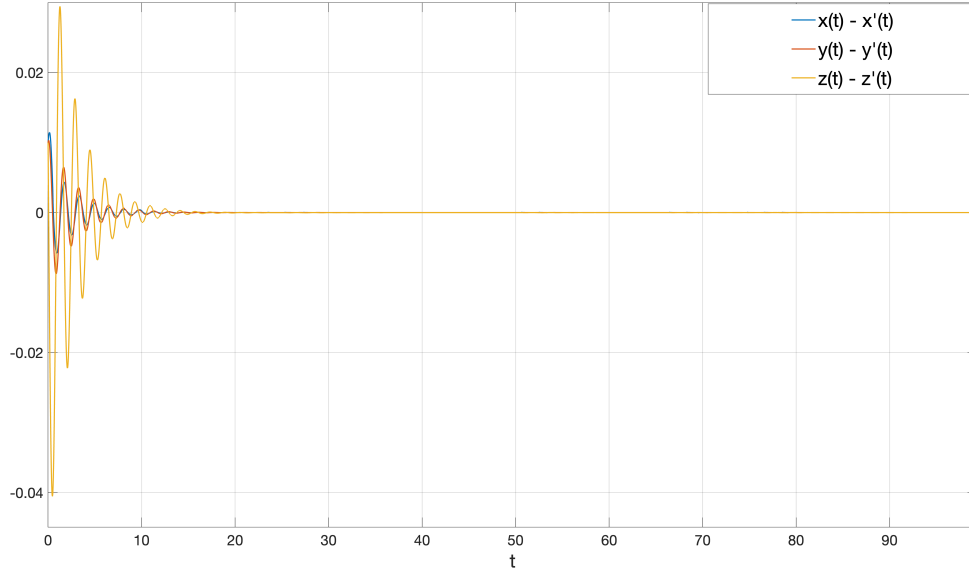


Figura 5.6: Dinámica de la diferencia de valores entre el sistema maestro y el sistema esclavo.

En la Figura 5.6 podemos observar que la diferencia entre las dinámicas del sistema tienden a cero, esto muestra la sincronización completa entre dos circuitos de Chua acoplados bidireccionalmente en x .

5.2.2. Acoplamiento bidireccional en y (caso fraccionario)

En este caso, escribimos las ecuaciones correspondientes al acoplamiento bidireccional en y a partir del sistema 5.2.1.

$$\begin{aligned}
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha (y - x - f(x)) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z + \delta_y (y' - y) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x' &= \alpha (y' - x' - f(x')) \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y' &= x' - y' + z' + \delta_y (y - y') \\
 {}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z' &= -\beta y'.
 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

De la misma manera, el sistema diferencia asociado es:

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= \alpha q - \alpha p - \alpha [f(x) - f(x')] \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - q + r - 2\delta_y q \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q.
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Y cuya linealización en torno al origen se escribe como:

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= -\alpha(1+a)p + \alpha q \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - (1+2\delta_y)q + r \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q.
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Tomando $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$ y $b = -0.68$, $\delta_y = 4.5$

$$B = \begin{bmatrix} -\alpha(1+a) & \alpha & 0 \\ 1 & -1-2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 & 10 & 0 \\ 1 & -10 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}.$$

También, el polinomio característico asociado a B es:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 7.3\lambda^2 + 22.13\lambda + 40.149.$$

Y cuyos valores propios asociados al polinomio anterior son:

$$\lambda_1 \approx -9.22684,$$

$$\lambda_2 \approx 3.26114,$$

$$\lambda_3 \approx -1.3343.$$

Además calculamos el valor absoluto del argumento de cada uno de los valores propios

encontrados anteriormente.

$$\begin{aligned}
 |\arg(\lambda_1)| &= \pi > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1), \\
 |\arg(\lambda_2)| &= 0 < \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1), \\
 |\arg(\lambda_3)| &= \pi > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

Podemos observar que $|\arg(\lambda_2)| = 0 < \frac{\gamma\pi}{2}$, $\forall \gamma \in (0, 1)$, lo cual indica, según el Teorema 4.3.2, que el sistema 5.2.9 no es asintóticamente estable. Por lo tanto, no es posible la sincronización completa del sistema acoplado bidireccionalmente en y .

La Figura 5.7 muestra la dinámica de dos circuitos de Chua desacoplados, es decir, tomando el factor de acoplamiento $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$.

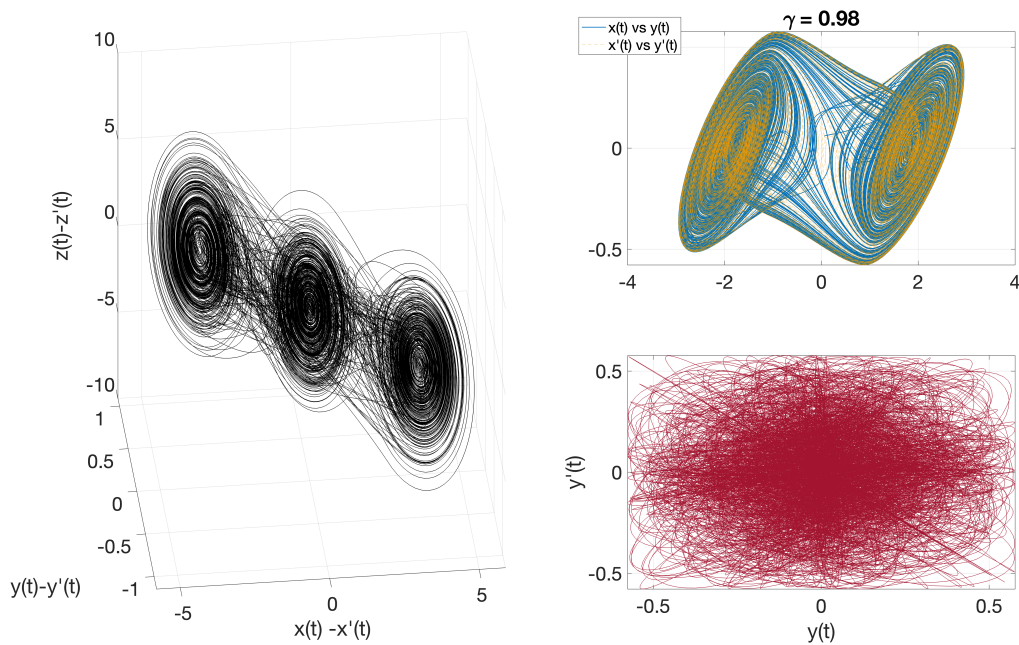


Figura 5.7: Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\delta_x = 0, \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.98$.

La Figura 5.8 muestra la evolución del sistema con un factor de acoplamiento $\delta_y = 4$. Con esto podemos observar que no hay una sincronización completa. En general, no es posible garantizar que la diferencia de las dinámicas entre el sistema maestro y el sistema esclavo tiendan a cero, esto lo podemos ver en la Figura 5.9.

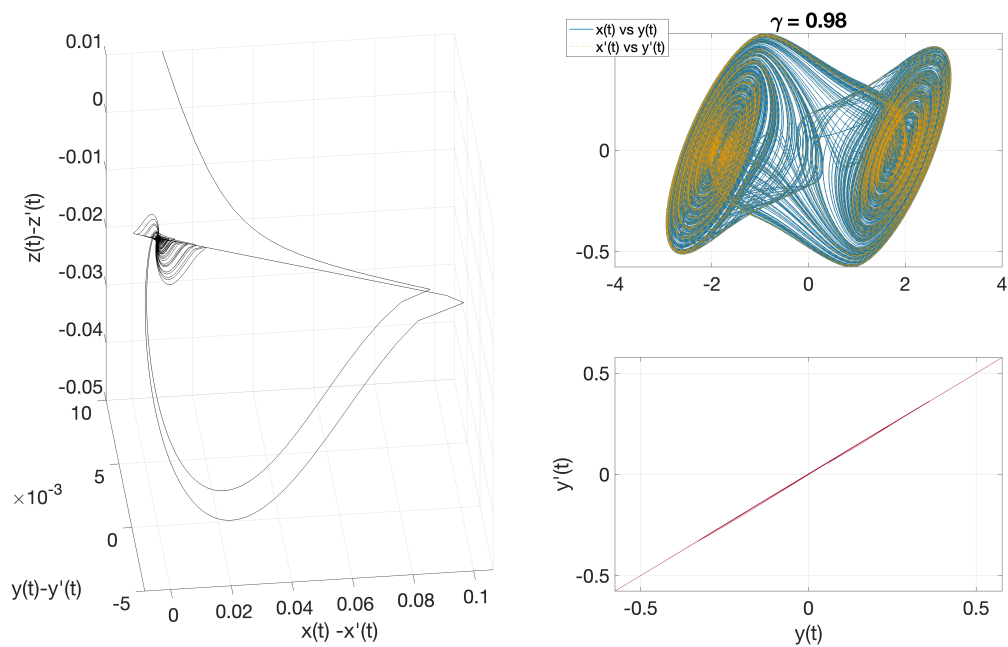


Figura 5.8: Osciladores sincronizados parcialmente. Tomando $\delta_x = 0, \delta_y = 4, \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.98$.

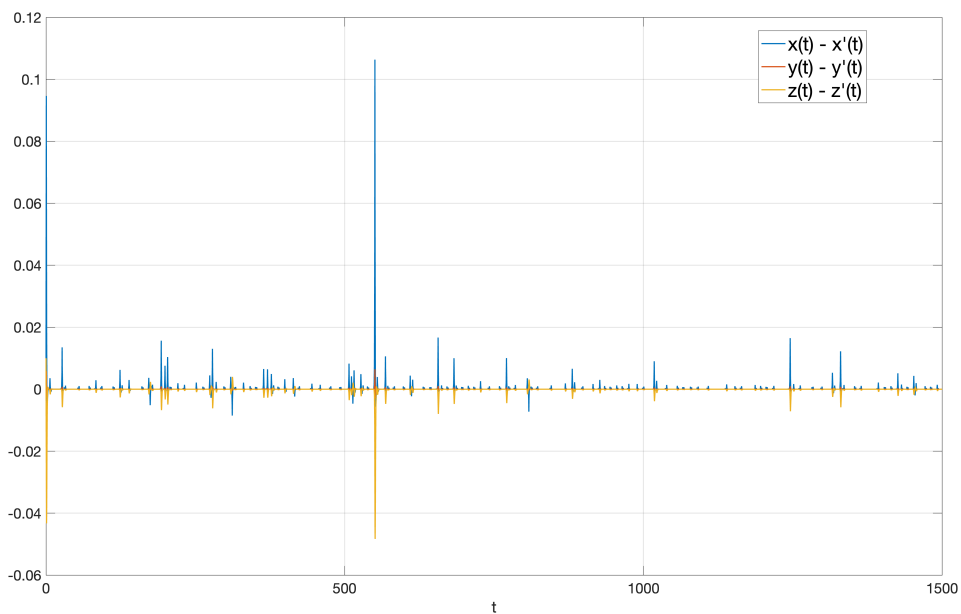


Figura 5.9: Comportamiento de la dinámica del sistema diferencia 5.2.8.

5.2.3. Acoplamiento bidireccional en z (caso fraccionario)

Similarmente escribimos las ecuaciones correspondientes al acoplamiento bidireccional en z a partir del sistema 5.2.1.

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x &= \alpha (y - x - f(x)) \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y &= x - y + z \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z &= -\beta y + \delta_z (z' - z) \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma x' &= \alpha (y' - x' - f(x')) \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma y' &= x' - y' + z' \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma z' &= -\beta y' + \delta_z (z - z').
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

De la misma manera, el sistema diferencia asociado es:

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= \alpha q - \alpha p - \alpha [f(x) - f(x')] \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - q + r \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q - 2\delta_z r.
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Y cuya linealización se escribe como:

$$\begin{aligned}
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma p &= -\alpha(1 + a)p + \alpha q \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma q &= p - q + r \\
{}_0^C \mathcal{D}_t^\gamma r &= -\beta q - (1 + 2\delta_z)r.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Tomando $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27$ y $b = -0.68, \delta_z = 1$

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha(1+a) & \alpha & 0 \\ 1 & & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & -2 \end{bmatrix}.$$

Cuyo polinomio característico asociado a C es:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 0.3\lambda^2 + 1.23\lambda + 65549.$$

Y valores propios asociados al polinomio anterior:

$$\lambda_1 \approx 4.033660,$$

$$\lambda_2 \approx -2.166833 + 3.39932i,$$

$$\lambda_3 \approx -2.166833 - 3.39932i.$$

Nuevamente calculamos el valor absoluto del argumento de cada uno de los valores propios encontrados anteriormente.

$$|\arg(\lambda_1)| = 0 < \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1),$$

$$|\arg(\lambda_2)| \approx 2.13828 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1),$$

$$|\arg(\lambda_3)| \approx 2.13828 > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1).$$

Podemos observar que $|\arg(\lambda_1)| = 0 < \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \forall \gamma \in (0, 1)$ lo cual indica, según el Teorema 4.3.2, que el sistema 5.2.12 no es asintóticamente estable. Por lo tanto, no es posible la sincronización completa del sistema acoplado bidireccionalmente en z .

La Figura 5.10 muestra la dinámica de dos circuitos de Chua desacoplados, es decir, tomando el factor de acoplamiento $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$.

La Figura 5.11 muestra la evolución del sistema con un factor de acoplamiento $\delta_z = 1$. Con esto podemos observar que no hay una sincronización completa. En general, no es posible

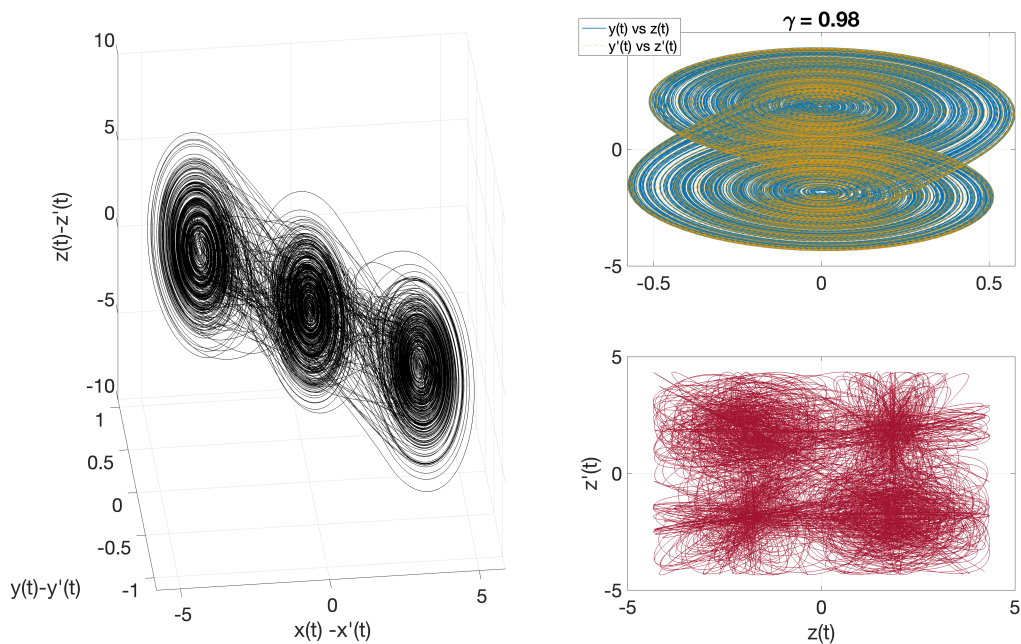


Figura 5.10: Osciladores completamente desincronizados. Tomando $\delta_x = 0, \delta_y = \delta_z = 0$ y orden de derivada $\gamma = 0.98$

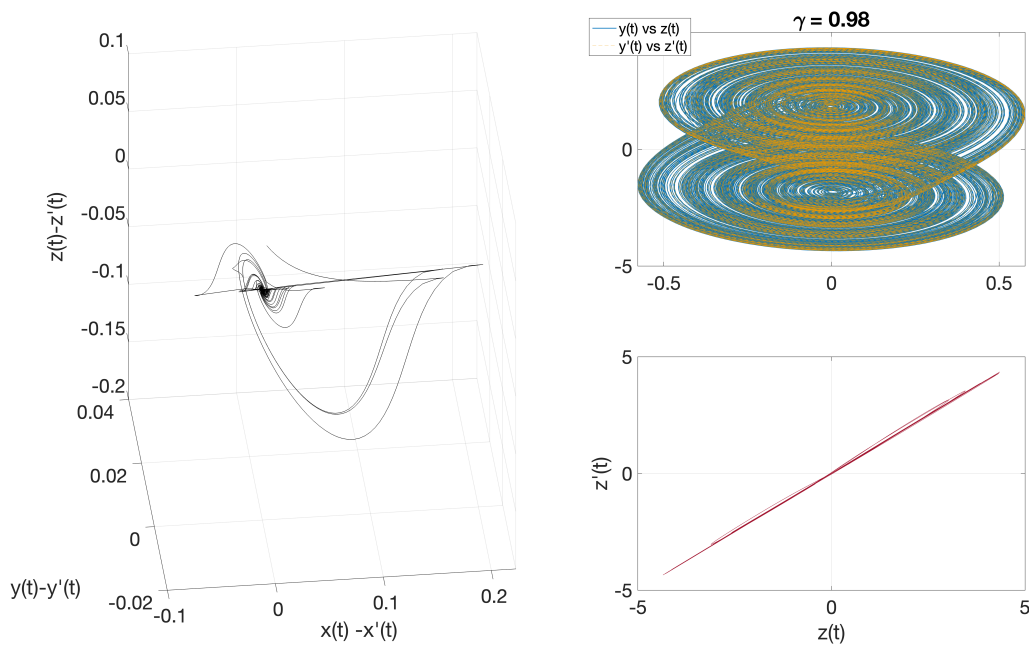


Figura 5.11: Osciladores no sincronizados. Tomando $\delta_x = \delta_y = 0, \delta_z = 1$.

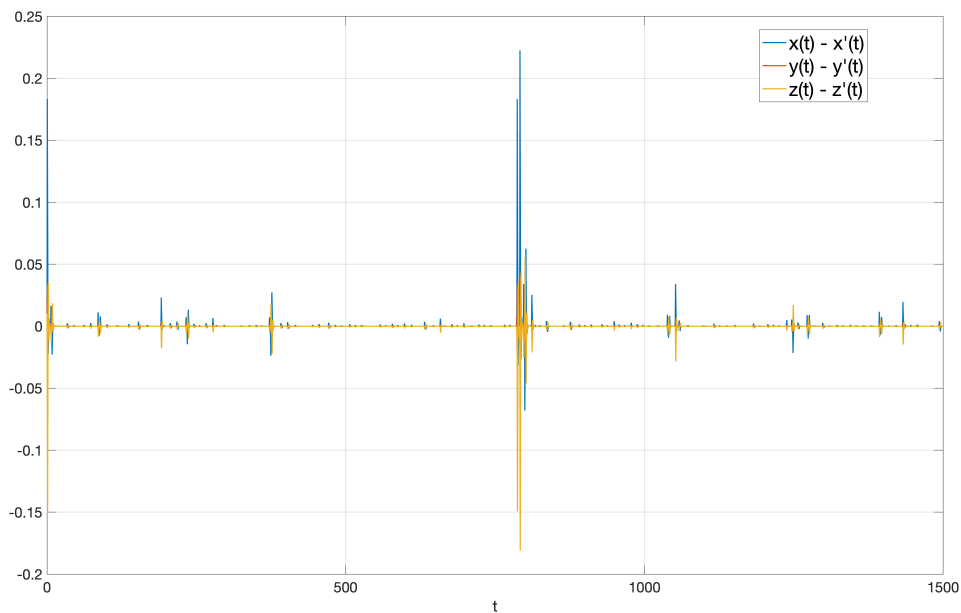


Figura 5.12: Comportamiento de la dinámica del sistema diferencia 5.2.12

garantizar que la diferencia de las dinámicas entre el sistema maestro y el sistema esclavo tiendan a cero, esto lo podemos ver en la Figura 5.12.

Capítulo 6

Resultados

En primera instancia, en la sección 5.1 se presenta la extensión del modelo de Chua utilizando la derivada de Caputo de orden $\gamma \in (0, 1)$. Además se determinaron los puntos de equilibrio del sistema dinámico fraccionario para el análisis de la estabilidad alrededor de estos. Conjuntamente, en la sección 3.1 se consideraron los valores de los parámetros $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27$ y $b = -0.68$ para los cuales el modelo de Chua clásico muestra comportamiento caótico; mismos que se tomaron para el estudio de la dinámica del modelo de Chua fraccionario. Podemos observar a través de las simulaciones numéricas que, para diferentes valores del orden de derivada γ , se obtiene la transición de la estabilidad al caos. A saber:

- Para $\gamma < 0.95$, el sistema muestra estabilidad en dos de sus puntos de equilibrio (véanse Figuras 5.1).
- Para $\gamma \geq 0.95$, el sistema presenta un comportamiento caótico (véanse Figuras 5.2, 5.3).

Por otro parte, en la sección 5.2 se expuso (usando la derivada de Caputo y siguiendo el esquema de Pecora-Carroll) el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias de orden $\gamma \in (0, 1)$ del acoplamiento de dos osciladores de Chua de orden fraccionario para lograr la sincronización bajo condiciones específicas. Para mostrar esto, se analizó un sistema equivalente llamado sistema diferencia (véase 5.2.2), con el que se plantea que la estabilidad

asintótica del sistema diferencia implica la sincronización de los osciladores de Chua acoplados. Con este planteamiento en las secciones 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3 se examina el acoplamiento bidireccional en x, y y z respectivamente con factores de acoplamiento $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ y orden de derivada γ adecuados para que se presente comportamiento caótico.

En el acoplamiento bidireccional en x , tomando los parámetros $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, orden de derivada $\gamma = 0.97$ y factores de acoplamiento $\delta_x = 5.57, \delta_y = \delta_z = 0$, se muestra que el sistema diferencia asociado (véase 5.2.5) presenta estabilidad asintótica en el origen. Esto implica que las trayectorias del sistema 5.2.5 tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito, lo que significa que los dos osciladores de Chua se sincronizan completamente. A través de las simulaciones numéricas en la Figura 5.5 podemos observar las sincronización de dos osciladores de Chua.

Para el acoplamiento bidireccional en y , y nuevamente tomando los parámetros $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$, orden de derivada $\gamma = 0.98$ y con factores de acoplamiento $\delta_y = 4, \delta_x = \delta_z = 0$, se muestra que el sistema diferencia asociado (véase 5.2.8) no es asintóticamente estable en el origen, lo que implica que los dos osciladores de Chua no se sincronizan completamente. Sin embargo a través de las simulaciones numéricas, podemos observar en las Figuras 5.8 y 5.9 que el acoplamiento puede llevar a una sincronización parcial, donde los osciladores muestran un comportamiento correlacionado pero no completamente idéntico.

Similarmente, en el acoplamiento bidireccional en z y considerando el orden de derivada $\gamma = 0.98$ y los factores de acoplamiento $\delta_z = 1, \delta_x = \delta_y = 0$ el sistema diferencia asociado (véase 5.2.11) no es asintóticamente estable en el origen, por lo que los dos osciladores de Chua no se sincronizan completamente. Además, al realizar las simulaciones numéricas correspondientes podemos notar nuevamente en las Figuras 5.11 y 5.12 que los osciladores no exhiben un comportamiento completamente idéntico.

Capítulo 7

Conclusiones

El estudio del modelo de Chua de orden fraccionario proporciona una comprensión profunda del comportamiento caótico y la estabilidad de sistemas dinámicos complejos. El orden de la derivada afecta a la memoria y a las propiedades mismas del sistema.

En relación con lo expuesto en este trabajo, el acoplamiento bidireccional en el modelo de Chua de orden fraccionario ofrece una rica dinámica que varía con el ajuste de parámetros clave como el orden de la derivada de Caputo γ y los factores de acoplamiento δ_x , δ_y y δ_z . Con respecto al orden de la derivada, existe un rango de valores de γ donde los sistemas pueden exhibir transiciones entre comportamiento estable y caótico. A medida que γ se acerca a 1, el sistema se comporta más como un sistema de orden entero, donde la dinámica puede volverse más compleja y caótica. En cuanto a los factores de acoplamiento δ_x , δ_y y δ_z podemos decir que determinan la intensidad de la interacción entre los dos osciladores de Chua. Si son bajos, los osciladores tienden a comportarse de manera más independiente; mientras que si son altos, los osciladores presentan un acoplamiento excesivo y dinámica compleja.

En conjunto, la variación simultánea de los parámetros anteriores puede ser utilizada para afinar el comportamiento del sistema. Es decir, el orden de la derivada y los factores de acoplamiento permiten ajustar y controlar la sincronización o el comportamiento caótico; proporcionando herramientas útiles para el estudio de los sistemas complejos y el diseño de osciladores con comportamiento caótico intensional.

El estudio de este fenómeno puede llevar a avances significativos en el diseño y control de sistemas caóticos interconectados. Las simulaciones numéricas y el análisis de estabilidad proporcionan una comprensión profunda de cómo las interacciones entre sistemas pueden ser controladas para lograr sincronización o prevenir el caos. Como trabajo futuro, se puede considerar el estudio de otros tipos de acoplamientos en sistemas fraccionarios o la optimización de parámetros para aplicaciones específicas. Inclusive, explorar el fenómeno de bifurcación en sistemas fraccionarios de Chua.

Apéndice A

Implementación Numérica

En este apartado se muestran los códigos utilizados de los sistemas dinámicos considerados a lo largo del trabajo. Se utilizó la función *ODE45* de MatLab para aproximar las soluciones a los sistemas diferenciales con derivada entera y la codificación *fde12* realizada por el Dr. Roberto Garrappa (véase [20]) para aproximar las soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

Modelo de Lorenz 2.3.1.

```
1 function dx = lorenz(t,x)
2 %Ecuaciones del sistema de Lorenz
3
4 %Valores de los paramatros:
5 %sigma = 10;
6 %beta = 8/3;
7 %rho = 28;
8 dx = [10*(x(2)-x(1));
9       x(1)*((8/3)-x(3))-x(2);
10      x(1)*x(2) -28*x(3)];
11 end
12
13 f = @(t,a) [-sigma*a(1) + sigma*a(2); rho*a(1) - a(2) - a(1)*a(3); -beta*a
14            (3) + a(1)*a(2)];
15 %Intervalo de tiempo considerado
```

```

16 %t =[0 100]
17 %Condiciones iniciales.
18 xt0 = [10,20,10];
19 [tspan,a] = ode45(f,[0 100],xt0);

```

Modelo del oscilador de Chua 3.1.1.

En el siguiente código se crea la función $chua(t,x)$, la cual es utilizada para realizar las aproximaciones en el caso de tomar el modelo con derivadas enteras (3.1.1) y el modelo con derivadas fraccionarias de Caputo (5.1.1); con *ODE45* y *fde12* respectivamente.

```

1 function dx = chua(t,x)
2 % Se tomaron los siguientes valores de los parametros:
3
4 %alpha = 10;
5 %beta = 14.87;
6 %a = -1.27;
7 %b = -0.68 ;
8
9 dx = [10*(x(2)-x(1)+0.68*x(1) - 0.5*(-1.27+0.68)*(abs(x(1)+1)-abs(x(1)-1))
10      );
11      x(1) - x(2) + x(3);
12      -14.87 * x(2)];
13 % Intervalo de tiempo
14 % [0,1500]
15 %Condiciones iniciales (cambian segun la simulacion)
16 % [0.5 0.1, 0]
17
18 % Aproximacion del oscilador de Chua clasico, es decir, tomando derivadas
19 % de orden entero.
20
21 % [T,x]=ode45(@ODE, [0,1500],[0.5 0.1, 0],odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e
22 % -8));
23
24 % Aproximacion del oscilador de Chua tomando la derivada fraccionaria de
25 % Caputo.
26
27 %El parametro gamma representa el orden de la derivada de Caputo, en

```

```

nuestro caso se toman valores entre 0 y 1.
24
25 % Intervalo de tiempo: 0,1500
26 % Condiciones iniciales (cambian segun la simulacion): [0.1;0.1;0.1]
27
28 %[T1,x]=fde12(gamma,@chua,0,1500,[0.1;0.1;0.1],2.^-5);

```

El siguiente código es tomado de [20] y cuyo objetivo es familiarizarnos con el funcionamiento de *fde12*.

```

1 function dy = ff(t,y)
2 % A = 1
3 % B = 3
4 % Condiciones iniciales:
5 % x0 = 1.2, z0 = 2.8
6 % Orden de derivada alpha = 0.7
7 dy = [1-(3+1)*y(1) + y(1)^2 * y(2);
8       3*y(1) - y(1)^2 *y(2)];

```

Por otro lado, se creó la siguiente función la cual nos permite realizar las simulaciones correspondientes para el acoplamiento de dos osciladores de Chua con derivada de orden entero (véase 3.3.3) y el acoplamiento de dos osciladores de Chua con derivada fraccionaria de Caputo (véase 5.2.1).

```

1 function dx = chua_acoplado(t,x)
2 %Valores de los parametros del modelo:
3 alpha = 10;
4 beta = 14.87;
5 a = -1.27;
6 b = -0.68;
7
8 %Factores de acoplamiento:
9 k1 = 0; %5.57
10 k2 = 0; %4.5
11 k3 = 1; %1
12
13 dx(1) = alpha*(x(2)-x(1)-b*x(1)-0.5*(a-b)*(abs(x(1)+1)-abs(x(1)-1)))+ k1*(
x(4)-x(1));

```

```

14 dx(2) = x(1) - x(2) + x(3) + k2*(x(5)-x(2));
15 dx(3) = -beta * x(2) + k3*(x(6)-x(3));
16 dx(4) = alpha*(x(5)-x(4)-b*x(4) - 0.5*(a-b)*(abs(x(4)+1)-abs(x(4)-1)))+ k1
    *(x(1)-x(4));
17 dx(5) = x(4) - x(5) + x(6) + k2*(x(2)-x(5));
18 dx(6) = -beta * x(5) + k3*(x(3)-x(6));
19
20
21 dx = [dx(1),dx(2),dx(3),dx(4),dx(5),dx(6)]';
22 end
23
24
25 % Intervalo de tiempo
26 % [0,1500]
27
28 %Condicinoes iniciales (cambian segun la simulacion)
29 % [0.1,0,0,0.2,0,0 ]
30
31 % Aproximacion del acoplamiento del oscilador de Chua clasico, es decir,
    tomando derivadas de orden entero.
32 %[t,x]= ode45(@chua_acoplado, [0 1500],[0.1,0,0,0.2,0,0 ], odeset('RelTol
    ', 1e-8, 'AbsTol', 1e-8));
33
34 % Aproximacion del acoplamiento del oscilador de Chua tomando la derivada
    fraccionaria de Caputo.
35
36 %El parametro gamma representa el orden de la derivada de Caputo, en
    nuestro caso se toman valores entre 0 y 1.
37
38 % Intervalo de tiempo: 0,1500
39 % Condiciones iniciales (cambian segun la simulacion): [0.1; 0; 0; 0.2; 0;
    0]
40
41 %[T,X] = fde12(gamma, @chua_acoplado, 0,1500, [0.1; 0; 0; 0.2; 0;
    0],2.^-5);

```

Por último, se presenta la versión el código tomado del repositorio de MathWorks ([link](#)).

```

1 function [t, y] = fde12(alpha, fdefun, t0, tfinal, y0, h, param, mu, mu_tol)
2 %FDE12 Solves an initial value problem for a non-linear differential
3 %      equation of fractional order (FDE). The code implements the
4 %      predictor-corrector PECE method of Adams-Bashforth-Moulton type
5 %      described in [1].
6 %
7 %      [T,Y] = FDE12(ALPHA,FDEFUN,TO,TFINAL,Y0,h) integrates the initial
      value
8 %      problem for the FDE, or the system of FDEs, of order ALPHA > 0
9 %       $D^{\text{ALPHA}} Y(t) = \text{FDEFUN}(T,Y(T))$ 
10 %       $Y^{(k)}(T_0) = Y_0(:,k+1), k=0, \dots, m-1$ 
11 %      where m is the smallest integer greater than ALPHA and  $D^{\text{ALPHA}}$  is the
12 %      fractional derivative according to the Caputo's definition. FDEFUN is
      a
13 %      function handle corresponding to the vector field of the FDE and for a
14 %      scalar T and a vector Y, FDEFUN(T,Y) must return a column vector. The
15 %      set of initial conditions Y0 is a matrix with a number of rows equal
      to
16 %      the size of the problem (hence equal to the number of rows of the
17 %      output of FDEFUN) and a number of columns depending on ALPHA and given
18 %      by m. The step-size H>0 is assumed constant throughout the integration
      .
19 %
20 %      [T,Y] = FDE12(ALPHA,FDEFUN,TO,TFINAL,Y0,H,PARAM) solves as above with
21 %      the additional set of parameters for the FDEFUN as FDEFUN(T,Y,PARAM).
22 %
23 %      [T,Y] = FDE12(ALPHA,FDEFUN,TO,TFINAL,Y0,H,PARAM,MU) solves the FDE
      with
24 %      the selected number MU of multiple corrector iterations. The following
25 %      values for MU are admissible:
26 %      MU = 0 : the corrector is not evaluated and the solution is provided
27 %      just by the predictor method (the first order rectangular rule);
28 %      MU > 0 : the corrector is evaluated by the selected number MU of times
      ;
29 %      the classical PECE method is obtained for MU=1;
30 %      MU = Inf : the corrector is evaluated for a certain number of times

```

```
31 % until convergence of the iterations is reached (for convergence the
32 % difference between two consecutive iterates is tested).
33 % The default value for MU is 1
34 %
35 % [T,Y] = FDE12(ALPHA,FDEFUN,TO,TFINAL,Y0,H,PARAM,MU,MU_TOL) allows to
36 % specify the tolerance for testing convergence when MU = Inf. If not
37 % specified, the default value MU_TOL = 1.E-6 is used.
38 %
39 % FDE12 is an implementation of the predictor-corrector method of
40 % Adams-Bashforth-Moulton studied in [1]. Convergence and accuracy of
41 % the method are studied in [2]. The implementation with multiple
42 % corrector iterations has been proposed and discussed for multiterm
  FDEs
43 % in [3]. In this implementation the discrete convolutions are evaluated
44 % by means of the FFT algorithm described in [4] allowing to keep the
45 % computational cost proportional to  $N \cdot \log(N)^2$  instead of  $N^2$  as in the
46 % classical implementation;  $N$  is the number of time-point in which the
47 % solution is evaluated, i.e.  $N = (TFINAL-T)/H$ . The stability properties
48 % of the method implemented by FDE12 have been studied in [5].
49 %
50 % [1] K. Diethelm, A.D. Freed, The Frac PECE subroutine for the
  numerical
51 % solution of differential equations of fractional order, in: S. Heinzl
  ,
52 % T. Plessner (Eds.), Forschung und Wissenschaftliches Rechnen 1998,
53 % Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen,
  1999,
54 % pp. 57-71.
55 %
56 % [2] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Detailed error analysis for a
57 % fractional Adams method, Numer. Algorithms 36 (1) (2004) 31-52.
58 %
59 % [3] K. Diethelm, Efficient solution of multi-term fractional
60 % differential equations using P(EC)mE methods, Computing 71 (2003), pp.
61 % 305-319.
62 %
```

```
63 % [4] E. Hairer, C. Lubich, M. Schlichte, Fast numerical solution of
64 % nonlinear Volterra convolution equations, SIAM J. Sci. Statist. Comput
65 % 6 (3) (1985) 532-541.
66 %
67 % [5] R. Garrappa, On linear stability of predictor-corrector algorithms
68 % for fractional differential equations, Internat. J. Comput. Math. 87
69 % (10) (2010) 2281-2290.
70 %
71 % Copyright (c) 2011-2012, Roberto Garrappa, University of Bari, Italy
72 % garrappa at dm dot uniba dot it
73 % Revision: 1.2 - Date: July, 6 2012
74 % Check inputs
75 if nargin < 9
76     mu_tol = 1.0e-6 ;
77     if nargin < 8
78         mu = 1 ;
79         if nargin < 7
80             param = [] ;
81         end
82     end
83 end
84 % Check order of the FDE
85 if alpha <= 0
86     error('MATLAB:fde12:NegativeOrder',...
87         ['The order ALPHA of the FDE must be positive. The value ' ...
88         'ALPHA = %f can not be accepted. See FDE12.'], alpha);
89 end
90 % Check the step--size of the method
91 if h <= 0
92     error('MATLAB:fde12:NegativeStepSize',...
93         ['The step-size H for the method must be positive. The value ' ...
94         'H = %e can not be accepted. See FDE12.'], h);
95 end
96 % Structure for storing initial conditions
97 ic.t0 = t0 ;
```

```

98 ic.y0 = y0 ;
99 ic.m_alpha = ceil(alpha) ;
100 ic.m_alpha_factorial = factorial(0:ic.m_alpha-1) ;
101 % Structure for storing information on the problem
102 Probl.ic = ic ;
103 Probl.fdefun = fdefun ;
104 Probl.problem_size = size(y0,1) ;
105 Probl.param = param ;
106 % Check number of initial conditions
107 if size(y0,2) < ic.m_alpha
108     error('MATLAB:fde12:NotEnoughInputs', ...
109         ['A not sufficient number of assigned initial conditions. ' ...
110         'Order ALPHA = %f requires %d initial conditions. See FDE12.'],
111         ...
112         alpha,ic.m_alpha);
112 end
113 % Check compatibility size of the problem with size of the vector field
114 f_temp = f_vectorfield(t0,y0(:,1),Probl) ;
115 if Probl.problem_size ~= size(f_temp,1)
116     error('MATLAB:fde12:SizeNotCompatible', ...
117         ['Size %d of the problem as obtained from initial conditions ' ...
118         '(i.e. the number of rows of Y0) not compatible with the ' ...
119         'size %d of the output of the vector field FDEFUN. ' ...
120         'See FDE12.'], Probl.problem_size,size(f_temp,1));
121 end
122 % Number of points in which to evaluate weights and solution
123 r = 16 ;
124 N = ceil((tfinal-t0)/h) ;
125 Nr = ceil((N+1)/r)*r ;
126 Q = ceil(log2(Nr/r)) - 1 ;
127 NNr = 2^(Q+1)*r ;
128 % Preallocation of some variables
129 y = zeros(Probl.problem_size,N+1) ;
130 fy = zeros(Probl.problem_size,N+1) ;
131 zn_pred = zeros(Probl.problem_size,NNr+1) ;
132 if mu > 0

```

```

133     zn_corr = zeros(Probl.problem_size,NNr+1) ;
134 else
135     zn_corr = 0 ;
136 end
137 % Evaluation of coefficients of the PECE method
138 nvett = 0 : NNr+1 ;
139 nalpha = nvett.^alpha ;
140 nalpha1 = nalpha.*nvett ;
141 PC.bn = nalpha(2:end) - nalpha(1:end-1) ;
142 PC.an = [ 1 , (nalpha1(1:end-2) - 2*nalpha1(2:end-1) + nalpha1(3:end)) ] ;
143 PC.a0 = [ 0 , nalpha1(1:end-2)-nalpha(2:end-1).*(nvett(2:end-1)-alpha-1)]
        ;
144 PC.halpha1 = h^alpha/gamma(alpha+1) ;
145 PC.halpha2 = h^alpha/gamma(alpha+2) ;
146 PC.mu = mu ; PC.mu_tol = mu_tol ;
147 % Initializing solution and proces of computation
148 t = t0 + (0 : N)*h ;
149 y(:,1) = y0(:,1) ;
150 fy(:,1) = f_temp ;
151 [y, fy] = Triangolo(1, r-1, t, y, fy, zn_pred, zn_corr, N, PC, Probl ) ;
152 % Main process of computation by means of the FFT algorithm
153 ff = [0 2 ] ; nx0 = 0 ; ny0 = 0 ;
154 for q = 0 : Q
155     L = 2^q ;
156     [y, fy] = DisegnaBlocchi(L, ff, r, Nr, nx0+L*r, ny0, t, y, fy, ...
157                             zn_pred, zn_corr, N, PC, Probl ) ;
158     ff = [ff ff] ; ff(end) = 4*L ;
159 end
160 % Evaluation solution in TFINAL when TFINAL is not in the mesh
161 if tfinal < t(N+1)
162     c = (tfinal - t(N))/h ;
163     t(N+1) = tfinal ;
164     y(:,N+1) = (1-c)*y(:,N) + c*y(:,N+1) ;
165 end
166 t = t(1:N+1) ; y = y(:,1:N+1) ;
167 end

```

```

168 %
=====

169 %
=====

170 % r : dimension of the basic square or triangle
171 % L : factor of resizing of the squares
172 function [y, fy] = DisegnaBlocchi(L, ff, r, Nr, nx0, ny0, t, y, fy, ...
173                                     zn_pred, zn_corr, N , PC, Probl)
174 nxi = nx0 ; nxf = nx0 + L*r - 1 ;
175 nyi = ny0 ; nyf = ny0 + L*r - 1 ;
176 is = 1 ;
177 s_nxi(is) = nxi ; s_nxf(is) = nxf ; s_nyi(is) = nyi ; s_nyf(is) = nyf ;
178 i_triangolo = 0 ; stop = 0 ;
179 while ~stop
180
181     stop = nxi+r-1 == nx0+L*r-1 | (nxi+r-1>=Nr-1) ; % Ci si ferma quando
182     il triangolo attuale finisce alla fine del quadrato
183
184     [zn_pred, zn_corr] = Quadrato(nxi, nxf, nyi, nyf, fy, zn_pred, zn_corr
185     , PC, Probl) ;

```

Bibliografía

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Physical review letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–825, 1990.
- [3] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] G. Layek *et al.*, *An introduction to dynamical systems and chaos*, vol. 449. Springer, 2015.
- [6] A. Medio and M. Lines, *Nonlinear dynamics: A primer*. Cambridge University Press, 2001.
- [7] M. Xiong, L. Chen, and N. Yang, “Traveling wave solution of the olver–rosenau equation solved by dynamics system,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2020, pp. 1–7, 05 2020.
- [8] H. Poincaré, “Science and method,” 2005.
- [9] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *Journal of atmospheric sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.

- [10] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, and D. Chillingworth, “Chaos: an introduction to dynamical systems,” *SIAM Review*, vol. 40, no. 3, pp. 732–732, 1998.
- [11] J. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*. G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series, World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2010.
- [12] J.-M. Ginoux, *Differential geometry applied to dynamical systems*, vol. 66. World Scientific, 2009.
- [13] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, “Synchronization: a universal concept in nonlinear science,” 2002.
- [14] L. O. Chua, M. Itoh, L. Kocarev, and K. Eckert, “Chaos synchronization in chua’s circuit,” *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, vol. 3, no. 01, pp. 93–108, 1993.
- [15] I. Podlubny, “An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications,” *Math. Sci. Eng*, vol. 198, p. 340, 1999.
- [16] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204. elsevier, 2006.
- [17] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *et al.*, *Fractional integrals and derivatives*, vol. 1. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.
- [18] W. Deng, C. Li, and Q. Guo, “Analysis of fractional differential equations with multi-orders,” *Fractals*, vol. 15, no. 02, pp. 173–182, 2007.
- [19] D. Matignon, “Stability properties for generalized fractional differential systems,” in *ESAIM: proceedings*, vol. 5, pp. 145–158, EDP Sciences, 1998.
- [20] R. Garrappa, “Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial,” *Mathematics*, vol. 6, no. 2, p. 16, 2018.

- [21] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed, “A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, pp. 3–22, 2002.
- [22] A. B. Malinowska, T. Odziejewicz, and D. F. Torres, *Advanced methods in the fractional calculus of variations*. Springer, 2015.
- [23] A. S. Alshomrani, M. Z. Ullah, and D. Baleanu, “A new approach on the modelling, chaos control and synchronization of a fractional biological oscillator,” *Advances in Difference Equations*, vol. 2021, no. 1, pp. 1–20, 2021.
- [24] R. Kamocki, “Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 37, no. 11, pp. 1668–1686, 2014.
- [25] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.
- [26] M. N. Barreto, G. Frederico, J. V. da Costa Sousa, and J. E. N. Valdes, “Calculus of variations and optimal control with generalized derivative,” 2021.
- [27] J. Sprott, *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*. G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series, World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2010.
- [28] K. Diethelm and N. J. Ford, “Analysis of fractional differential equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 265, no. 2, pp. 229–248, 2002.
- [29] W. Deng, C. Li, and Q. Guo, “Analysis of fractional differential equations with multi-orders,” *Fractals*, vol. 15, no. 02, pp. 173–182, 2007.