

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

**Conectividad y robustez de la red aeroportuaria de la República Mexicana
mediante teoría de redes complejas**

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
Omar Martínez Rosas

DIRECTOR DE LA TESIS
Dr. Luis Agustín Olivares Quiroz

Ciudad de México, noviembre de 2023

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Índice general

Introducción	5
Objetivo	8
1 Antecedentes y cuantificadores de las redes complejas	9
1.1 Los Puentes de Königsberg	9
1.2 Redes y grafos	11
1.3 Grado, distribución de probabilidad de grado y densidad	12
1.4 Matriz de adyacencia	14
1.5 Medidas de centralidad y coeficiente de agrupamiento local	15
1.6 Nodos centrales y periféricos	25
2 Redes complejas en Python con NetworkX	28
2.1 Programación básica con redes	28
2.2 Datos de Excel y NetworkX	30
2.3 Redes mediante un mapa interactivo	31
2.4 Redes aleatorias con los modelos de Gilbert y Erdős-Rényi	34
2.5 Redes de escala libre con el modelo de Barabasi	36
2.6 Grado, densidad y matriz de adyacencia	38
2.7 Distribución de probabilidad de grado promedio	39
2.8 Medidas de centralidad y coeficiente de agrupamiento local	44
2.9 Nodos centrales y periféricos	47
3 Robustez de la red	49
3.1 Definición de componente gigante	49
3.2 Definición de robustez	50
3.3 Robustez de la red en Python con NetworkX	54
3.4 Variación en el tamaño de la componente gigante en función de la fracción de nodos eliminados	58
4 Red aeroportuaria de la República Mexicana	63

4.1 Sistema aeroportuario mexicano	63
4.2 Modelo de la red de tráfico aéreo	65
4.3 Distribución de probabilidad de grado y coeficiente de agrupamiento local	69
4.4 Medidas de centralidad	71
4.5 Aeropuertos centrales y periféricos	77
4.6 Robustez de la red	79
5 Análisis y Conclusiones	82
Índice de figuras	87
Índice de tablas	90
Bibliografía	91

Introducción

Volar siempre ha sido el sueño del hombre. El pasado más lejano registrado sobre el tema es de 1667, cuando un hombre, cuyo nombre se desconoce, inventó un extraño artefacto que trepó a lo que hoy es la Avenida 5 de Mayo, en el puerto de Veracruz, solo para caer por el paraje llamado Médanos del Perro. Tras esta hazaña, el atrevido piloto se rompió la pierna al aterrizar. Tiempo después, en 1825, los hermanos Ibar, carpinteros de profesión, levantaron un globo gigante en la actual Alameda, frente a la Iglesia del Corpus Christi, durante la celebración del Grito de Dolores en la Ciudad de México. Luego, en 1835, el 12 de febrero, Guillermo Eugenio Robertson se subió a un globo aerostático, se elevó y repitió su hazaña el 13 de septiembre y el 11 de octubre del mismo año, y en este último viaje llevó a una mujer como acompañante a la Ciudad de México.

En 1857, Don Joaquín de la Cantoya y Rico apareció en el panorama aéreo de México, un día a bordo de un aerostato (aeronave equipado con uno o más tanques llenos de gases livianos que lo hacían elevarse o levitar) vestido de charro y montando a un caballo y, en otro ascenso, se estrelló contra un vitral, entró al comedor de una casa y cayó sobre la mesa, lo que disgustó a los comensales, que lo molieron a palos [1] .

La aviación en México surge el 8 de enero de 1910 con el vuelo de Alberto Braniff en los llanos de la ex hacienda Balbuena, lo que puede considerarse el primer aeropuerto mexicano. Desde entonces, la aviación ha crecido significativamente y los aeropuertos tienen que crecer en la misma medida. Originalmente, los “campos de aterrizaje” eran simples llanuras, potreros o brechas, más o menos despejadas, y el terreno rara vez estaba nivelado y compactado.

En 1915 se establecieron en los campos de Balbuena la Escuela Militar de Aviación y los Talleres de Aviación del Estado; Aquí operaron los primeros aviones de transporte aéreo civil y luego se estableció la Fuerza Aérea Mexicana [2].

Hasta 1921 se inició el desarrollo formal de la primera ruta aérea comercial oficial de México. La ruta conectaba la Ciudad de México y Tampico, marcando un hito importante en la historia de la aviación comercial del país. La aerolínea que operaba esta ruta era Compañía Mexicana de Transportación Aérea (CM-TA), que luego se convirtió en Mexicana de Aviación, una de las aerolíneas más reconocidas de México en ese momento [3].

El estudio de las redes complejas surgió como una disciplina interdisciplinaria para abordar la complejidad y la interconectividad de los sistemas del mundo real. A medida que los avances tecnológicos y científicos nos proporcionaban una cantidad cada vez mayor de datos sobre las interacciones entre los elementos de un sistema, se hizo evidente la necesidad de desarrollar herramientas y métodos para comprender y analizar estas estructuras complejas.

El término “redes complejas” se popularizó a fines de la década de 1990, aunque los fundamentos conceptuales y matemáticos para su estudio se habían estado desarrollando desde mucho antes. Los primeros trabajos importantes en el campo de las redes complejas se centraron en las propiedades de la conectividad de los grafos, es decir, las interconexiones entre nodos. Estos estudios se basaron en la Teoría de Grafos, una rama de las Matemáticas que se ocupa de las estructuras y propiedades de los grafos.

Uno de los hitos clave en el surgimiento de las redes complejas fue la publicación del trabajo de Duncan Watts y Steven Strogatz en 1998 sobre redes de "mundo pequeño"[4]. Demostraron que muchas redes del mundo real exhiben una propiedad de "mundo pequeño"(small world, por su nombre en inglés), donde la mayoría de los nodos están conectados entre sí a través de un número relativamente pequeño de pasos. Este concepto ayudó a comprender cómo las redes pueden ser altamente eficientes en la propagación de información y cómo pueden surgir fenómenos globales a partir de interacciones locales.

Además, otro hito importante fue la publicación del artículo “*Emergence of scaling in random networks*” en 1999, escrito por Albert-László Barabási y Reka Albert [5]. En este trabajo, los autores introdujeron el concepto de "ley de escala libre", que describe la distribución asimétrica de la conectividad en muchas redes del mundo real. Este descubrimiento desencadenó un mayor interés en el estudio de las redes complejas y su aplicabilidad en una amplia gama de disciplinas.

A medida que el campo de las redes complejas se desarrollaba, se comenzaron a aplicar sus conceptos y herramientas a una amplia gama de sistemas del mundo real, como redes sociales, redes biológicas, redes de transporte, redes de comunicación y muchos otros. Los estudios en estas áreas revelaron patrones y estructuras fundamentales, como la presencia de comunidades, nodos altamente conectados y propiedades de robustez.

En resumen, el surgimiento del estudio de las redes complejas surgió como una disciplina interdisciplinaria que utiliza herramientas de Teoría de Grafos para estudiar los sistemas complejos del mundo real que pueden ser modelados como redes. Su desarrollo se debe en gran parte a trabajos pioneros que introdujeron conceptos fundamentales y despertaron un gran interés en la comunidad científica.

Objetivo

El objetivo de esta tesis es definir y aplicar diferentes modelos matemáticos de teoría de redes complejas para estudiar y analizar cuantitativamente redes. Asimismo utilizaremos la programación en Python junto con la librería NetworkX para realizar el análisis computacional de diferentes modelos de redes. Dado lo anterior, centraremos la atención en el estudio de la red aeroportuaria de la República Mexicana utilizando bases de datos públicas de vuelos de transporte de pasajeros y, posteriormente, las analizaremos empleando los modelos matemáticos de redes complejas.

Capítulo 1

Antecedentes y cuantificadores de las redes complejas

En este capítulo abordaremos los antecedentes de las redes complejas y los modelos matemáticos relevantes que las definen. Utilizaremos también ejemplos prácticos para mostrar cómo estos modelos se aplican en el análisis de redes.

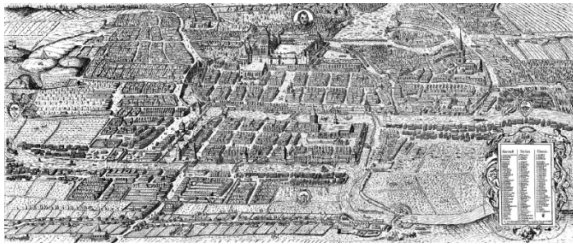
1.1. Los Puentes de Königsberg

Pocos campos de investigación pueden remontar su nacimiento a un solo momento y lugar en la historia. La Teoría de Grafos, el andamio matemático detrás de las redes complejas, remonta sus raíces en 1735 en Königsberg, la capital de Prusia Oriental, una próspera ciudad comercial de su época. El comercio respaldado por su activa flota de barcos permitió a los funcionarios de la ciudad construir siete puentes sobre el río Pregel que rodeaba la ciudad. Cinco de ellos conectaban con tierra firme la elegante isla Kneiphof, atrapada entre los dos brazos del Pregel. Los dos restantes cruzaron los dos brazos del río (figura 1 (a)). Este arreglo peculiar dio origen a una pregunta de aquella época: ¿Se puede caminar a través de los siete puentes y nunca cruzar el mismo dos veces? A pesar de muchos intentos, nadie pudo encontrar ese camino. El problema quedó sin resolver hasta 1735, cuando Leonard Euler, un matemático suizo, ofreció una prueba matemática rigurosa de que tal camino no existe [6].

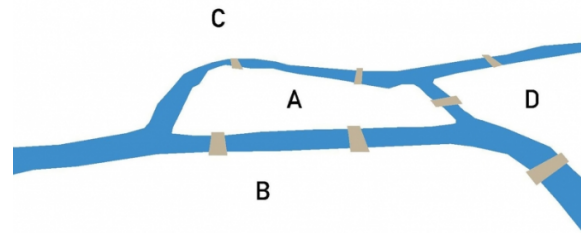
Euler representó cada una de las cuatro áreas de tierra separadas por el río con las letras A, B, C y D (Figura 1 (b)). Luego conectó con líneas cada pedazo de tierra que tenía un puente entre ellos. Construyendo así un grafo (Figura 1 (c)), cuyos nodos eran los trozos de tierra y los enlaces eran los puentes. Entonces Euler hizo una simple observación: si hay una trayectoria que cruza todos los

puentes, pero nunca el mismo puente dos veces, entonces los nodos con un número impar de enlaces deben ser el punto inicial o final de esa trayectoria. De hecho, si llega a un nodo con un número impar de enlaces, es posible que no tenga ningún enlace sin usar para dejarlo. Por lo tanto, tal trayectoria no puede existir en un grafo que tiene más de dos nodos con un número impar de enlaces. El grafo de Königsberg tenía cuatro nodos con un número impar de enlaces, A, B, C y D, por lo que ninguna trayectoria podía resolver el problema.

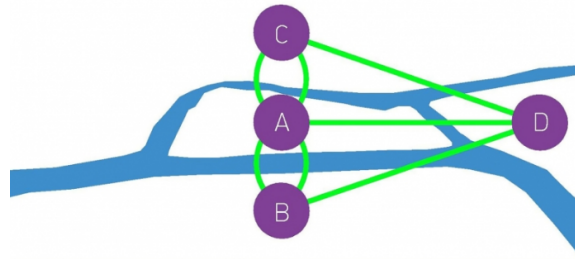
Figura 1. Inicios de la Teoría de Grafos



(a) Un mapa contemporáneo de Königsberg (ahora Kaliningrad, Rusia) durante la época de Euler.



(b) Una ilustración esquemática de las cuatro piezas de tierra de Königsberg (A, B, C, D) y los siete puentes que las cruzan.



(c) Euler construyó un grafo donde cada nodo correspondiente a un trozo de tierra, y cada enlace correspondiente a un puente.

Fuente: Pósfai, M., y Barabasi, A.L. (2016), Network Science. Obtenido de <http://networksciencebook.com/chapter/2>

La prueba de Euler fue la primera en la que se usó un grafo para resolver un problema matemático. Para nosotros, la prueba tiene dos mensajes importantes: el primero es que algunos problemas se vuelven más simples y manejables si se representan como un grafo. La segunda es que la existencia de la trayectoria no depende de nuestro ingenio para encontrarlo. Más bien, es una propiedad del grafo. De hecho, dada la estructura del grafo de Königsberg, por muy listos que seamos, nunca encontraremos la trayectoria deseada. En otras palabras, las redes tienen propiedades codificadas en su estructura que limitan o mejoran su comportamiento.

1.2. Redes y grafos

Si queremos entender un sistema complejo, primero necesitamos saber cómo interactúan sus componentes entre sí. Una red es un conjunto de componentes de un sistema, a menudo llamados nodos o vértices, con interacciones directas entre ellos, llamados enlaces o aristas. Esta representación de red ofrece un lenguaje común para estudiar sistemas que pueden diferir mucho en la naturaleza, apariencia o alcance.

En la literatura científica los términos red y grafo se usan indistintamente (Tabla 1). Sin embargo, existe una distinción sutil entre las dos terminologías: la combinación “red, nodo, enlace” a menudo se refiere a sistemas o redes reales (en el capítulo 2 presentaremos y analizaremos sistemas o redes reales). En contraste, usamos los términos “grafo, vértice, arista” cuando discutimos la representación matemática de estas redes, aunque esta distinción rara vez se hace, por lo que estas dos terminologías suelen ser sinónimos entre sí.

Redes complejas	Teoría de Grafos
Red	Grafo
Nodo	Vértice
Enlace	Arista

Tabla 1. Terminologías entre redes complejas y Teoría de Grafos

Un grafo o red lo denotamos como G , el número de nodos llamados N representa el número de componentes en el sistema. Y el número de enlaces, que denotamos con L , representa el número total de interacciones entre los nodos.

Definiremos a continuación los siguientes conceptos de Teoría de Grafos:

- Un grafo es dirigido (o dígrafo) si todos sus enlaces tienen un sentido definido; se llama no dirigida si todos sus enlaces son bidireccionales y no tienen orientación específica.
- Una red es simple si no contiene bucles (conexiones directas desde un nodo hacia sí mismo) ni enlaces múltiples o paralelos entre los nodos.
- Un grafo es conexo si todos los nodos están conectados por al menos un enlace; un grafo que no es conexo se denomina grafo desconexo o inconexo.

Históricamente el estudio de las redes complejas ha sido abarcado en cierta rama de las matemáticas discretas denominada Teoría de Grafos. Una red se puede representar formalmente mediante la notación $G(N, L)$ (también conocida como

el modelo de red de Gilbert). En el capítulo 2, se realizará un análisis exhaustivo del modelo $G(N, L)$ y otros modelos de red relevantes para el estudio de redes.

A lo largo de este trabajo analizaremos y estudiaremos únicamente y exclusivamente grafos o redes no dirigidos y simples. En lo que sigue, a una red no dirigida y simple la llamaremos simplemente red o grafo.

1.3. Grado, distribución de probabilidad de grado y densidad

Una propiedad clave de cada nodo es su grado, que representa el número de enlaces que tiene con otros nodos.

Denotamos con k_i el grado (número de enlaces conectados) del i -ésimo nodo de un grafo. El número total de enlaces L de un grafo no dirigido se puede expresar como la mitad de la suma de los grados de los nodos:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \quad (1)$$

La distribución de probabilidad de grado o distribución de grado p_k nos proporciona la probabilidad de que un nodo seleccionado de forma aleatoria tenga grado k . Dado que p_k es una probabilidad, debe normalizarse, es decir

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k = 1$$

Para una red con N nodos la distribución de probabilidad de grado está dada por

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (2)$$

donde N_k es el número de nodos de grado k . Si la ecuación (2) no se normaliza, p_k calcula el número de nodos de grado k que hay en un grafo. Sin embargo, trabajaremos con el caso normalizado por comodidad y por convención.

Con la figura 2 podemos visualizar un ejemplo de un grafo con $N = 4$ nodos y su respectiva distribución de probabilidad de grado p_k .

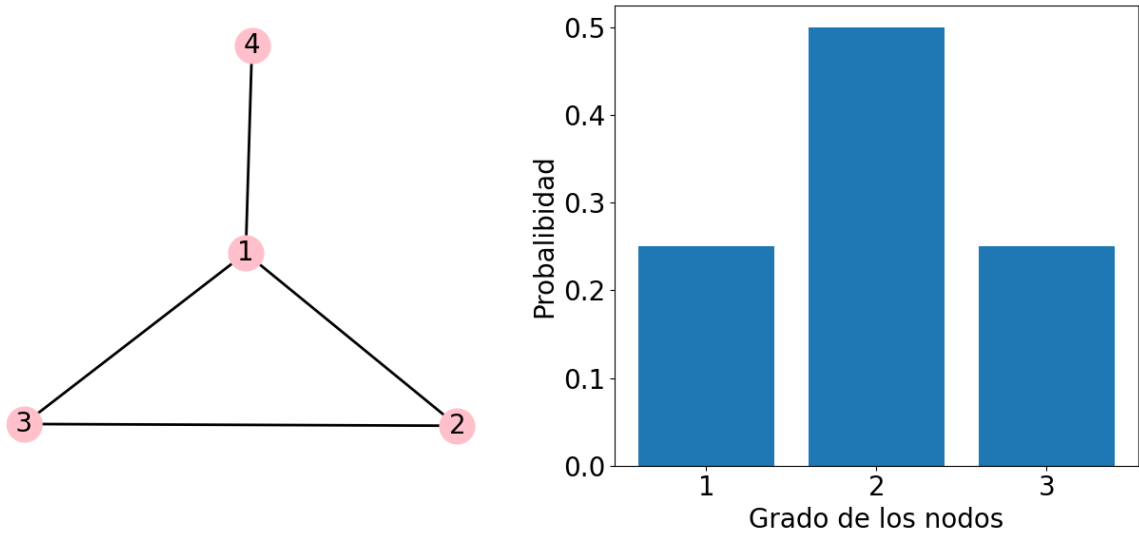


Figura 2. Grafo de $N = 4$ nodos

De forma sencilla observamos que $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 2$ y $k_4 = 1$. Esto implica que los nodos con grado 2 tienen mayor probabilidad de ser seleccionados de forma aleatoria, dicho de la forma no normalizada, tenemos 2 nodos con grado 2. En consecuencia, con la ecuación (1) tenemos que el número de enlaces es $L = 4$ (En este caso, por ser un grafo pequeño, también podemos calcular L visualizando todos los enlaces).

Por otro lado, la densidad de una red G cuantifica la proporción de conexiones entre los nodos con respecto al máximo número posible de conexiones en la red. Una red es densa si el número de enlaces es cercano al número máximo de enlaces posibles, es decir, a los que tendría si la red fuera completa (con el máximo número posible de conexiones entre los nodos). En caso contrario, una red es dispersa si el número de enlaces es muy bajo, es decir, cercano al que tendría si fuera una red vacía (sin enlaces).

La densidad de una red se define formalmente como:

$$D = \frac{L}{\binom{N}{2}} = \frac{2L}{N(N-1)} \quad (3)$$

La densidad D es 0 para redes vacías con $L = 0$, y $D = 1$, para redes completas con el número máximo de enlaces posibles:

$$L_{max} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (4)$$

Por ejemplo, al calcular la ecuación (3) con la red del ejemplo de la figura 2 obtenemos que $D = 2/3$. Si el ejemplo anterior tuviera $L_{max} = 6$ obtenido de la ecuación (4), entonces la red hubiera sido completa con $D = 1$.

1.4. Matriz de adyacencia

Una descripción completa de un grafo requiere que hagamos un seguimiento de sus enlaces. La forma más sencilla de lograr esto es proporcionar una lista completa de enlaces. Por ejemplo, una red con 4 nodos y 4 enlaces se describe de manera única enumerando esos enlaces: $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4)\}$. Para fines matemáticos, a menudo representaremos un grafo a través de su matriz de adyacencia.

La matriz de adyacencia de un grafo de N nodos es un arreglo rectangular de N filas y N columnas, siendo sus elementos:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay un enlace que une al nodo } i \text{ y al nodo } j; \\ 0 & \text{si los nodos } i \text{ y } j \text{ no están conectados entre sí.} \end{cases}$$

A_{ij} tiene dos entradas para cada enlace, por ejemplo, el enlace $\{(1, 2)\}$ se representa como $A_{12} = 1$ y $A_{21} = 1$. Esto implica que las entradas A_{ij} y A_{ji} sean iguales, y en consecuencia la matriz de adyacencia es simétrica.

El grado k_i del nodo i se puede obtener directamente sumando los elementos de la fila o columna de la matriz de adyacencia:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} = \sum_{j=1}^N A_{ji} \quad (5)$$

El número de enlaces de una red lo podemos calcular también utilizando la matriz de adyacencia:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij}$$

donde el número de elementos distintos de cero de la matriz de adyacencia lo podemos ver como $2L$ o el doble del número de enlaces.

Con el ejemplo de la figura 2, su respectiva matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $A = A^T$, es decir, A es simétrica por ser un grafo no dirigido. Si aplicamos la ecuación (5) en la fila o columna 1, vamos a conseguir el grado del nodo 1 del grafo de la figura 2.

1.5. Medidas de centralidad y coeficiente de agrupamiento local

Las Medidas de centralidad permiten medir la importancia o prominencia de los nodos dentro de un grafo G . Los nodos pueden ser relevantes por su gran conectividad, por su cercanía con otros nodos, por sus facilidades para llegar a otros nodos, por mencionar algunos. Los tipos de medidas de centralidad son centralidad de grado, centralidad de cercanía, centralidad de intermediación, centralidad de vector propio, centralidad de comunicabilidad y centralidad de subgrafo.

Para cuantificar las medidas de centralidad se definen los conceptos de camino y trayectoria.

Un camino en un grafo G es una secuencia finita no nula

$W = i_1 e_1 i_2 e_2 i_3 \dots e_{n-1} i_n$, cuyos términos son alternativamente nodos y enlaces, tal que, para $1 \leq q \leq n$, los extremos de e_q son i_q y i_{q+1} . Decimos que W es un camino (i_1, i_n) . Los nodos i_1 y i_n se denominan origen y destino de W respectivamente, y i_2, i_3, \dots, i_{n-1} sus nodos internos. El camino inverso de W lo denotamos como $W^{-1} = i_n e_{n-1} i_{n-1} \dots e_1 i_1$; y el entero $n - 1$ es la longitud de W . Un camino para el cual $i_1 = i_n$ es un camino cerrado o ciclo.

Si los nodos i_1, i_2, \dots, i_n son distintos, entonces W se llama trayectoria. Una trayectoria corta entre los nodos i y j es la trayectoria con el menor número de enlaces. La trayectoria corta a menudo se denomina distancia entre los nodos i y j y se denota por $d(i, j)$ o simplemente d_{ij} . Podemos tener varias trayectorias cortas de la misma longitud d entre un par de nodos. Por lo cual, esas trayectorias nunca contendrán bucles que se crucen a sí mismo.

En un grafo no dirigido $d_{ij} = d_{ji}$, es decir, la distancia entre los nodos i y j es la misma que la distancia entre los nodos j y i . En un grafo dirigido a menudo $d_{ij} \neq d_{ji}$. Además, en un grafo dirigido la existencia de una trayectoria desde el nodo i al nodo j no garantiza la existencia de la trayectoria desde j a i .

a) Centralidad de grado

Centralidad de grado cuenta para cada nodo el número de enlaces conectados al mismo, la función es:

$$C_D(i) = k_i \tag{6}$$

Veamos un ejemplo con un grafo no dirigido de 5 nodos y 6 enlaces (ver figura 3).

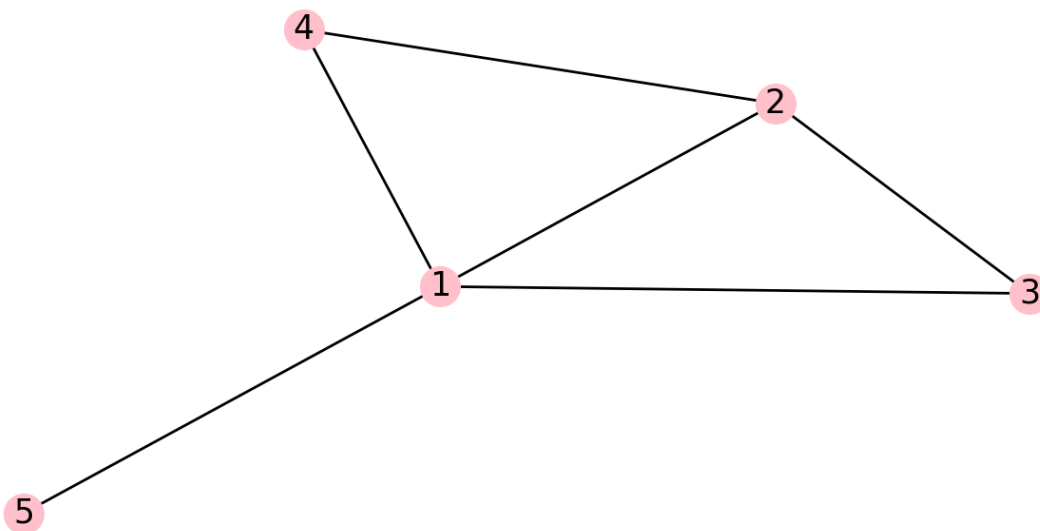


Figura 3. Grafo $G(5, 6)$ como ejemplo para las medidas de centralidad

En la tabla 2 podemos visualizar la centralidad de grado de cada nodo de nuestro ejemplo.

$C_D(1) = k_1 = 4$
$C_D(2) = k_2 = 3$
$C_D(3) = k_3 = 2$
$C_D(4) = k_4 = 2$
$C_D(5) = k_5 = 1$

Tabla 2. Centralidad de grado de los nodos del grafo $G(5, 6)$

A partir de la matriz de adyacencia, podemos también obtener la centralidad de grado de cada nodo de nuestra red. La matriz de adyacencia de nuestro ejemplo

es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la ecuación (5) llegamos a los mismos resultados conseguidos en la tabla 2. Por lo tanto, el nodo 1 con grado $k = 4$ es de mayor conectividad en la red.

b) Centralidad de cercanía

Centralidad de cercanía o proximidad calcula el recíproco de la suma de la longitud de las trayectorias más cortas entre el nodo i y todos los demás nodos en la red. Por lo tanto, cuanto más central es un nodo, más cerca está de todos los demás nodos.

La cercanía se puede definir como el recíproco de la lejanía [7]:

$$C_C(i) = \frac{N - 1}{\sum_{j=1}^{N-1} d(i, j)} \quad \forall i \neq j \quad (7)$$

donde

- $d(i, j)$ es la distancia de la trayectoria corta entre los nodos i y j definida en la sección 1.5;
- $N - 1$ es el número de nodos accesibles desde i .

Usando el ejemplo de la figura 3 calculemos la centralidad de cercanía para el nodo $i = 1$.

Con base a la definición de trayectoria corta las distancias entre el nodo 1 y los demás nodos son $d(1, 2) = 1$, $d(1, 3) = 1$, $d(1, 4) = 1$ y $d(1, 5) = 1$. Por lo que

$$\sum_{j=1}^{N-1} d(1, j) = 4$$

De esta manera

$$C_C(1) = \frac{N - 1}{\sum_{j=1}^{N-1} d(1, j)} = \frac{4}{4} = 1$$

veamos otro ejemplo ahora con el nodo $i = 5$.

Las distancias entre el nodo 5 y los demás nodos son $d(5, 1) = 1$, $d(5, 2) = 2$, $d(5, 3) = 2$ y $d(5, 4) = 2$. Por lo que

$$\sum_{j=1}^{N-1} d(5, j) = 7$$

De esta manera

$$C_C(5) = \frac{N - 1}{\sum_{j=1}^{N-1} d(5, j)} = \frac{4}{7}$$

En la tabla 3 podemos observar las centralidades de cercanía de los demás nodos usando la ecuación (7).

$C_C(1) = 1$
$C_C(2) = 4/5$
$C_C(3) = 4/6$
$C_C(4) = 4/6$
$C_C(5) = 4/7$

Tabla 3. Centralidad de cercanía de los nodos del grafo $G(5, 6)$

El valor más alto nos indica que el nodo 1 es el más cercano al resto de los nodos de la red cuando se inicia la trayectoria desde cualquiera de los otros 4 nodos restantes. Y el valor más bajo nos indica que el nodo 5 está más distante o menos accesible en comparación con otros nodos en la red (un nodo con centralidad de cercanía bajo se le conoce como nodo periférico).

c) Centralidad de vector propio

Centralidad de vector propio es una medida de la influencia de un nodo en una red. Una puntuación de vector propio alta en un nodo significa que ese nodo es importante en función de sus vecinos de igual de importantes en dicha centralidad [8]:

$$C_E \implies Ax = \lambda x \tag{8}$$

donde

- A es la matriz de adyacencia;
- λ es el valor propio dominante;

- x es el vector propio dominante normalizado correspondiente a λ .

El procedimiento para obtener el valor propio dominante y, por ende, su correspondiente vector propio será mediante el método de las potencias para calcular λ y x de la matriz de adyacencia de la figura 3.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de una matriz A de tamaño $n \times n$. λ_1 se llama valor propio dominante de A si

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (9)$$

El vector propio x correspondiente a λ_1 se llama vector propio dominante de A .

Diagonalizando la matriz de adyacencia de la figura 3 podemos obtener que los valores propios de A son $\lambda = 0$, $\lambda = 0.335$, $\lambda = -1.271$, $\lambda = -1.749$ y $\lambda = 2.685$. De acuerdo con la elección indicada en (9), tenemos como resultado que nuestro valor propio dominante es

$$\lambda_1 = 2.685$$

La ecuación (8) lo podemos reescribir de la forma $Ax - \lambda_1 x = 0$. De esta manera, podemos encontrar el vector propio x de λ_1 reduciendo $(A - \lambda_1)x$ mediante el método de Gauss-Jordan o eliminación gaussiana y normalizando x :

$$x = \begin{pmatrix} 0.583 \\ 0.524 \\ 0.412 \\ 0.412 \\ 0.217 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el resultado de la centralidad de vector propio de los 5 nodos de la figura 3 lo podemos visualizar en la tabla 4.

$C_E(1) = 0.583$
$C_E(2) = 0.524$
$C_E(3) = 0.412$
$C_E(4) = 0.412$
$C_E(5) = 0.217$

Tabla 4. Centralidad de vector propio de los nodos del grafo $G(5, 6)$

El nodo 1 tiene una puntuación alta porque tiene conexiones con otros nodos de puntuación similar. Es decir, el nodo 1 es el mayor influyente en la red.

Consideremos un suceso con dos personas: un comerciante y un político. Si aplicamos la centralidad de vector propio podemos determinar quién de los dos tiene mayor influencia. En este caso, el político se destaca como el individuo más influyente debido a sus conexiones con otras personas relevantes, como otros políticos, gobernadores, empresarios e incluso el presidente de la república. Estas conexiones indican que el político tiene acceso directo a un grupo diverso de personas clave en la red, lo que le otorga una posición estratégica para influir en las decisiones y flujos de información. Por otro lado, el comerciante podría tener conexiones significativas también, pero si estas no son tan variadas o influyentes como las del político, su centralidad de vector propio sería menor en comparación. En conclusión, el político es la persona más influyente en la red como lo acontecido con el nodo 1 de la red $G(5, 6)$.

d) Centralidad de intermediación

Centralidad de intermediación cuantifica el número de veces que un nodo actúa como puente a lo largo de la trayectoria corta entre otros dos nodos. Los nodos que tienen una alta probabilidad de ocurrir en una trayectoria más corta elegido al azar entre dos nodos elegidos al azar tienen una alta intermediación [9]:

$$C_B(i) = \sum_{i \neq j \neq l} \frac{\sigma(j, l|i)}{\sigma(j, l)} \quad (10)$$

donde

- $\sigma(j, l|i)$ es el número de trayectorias cortas entre los nodos j y l que pasan por el nodo i ;
- $\sigma(j, l)$ es el número de trayectorias cortas entre los nodos j y l .

Con el ejemplo de la figura 3 calculemos la centralidad de intermediación para el nodo $i = 1$.

Como $\sigma(j, l|i)$ y $\sigma(j, l)$ indican el número de trayectorias cortas, podemos afirmar que siempre existirá al menos una $d(i, j|i)$ y una $d(i, j)$. Asimismo, el valor de $\sigma(j, l)$ resultante para el nodo i será fija para el cálculo de los demás nodos y $\sigma(j, l|i) = 0$ cuando $d(j, l) < d(j, l|i)$. Por lo que, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(j, l|1) &= \sigma(2, 3|1) + \sigma(2, 4|1) + \sigma(2, 5|1) + \\ &\quad \sigma(3, 4|1) + \sigma(3, 5|1) + \sigma(4, 5|1) \\ &= 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma(j, l) &= \sigma(2, 3) + \sigma(2, 4) + \sigma(2, 5) + \\ &\quad \sigma(3, 4) + \sigma(3, 5) + \sigma(4, 5) \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1\end{aligned}$$

De esta forma

$$C_B(1) = \sum_{j, l \in N(G)} \frac{\sigma(j, l|1)}{\sigma(j, l)} = \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

En la tabla 5 podemos distinguir la centralidad de intermediación de los nodos restantes.

$C_B(1) = 7/2$
$C_B(2) = 1/2$
$C_B(3) = 0$
$C_B(4) = 0$
$C_B(5) = 0$

Tabla 5. Centralidad de intermediación de los nodos del grafo $G(5, 6)$

Como podemos apreciar, el nodo 1 es el nodo más importante para que otros dos nodos tengan que pasar en él para llegar rápidamente, dicho de otra manera, tendría más control sobre el grafo, porque las trayectorias cortas que conecten a dos nodos, pasarán muchas veces por el nodo 1. El caso de los nodos con intermediación nula se da con nodos no centrales (poca cercanía) y por su nula participación como puente de conexión para otros dos nodos.

Por lo visto, el nodo 1 es muy importante en el grafo debido a su grado, cercanía, intermediación y de influencia. La centralidad de cercanía y la centralidad de vector propio se calculan usando las trayectorias más cortas definidas al inicio de esta sección. A continuación, analizaremos otras dos medidas de centralidad cuyos resultados serán calculados con caminos.

e) Centralidad de subgrafo

Definimos la centralidad del subgrafo de un nodo i como la suma de caminos cerrados de diferentes longitudes en la red que comienzan y terminan en el nodo i . Como esta suma incluye caminos cerrados tanto triviales como no triviales, estamos considerando todos los subgrafos, es decir, acíclicos y cíclicos, respectivamente [10].

la centralidad de subgrafo calcula la participación de un nodo i en todos los subgrafos en la red incluyendo el subgrafo más grande:

$$C_S(i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(i)}{k!} \quad (11)$$

donde el momento espectral local $\mu_k(i)$ se define simplemente como la i -ésima entrada diagonal de la k -ésima potencia de la matriz de adyacencia A , es decir, todos los caminos cerrados de tamaño k en la red que comienzan y terminan en el nodo i :

$$\mu_k(i) = (A^k)_{ii} \quad (12)$$

La forma alternativa para conseguir la centralidad de subgrafo de un nodo i se requiere el uso de matriz exponencial para calcular e^A :

$$C_S(i) = (e^A)_{ii} \quad (13)$$

donde

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{N-1}}{(N-1)!} \quad (14)$$

Veamos la centralidad de subgrafo de nuestro ejemplo que hemos estado usando.

Aplicando (14) a la matriz de adyacencia A que calculamos en la centralidad de grado conseguimos que

$$e^A = \begin{pmatrix} 5.207 & 4.267 & 3.420 & 3.420 & 2.111 \\ 4.267 & 4.360 & 3.189 & 3.189 & 1.309 \\ 3.420 & 3.189 & 3.104 & 2.104 & 1.078 \\ 3.420 & 3.189 & 2.104 & 3.104 & 1.077 \\ 2.111 & 1.309 & 1.077 & 1.077 & 1.743 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, con base a la ecuación (13) la centralidad de subgrafo de los 5 nodos de nuestro ejemplo están mostrados en la tabla 6.

$C_S(1) = 5.207$
$C_S(2) = 4.360$
$C_S(3) = 3.104$
$C_S(4) = 3.104$
$C_S(5) = 1.743$

Tabla 6. Centralidad de subgrafo de los nodos del grafo $G(5, 6)$

Por consiguiente, el nodo 1 tiene la mayor centralidad de subgrafo, lo que sugiere que participa en más subgrafos importantes en comparación con otros nodos en la red.

f) Centralidad de comunicabilidad

Centralidad de comunicabilidad o centralidad de intermediación de comunicabilidad hace uso del número de caminos que conectan cada par de nodos como base a una medida de centralidad de intermediación [11].

La centralidad de comunicabilidad mide que tan fácil es llegar desde un nodo i hacia el nodo j utilizando todos las rutas disponibles entre dicho par de nodos en una red:

$$C_W(i) = \frac{1}{F_N} \sum_j \sum_l \frac{T_{jil}}{T_{jl}}, \quad j \neq l, \quad j \neq i, \quad l \neq i \quad (15)$$

donde

- $T_{jil} = (e^A)_{jl} - (e^{A+E})_{jl}$ es el número de caminos entre el nodo j y l que involucran al nodo i , con E una matriz de adyacencia resultante al remover todos los enlaces conectados al nodo i pero no el nodo en sí;
- $T_{jl} = (e^A)_{jl}$ es el número de caminos que inician en el nodo j y terminan en el nodo l ;
- $F_N = (N - 1)^2 - (N - 1)$ es un factor de normalización igual al número de términos en la suma

La centralidad de comunicabilidad de los 5 nodos de nuestro grafo están en la tabla 7.

$C_W(1) = 0.810$
$C_W(2) = 0.473$
$C_W(3) = 0.251$
$C_W(4) = 0.251$
$C_W(5) = 0.064$

Tabla 7. Centralidad de comunicabilidad de los nodos del grafo $G(5, 6)$

Por lo tanto, el nodo 1 es un punto crítico para la comunicación entre otros nodos en la red, ya que muchos pares de nodos dependen de él para su conectividad.

g) Coeficiente de agrupamiento local

El coeficiente de agrupamiento local o coeficiente de clustering local de un nodo i , cuantifica qué tanto está de agrupado, interconectado o vinculado con sus nodos vecinos. Con el grado k_i del nodo i el coeficiente de agrupamiento local se define como:

$$c(i) = \frac{2T_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad k_i \geq 2 \quad (16)$$

donde

- T_i es el número de triángulos formados entre los vecinos del nodo i .

De la figura 3 realicemos algunos cálculos de (16) para algunos nodos i .

Con el nodo $i = 1$ vemos que $T_1 = 2$ y $k_1 = 4$. Por ende

$$c(1) = \frac{2T_1}{k_1(k_1 - 1)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ahora para el nodo $i = 3$ observamos que $T_3 = 1$ y $k_3 = 2$. De esta forma

$$c(3) = \frac{2T_3}{k_3(k_3 - 1)} = \frac{2}{2} = 1$$

En la tabla 8 podemos observar los resultados de los nodos restantes de la figura 3

$c(1) = 1/3$
$c(2) = 2/3$
$c(3) = 1$
$c(4) = 1$
$c(5) = 0$

Tabla 8. Coeficiente de agrupamiento local de los nodos del grafo $G(5, 6)$

Con el caso del nodo 5 su grado es $k_5 = 1$. Además, $T_5 = 0$ porque solo tiene un único nodo vecino que es el nodo 1 y no existe ninguna triangulación con un tercer nodo. En consecuencia, la ecuación (16) se indetermina y para evitar eso $c(5)$ se le asigna el valor 0.

En resumen, $c(i)$ mide la densidad de enlaces locales de una red: cuanto más densamente interconectada está la vecindad del nodo i , mayor es su coeficiente de agrupamiento local. De igual forma $0 \leq c(i) \leq 1$ como en el caso de la densidad de una red de la sección 1.3.

1.6. Nodos centrales y periféricos

En esta sección identificaremos y clasificaremos los nodos centrales y periféricos de un grafo conexo G mediante las definiciones de excentricidad, diámetro y radio.

La excentricidad calcula la trayectoria máxima de un nodo i en un grafo:

$$e(i) = \max\{d(i, j) : j \in N(G)\} \quad (17)$$

El diámetro de un grafo es la trayectoria máxima entre cualquier par de nodos. En otras palabras, es la excentricidad máxima:

$$\text{diam}(G) = \max\{d(i, j) : i, j \in N(G)\} = \max\{e(i) : i \in N(G)\} \quad (18)$$

El radio de un grafo es la excentricidad mínima, es decir, la distancia mínima de un nodo:

$$r(G) = \min\{d(i, j) : i, j \in N(G)\} = \min\{e(i) : i \in N(G)\} \quad (19)$$

De acuerdo con los conceptos de excentricidad, diámetro y radio, definiremos el centro y la periferia de un grafo.

El centro de un grafo es el conjunto de nodos cuya excentricidad coincide con el radio.

$$ce(G) = \{i \in N(G) : e(i) = r(G)\} \quad (20)$$

La periferia de un grafo es el conjunto de nodos cuya excentricidad coincide con el diámetro de la red

$$pe(G) = \{i \in N(G) : e(i) = \text{diam}(G)\} \quad (21)$$

En la figura 4 mostramos un grafo que será de ejemplo para identificar (20) y (21).

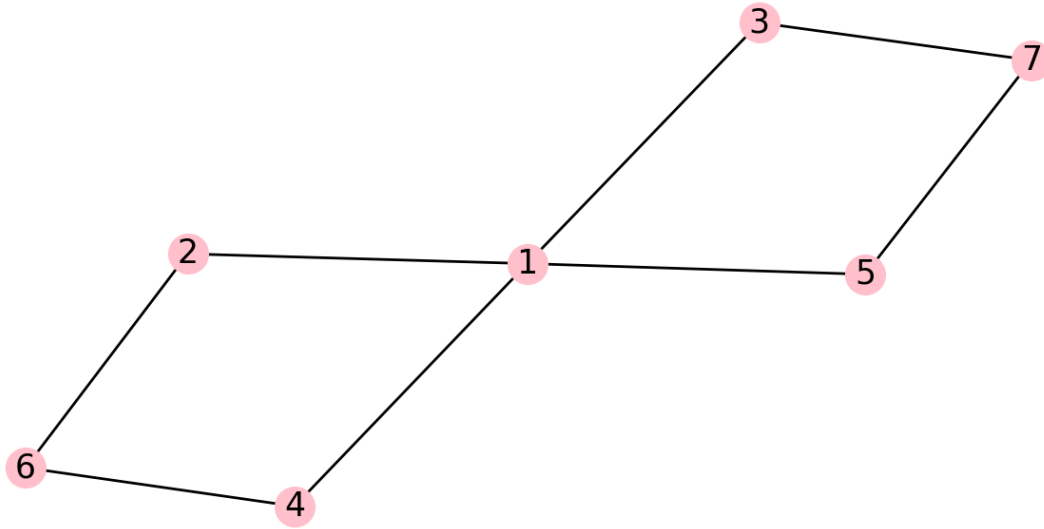


Figura 4. Grafo $G(7,8)$ como ejemplo para los nodos centrales y periféricos

En la tabla 9 visualizamos los resultados de excentricidad para los 7 nodos de nuestro ejemplo.

Nodo	Excentricidad
1	2
2	3
3	3
4	3
5	3
6	4
7	4

Tabla 9. Excentricidad del grafo $G(7,8)$ usando la ecuación (17)

De acuerdo con la tabla 9 y con las ecuaciones (18) y (19), el diámetro de nuestro grafo es 4 y el radio es 2.

Teniendo los cálculos de excentricidad, diámetro, radio y de acuerdo con (20) y (21) el nodo 1 es central y los nodos 6 y 7 son periféricos (ver figura 5).

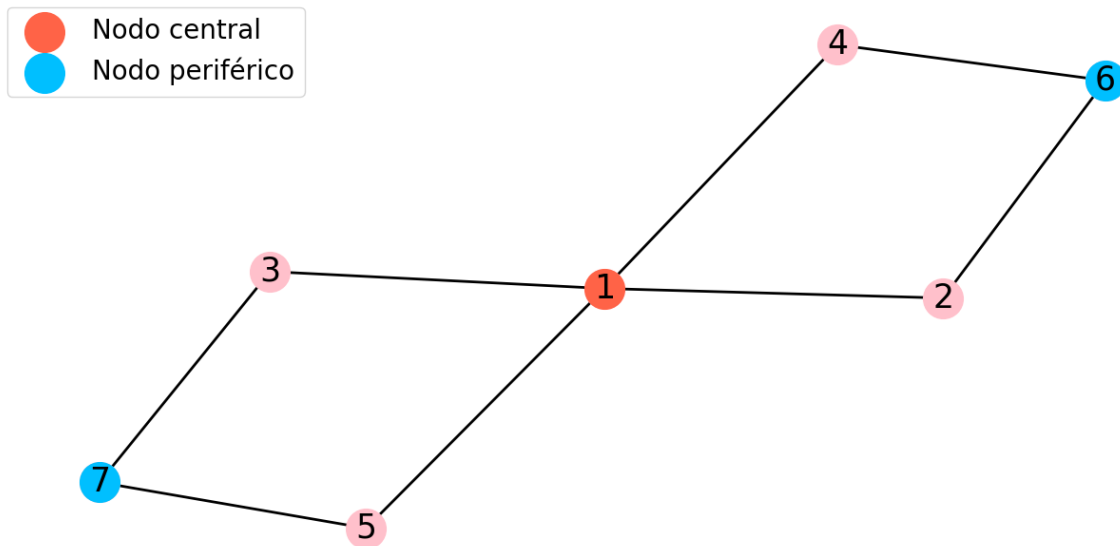


Figura 5. Nodos centrales y periféricos de la figura 4

hacemos hincapié en la diferencia entre la definición de nodos centrales y la centralidad de cercanía, que podrían confundirse con la centralidad de cercanía. La centralidad de cercanía vista en la sección de medidas de centralidad es un concepto distinto a los nodos centrales aún utilizando la definición de distancias entre un nodo i y un nodo j en ambos casos. En ocasiones si un nodo i resulta ser el de mayor valor en la centralidad de cercanía, ese nodo podría resultar ser un nodo central. Sin embargo, no siempre se cumple la condición ni el recíproco del mismo.

En la centralidad de subgrafo y de comunicabilidad presentamos cálculos y/o resultados obtenidos mediante el uso de un lenguaje de programación debido a que el procedimiento algebraico para la estimación de las medidas de centralidad de un nodo es muy extensa. Por lo cual, en el capítulo 2 explicaremos el uso de Python y NetworkX para calcular no sólo la centralidad de subgrafo y de comunicabilidad de una red sino a todos los cálculos realizados en las medidas de centralidad de esta sección.

Capítulo 2

Redes complejas en Python con NetworkX

A lo largo de este capítulo, nos enfocaremos en la definición de las funciones de redes complejas utilizando la librería NetworkX de Python. Esta herramienta nos permitirá crear y estructurar redes, así como realizar el análisis computacional de redes mediante los modelos matemáticos presentados en el primer capítulo.

2.1. Programación básica con redes

Para la programación básica de redes y de las funciones a definir en las siguientes secciones se requiere que tengamos instalados e importados las siguientes librerías:

- NetworkX
- Xlrd
- Webbrowser
- Scipy
- Matplotlib
- Folium
- Numpy

Las librerías de NetworkX y Matplotlib son las principales que se utilizarán para la programación y gráficas de redes.

La creación de una red conexa o disconexa G se realiza con la función

- `G=nx.Graph()`

Si deseamos trabajar con redes dirigidas podemos optar con las funciones

- `G=nx.DiGraph()` o `G=nx.MultiDiGraph()`

Las tres funciones previas son para trabajar con grafos simples. En nuestro caso, y por lo mencionado en la sección 1.2, trabajaremos solamente con redes no dirigidas y simples.

Para agregar los nodos N y los enlaces L (que serán listas en Python) a nuestra red G utilizaremos las funciones

- `G.add_nodes_from(N)` y `G.add_edges_from(L)`

Luego, necesitaremos la función

- `nx.draw(G)`

para dibujar nuestra red. “`nx.draw`” tiene la opción de agregar parámetros (además del parámetro G) que nosotros podemos utilizar para el color de nombre del nodo, tamaño del nodo, color del enlace, grosor del enlace, entre otros [12].

Finalmente, la función

- `plt.show()`

nos permitirá graficar y visualizar nuestra red a través de una ventana o imagen dependiendo del “editor de código fuente” que estemos utilizando.

En consecuencia, si $N = 5$ y $L = 7$, entonces conseguiremos de forma similar la siguiente red:

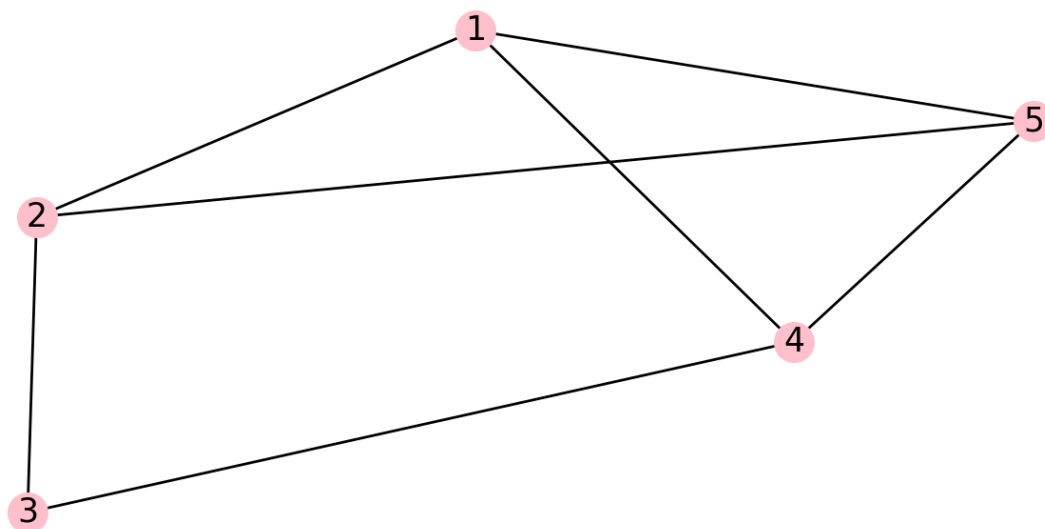


Figura 6. Red resultante de la programación básica en Python con NetworkX

Esta forma de crear redes es la más básica y sencilla de realizar, en las siguientes secciones definiremos algunos modelos de redes para crearlos de forma más rápida y eficiente.

2.2. Datos de Excel y NetworkX

A continuación, nos centraremos a como leer datos en Excel empleando la librería Xlrd y como estructurar esos datos con NetworkX.

Posterior a la instalación e importación de la librería Xlrd, lo que haremos para leer los datos de Excel es crear una “carpeta de proyecto” en nuestro explorador de archivos, dentro de esa carpeta guardaremos el archivo de Excel que utilizaremos; el archivo tendrá como nombre “PruebaNx”, y finalmente importaremos el archivo en python. Tengamos en cuenta que cuando guardemos el archivo, su formato debe ser “Libro de Excel 97-2003 (*.xls)”. En caso contrario, nunca conseguiremos el resultado de esta sección.

La función para importar el archivo “PruebaNx” en python es de la forma:

- `Imp = 'PruebaNx.xls'`

Después de importar el archivo, abriremos el archivo de Excel mediante la función

- `archivo = xlrd.open_workbook(Imp)`

Luego de abrir el archivo, tenemos que seleccionar la hoja de trabajo donde estructuraremos la base de datos en forma de una red . En la figura 7 podemos observar un ejemplo de como se debe estructurar la base de datos en Excel en la que cada celda de la tabla representa un nodo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	México	Canadá							
2	Canadá	Colombia							
3	Colombia	Japón							
4	Japón	Argentina							
5	China	Rusia							
6	Perú	Ecuador							
7	Panamá	México							
8	Canadá	Rusia							
9	Argentina	Perú							
10	España	Uruguay							
11	Ecuador	España							
12	Uruguay	Canadá							
13	Panamá	China							
14	Ecuador	Canadá							
15	China	Argentina							
16									
17									
18									

Figura 7. Ejemplo de estructura de los datos en Excel

La función para seleccionar la hoja de trabajo es de la forma:

- `hoja = archivo.sheet_by_index(0)`

El valor 0 se refiere a la hoja 1 de la base de datos que visualizamos en la figura 7 (en Python la enumeración comienza desde 0).

Posteriormente, comenzaremos a estructurar la base de datos con NetworkX donde los nodos corresponden al nombre de los países y conectaremos por un enlace fila por fila (como está estructurado en la hoja de Excel) a esos nodos. Finalmente graficaremos la red creada con Matplotlib.

En la figura 8 apreciaremos la red resultante de la estructuración de datos con NetworkX

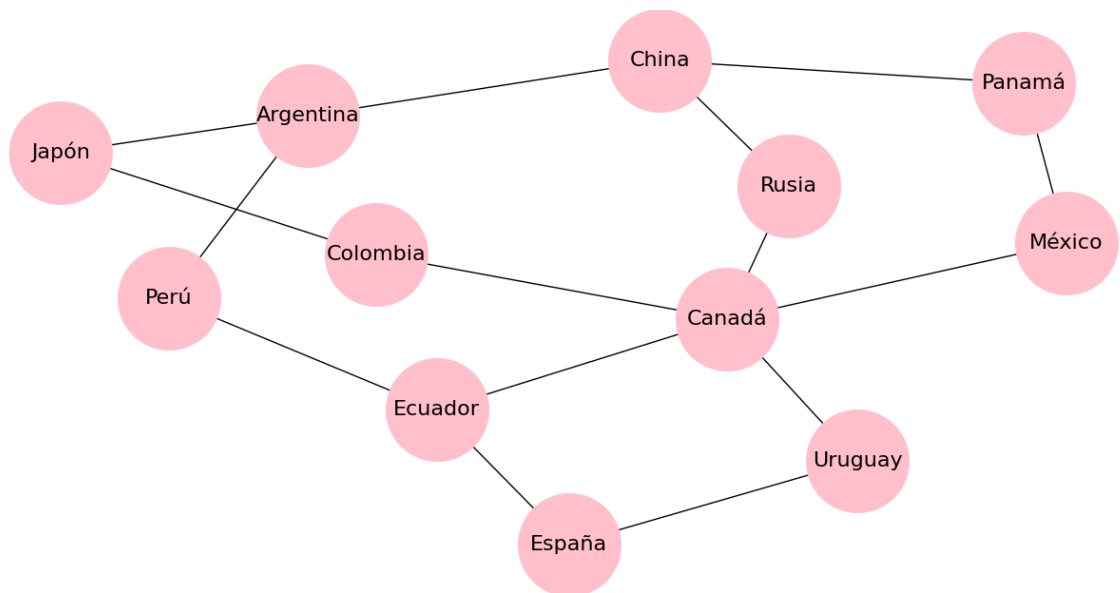


Figura 8. Red resultante empleando Excel y NetworkX

El aprendizaje de esta sección es de gran relevancia con el objetivo de manipular y estructurar bases de datos de Excel a través de Python con NetworkX. Además, al dominar la programación de esta sección nosotros vamos a tener nociones para modelar un sistema real mediante una base de datos.

2.3. Redes mediante un mapa interactivo

En esta sección, vamos a crear y estructurar redes por medio de un mapa interactivo con la librería de Folium.

La creación y diseño de una red en un mapa interactivo lo realizaremos de dos maneras. La primera la llamaremos “método de dibujo” y la segunda “método

manual”. El “método de dibujo” nos proporcionará unos complementos dentro del mapa para agregar, quitar y modificar símbolos gráficos y líneas sobre el mapa utilizando el cursor, y en el “método manual” nosotros incorporaremos las funciones para el agregado específico de nodos y enlaces sobre el mapa.

La librería de Folium nos proporcionará una variedad de funciones y lo más importante el mapa interactivo que mostraremos en los dos métodos. Aparte, necesitaremos una segunda paquetería llamada Webbrowser que nos permitirá abrir y visualizar el mapa interactivo por medio de un navegador web.

a) Método de dibujo

En este primer método que es muy sencillo de realizar, abriremos el mapa interactivo mediante la función:

- `mapa = folium.Map(location=[23.6260333,-102.5375005],zoom_start=5)`

cuya ubicación que nosotros queremos visualizar el mapa lo emplearemos con el parámetro “location” junto con las coordenadas latitud y longitud de un lugar específico. El parámetro “Zoom_start” es básicamente la ampliación del mapa por la que queremos percibir mejor.

Después, emplearemos la función

- `Dibujo = plugins.Draw()`

para utilizar los complementos de la paquetería de folium.

Luego, necesitaremos

- `Dibujo.add_to(mapa)`

a fin de agregar los complementos “plugins.Draw()” sobre el mapa interactivo y así seremos capaces de dibujar símbolo gráficos y líneas después de ejecutar el programa.

Finalmente, para mostrar el mapa necesitaremos dos cosas, la primera es definir el nombre del mapa con la cual se guardara en nuestra “carpeta de proyecto” o en el lugar donde guardemos el programa. El nombre del mapa lo nombraremos como “Mapa_Prueba.html”. Y la segunda es mostrar el mapa con su nombre ya definido con la ayuda de las funciones

- `mapa.save("Mapa_Prueba.html")`
- `webbrowser.open("Mapa_Prueba.html")`

donde la primera función sirve para guardar el Mapa y la segunda función nos permitirá visualizar el mapa por medio de un navegador que tengamos predeterminado.

En la figura 9 visualizaremos un mapa interactivo y los complementos que nos permitirá dibujar.

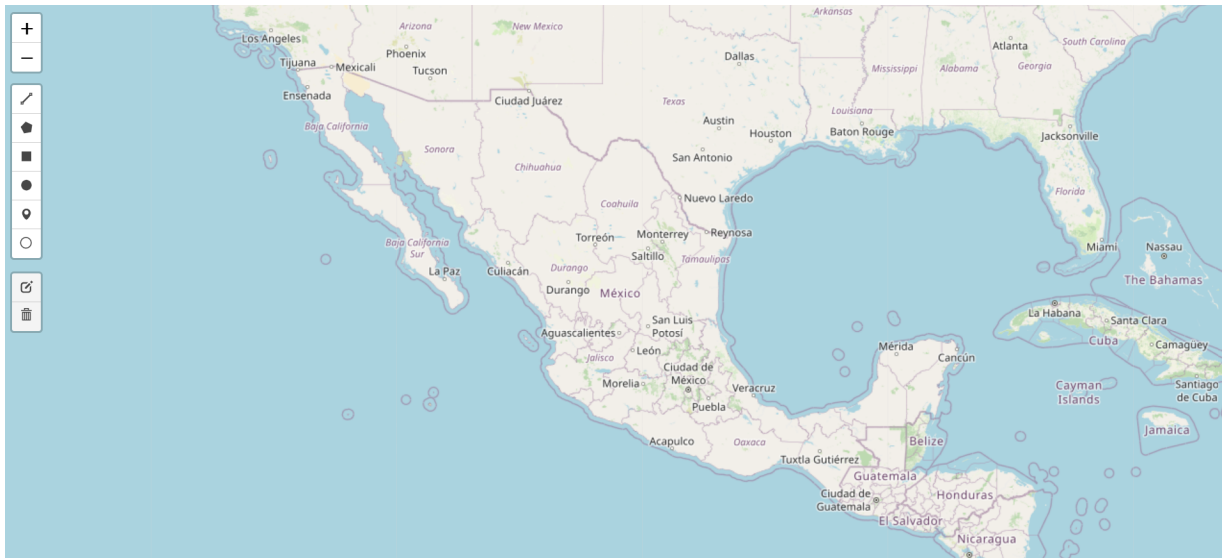


Figura 9. Mapa interactivo de la paquetería Folium

Como se puede apreciar en la figura 9, el mapa interactivo presenta similitudes con Google Maps. En la parte izquierda de la interfaz, encontramos herramientas que nos permiten ampliar y reducir el mapa, así como dibujar líneas, polígonos, rectángulos, círculos y añadir marcadores. Además, ofrece la capacidad de modificar los símbolos gráficos y las líneas, así como borrarlos individualmente o todos a la vez con un simple clic del cursor.

b) Método manual

En este segundo método, agregaremos de forma específica los nodos y enlaces sobre el mapa interactivo similar a NetworkX.

El agregados de los nodos se realiza de la siguiente forma:

- `folium.Marker(location=C, icon=plugins.BeautifyIcon(number=E, backgroundColor="pink")).add_to(mapa)`

y el agregado de los enlaces se incorporará por medio de la función

- `folium.PolyLine(locations=C, color="black").add_to(mapa)`

donde la variable “C” corresponde a las coordenadas latitud y longitud donde vamos a colocar los nodos y a la conexión de los enlaces entre los nodos, y la variable “E” es la enumeración de los nodos.

Como resultado, en la figura 10 observaremos los nodos conectados por enlaces sobre el mapa interactivo.

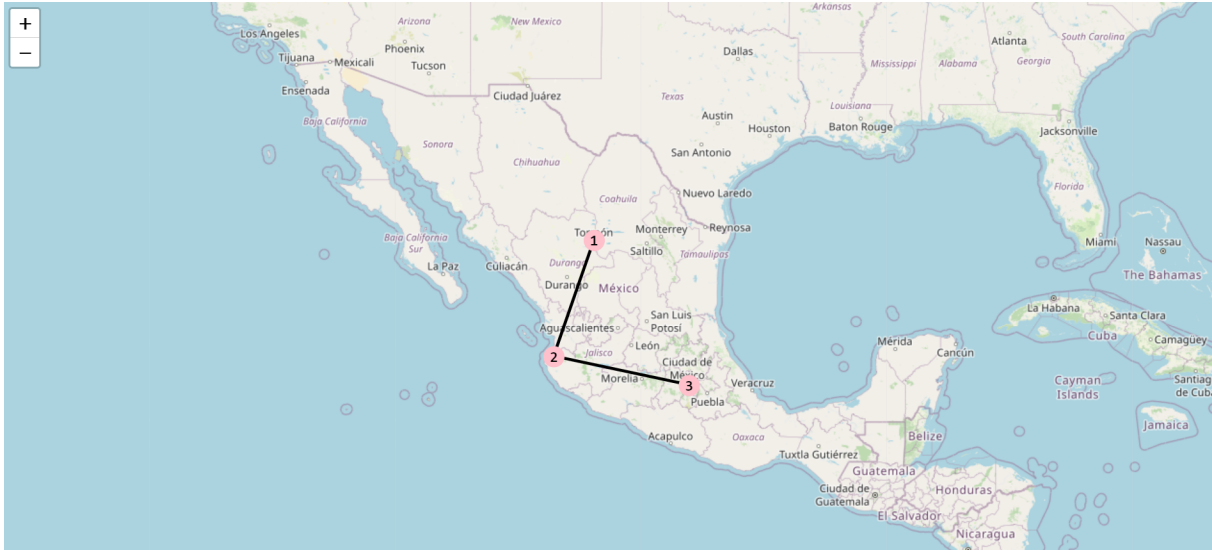


Figura 10. Creación de una red sobre un mapa interactivo

La finalidad de esta sección es que nosotros tengamos otra alternativa para crear, estructurar y dibujar redes de una forma mejor en Python. En consecuencia, con la librería de Folium nosotros seremos capaces de sacarle provecho para modelar sistemas o redes del mundo real empleando lo que se estudió en las secciones 2.1 y 2.2.

Con el objetivo de obtener una comprensión mejor de los sistemas y redes del mundo real, en las próximas dos secciones definiremos dos modelos de redes altamente relevantes que abordan la estructura, conectividad y características de dichos sistemas. Posteriormente, en la sección 2.7, analizaremos algunas redes del mundo real utilizando estos modelos mencionados.

2.4. Redes aleatorias con los modelos de Gilbert y Erdős-Rényi

El estudio de las redes aleatorias alcanzó prominencia gracias al trabajo fundamental de Pál Erdős (1913-1996) y Alfréd Rényi (1921-1970). En su primer

artículo publicado en 1960, fusionaron la teoría de la probabilidad y la combinatoria con la teoría de grafos, estableciendo la teoría de grafos aleatorios, una nueva rama de las matemáticas [13].

El modelo de red aleatoria fue introducido de forma independiente por Edgar Nelson Gilbert (1923-2013) [14] el mismo año en que Erdős y Rényi publicaron su primer artículo sobre el tema. Sin embargo, el impacto del trabajo de Erdős y Rényi es de tal importancia que se les considera como los fundadores de la teoría de grafos aleatorios.

El modelo de Gilbert, $G(N, p)$, fija la probabilidad p de que dos nodos estén conectados con $0 < p \leq 1$. Si un valor entre 0 y 1 generado de forma aleatoria es menor a p , entonces se conecta un enlace entre un par de nodos; en caso contrario, no hay una conexión entre el par de nodos y repetimos la condición anterior para todos los posibles pares de nodos $N(N - 1)/2$. Y El modelo de Erdős-Rényi, $G(N, L)$, fija el número total de enlaces L que se conectarán de forma aleatoria entre todos los posibles pares de nodos $N(N - 1)/2$.

NetworkX nos proporciona dos funciones para crear redes aleatorias mediante el modelo de Gilbert y Erdős-Rényi:

- `nx.gnp_random_graph(N, p)` y `nx.gnm_random_graph(N, L)`

Estos dos modelos nos proporcionarán una forma para crear y estructurar redes de manera computacional utilizando Python.

En la figura 11 observamos una red aleatoria ya sea usando el modelo de Gilbert, $G(N, p)$, o el modelo de Erdős-Rényi, $G(N, L)$.

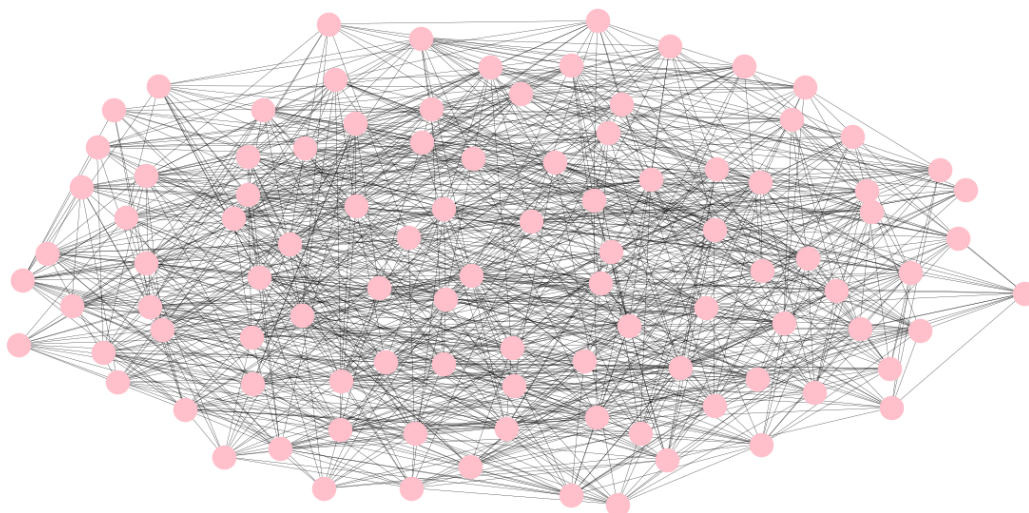


Figura 11. Red aleatoria con el modelo de Gilbert

Tengamos en cuenta que si el valor de p es cercano o próximo a 1, entonces la figura 11 se aproximará a una red completa, o en caso contrario, si p es cercano a 0, entonces la red aleatoria sería dispersa. En las siguientes secciones nos dedicaremos solamente a utilizar el modelo $G(N, p)$ debido a su facilidad en el estudio dentro del campo de la Probabilidad y de la Estadística.

2.5. Redes de escala libre con el modelo de Barabasi

Como consecuencia de las redes aleatorias, ahora estudiaremos un modelo de red diferente a $G(N, p)$ y $G(N, L)$. Este modelo de red es fundamental por su estructuración similar a la mayoría de sistemas reales y por la presencia de nodos con grado mucho mayor que los demás o unos pocos nodos que están altamente conectados a otros nodos en la red.

El modelo de red de escala libre consta de otro tipo de modelo de red y difiere con las redes aleatorias en dos características importantes:

- Crecimiento: Comenzando con un pequeño número m_0 de nodos, en cada paso de tiempo agregamos un nuevo nodo con m ($\leq m_0$) enlaces que vinculan el nuevo nodo con m nodos diferentes ya presentes en la red.
- Vínculo preferencial: Al elegir los nodos a los que se conecta el nuevo nodo, asumimos que la probabilidad Π de que un nuevo nodo se conecte al

nodo i depende del grado k_i , tal que

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (22)$$

Después de t pasos de tiempo, las dos características del modelo de red de escala libre da como resultado una red con $N = t + m_0$ nodos y $m_0 + mt$ enlaces [15]. Este algoritmo se le conoce como el modelo de Barabasi o red de Barabasi, $G(N, m)$. Si m no es pequeño con $m < N$, entonces $G(N, m)$ perdería su estructura como red de escala libre y crearemos ya sea una red completa o una red de tipo estrella (star graph) [16]. En consecuencia, es necesario una m muy pequeña para generar una red de escala libre (recomendable que $1 \leq m \leq 5$).

La creación y estructura de una red de Barabasi empleando NetworkX es con la función:

- `nx.barabasi_albert_graph(N, m)`

Si m no satisface $1 \leq m < N$ o el número inicial de nodos en el grafo m_0 no satisface $m \leq m_0 \leq N$, entonces la función “`nx.barabasi_albert_graph`” nos asignará un error en nuestro programa.

En la figura 12 observamos una red de escala libre de Barabasi, $G(N, m)$.

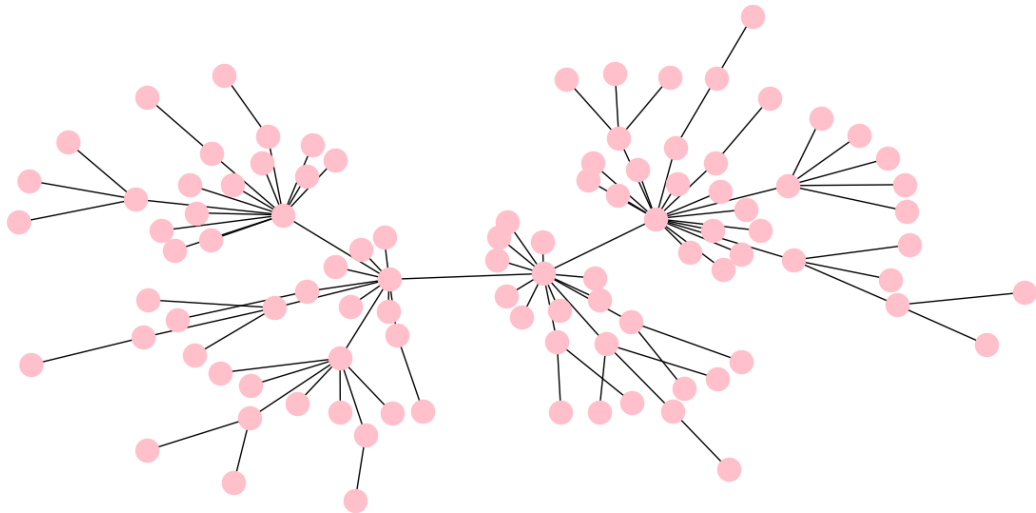


Figura 12. Red de escala libre con el modelo de Barabasi

Definidas las redes aleatorias y las redes de escala libre, nosotros nos dedicaremos a estudiar estas dos redes aplicando los modelos matemáticos vistos en el

capítulo 1, no obstante, en el tópic de distribución de probabilidad de grado nos concentraremos en como conseguir p_k promedio a través de un número determinado de realizaciones y, con base a p_k promedio, seremos capaces de analizar la estructura y conectividad de sistemas o redes del mundo real similares a los modelos de redes aleatorias y redes de escala libre. Igualmente, presentaremos algunas redes del mundo real que serán parecidas a $G(N, p)$ y a $G(N, m)$. Por otro lado, el modelos de red $G(N, m)$ siempre se creará de forma conexas, en cambio, los modelos de red aleatoria $G(N, p)$ y $G(N, L)$ se crearán ya sean de forma conexas o disconexas (eso dependerá de los parámetros p y L).

2.6. Grado, densidad y matriz de adyacencia

A partir de esta sección hasta terminar con este capítulo comenzaremos a definir los modelos matemáticos del capítulo 1 y aplicarlos computacionalmente con NetworkX.

El grado k_i de un nodo i lo podemos calcular con la función:

- `G.degree(i)`

También podemos cuantificar el número total de enlaces de G conforme a la ecuación (1) mediante la función:

- `G.number_of_edges()`

La ecuación (3) correspondiente a la densidad de una red G lo estimaremos de la forma:

- `nx.density(G)`

Finalmente, la estimación de la matriz de adyacencia de G se realizará con la función:

- `nx.to_numpy_array(G)`

Si consideramos que G sea la red de la figura 3, entonces aplicando las funciones de NetworkX de esta sección conseguiremos los grados de cada nodo que se encuentran en la tabla 2, su matriz de adyacencia que se encuentra en la sección 1.5, el número total de enlaces L y su densidad D .

2.7. Distribución de probabilidad de grado promedio

En el capítulo 1 mencionamos que la distribución de probabilidad de grado p_k calcula la probabilidad de que un nodo seleccionado de manera aleatoria tenga grado k . En esta cuestión vamos a emplear la distribución de probabilidad de grado de una red mediante un número determinado de repeticiones o ciclos r . Nos referiremos a r como realizaciones. Posteriormente calcularemos el promedio de ellos. Esta medición es un proceso estocástico.

Dado un número determinado de realizaciones r , la distribución de probabilidad de grado promedio, \tilde{p}_k , será cuantificado mediante

$$\tilde{p}_k = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r p_k^i \quad (23)$$

cuyas N_k generadas por los p_k^i nos proporcionará el número de nodos con grado k de \tilde{p}_k , denominada como \tilde{N}_k .

El resultado de \tilde{p}_k nos proporcionará como es la estructuración y conectividad de una red, es decir, identificaremos como es la conectividad de los nodos y visualizaremos si hay existencia o no de los nodos con mayor conectividad (conocidos como *hubs* en Inglés).

Apliquemos la distribución de probabilidad de grado promedio para una red aleatoria y relacionemos su \tilde{p}_k con la distribución binomial y la distribución Poisson dado que \tilde{p}_k tienden a ser a una de esas dos distribuciones. De igual forma, calculemos \tilde{p}_k para una red de escala libre y comparémosla con una ley de potencia.

a) Red aleatoria

En una realización dada r , la probabilidad promedio de que un nodo seleccionado de forma aleatoria tenga grado k es la distribución binomial:

$$\tilde{p}_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (24)$$

Para redes con N grande ($N = 10^3$, $N = 10^4$, por decir algunos), la distribución de probabilidad de grado promedio tienen a ser una distribución Poisson de la

forma

$$\tilde{p}_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (25)$$

donde

$$\langle k \rangle = \frac{\sum_{k=1}^w \tilde{N}_k \tilde{p}_k}{\sum_{k=1}^w \tilde{p}_k}$$

El último valor de la suma w es la longitud ya sea de \tilde{p}_k o de \tilde{N}_k . La medida $\langle k \rangle$ es denominada como la media aritmética ponderada [17].

Efectuemos el cálculo de \tilde{p}_k por medio de las funciones e instrucciones de NetworkX.

Para conseguir N_k lo efectuaremos a través de la matriz de adyacencia. Es decir, teniendo la matriz de adyacencia A , aplicaremos la ecuación (5) para obtener el grado de los nodos de la forma:

- GradoNodos=[sum(filas) for filas in A]

Y posteriormente, con la instalación de importación de la librería Numpy emplearemos la función:

- np.bincount(GradoNodos)

para el cálculo de N_k . Asimismo, al dividir N_k por el numero de nodos N vamos a obtener el cálculo de la distribución de probabilidad de grado, es decir, p_k . Repetimos el calculo de N_k y p_k r veces y de esta manera conseguiremos \tilde{p}_k y \tilde{N}_k .

Para finalizar, con la librería de Scipy estimaremos las ecuaciones (24) y (25) de la forma

- poisson.pmf(\tilde{N}_k , $\langle k \rangle$)
- binom.pmf(\tilde{N}_k , $N - 1$, p)

respectivamente y graficaremos \tilde{p}_k , la distribución binomial y la distribución Poisson.

En la figura 13 observamos dos distribuciones de probabilidad de grado promedio de una red aleatoria con N pequeña y grande, respectivamente, y su comparación con la distribución binomial y Poisson.

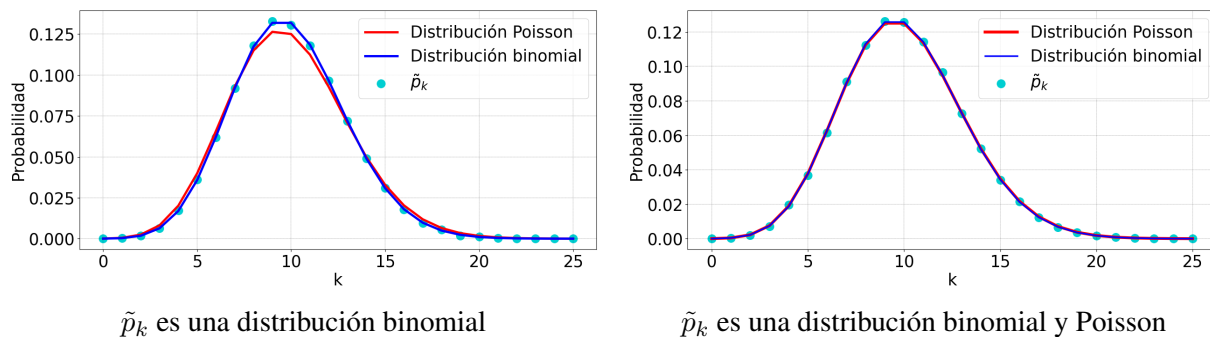
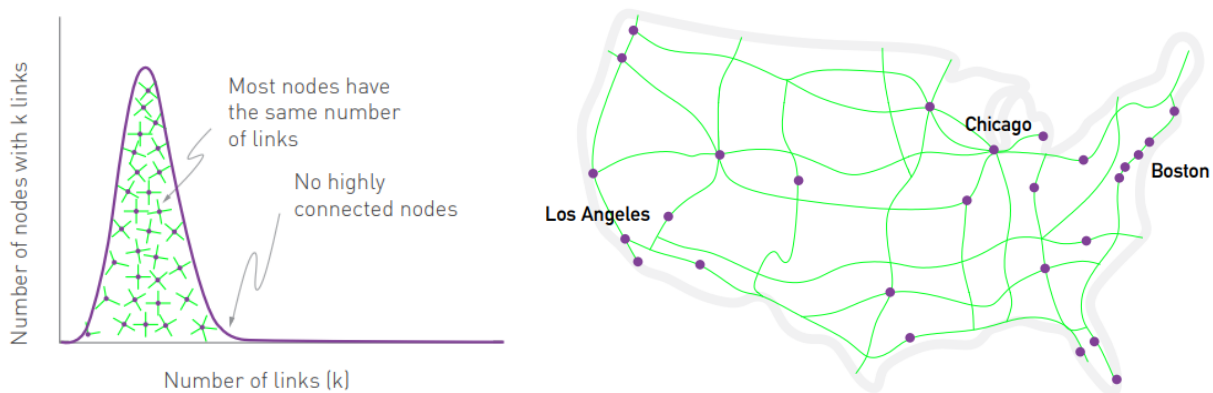


Figura 13. Comparación de la distribución de probabilidad de grado promedio de una red aleatoria con la distribución binomial y Poisson

Tengamos en cuenta que si el valor de p crece, entonces la red es más densa y en consecuencia el punto máximo de la distribución Poisson se aplanará. Para el caso de N pequeña ($N = 10^2$ u otro valor pequeño) la distribución Poisson se desviará de forma significativa de la distribución de probabilidad de grado promedio (esto se aplica independientemente del valor de p). Por lo que, con redes pequeñas necesitaremos solamente la distribución binomial.

En la figura 14 podemos comparar que la distribución de probabilidad de grado promedio de una red aleatoria proporciona la estructuración de un sistema real; la mayoría de los nodos tienen el mismo número de enlaces y sin nodos altamente conectados. Un ejemplo de red real se parece un poco a la red de carreteras de Estados Unidos de América en la que los nodos son ciudades y los enlaces son las principales carreteras; No hay ciudades con cientos de carreteras y ninguna ciudad está desconectada del sistema de carreteras.

Figura 14. Similitud de una red aleatoria con la red de carretera de Estados Unidos de América



Fuente: Pósfai, M., y Barabasi, A.L. (2016), Network Science. Obtenido de <http://networksciencebook.com/chapter/4#hubs>

b) Red de escala libre

La distribución de probabilidad de grado promedio de una red de escala libre se aproxima muy bien a una ley de potencia (power law):

$$\tilde{p}_k \approx k^{-\gamma} \tag{26}$$

donde γ es un exponente de grado.

Al graficar en escala logarítmica $\ln(k)$ contra $\ln(\tilde{p}_k)$, el comportamiento de la distribución de probabilidad de grado promedio se aproxima a una línea recta $-\gamma k + b$ donde γ es la pendiente de dicha línea recta.

El calculo de la ley de potencia lo emplearemos tal como está en la ecuación (26) empleando la sintaxis correcta de Python.

En la figura 15 visualizaremos la distribución de probabilidad de grado promedio de una red de escala libre $G(N, m)$ y su similitud con la ley de potencia.

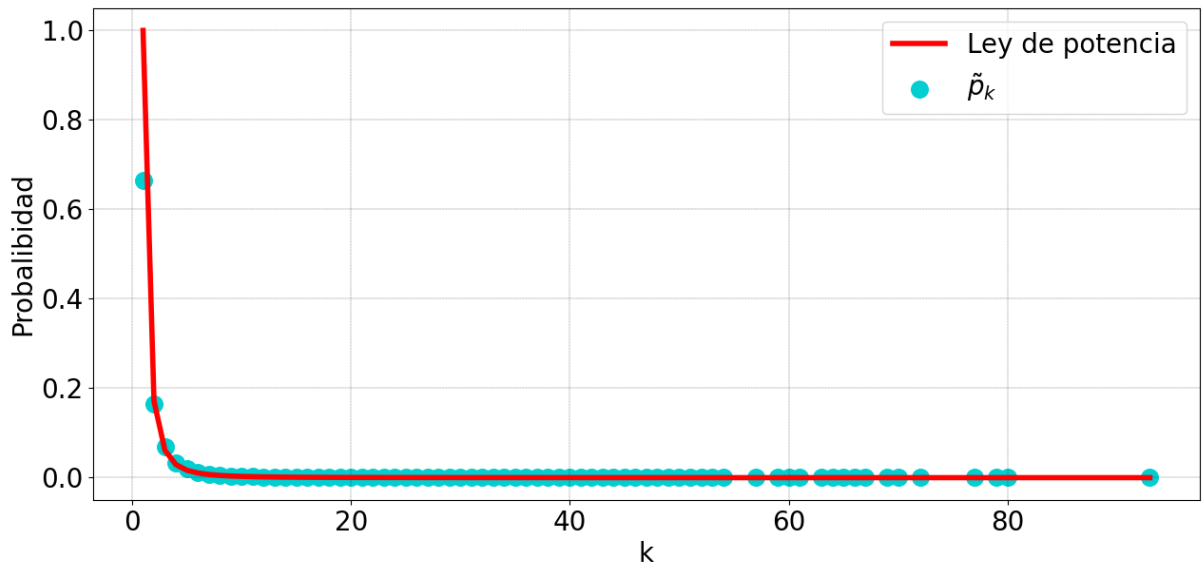
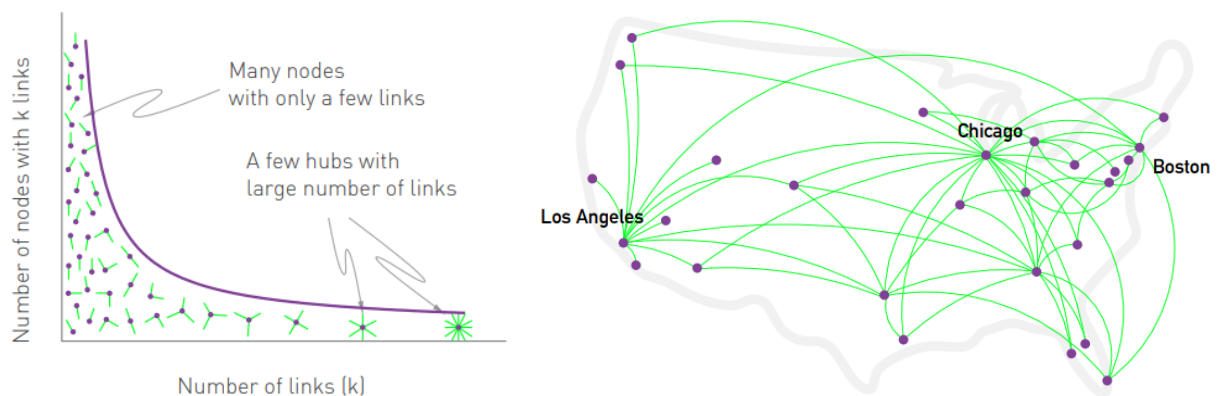


Figura 15. Comparación de la Distribución de probabilidad de grado promedio de una red de escala libre con la ley de potencia

Lo característico de una red de escala libre \tilde{p}_k es por la fácil visualización de la mayoría de nodos que tienen pocos enlaces. Estos numerosos nodos se mantienen conectados por unos pocos nodos altamente conectados.

En la figura 16 apreciamos que una red de escala libre se parece a una red de tráfico aéreo de Estados Unidos de América, cuyos nodos son los aeropuertos y los enlaces son los vuelos directos entre ellos; la mayoría de los aeropuertos son pequeños, con solo unos pocos vuelos. Sin embargo, tenemos algunos aeropuertos muy grandes, como Chicago o Los Ángeles, que actúan como centros principales que conectan muchos aeropuertos más pequeños.

Figura 16. Similitud de una red de escala libre con la red de tráfico aéreo de Estados Unidos de América



Fuente: Pósfai, M., y Barabasi, A.L. (2016), Network Science. Obtenido de <http://networksciencebook.com/chapter/4#hubs>

La red de carreteras y la red de tráfico aéreo de Estados Unidos de América son algunos de los ejemplos de redes reales. En la tabla 10 podemos observar y comparar 5 diferentes redes reales con el nombre de los nodos y enlaces, número de nodos y enlaces, si la red es dirigida y no dirigida y el tipo de modelo de red, ya sea red aleatoria o red de escala libre [18].

Red	Nodos (núm. de N)	Enlaces (núm. de L)	Dirigida/ No dirigida	Modelo de red
Interacción de Proteínas	Proteínas (2,018)	Interacciones vinculantes (2,930)	No dirigida	Red de escala libre
Internet	Enrutadores (192,244)	Conexiones a internet (609,066)	No dirigida	Red de escala libre
Metabolismo del E. coli	Metabolitos (1,039)	Reacciones químicas (5,802)	Dirigida	Red de escala libre
Red eléctrica	Centrales eléctricas, Transformadores (4,941)	Cables (6,594)	No dirigida	Red Aleatoria
Red Mundial	Páginas web (325,729)	Links (1,497,134)	Dirigida	Red de escala libre

Tabla 10. Ejemplos de redes del mundo real

Con los ejemplos anteriores de redes del mundo real, nosotros seremos capaces de comprender con más claridad la importancia de aplicar los modelos matemáticos de la teoría de redes complejas del capítulo 1 para estudiar y analizar redes aleatorias y redes de escala libre. En el capítulo 4 nosotros nos dedicaremos a modelar, estudiar y analizar la red de tráfico aéreo de la República Mexicana y aplicaremos la teoría de redes complejas vista en el primer capítulo y con lo que se está aprendiendo de la programación de Python con NetworkX en este segundo capítulo.

2.8. Medidas de centralidad y coeficiente de agrupamiento local

En la sección 1.5 del capítulo anterior nos dedicamos a estudiar las definiciones de los modelo matemático de las medidas de centralidad y el coeficiente de agrupamiento local. Asimismo realizamos varios cálculos para obtener una ponderación en unos nodos de un grafo que fue el ejemplo para comprender

mejor dichos tópicos. En esta sección, aprenderemos a cuantificar las medidas de centralidad y el coeficiente de agrupamiento local computacionalmente con NetworkX.

a) Centralidad de grado

La función a declarar para calcular la centralidad de grado de una red es:

- `nx.degree_centrality(G)`

cuyos resultados siempre estarán normalizados al dividir el grado de cada nodo por $N - 1$.

b) Centralidad de cercanía

La instrucción para obtener la centralidad de cercanía mediante NetworkX es:

- `nx.closeness_centrality(G)`

Recordemos que la centralidad de cercanía está normalizada, por ende, su función de NetworkX también lo estará.

c) Centralidad de vector propio

La cuantificación de la centralidad de vector propio se obtendrá mediante:

- `nx.eigenvector_centrality(G)`

Tengamos presente que el resultado de `nx.eigenvector_centrality(G)` siempre será el vector propio dominante normalizado correspondiente valor propio dominante λ_1 .

d) Centralidad de intermediación

La medición de la centralidad de intermediación para un grafo G se realizará con:

- `nx.betweenness_centrality(G)`

y dicha función nos da como opción normalizar las intermediaciones de todos los nodos, sólo basta con agregar como segundo parámetro "normalized=True". Si no lo deseamos normalizar, entonces descartamos el segundo parámetro o simplemente cambiamos "True" por "False".

En la sección 1.5 se mencionó que los resultados de centralidad de subgrafo y de comunicabilidad se obtuvieron mediante un lenguaje de programación. Por lo que, a continuación definiremos las funciones de NetworkX que nos servirán para calcular las dos centralidades.

e) Centralidad de subgrafo

El calculo de la centralidad de subgrafo se puede realizar de dos maneras: mediante el momento espectral local y con la matriz exponencial. La librería NetworkX ofrece las dos formas para estimar la centralidad de subgrafo a través de:

- `nx.subgraph centrality(G)` o `nx.subgraph centrality_exp(G)`

donde el parámetro G debe ser un grafo conexo, en caso contrario, las dos funciones nos arrojará un mensaje de error.

f) Centralidad de comunicabilidad

La función a utilizar con el objetivo de medir la centralidad de comunicabilidad de una red no disconexa G es mediante:

- `nx.communicability_betweenness centrality(G)`

y esta función viene normalizada como lo establecido en la ecuación (15).

g) Coeficiente de agrupamiento local

El coeficiente de agrupamiento local se cuantifica por medio de:

- `nx.clustering(G)`

Las ocho funciones anteriores las podemos utilizar con la finalidad de no realizar cálculos extensos y tediosos en redes con N grande.

En la figura 17 visualizamos las 6 medidas de centralidad de una red de escala libre (no incluimos el coeficiente de agrupamiento local).

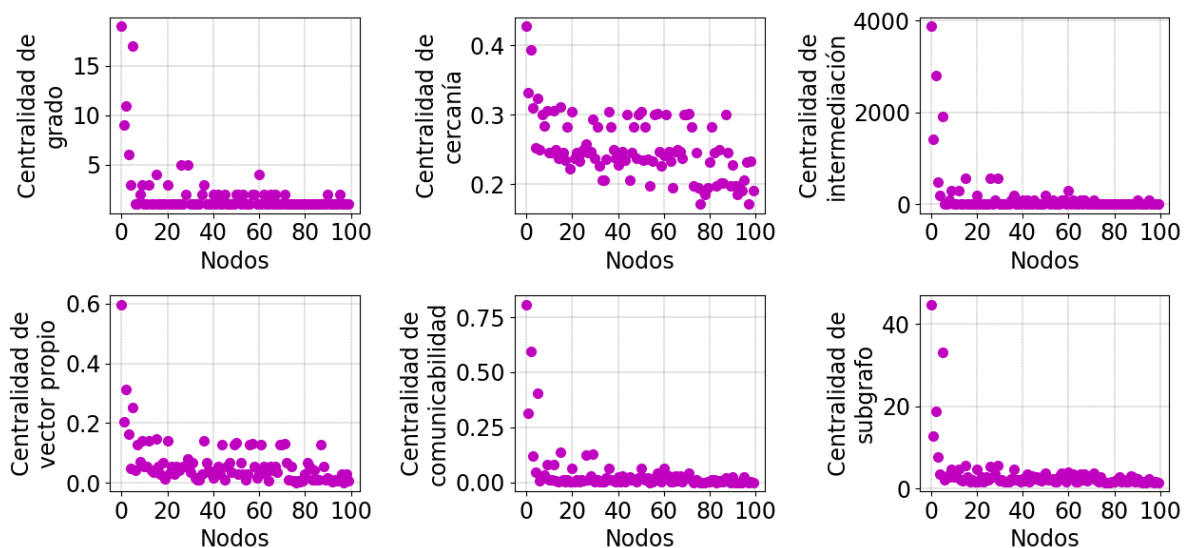


Figura 17. Medidas de centralidad de una red de escala libre

En la figura 17 se puede apreciar que el nodo 0 y 1 son los más prominentes en la red de escala libre para las seis centralidades. Por otra parte, visualizamos que el comportamiento de los puntos de cuatro medidas de centralidad (centralidad de grado, de intermediación, de comunicabilidad y de subgrafo) se asemejan a una función exponencial o a una ley de potencia estudiada en la sección 2.7. Además, es importante señalar que esas cuatro gráficas se parecen mucho debido a la relación directa entre sí [19].

2.9. Nodos centrales y periféricos

En la sección 1.6 definimos la excentricidad, diámetro, radio centro y periferia para una red conexa G . En esta sección revisaremos como calcular los nodos centrales y periféricos con la funciones incorporadas en NetworkX.

El cálculo computacional de la ecuación (20) para conseguir el o los nodos centrales es:

- `nx.center(G)`

y para el o los nodos periféricos de la ecuación (21) la función es:

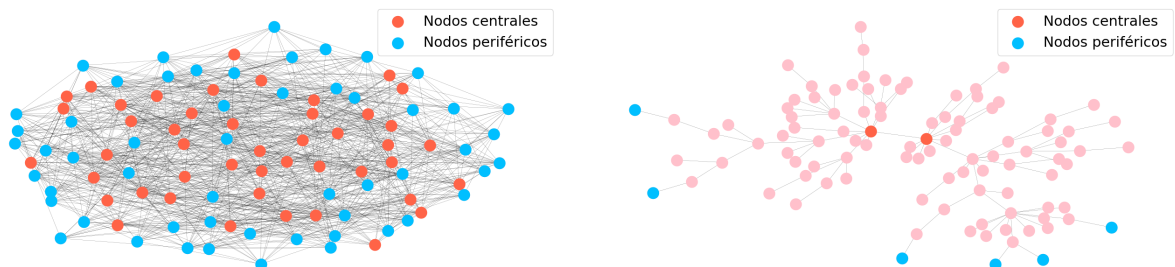
- `nx.periphery(G)`

NetworkX también puede estimar la excentricidad, diámetro y radio mediante el uso de las siguientes funciones, respectivamente:

- `nx.eccentricity(G)`
- `nx.diameter(G)`
- `nx.radius(G)`

En la figura 18 podemos visualizar los nodos centrales y periféricos de una red aleatoria y de una red de escala libre.

Figura 18. Nodos centrales y periféricos de una red aleatoria y una red de escala libre



Asimismo, en la figura 18 observamos que los nodos de la red aleatoria deben ser ya sea centrales o periféricos; si un nodo no es central, entonces debe ser nodo periférico y viceversa. En el caso de una red de escala libre los nodos centrales están ubicados en la zona central y los nodos periféricos están ubicados en las orillas de la red.

Capítulo 3

Robustez de la red

En el tercer capítulo, nos adentraremos en la definición de la componente gigante y la robustez de una red. Demostraremos la aplicación práctica de estas definiciones mediante ejemplos ilustrativos. Además, analizaremos las variaciones en la reducción de la componente gigante de la red y evaluaremos si esto la expone a ser vulnerable bajo ataque en algunos de sus nodos.

3.1. Definición de componente gigante

La componente gigante es una componente conectada que contiene una cantidad significativa de nodos de la red. El criterio de Molloy-Reed nos garantiza la existencia de la componente gigante dentro de una red:

$$\kappa = \frac{\langle \tilde{k}^2 \rangle}{\langle \tilde{k} \rangle} \quad (27)$$

donde

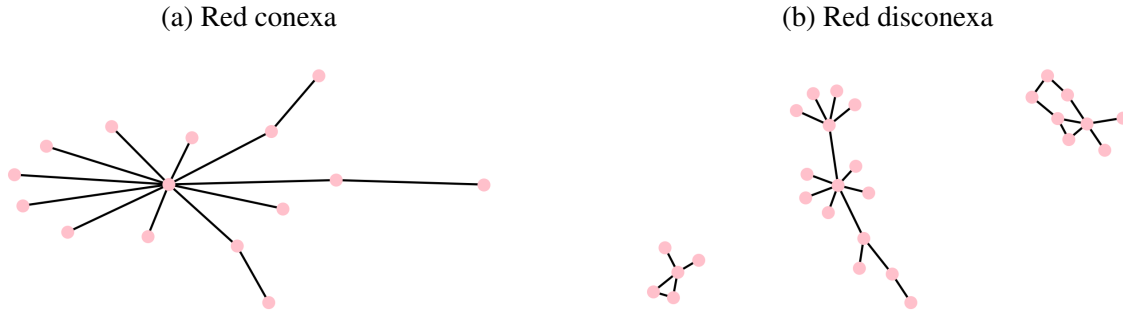
$$\langle \tilde{k}^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^n = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^n p_k$$

Si $\kappa > 2$, entonces existe una componente gigante. En caso contrario, la red carece de una componente gigante [20]. Si $n = 1$, entonces el valor de $\langle \tilde{k} \rangle$ proporciona el promedio de los grados de todos los nodos de una red; si $n = 2$, entonces el valor de $\langle \tilde{k}^2 \rangle$ proporciona qué tan dispersos están los grados de los nodos con respecto al valor promedio.

Para entender mejor este concepto, mostraremos unos ejemplos de la componente gigante. En la figura 19 (a) podemos observar una red conexas y en la

figura 19 (b) visualizamos una red desconexa con varias componentes conectadas. Para ambos casos, aplicando la ecuación (27) tenemos como resultado que $\kappa \approx 5.86 > 2$ para la red del inciso (a) y $\kappa \approx 3.18 > 2$ para la red del inciso (b), es decir, existe una componente gigante en ambas redes. De forma visual podemos identificar que en la red del lado izquierdo la componente gigante es toda la red y en la red del lado derecho la componente gigante es la componente conectada con el mayor número de nodos (ubicada en la parte central).

Figura 19. Ejemplos de redes con existencia de la componente gigante



La componente gigante será de interés para medir la robustez de la red debido a su importancia de conectividad y, en ocasiones, por su facilidad para romper esa componente gigante en componentes diminutas.

3.2. Definición de robustez

En esta sección, nos enfocaremos en definir y analizar la habilidad de una red para mantenerse conectada incluso después de la eliminación de algunos nodos, un concepto más conocido como la robustez de la red.

La robustez de la red se refiere a la capacidad de dicha red para resistir y mantener su estructura y funcionalidad frente a la pérdida de nodos. Llamaremos medición de la robustez R y lo estimaremos con base a la componente gigante de la red:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{Q=0}^N s(Q) \quad (28)$$

donde $s(Q) = \frac{\tilde{N}}{N}$ es el tamaño de la componente gigante después de eliminar $Q = qN$ nodos con \tilde{N} que corresponde al número de nodos que forman parte de la componente gigante. Tengamos en cuenta que el posible rango de R estará

entre $1/N$ y 0.5 , $0 \leq s(Q) \leq 1$ y $q = Q/N$ es la forma normalizada de Q [21].

La eliminación de nodos de una red lo realizaremos a través de dos tipos: Fallas aleatorias y ataques objetivo.

a) Fallas aleatorias

En esta cuestión, eliminaremos de manera aleatoria los nodos N de una red, el nodo seleccionado para remover podría ser un nodo de grado bajo, un nodo importante según las medidas de centralidad, un nodo aislado o incluso un nodo que no forma parte de la componente gigante.

b) Ataques objetivo

En este tipo de eliminación, nos enfocaremos en atacar los nodos de mayor a menor conectividad en la red, es decir, comenzaremos eliminando los nodos i_1, i_2, i_3, \dots donde $k_{i_1} \geq k_{i_2} \geq k_{i_3} \geq \dots$. Estos nodos son considerados ideales debido a su importancia en la red, destacándose por su considerable conectividad con otros nodos, como se evidencia en la centralidad de grado. En esta ocasión, la eliminación de nodos se llevará a cabo de manera específica y selectiva.

Veamos un ejemplo para interpretar mejor la ecuación (28). En la figura 20 observamos una red $G(N, L)$ con $N = 10$ y $L = 16$.

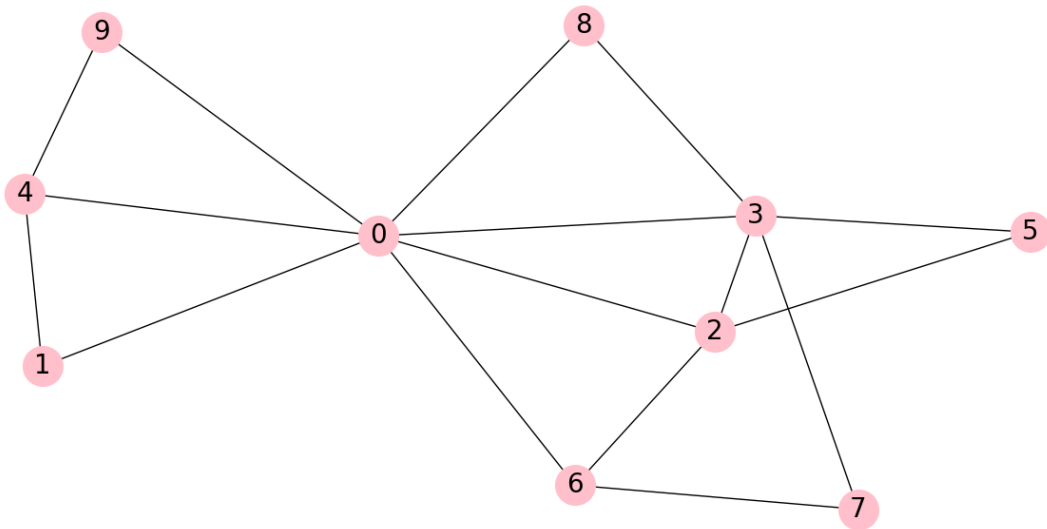


Figura 20. Grafo $G(N, L)$ como ejemplo para la medición de su robustez

Lo primero que vamos a hacer es cuantificar la robustez de la red sin eliminar ningún nodo. Por lo que:

$$\text{si } Q = 0 \text{ entonces } \tilde{N} = 10$$

Por lo tanto

$$s(0) = \frac{\tilde{N}}{N} = \frac{10}{10} = 1, R = \frac{1}{N} \sum_{Q=0}^N s(Q) = \frac{1}{10} s(0) = \frac{1}{10}$$

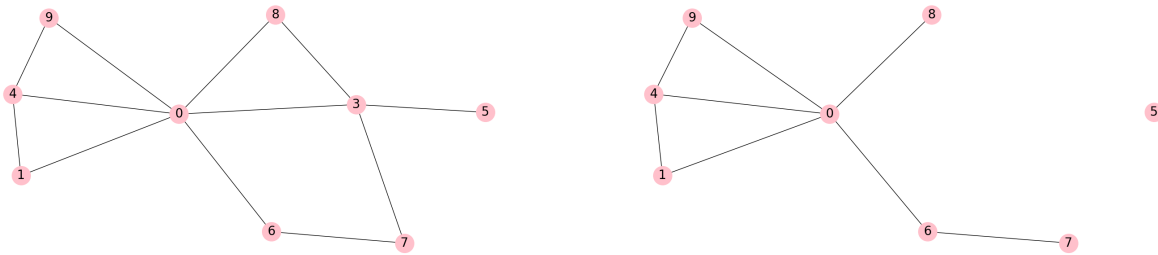
Para el primer ataque vamos a elegir a los 10 nodos de forma aleatoria. La selección de nodos queda de la siguiente manera:

$$[2, 3, 0, 1, 9, 8, 6, 4, 7, 5]$$

Eliminaremos a los nodos uno por uno iniciando de izquierda a derecha de la lista anterior y cada vez que eliminamos un nodo estimaremos el número de nodos a eliminar Q , la componente gigante $s(Q)$ y posteriormente la robustez R .

Eliminemos los nodos 2 y 3. En la figura 21 observamos la red de la figura 20 resultante después de eliminar los nodos 2 y 3.

Figura 21. Red resultantes al atacar los nodos 2 y 3 de la red $G(N, L)$



Con base a la imágenes anteriores, cuantifiquemos $s(Q)$ y R .

para el primer nodo eliminado tenemos que:

$$\text{si } Q = 1 \text{ entonces } \tilde{N} = 9$$

Por lo tanto

$$s(1) = \frac{\tilde{N}}{N} = \frac{9}{10} = 0.9, R = \frac{1}{N} \sum_{Q=0}^N s(Q) = \frac{1}{10} (s(0) + s(1)) = \frac{1}{10} (1 + 0.9) = 0.19$$

para el segundo nodo eliminado tenemos que:

$$\text{si } Q = 2 \text{ entonces } \tilde{N} = 7$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s(2) = \frac{\tilde{N}}{N} = \frac{7}{10} = 0.7, R &= \frac{1}{N} \sum_{Q=0}^N s(Q) = \frac{1}{10} (s(0) + s(1) + s(2)) \\ &= \frac{1}{10} (1 + 0.9 + 0.7) = 0.26 \end{aligned}$$

Ahora vamos a observar cuando es atacado el tercer nodo de nuestra lista, es decir, atacaremos al nodo 0. En la figura 22 visualizamos que tenemos 2 componentes conectadas de la forma 1, 4, 9 y 6, 7.

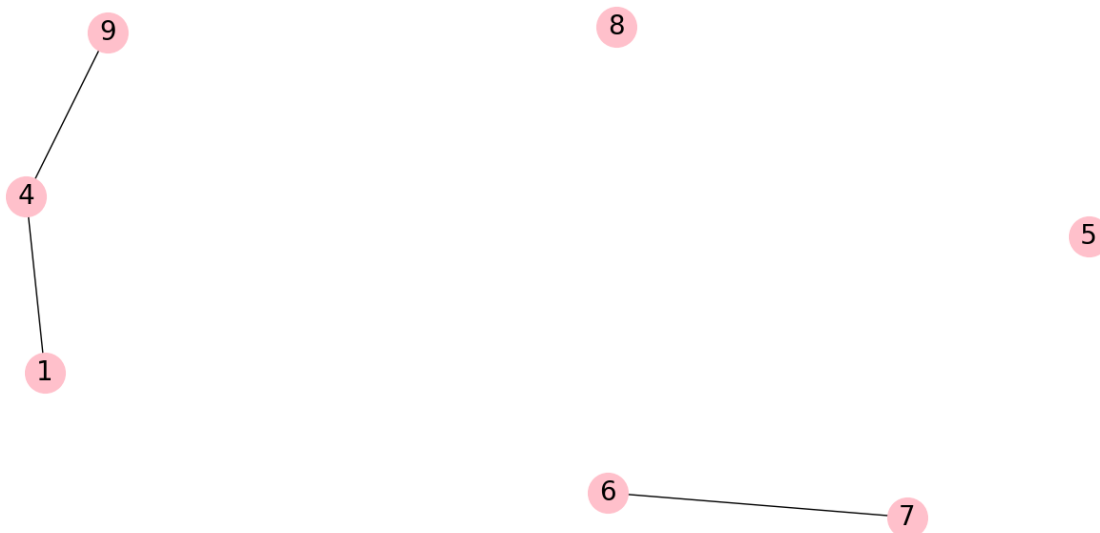


Figura 22. Red resultante al atacar tres nodos de la red $G(N, L)$

En este caso calcularemos la robustez para la componente con 3 nodos que es la más grande y descartamos para este tercer ataque la otra componente:

$$\text{si } Q = 3 \text{ entonces } \tilde{N} = 3$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} s(3) = \frac{\tilde{N}}{N} = \frac{3}{10} = 0.3, \quad R &= \frac{1}{N} \sum_{Q=0}^N s(Q) = \frac{1}{10} (s(0) + s(1) + s(2) + s(3)) \\ &= \frac{1}{10} (1 + 0.9 + 0.7 + 0.3) = 0.29 \end{aligned}$$

En la tabla 11 se muestran los resultados de la robustez para los 10 ataques a la red $G(N, L)$.

Q	$s(Q)$	R
0	1	0.1
1	0.9	0.19
2	0.7	0.26
3	0.3	0.29
4	0.2	0.31
5	0.2	0.33
6	0.2	0.35
7	0	0.35
8	0	0.35
9	0	0.35
10	0	0.35

Tabla 11. Estimación de la robustez en cada ataque a sus 10 nodos de la red $G(N, L)$

En la tabla anterior podemos notar que al atacar el séptimo nodo (nodo 6 de la lista) tenemos que $s(Q) = 0$ y por ende R obtiene el mismo resultado de 0.35, dicho de otra forma, desaparecieron las componentes conectadas en la red y solamente tenemos nodos aislados. A partir de $Q = 7$ atacaremos únicamente nodos aislados y seguiremos obteniendo valor $R = 0.35$ en la robustez.

En conclusión, si la red cuenta con al menos dos componentes conectadas, estimaremos la robustez R para la componente conectada más grande, descartando las demás. Por otro lado, si la red carece o ya no cuenta de una componente conectada que tomé el papel de ser la componente gigante y sólo posee nodos aislados, entonces al seguir atacando los Q nodos con $Q \leq N$, el resultado de R nunca cambiará hasta concluir con los N ataques.

3.3. Robustez de la red en Python con NetworkX

En esta ocasión analizaremos la reducción en el tamaño de la componente gigante y la robustez de una red aleatoria y de una red de escala libre a través de la programación de Python con NetworkX.

Antes de continuar consideremos lo siguiente:

- Recordemos que $q = \frac{Q}{N}$ es la forma normalizada de Q ; por lo tanto, la expresión $s(Q)$ cambia a $s(q)$, manteniendo así su misma definición para el tamaño de la componente gigante de una red.
- Cuando eliminamos los nodos uno por uno, si la pérdida de algunos de ellos reduce significativamente el tamaño de la componente gigante, considera-

mos que la red es vulnerable, es decir, no es robusta. Por el contrario, si la reducción en el tamaño de la componente gigante es insignificante, la red se considera invulnerable o robusta. Por razones prácticas, calcularemos q , $s(q)$ y R tanto antes de eliminar un nodo como después de eliminar cada nodo, continuando así hasta que no quede ninguno en la red (eliminaremos los N nodos de la red). Esto nos permitirá obtener gráficos adecuados para comparar la vulnerabilidad o invulnerabilidad de la red.

Dicho lo anterior, emplearemos el modelo de Gilbert $G(N, p)$ y el modelos de barabasi $G(N, m)$. En la figura 23 se presenta las gráficas de la medición en el tamaño de la componente gigante y de la robustez de una red $G(N, p)$ al eliminar sus N nodos con fallas aleatorias.

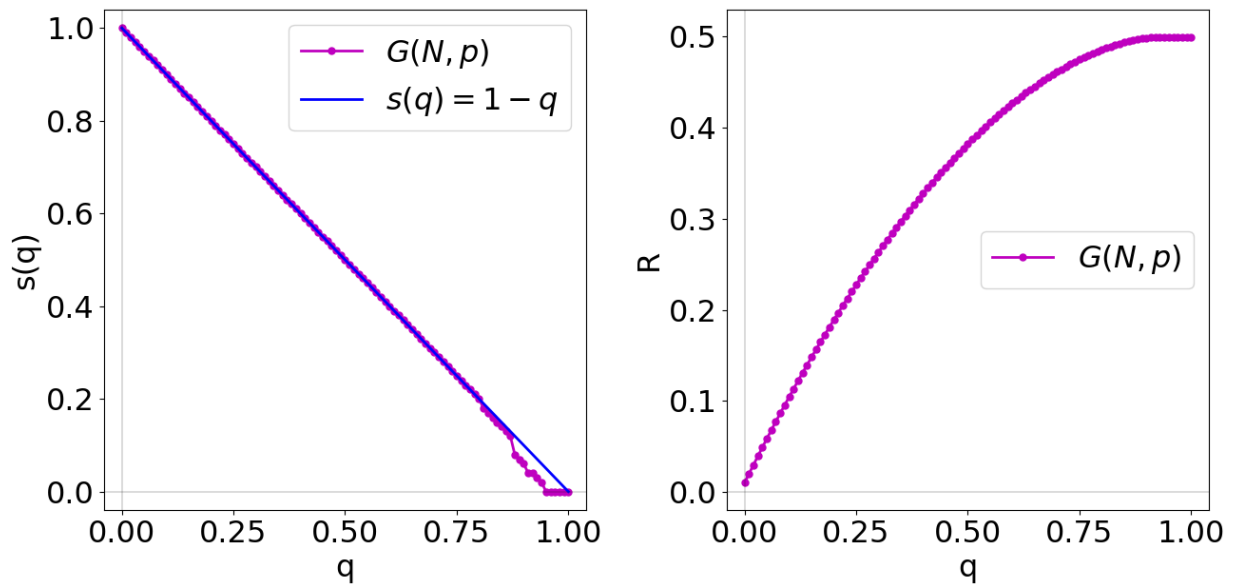


Figura 23. Medición de la robustez de una red aleatoria $G(N, p)$ con fallas aleatorias

En la gráfica de $s(q)$ contra q , observamos la reducción o disminución en el tamaño de la componente gigante $s(q)$ de una red aleatoria $G(N, p)$, y la comparamos con la reducción en el tamaño de la componente gigante de una red invulnerable, es decir, con la función $s(q) = 1 - q$. La reducción de $s(q)$ de la red aleatoria no es significativa cuando la red comienza a perder algunos nodos con fallas aleatorias y es casi idéntica a la función $s(q) = 1 - q$. Además, observamos pequeñas variaciones o perturbaciones en la parte baja del gráfico de la red $G(N, p)$. Estas perturbaciones se deben a la separación de componentes conectadas pequeñas, cada una compuesta por al menos dos nodos, que se separan de la componente gigante de la red aleatoria. Esas pequeñas perturbaciones no son relevantes para la reducción significativa de la componente gigante. En cuanto a la gráfica de R contra q , observamos un crecimiento que converge hacia

el rango superior de R , es decir, hacia el valor 0.5. Las dos gráficas de la figura 23 nos indican una robustez en la red mencionada. Por lo tanto, concluimos que la red aleatoria $G(N, p)$ muestra una notable invulnerabilidad a las fallas aleatorias, ya que su componente gigante se mantiene casi inalterada durante la pérdida de algunos nodos, y las perturbaciones observadas son insignificantes en términos de la reducción significativa de la componente gigante.

Veamos otro ejemplo ahora empleando una red de escala libre $G(N, m)$. Por consiguiente, en la figura 24 podemos apreciar la medición de la robustez de la red $G(N, m)$ bajo ataques objetivo.

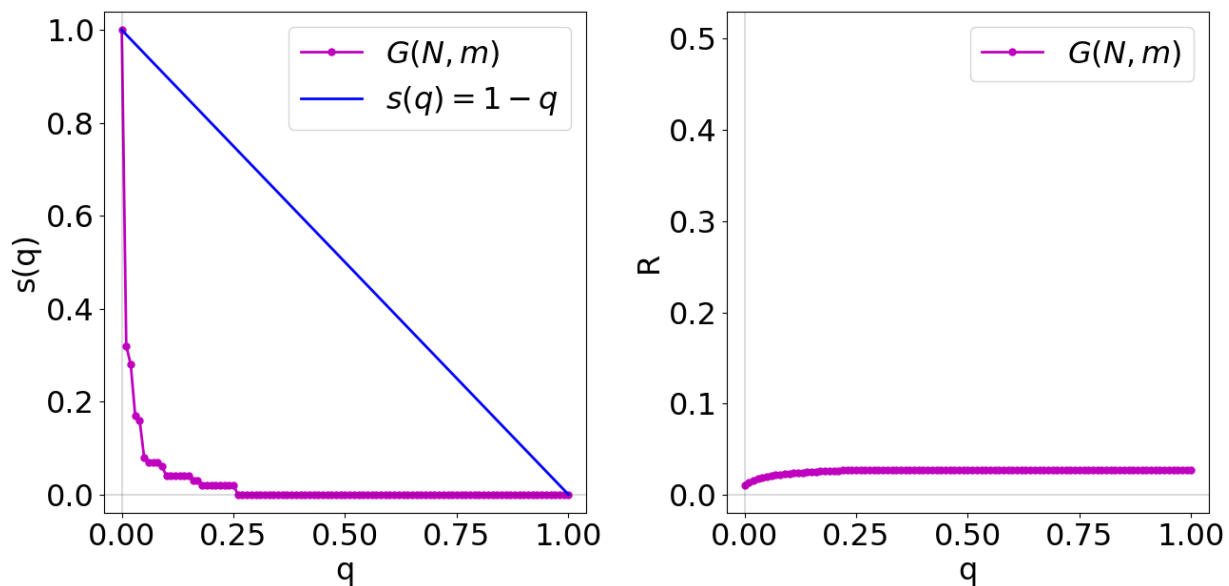


Figura 24. Medición de la robustez de una red de escala libre $G(N, m)$ con ataques objetivo

En este caso, la gráfica de $s(q)$ contra q nos muestra que el tamaño de la componente gigante $s(q)$ de la red de escala libre experimenta una reducción significativa. Pasa rápidamente del valor 1.0 al valor por debajo de 0.4 después de un solo ataque, perdiendo completamente su parecido a la función $s(q) = 1 - q$. La reducción en el tamaño de la componente gigante de la red $G(N, m)$ sigue un comportamiento que se asemeja a una ley de potencia (como se estudió en la sección 2.7). Esta disminución se produce debido a que una red de escala libre tiene pocos nodos con alta conectividad (como se observó en la distribución de probabilidad de grado promedio) y al atacar el primer nodo con un alto grado de conectividad, se desencadena una rápida propagación del colapso, resultando en una pérdida significativa de conexiones y funcionalidades. Al atacar el resto de nodos de mayor conectividad la componente gigante tiende a desaparecer y en consecuencia la red sólo tendrá nodos aislados y componentes conectadas diminutas. En la gráfica R contra q , observamos un crecimiento poco perceptible y

su convergencia es cercana al rango inferior, es decir, hacia el valor $1/N$. Las dos gráficas de la figura 24 indican que la red $G(N, m)$ no es robusta en comparación con el ejemplo anterior. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que la red de escala libre $G(N, m)$ es vulnerable a ataques objetivo.

Las gráficas de las figuras 23 y 24 corresponden a un caso 1 (caso lineal) y a un caso 2 (caso ley de potencia), respectivamente. Ahora que sucede si existe un tercer caso, donde el tamaño de la componente gigante de una red reduce con muchas variaciones. Veamos un ejemplo de una red de escala libre $G(N, m)$ bajo ataques aleatorios para el caso 3 (ver figura 25).

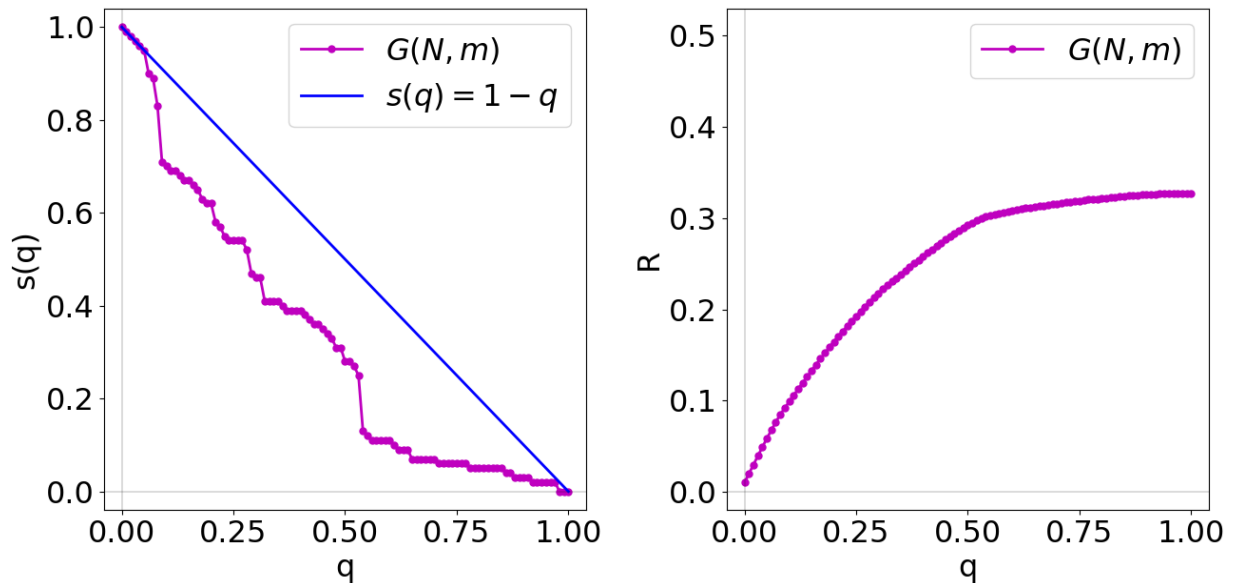


Figura 25. Variaciones en la reducción del tamaño de la componente gigante y robustez de una red de escala libre $G(N, m)$ con fallas aleatorias

En la figura 25, la gráfica izquierda revela que la reducción en el tamaño de la componente gigante de la red $G(N, m)$ no sigue un comportamiento similar al observado en el caso 1 ni se ajusta a la ley de potencia como en el caso 2; más bien, experimenta variaciones significativas. La gráfica de robustez R no proporciona una indicación clara sobre si la red es vulnerable o no (no muestra convergencia ni al rango superior ni al rango inferior, a diferencia de los casos 1 y 2).

Para analizar y decidir si una red es vulnerable o no cuando presenta variaciones en la reducción del tamaño de la componente gigante como en el caso 3, en la siguiente sección a manera de comparación calcularemos la fracción crítica de nodos eliminados en función de la densidad D de la red para diferentes redes aleatorias usando el modelo de Gilbert y emplearemos la programación de

Python con NetworkX con la finalidad de decidir si una red es vulnerable o no a fallas aleatorias o ataques objetivo.

3.4. Variación en el tamaño de la componente gigante en función de la fracción de nodos eliminados

En esta sección nos dedicaremos a analizar y decidir la vulnerabilidad o invulnerabilidad de diferentes redes como se planteo en el párrafo anterior.

Sea q^* como la reducción significativa en el tamaño de la componente gigante de una red. Nos referiremos a q^* como la fracción crítica de nodos eliminados. Empleando el modelo $G(N, p)$ vamos a crear diferentes redes aleatorias con la cantidad igual de nodos N (misma que tendrá la red aeroportuaria de la República Mexicana que detallaremos en el capítulo 4) y con diferentes valores de densidad $D = p$.

Identificaremos q^* aplicando el residual de una regresión lineal o ajuste lineal [22]:

$$re = |s(q_i) - \tilde{s}(q_i)| \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

donde $s(q_i)$ corresponde al valor de la función de reducción en el tamaño de la componente gigante de una red y $\tilde{s}(q_i)$ es el valor de la función $s(q) = 1 - q$. Con un error del 15 % podemos definir como condición si $|s(q_i) - \tilde{s}(q_i)| > 0.15$, entonces encontraremos q^* .

Dicho lo anterior, en la figura 26 observamos seis gráficas de q contra $s(q)$ creadas con diferentes densidades D . En varias de estas gráficas, la identificación de q^* está resaltada mediante un cuadrado y conectada con líneas para proporcionar una ubicación más precisa.

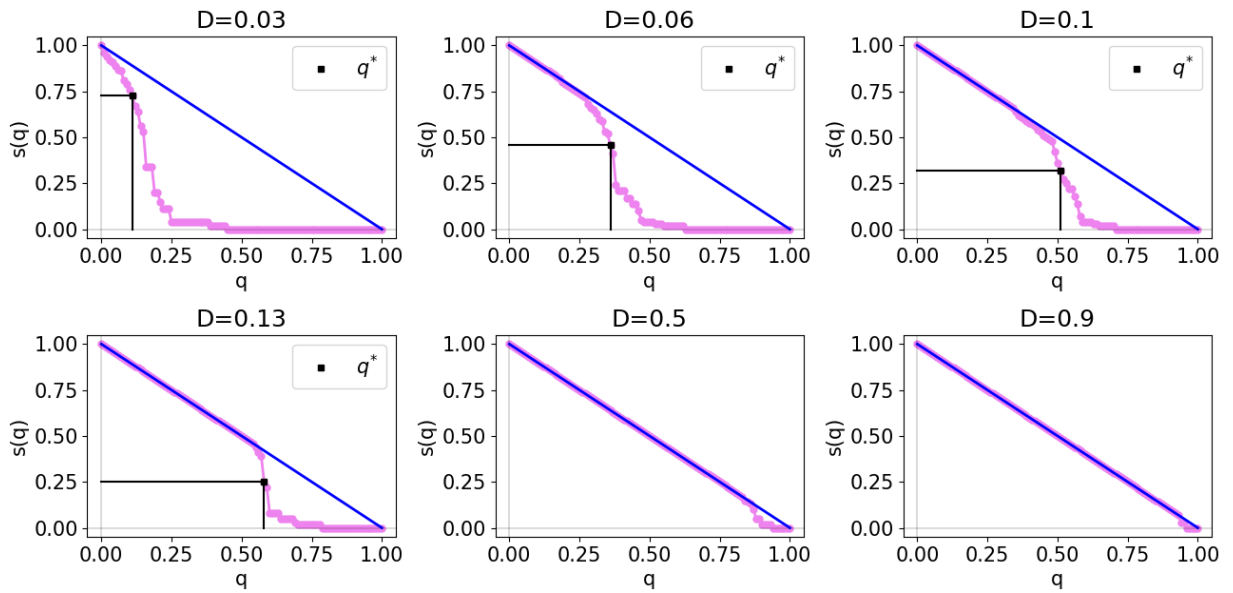


Figura 26. Identificación de q^* en la reducción del tamaño de la componente gigante de seis redes aleatorias $G(N, p)$

En la figura anterior podemos notar que dos gráficas no nos proporcionan q^* , esto se debe a que la condición re de la ecuación (29) no cumple que sea mayor al 15% para cada $i = 1, 2, \dots, N$. Por lo que, debido al que el valor de q^* es proporcional a D , esos 2 gráficos se les asignará el valor de $q^* = 1$.

a) Fallas aleatorias

Ahora vamos a calcular más de 6 fracciones críticas de nodos eliminados con fallas aleatorias en función de D y graficaremos esos datos. Por lo que, en la tabla 12 visualizaremos los resultados de q^* y los valores de D de 30 redes aleatorias $G(N, p)$.

D	q^*	D	q^*	D	q^*
0	0	0.34	1	0.69	1
0.03	0.16	0.38	1	0.72	1
0.07	0.35	0.41	1	0.76	1
0.1	0.683	0.45	1	0.79	1
0.14	1	0.48	1	0.83	1
0.17	1	0.52	1	0.86	1
0.21	1	0.55	1	0.9	1
0.24	1	0.59	1	0.93	1
0.28	1	0.62	1	0.97	1
0.31	1	0.66	1	1	1

Tabla 12. Densidades D en función de q^* de 30 redes aleatorias $G(N, p)$ bajo fallas aleatorias

Una vez obtenido los valores de D y q^* , vamos a graficar esos datos. Además, haremos un ajuste no lineal en los datos empleando la función $f(D) = a_1 +$

$a_2D - a_3e^{-a_4D}$ con a_1, a_2, a_3 y a_4 valores constantes que se conseguirán de forma numérica con un programa de Python. El ajuste no lineal se realizará con el objetivo de lograr que $f(D) = 1$. De esta manera, podremos clasificar y distinguir entre redes vulnerables y no vulnerables. En la figura 27 apreciaremos lo mencionado anteriormente.

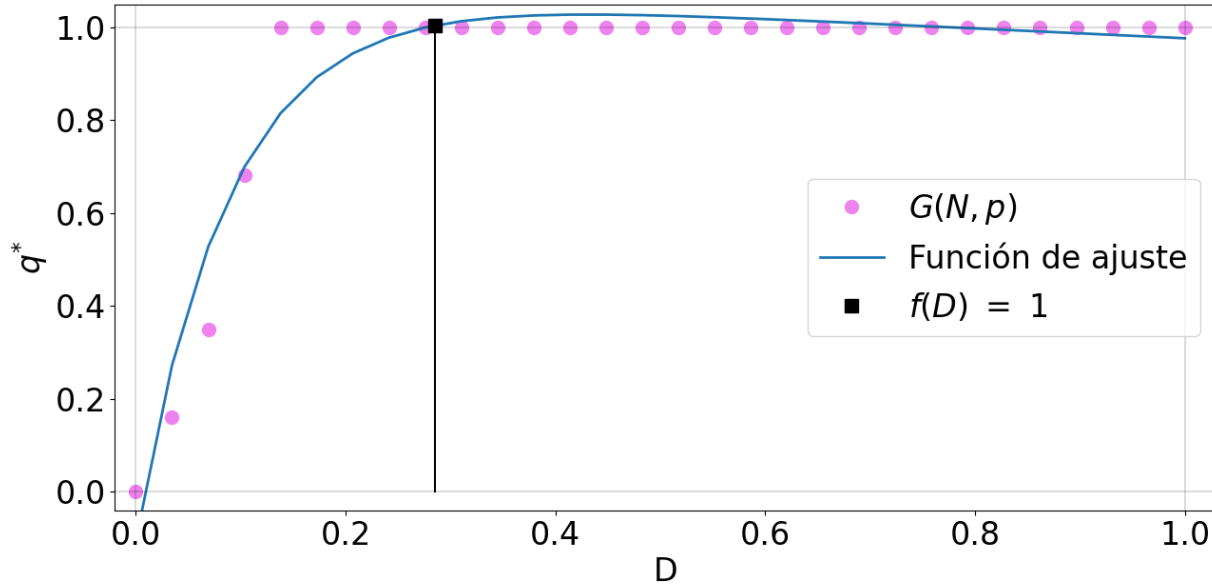


Figura 27. Gráfico de D contra q^* para el análisis de la vulnerabilidad de redes bajo fallas aleatorias

En el gráfico anterior visualizamos que el punto con forma cuadrada $f(D) = 1$ conectada con una línea vertical separa a las redes que son vulnerables con base a una fracción crítica de nodos eliminados q^* (lado izquierdo) y de las redes invulnerables (lado derecho).

b) Ataques objetivo

En esta ocasión, vamos a calcular los valores de q^* en función de D con ataques objetivo y los graficaremos de igual forma como en el caso anterior. Por lo que, en la tabla 13 podemos presenciar los resultados de D y q^* de 30 redes aleatorias $G(N, p)$.

D	q^*	D	q^*	D	q^*
0	0	0.34	0.76	0.69	1
0.03	0.03	0.38	1	0.72	1
0.07	0.26	0.41	0.783	0.76	1
0.1	0.4	0.45	1	0.79	1
0.14	0.483	0.48	1	0.83	1
0.17	0.56	0.52	1	0.86	1
0.21	0.6	0.55	1	0.9	1
0.24	0.683	0.59	1	0.93	1
0.28	0.716	0.62	1	0.97	1
0.31	0.716	0.66	1	1	1

Tabla 13. Densidades D en función de q^* de 30 redes aleatorias $G(N, p)$ bajo ataques objetivo

Después de obtener los valores de D y q^* . En la figura 28 presenciaremos la gráfica D contra q^* , la función $f(D) = a_1 + a_2D - a_3e^{-a_4D}$ que será el ajuste no lineal de los puntos de la tabla 13 y el punto $f(D) = 1$ conectada con una línea vertical que separa de las redes vulnerables y de las redes invulnerables.

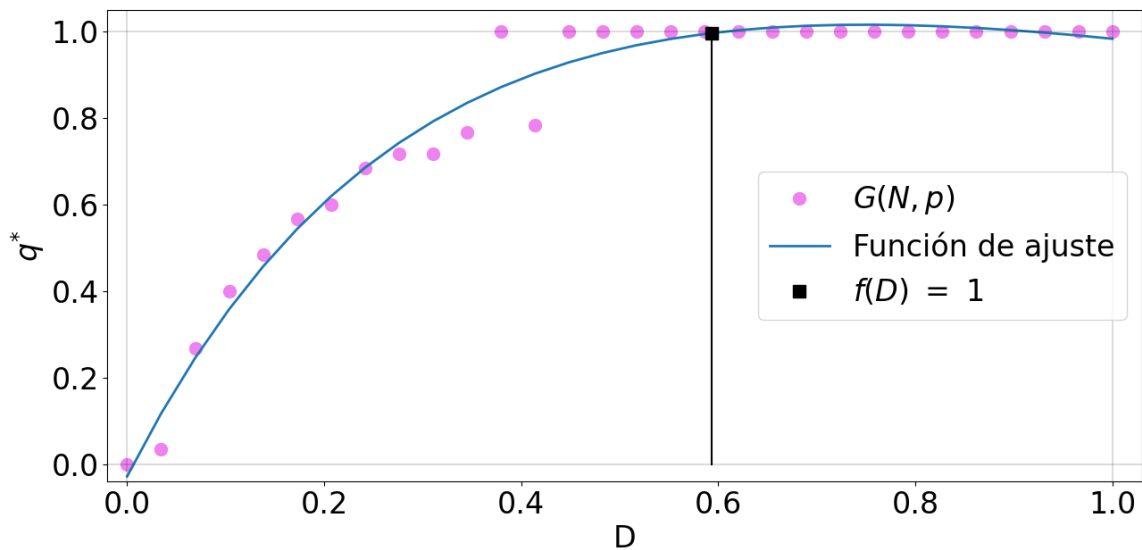


Figura 28. Gráfico de D contra q^* para el análisis de la vulnerabilidad de redes bajo ataques objetivo

En la gráfica anterior vemos que el punto $f(D) = 1$ está ubicado cerca del 0.6 de la densidad D . Esto quiere decir que aproximadamente tenemos el 60% de probabilidad de que las redes aleatorias sean vulnerables bajo ataques objetivo. La gráfica 27 nos proporciona cerca del 30% de probabilidad de que las redes aleatorias sean vulnerables bajo fallas aleatorias. Lo que implica que las fallas aleatorias son menos efectivas para afectar la robustez de una red aleatoria, en cambio, con ataques objetivo es más efectiva que una red aleatoria sea vulnerable.

c) Vulnerabilidad de redes de escala libre

Veamos la vulnerabilidad de algunas redes de escala libre empleando los gráficos 27 y 28. Para esto, calcularemos sus densidades y sus fracciones críticas de nodos eliminados con Python utilizando las ecuaciones (3) y (29), respectivamente.

En la tabla 14 observamos los resultados de D y q^* de 4 redes de escala libre $G(N, m)$. Además, mostraremos los valores del segundo parámetro m y los dos tipos de ataques que se emplearon en cada una de las 4 redes.

Red	Parámetro	D	Fallas aleatorias	Ataques objetivo
			q^*	q^*
1	$m = 1$	0.02	0.03	0.01
2	$m = 2$	0.04	0.67	0.22
3	$m = 3$	0.06	0.7	0.18
4	$m = 4$	0.08	0.92	0.25

Tabla 14. Resultados de D y de q^* empleando redes de escala libre

Con los datos de la tabla anterior, en la figura 29 analizaremos las vulnerabilidades de las 4 redes de escala libre en las gráficas D contra q^* correspondientes a fallas aleatorias y ataques objetivo.

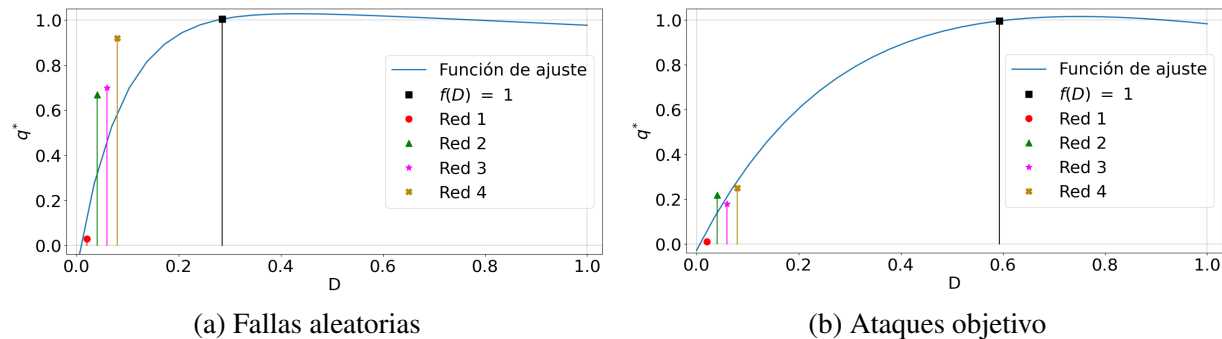


Figura 29. Vulnerabilidad de redes de escala libre

En la figura anterior podemos observar que las redes de escala libre son vulnerables en ambos ataques con base a una fracción crítica de nodos eliminado Q^* . En conclusión, Las redes de escala libre son vulnerables cuando se atacan $Q (< N)$ nodos ya sea de forma aleatoria o de forma objetiva. En cambio, las redes aleatorias son más resistentes a fallas aleatorias, sin embargo, existe una probabilidad alta de que las redes aleatorias sean vulnerables con ataques objetivos.

Capítulo 4

Red aeroportuaria de la República Mexicana

En esta ocasión, dirigiremos nuestra atención hacia la modelación estructural de la red de tráfico aéreo de la República Mexicana. Luego, procederemos a analizarla mediante la aplicación de los modelos matemáticos que hemos estudiado a lo largo de los capítulos 1 y 3. Para llevar a cabo este análisis, contaremos con el respaldo de la programación en Python con NetworkX, tal como se describió en el capítulo 2.

4.1. Sistema aeroportuario mexicano

La república mexicana cuenta con 77 aeropuertos, de los cuales 19 son operados por Aeropuertos y Servicios Auxiliares (ASA), quien también participa en otros 4 en sociedad con gobiernos estatales y en 1 con inversión privada; 35 se encuentran concesionados a cuatro Grupos Aeroportuarios (Grupo Aeroportuario del Pacífico, Grupo Aeroportuario del Sureste, Grupo Aeroportuario Centro Norte y el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México). Los aeropuertos restantes, son administrados por particulares, por la Secretaría de la Defensa Nacional y por gobiernos estatales y municipales.

a) Aeropuertos y Servicios Auxiliares

Aeropuertos y Servicios Auxiliares (ASA) Es un organismo descentralizado del Gobierno Federal, que opera y administra 19 aeropuertos del sistema aeroportuario nacional, los cuales integran la Red ASA y están ubicados en Campeche, Ciudad del Carmen, Ciudad Obregón, Ciudad Victoria, Chetumal, Colima, Guaymas, Ixtepec, Loreto, Matamoros, Nogales, Nuevo Laredo, Poza Rica, Puebla, Puerto Escondido, Tamuín, Tehuacán, Tepic y Uruapan, en tanto que en

sociedad participa en los aeropuertos de Querétaro, Toluca, Cuernavaca, Tuxtla Gutiérrez y Palenque [23].

b) Grupo Aeroportuario del Pacífico

Grupo Aeroportuario del Pacífico (GAP) se constituyó en 1998 como parte del proceso de apertura del sistema aeroportuario de México a la inversión privada. Desde entonces ha administrado, operado, mantenido y desarrollado 12 aeropuertos en las regiones del Pacífico y Centro de México: Guadalajara, Tijuana, Mexicali, Hermosillo, Los Mochis, Aguascalientes, Guanajuato, Morelia, La Paz, Los Cabos (San José del Cabo), Puerto Vallarta y Manzanillo [24].

c) Grupo Aeroportuario del Sureste

Grupo Aeroportuario del Sureste, S. A. B. de C. V. (ASUR), es una compañía mexicana constituida en abril de 1998 como dependencia del gobierno federal para administrar, operar y explotar sus aeropuertos en la región sureste de México. Los nueve aeropuertos están ubicados en las siguientes ciudades: Cancún, Cozumel, Mérida, Huatulco, Oaxaca, Veracruz, Villahermosa, Tapachula y Minatitlán [25].

d) Grupo Aeroportuario del Centro Norte

Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V., mejor conocido como OMA, opera, administra y desarrolla 13 aeropuertos internacionales en nueve estados del centro y norte de México: Monterrey, Acapulco, Mazatlán, Zihuatanejo, Chihuahua, Culiacán, Durango, San Luis Potosí, Tampico, Torreón, Zacatecas, Ciudad Juárez y Reynosa [26].

En el contexto de las aerolíneas, el sistema aeroportuario mexicano cuenta con una amplia variedad de aerolíneas tanto nacionales como internacionales que brindan transporte aéreo de pasajeros ya sean vuelos comerciales o vuelos privado tales como vuelos charters o de taxis aéreos. En particular, vamos a considerar 7 aerolíneas mexicanas [27] (ver tabla 15).

Aerolíneas mexicanas
Aeromar
Calafia Airlines
Grupo Aeroméxico
Magnicharters
Transportes Aéreos Terrestres
Viva Aerobus
Volaris

Tabla 15. Aerolíneas mexicanas que ofrecen transporte aéreo de pasajeros

Cada aerolínea se dedica ya sea a ofrecer únicamente vuelos turísticos, vuelos a diferentes ciudades, vuelos privados o los tres casos anteriores juntos (no tomaremos en cuenta el transporte aéreo de carga). Estos vuelos a menudo son regulares y en sus páginas web podemos encontrar gran variedad de información acerca de sus destinos nacionales e internacionales, de los aeropuertos que operan las aerolíneas, entre otros. Por lo que, en la siguiente sección utilizaremos una base de datos de vuelos comerciales y privados nacionales, accesible al público en general, para proponer una representación de red que ilustre el sistema aeroportuario mexicano.

4.2. Modelo de la red de tráfico aéreo

En la sección anterior dimos a conocer la cantidad de aeropuertos que cuenta la república mexicana y presentamos cuales aerolíneas mexicanas brindan transporte aéreo de pasajeros nacionales. Con lo anterior, vamos a proponer un modelo matemático que ilustrará el tráfico aéreo de la red aeroportuaria de la República Mexicana, considerando las siete aerolíneas nacionales, mediante la estructura $G(N, L)$.

Definamos G como a la red aeroportuaria de la República Mexicana. Los aeropuertos o terminales aéreas de la sección 4.1 los denotaremos como los nodos N . Y por último, sólo nos faltará los enlaces L se que determinarán por medio de los vuelos comerciales y privados nacionales que brindan las siete aerolíneas mexicanas.

Las siete aerolíneas de la tabla 15 tienen una base de datos que se encuentra en sus respectivas páginas web donde ofrecen una variedad de rutas de ciudad a ciudad. A partir de esa información, nosotros podemos utilizarlos para crear los enlaces que unirán a los aeropuertos mexicanos con vuelos directos (excluiremos a todos los vuelos con escala). Empleando todo lo aprendido de la sección 2.2 guardaremos las rutas de ciudad a ciudad en una hoja de Excel. Al conseguir todos los datos de las 7 aerolíneas, esta base de datos será muy compleja y no vamos a poder mostrar todos esos vuelos o enlaces L mediante una tabla o lista. Por lo que, con nuestro modelo de red creada y estructurada seremos capaces de calcular cuantos vuelos comerciales y/o privados podrían operar dentro de la República Mexicana utilizando la ecuación (1).

Antes de continuar, haremos énfasis con los vuelos que ofrecen las 7 aerolíneas. De los vuelos de las aerolíneas mexicanas habrá rutas directos que brindarán varias aerolíneas. Presenciamos un ejemplo, la ruta Ciudad de México - Guadalajara lo cubren las aerolíneas Aeromar, Grupo Aeroméxico, Viva Aerobus y Volaris. En este aspecto, tenemos 4 vuelos que unen esas dos ciudades. Con el fin de evitar la acumulación excesiva de vuelos para cada par de ciudades, o mejor conocido como peso o costo en los enlaces, esos 4 vuelos representarán solamente como un solo vuelo (es decir un enlace); y eso será de igual forma para las rutas con más de un vuelo entre un par de ciudades.

Con base a nuestra $G(N, L)$ ya creada, la estructuración y gráfico de G lo llevaremos a cabo con la ayuda de la sección 2.3 donde enseñamos a crear, estructurar y graficar una red a través de la paquetería de Folium en conjunto con NetworkX.

Como resultado, en la figura 30 visualizamos el tráfico aéreo de la red aeroportuaria de la República Mexicana correspondiente a enero de 2023.

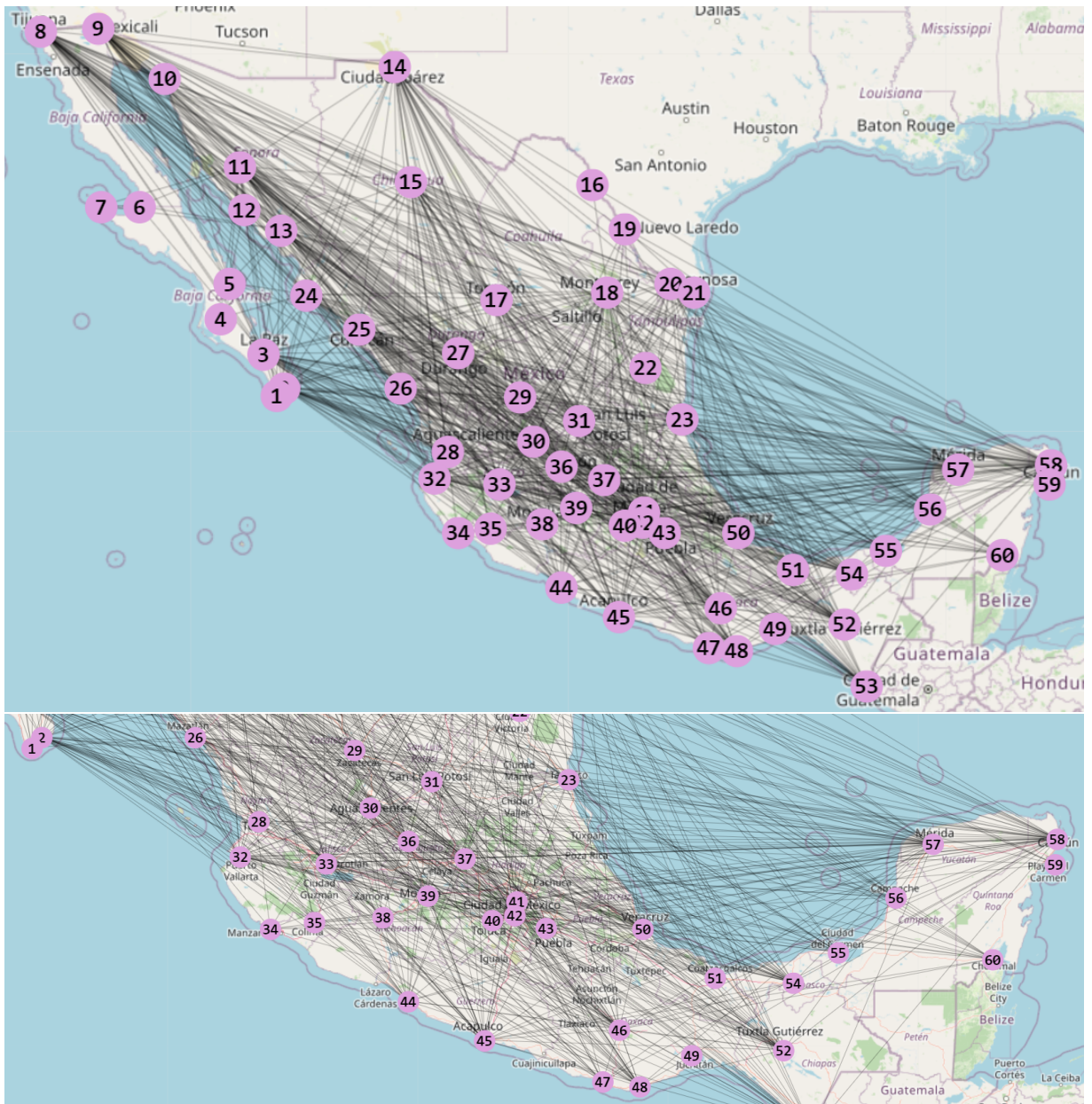


Figura 30. Red de tráfico aéreo de la República Mexicana

Nos podemos dar cuenta que teníamos en registro 77 aeropuertos, sin embargo, de los 77 aeropuertos 60 ofrecen vuelos de transporte de pasajeros. Por convención, el resto de los aeropuertos que no ofrecen transporte aéreo de pasajeros no los tomaremos en cuenta con el fin tener una red conexa, y de esta forma poder aplicar los modelos matemáticos que estuvimos trabajando en los capítulos 1 y 3.

En la figura 31 podemos distinguir el nombre de los aeropuertos que, por comodidad, lo remplazamos por un número sobre los nodos de la red.

Figura 31. Enumeración de los aeropuertos de la República Mexicana dentro de la red

Nodo	Nombre del Aeropuerto
1	Aeropuerto Internacional de Cabo San Lucas
2	Aeropuerto Internacional de San José del Cabo
3	Aeropuerto Internacional de La Paz, Gral. Manuel Márquez de León
4	Aeropuerto Nacional de Ciudad Constitución
5	Aeropuerto Internacional de Loreto
6	Aeropuerto Regional de Guerrero Negro
7	Aeropuerto Nacional de Isla de Cedros
8	Aeropuerto Internacional de Tijuana, Gral. Abelardo Rodríguez
9	Aeropuerto Internacional de Mexicali, Gral. Rodolfo Sanchez
10	Aeropuerto Internacional Mar de Cortés
11	Aeropuerto Internacional de Hermosillo, Gral. Ignacio Pesqueira García
12	Aeropuerto Internacional de Guaymas, Gral. José María Yáñez
13	Aeropuerto Internacional de Ciudad Obregón
14	Aeropuerto Internacional de Ciudad Juárez, Abraham González
15	Aeropuerto Internacional de Chihuahua, Gral. Roberto F. Villalobos
16	Aeropuerto Internacional de Piedras Negras
17	Aeropuerto Internacional de Torreón
18	Aeropuerto Internacional de Monterrey, Mariano Escobedo
19	Aeropuerto Internacional de Nuevo Laredo, Quetzalcóatl
20	Aeropuerto Internacional de Reynosa, Gral. Lucio Blanco
21	Aeropuerto Internacional de Matamoros, Gral. Servando Canales
22	Aeropuerto Internacional de Ciudad Victoria, Gral. Pedro José Méndez
23	Aeropuerto Internacional de Tampico, Gral. Francisco Javier Mina
24	Aeropuerto Internacional de los Mochis, Valle del Fuerte
25	Aeropuerto Internacional de Culiacán
26	Aeropuerto Internacional de Mazatlán, Gral. Rafael Buelna
27	Aeropuerto Internacional de Durango, Pte. Guadalupe Victoria
28	Aeropuerto Internacional de Tepic, Amado Nervo
29	Aeropuerto Internacional de Zacatecas, Gral. Leobardo C. Ruíz
30	Aeropuerto Internacional de Aguascalientes, Lic. Jesús Terán
31	Aeropuerto Internacional de San Luis Potosí, Ponciano Arriaga
32	Aeropuerto Internacional de Puerto Vallarta, Lic. Gustavo Díaz Ordaz
33	Aeropuerto Internacional de Guadalajara, Don Miguel Hidalgo y Costilla
34	Aeropuerto Internacional de Manzanillo, Playa de Oro
35	Aeropuerto Internacional de Colima
36	Aeropuerto Internacional del Bajío
37	Aeropuerto Intercontinental de Querétaro
38	Aeropuerto Nacional de Uruapan, Gral. Ignacio L. Rayón
39	Aeropuerto Internacional de Morelia, Gral. Francisco J. Mújica
40	Aeropuerto Internacional de Toluca, Adolfo López Mateos
41	Aeropuerto Internacional Felipe Ángeles
42	Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez
43	Aeropuerto Internacional de Puebla, Hermanos Serdán
44	Aeropuerto Internacional de Zihuatanejo, Ixtapa-Zihuatanejo
45	Aeropuerto Internacional de Acapulco, Gral. Juan M. Alvarez
46	Aeropuerto Internacional de Oaxaca, Xoxocotlán
47	Aeropuerto Internacional de Puerto Escondido
48	Aeropuerto Internacional de Bahías de Huatulco
49	Aeropuerto de Ciudad Ixtepec
50	Aeropuerto Internacional de Veracruz, Gral. Heriberto Jara Corona
51	Aeropuerto Nacional de Minatitlán, Canticas
52	Aeropuerto Internacional de Tuxtla Gutiérrez, Albino Corzo
53	Aeropuerto Internacional de Tapachula
54	Aeropuerto Internacional de Villahermosa, Capt. Carlos Robirosa
55	Aeropuerto Internacional de Ciudad del Carmen
56	Aeropuerto Internacional de Campeche, Ing. Alberto Acuña Ongay
57	Aeropuerto Internacional de Mérida, Lic. Manuel Crescencio Rejón
58	Aeropuerto Internacional de Cancún
59	Aeropuerto Internacional de Cozumel
60	Aeropuerto Internacional de Chetumal

La creación y estructuración de la red aeroportuaria de la República Mexicana fue realizada empleando el uso de las coordenadas de los aeropuertos que logramos conseguir en el mapa de Google Maps (latitud y longitud) para las colocaciones de los nodos. Y tomando en cuenta esas coordenadas, conectados a los aeropuertos con la base de datos que obtuvimos de todas las rutas o vuelos de ciudad a ciudad de las 7 aerolíneas mexicanas. Por otro lado, estamos considerando que un vuelo de ida implica que también exista el vuelo de regreso. En consecuencia, los enlaces son simétricos.

Con nuestra red de tráfico aéreo podemos calcular cuántos vuelos se generan, entre las aerolíneas consideradas, dentro de territorio mexicano aplicando la ecuación (1). Por lo tanto, tenemos que $L = 723$ enlaces; esto significa que hay 723 vuelos comerciales y privados que pueden estar en operación dentro de la República Mexicana.

4.3. Distribución de probabilidad de grado y coeficiente de agrupamiento local

En esta sección vamos a cuantificar la distribución de probabilidad de grado y el coeficiente de agrupamiento local de la red aeroportuaria de la República Mexicana.

En la figura 32 visualizaremos la gráfica correspondiente a la aplicación de la distribución de probabilidad de grado a la red de tráfico aéreo de la República Mexicana.

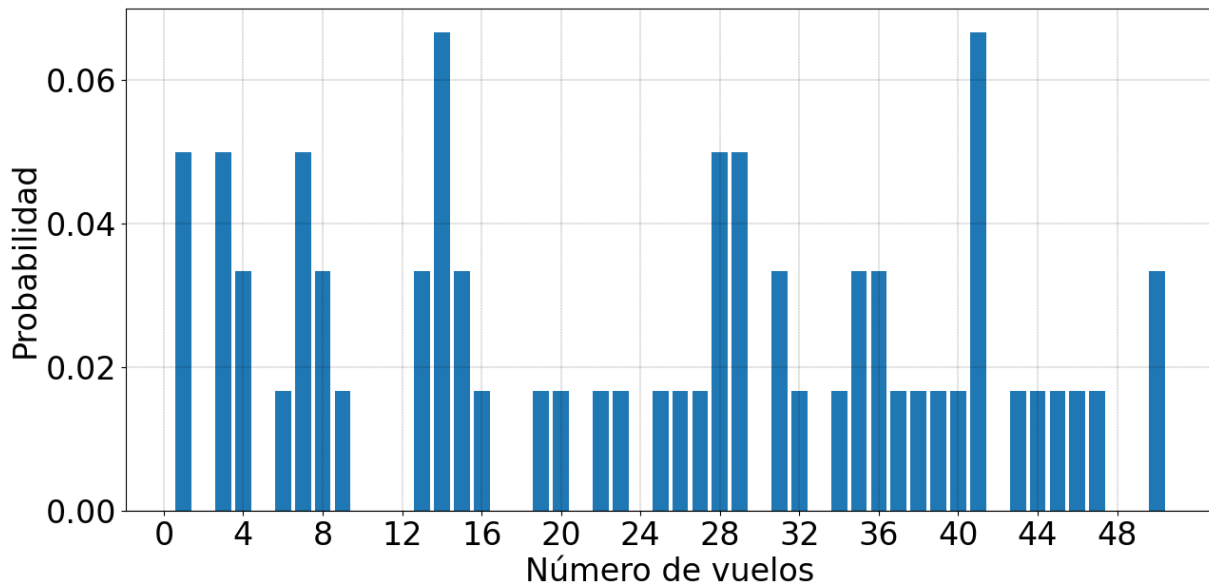


Figura 32. Distribución de probabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana

El resultado de la figura 32 nos proporciona un comportamiento diferente a la p_k de una red aleatoria y de una red de escala libre; el gráfico no se parece a una distribución Poisson o binomial ni a una ley de potencia. No obstante, podemos identificar que la red aeroportuaria de la República Mexicana cuenta con aeropuertos de mayor conectividad, es decir, aquellos que ofrecen el mayor número de vuelos.

En otro aspecto, al aplicar el coeficiente de agrupamiento local de la ecuación (16) a nuestro modelo de red, los resultados para cada aeropuerto lo podemos representar en la figura 33.

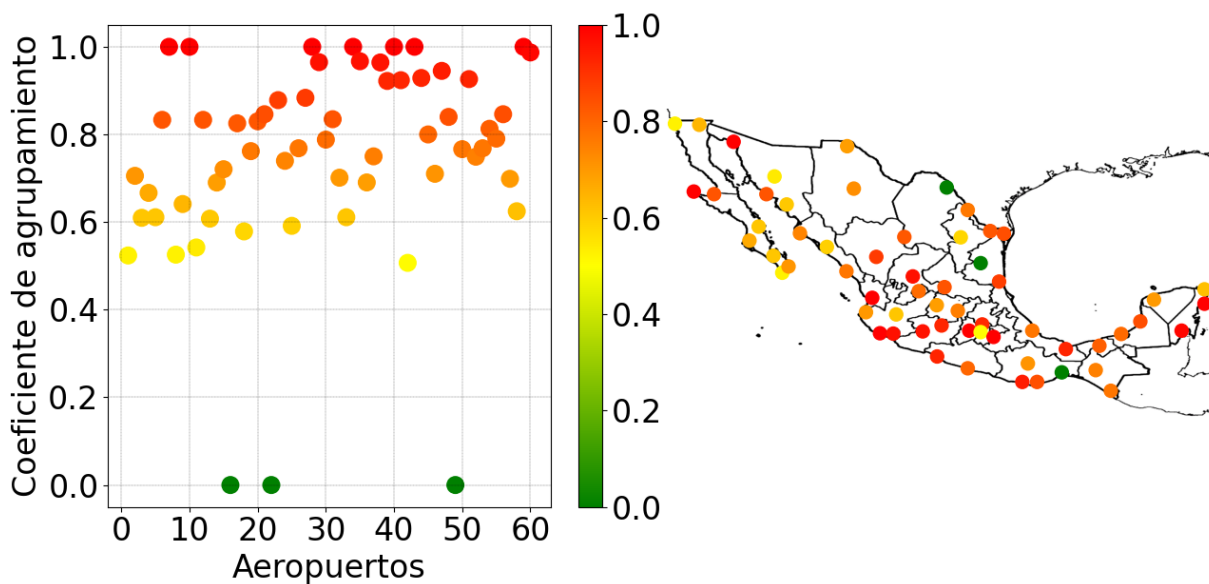


Figura 33. Coeficiente de agrupamiento local de la red aeroportuaria de la República Mexicana

En la figura anterior proporcionamos una paleta de colores (“verde, amarillo, naranja, rojo”) para identificar las estimaciones de cada aeropuerto tanto en la gráfica de la parte izquierda como en el mapa de la República Mexicana del lado derecho. El color verde proporciona el aeropuerto menos relevante y el color rojo el aeropuerto más importante. Además, en la parte derecha reconoceremos de mejor manera el o los aeropuertos menos y más importante en el coeficiente de agrupamiento local u otro modelo matemático como las medidas de centralidad.

El Aeropuerto de Ciudad Ixtepec, el Aeropuerto Internacional de Ciudad Victoria, Gral. Pedro José Méndez y el Aeropuerto Internacional de Piedras Negras son los tres aeropuertos con coeficiente de agrupamiento local nula. En cambio, 7 aeropuertos tienen un coeficiente de agrupamiento local alto de valor 1: Aeropuerto Nacional de Isla de Cedros; Aeropuerto Internacional Mar de Cortés; Aeropuerto Internacional de Tepic, Amado Nervo; Aeropuerto Internacional de Manzanillo, Playa de Oro; Aeropuerto Internacional de Toluca, Adolfo López Mateos; Aeropuerto Internacional de Puebla, Hermanos Serdán y Aeropuerto Internacional de Cozumel. Los 7 aeropuertos mencionados anteriormente presentan una densidad significativa de vuelos locales debido a que todos sus aeropuertos vecinos ofrecen vuelos directos entre sí. Por otro lado, los 3 aeropuertos con coeficiente de agrupamiento local nulo solo cuentan con un aeropuerto vecino.

4.4. Medidas de centralidad

Ahora nos dedicaremos en analizar los aeropuertos importantes o prominentes de la red aeroportuaria de la República Mexicana con base a la medidas de centralidad.

A continuación cuantificaremos las 6 medidas de centralidad a nuestro modelo de red de tráfico aéreo, mostraremos los resultados respectivos en gráficas de la misma forma como el coeficiente de agrupamiento local y explicaremos sus estimaciones.

a) Centralidad de grado

En la figura 34 visualizaremos en el lado izquierdo la gráfica de la centralidad de grado no normalizada de cada aeropuerto y en el lado derecho una comparación mejor de los aeropuertos más y menos destacables de dicha centralidad.

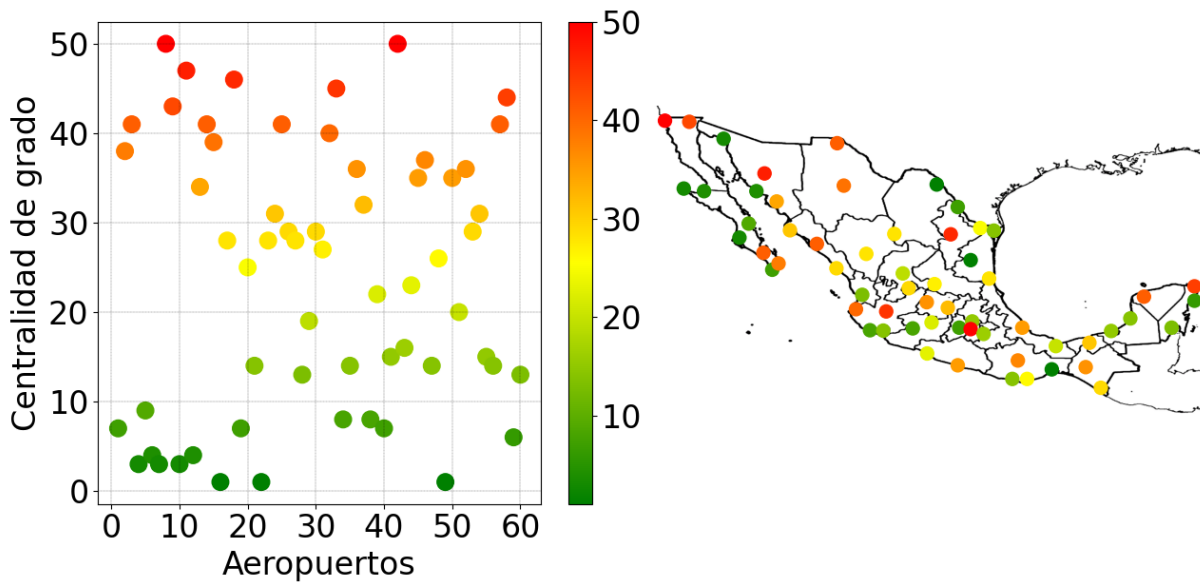


Figura 34. Centralidad de grado de la red aeroportuaria de la República Mexicana

Los aeropuertos más prominentes son: Aeropuerto Internacional de Tijuana, Gral. Abelardo Rodríguez y Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez (mejor conocido como AICM). Los 2 aeropuertos anteriores son relevantes debido al número de rutas o vuelos que entran y salen en ellos. Por otro lado, el Aeropuerto de Ciudad Ixtepec, el Aeropuerto Internacional de Ciudad Victoria, Gral. Pedro José Méndez y el Aeropuerto Internacional de Piedras Negras son los únicos aeropuertos que ofrecen una sola ruta.

b) Centralidad de cercanía

En esta ocasión analizaremos qué aeropuertos son los más cercanos para arribar a ellos. Dicho lo anterior, en la figura 35 observaremos las estimaciones de cada aeropuerto y su mejor comparación con cada aeropuerto.

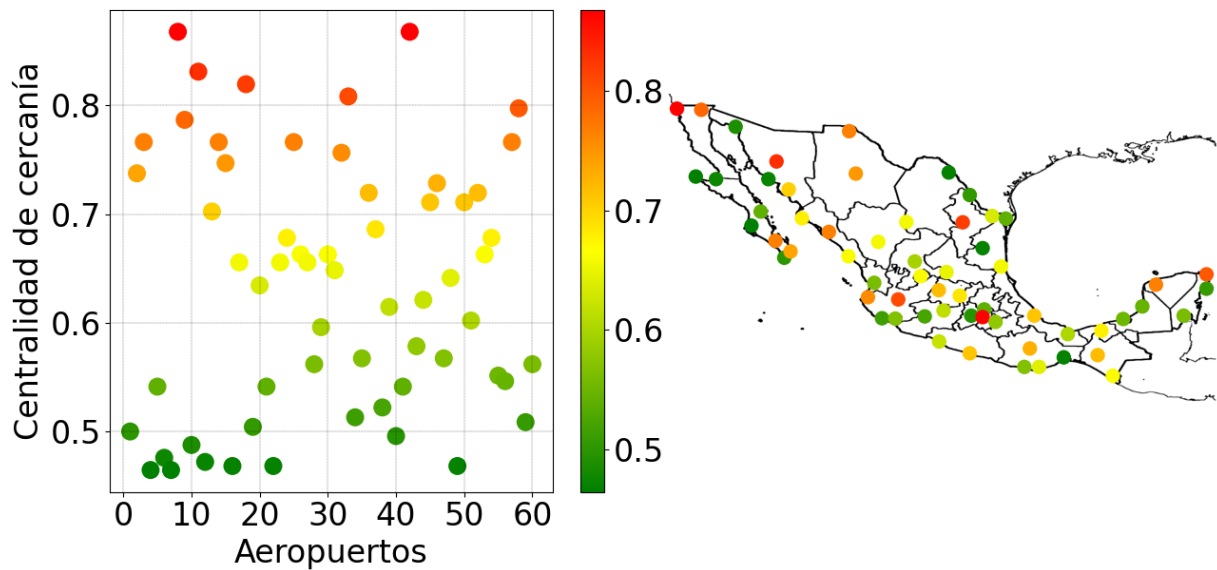


Figura 35. Centralidad de cercanía de la red aeroportuaria de la República Mexicana

Los aeropuertos más cercanos en la red son: Aeropuerto Internacional de Tijuana, Gral. Abelardo Rodríguez y Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez. Los aeropuertos mencionados anteriormente son prominentes por ser los más cercanos para llegar a Tijuana y a la Ciudad de México. En el caso de la Ciudad de México podemos notar en la figura 35 que existen 2 aeropuertos cercanos a él: el Aeropuerto Internacional de Toluca, Adolfo López Mateos y el Aeropuerto Internacional Felipe Ángeles (mejor conocido como AIFA). Estos 2 aeropuertos tienen una centralidad por muy debajo del AICM, lo que indica que no son una buena opción para arribar a la Ciudad de México.

c) Centralidad de vector propio

En esta centralidad nos dedicaremos a identificar los aeropuertos más influyentes en la red aeroportuaria de la República Mexicana, basándonos en el gran número de rutas que ofrecen hacia otros aeropuertos igualmente influyentes dentro del país. En la figura 36 apreciaremos las influencias de cada aeropuerto.

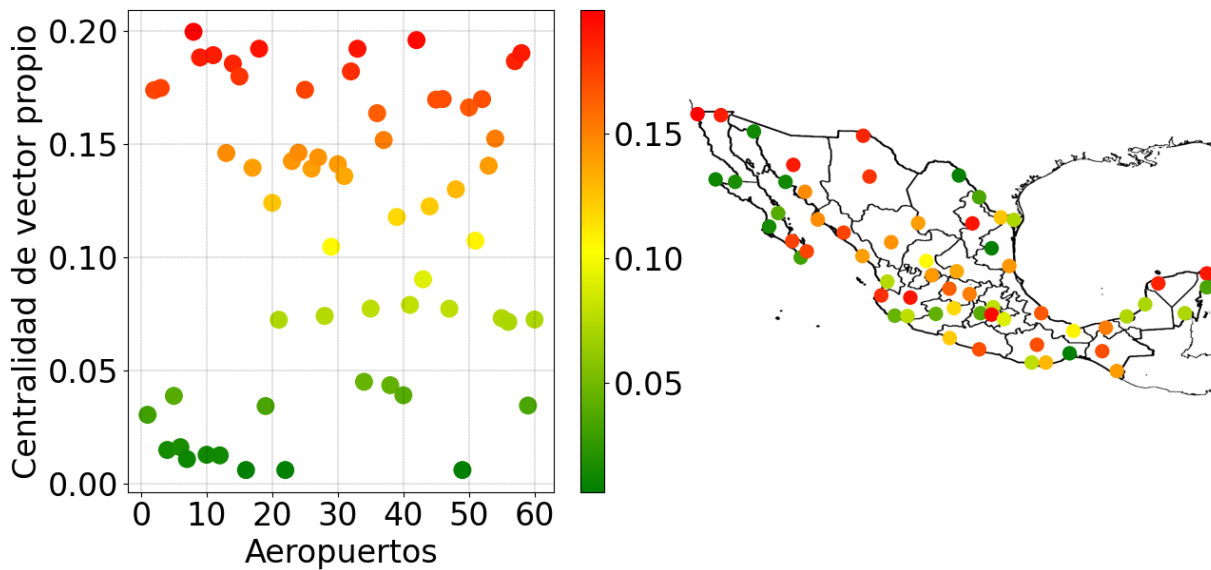


Figura 36. Centralidad de vector propio de la red aeroportuaria de la República Mexicana

En la figura anterior, se muestra los aeropuertos influyentes en la red marcados en rojo. Estos aeropuertos se destacan por su amplia variedad de vuelos hacia importantes ciudades y destinos turísticos en la República Mexicana, como Guadalajara, Monterrey, Tijuana, Ciudad de México, Cancún, entre otros.

d) Centralidad de intermediación

En esta centralidad, examinaremos los aeropuertos que funcionan como terminales para realizar escalas en las rutas más cortas entre dos aeropuertos. Específicamente, nos enfocaremos en identificar los aeropuertos con el mayor número de escalas en las rutas hacia el destino final.

En la figura 37 distinguiremos el o los aeropuertos con más intermediaciones dentro de territorio mexicano.

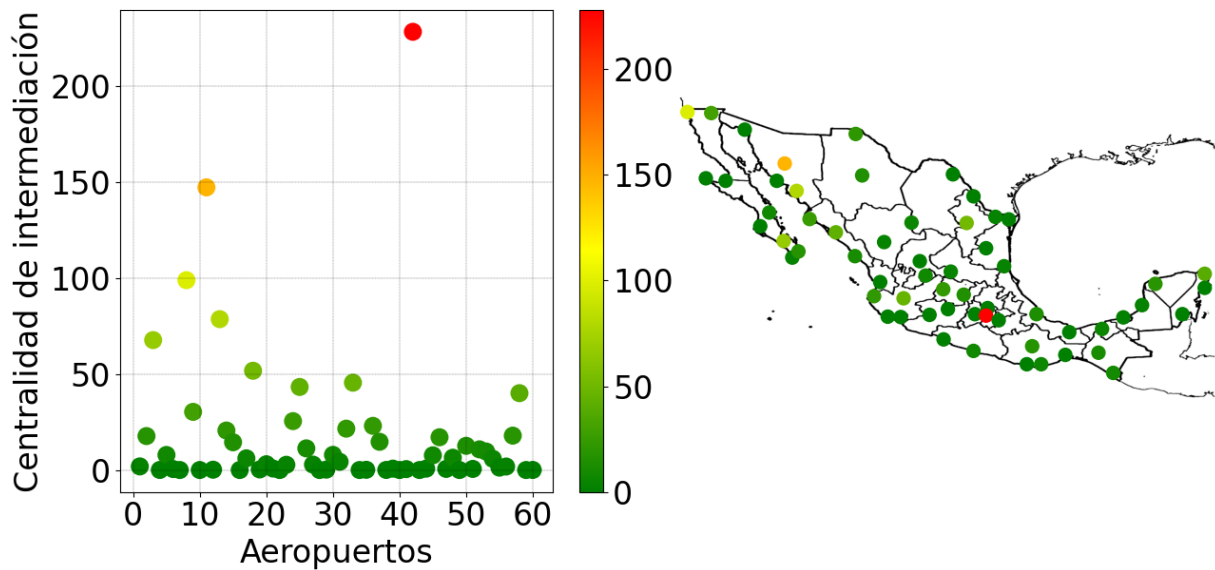


Figura 37. Centralidad de intermediación de la red aeroportuaria de la República Mexicana

En la figura 42, destaca un punto rojo en la gráfica de centralidad de intermediación. Este punto corresponde al Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez, y su valor sobresaliente en el sistema aeroportuario se debe a que funciona como el principal punto de conexión para vuelos entre dos aeropuertos que no tienen vuelos directos entre sí. Es decir, cuando dos aeropuertos no tienen rutas directas, la manera más rápida y eficiente para viajar entre ellos es hacer una escala en el AICM. Podemos observar que el AICM es la opción preferida para realizar una intermediación, seguido por el Aeropuerto Internacional de Hermosillo, Gral. Ignacio Pesqueira García, y como tercera opción, el Aeropuerto Internacional de Tijuana, Gral. Abelardo Rodríguez.

e) Centralidad de subgrafo

La centralidad de subgrafo nos permitirá cuantificar si un aeropuerto tiene una gran diversidad de rutas posibles hacia la mayoría de los 59 aeropuertos dentro del territorio mexicano.

En la figura 38 se presentarán los resultados de C_S para cada aeropuerto.

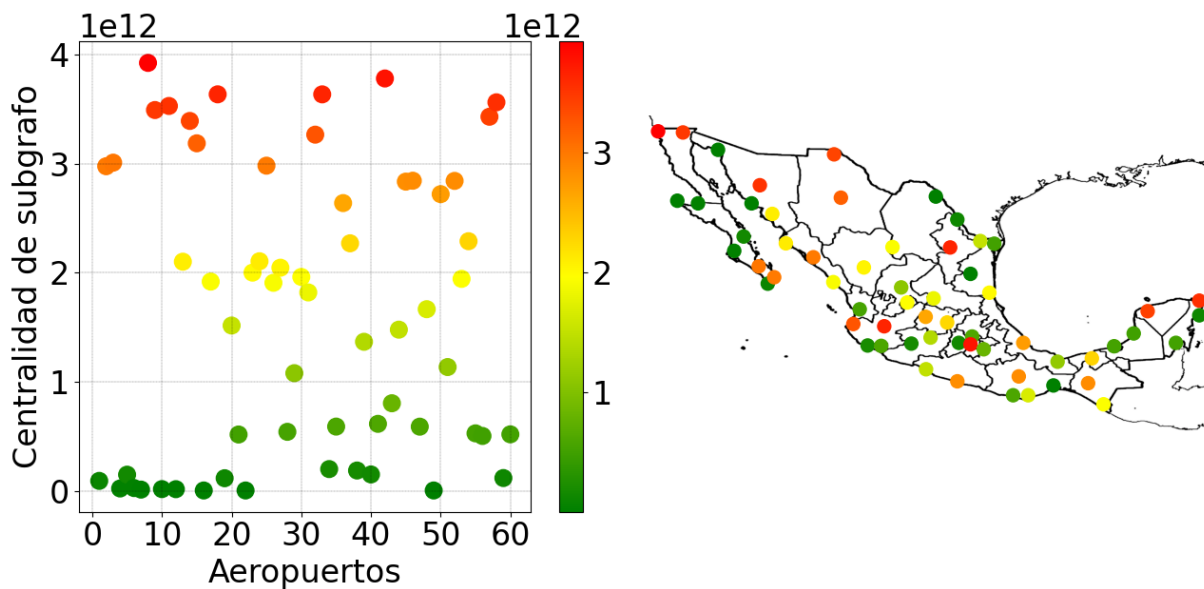


Figura 38. Centralidad de subgrafo de la red aeroportuaria de la República Mexicana

En la figura anterior vemos que los valores en el eje de la centralidad de subgrafo están expresados en notación científica debido a que los resultados de cada aeropuerto son muy grandes. El Aeropuerto Internacional de Tijuana, Gral. Abelardo Rodríguez destaca como el más importante en la centralidad de subgrafo. Esto quiere decir que el aeropuerto tiene una amplia variedad de rutas posibles para conectar con la mayoría de los 59 aeropuertos dentro de la red aeroportuaria de la República Mexicana.

Su alta centralidad de subgrafo indica que Tijuana es un punto crucial para la conectividad aérea en el país, ya que ofrece una gran cantidad de opciones para realizar escalas o conexiones entre diferentes destinos. Si consideramos el segundo aeropuerto más importante de esta centralidad, el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez se lleva ese puesto.

f) Centralidad de comunicabilidad

En esta última medida de centralidad, analizaremos la facilidad con la que un aeropuerto puede alcanzar otros aeropuertos utilizando todas las rutas disponibles dentro de la red de tráfico aéreo de la República Mexicana. En la figura 39 se presentarán las estimaciones de esta medida para cada aeropuerto.

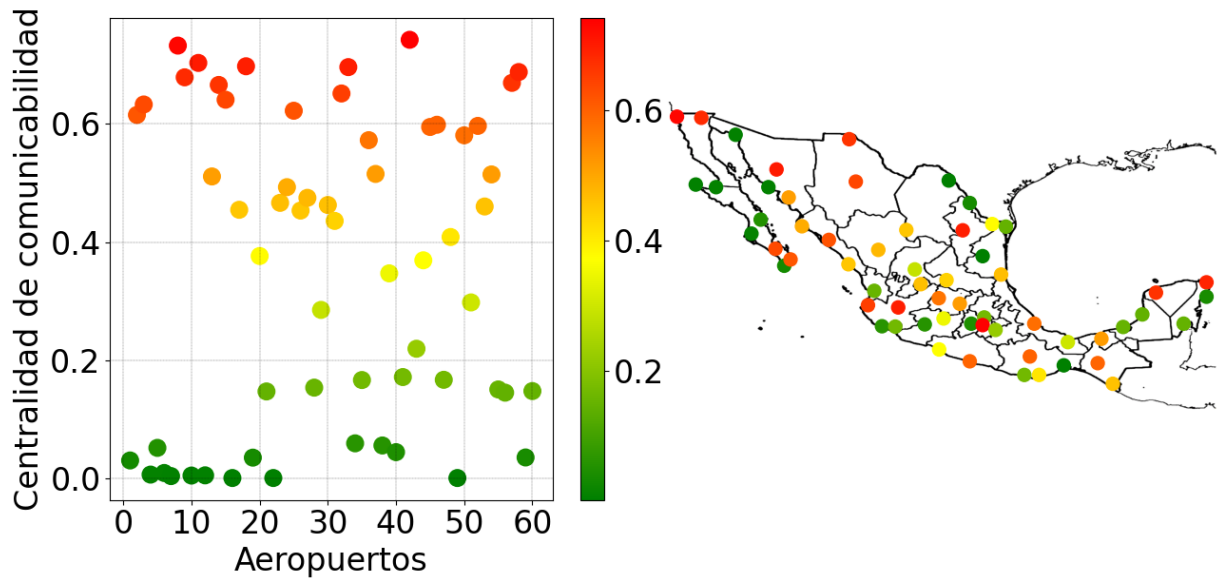


Figura 39. Centralidad de comunicabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana

De acuerdo con los cálculos de la centralidad de comunicabilidad en la red aeroportuaria de la República Mexicana, el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez, ocupa el primer lugar con el mayor número de rutas disponibles que facilitan el acceso a los 59 aeropuertos dentro del país. Cerca de igualar al primer lugar se encuentra el Aeropuerto Internacional de Tijuana, Gral. Abelardo Rodríguez, cuyo resultado también muestra una amplia variedad de rutas disponibles que permiten llegar a los 59 aeropuertos.

4.5. Aeropuertos centrales y periféricos

En esta ocasión, identificaremos y clasificaremos los aeropuertos centrales y periféricos dentro de la República Mexicana con base a la excentricidad, diámetro y radio definidos en el capítulo 1.

En la figura 40 apreciaremos que aeropuertos son centrales y periféricos dentro de la red de tráfico aéreo de nuestro modelo.

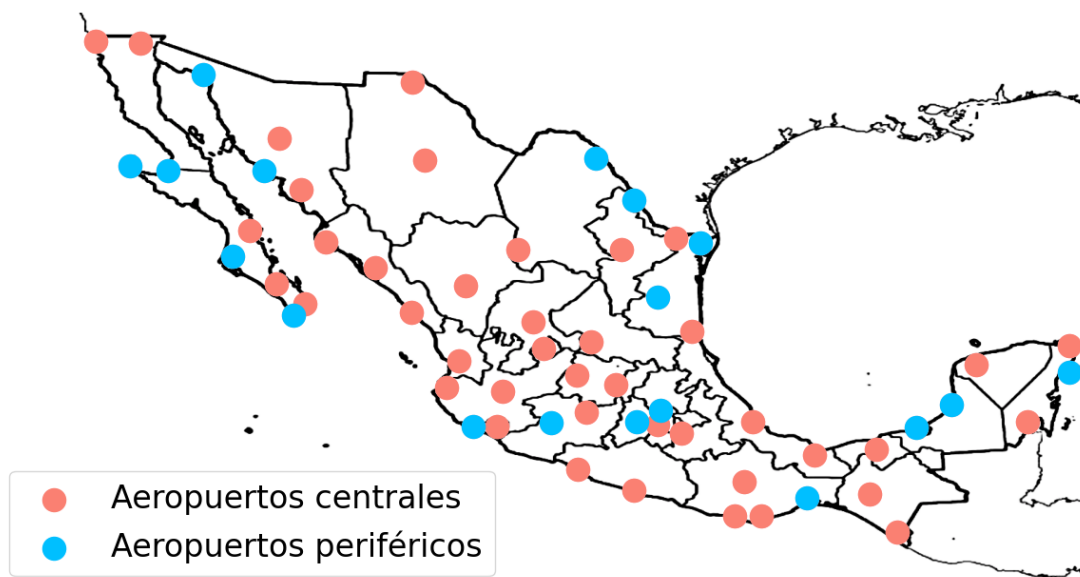


Figura 40. Aeropuertos centrales y periféricos de la red aeroportuaria de la República Mexicana

Observamos en la figura previa que todos los aeropuertos son ya sea centrales o periféricos similar a los nodos de una red aleatoria que analizamos en la sección 2.9. Esto nos hace pensar que nuestro modelo de red tiene una estructura similar a una red aleatoria y ajena a una red de escala libre similar a la red de tráfico aéreo de Estados Unidos de América presentaba en la sección 2.7.

La gráfica anterior se obtuvo debido a las estimaciones de excentricidad para cada aeropuerto, que son de 2 y 3. Por lo tanto, el diámetro de la red es 3 y el radio es 2. En consecuencia, los aeropuertos se clasificarán como centrales o periféricos según las ecuaciones (20) y (21). Ningún aeropuerto se encontrará en una posición neutra, como en el caso de la mayoría de los nodos en una red de escala libre, como se observó en la figura 18 de la sección 2.9.

Un aspecto interesante de la red aeroportuaria de la República Mexicana es su diámetro y radio. El diámetro nos indica que un par de aeropuertos realizarán, como máximo, dos escalas o intermediaciones para conectarse entre sí, mientras que el radio muestra que solo un par de aeropuertos realizarán una escala o intermediación para su conexión.

En la figura 40, podemos observar que en el centro de la República Mexicana existen dos aeropuertos periféricos (Aeropuerto Internacional de Toluca, Adolfo López Mateos, y Aeropuerto Internacional Felipe Ángeles). Aunque los nodos periféricos suelen estar en la orilla, como en una red de escala libre, estos dos aeropuertos cumplen con la definición de nodos periféricos según la ecuación

(21). De manera similar a los nodos periféricos de una red aleatoria, su ubicación central en la red aeroportuaria los hace cumplir esta característica.

4.6. Robustez de la red

En esta sección nos dedicaremos en analizar la vulnerabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana a través de la robustez de la red.

Utilizaremos el programa de robustez de la red, presentado en la sección 3.3, para analizar la vulnerabilidad de la red de tráfico aéreo de la República Mexicana. En la figura 41 se muestran las gráficas de interés correspondientes a esta medición, donde se simularon fallas aleatorias.

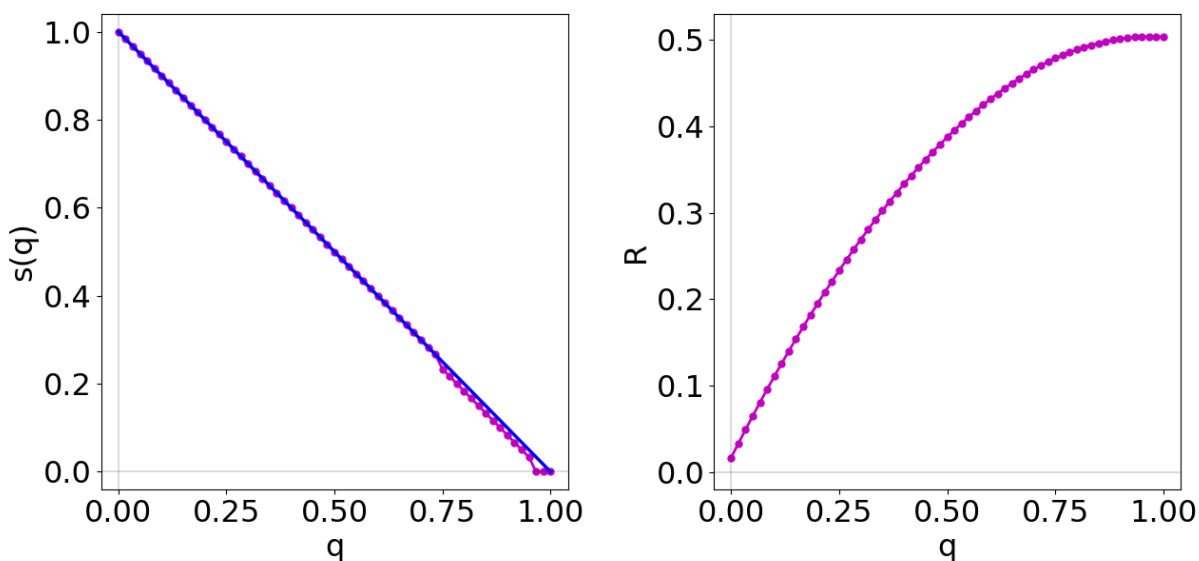


Figura 41. Robustez de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo fallas aleatorias

En fallas aleatorias podemos observar un decrecimiento lineal y constante de la componente gigante similar al gráfico $s(Q) = 1 - q$ de color azul. En la robustez R el gráfico tiene una convergencia aproximada al valor 0.5 que es la cota superior posible de la estimación de la robustez. La figura 41 se comporta de igual forma como lo analizado y estudiado en la figura 23 de la sección 3.3. Por lo tanto, podemos concluir que la red aeroportuaria de la República Mexicana es invulnerable a fallas aleatorias.

Ahora analizaremos el comportamiento de la reducción en el tamaño de la componente gigante y la robustez de la red de tráfico aéreo de la República Mexicana bajo ataques objetivo. Específicamente, examinaremos el ataque a los aeropuer-

tos que tienen el mayor número de vuelos entrantes y salientes, como se observó en la centralidad de grado en la sección 4.4. Por lo que, en la figura 42 analizaremos lo dicho en este párrafo.

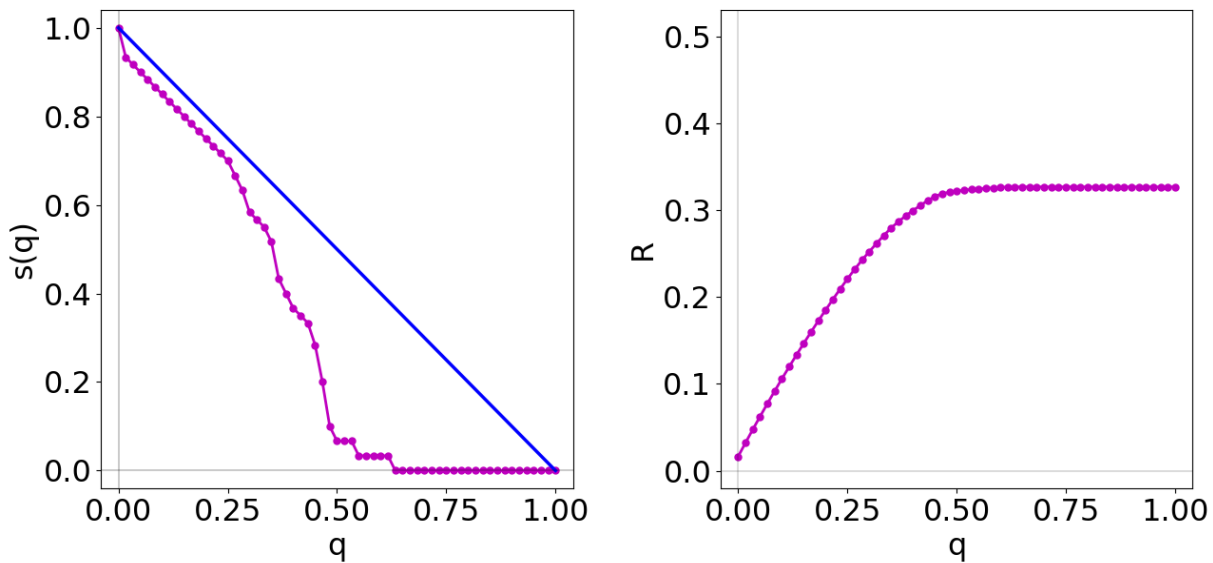


Figura 42. Robustez de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo ataques objetivo

En el caso de ataques objetivo la reducción en el tamaño de la componente gigante y la robustez se asemeja a lo analizado en la figura 25, es decir, las gráficas $s(q)$ contra q y R contra q no nos dice nada sobre la vulnerabilidad o invulnerabilidad del sistema aeroportuario mexicano. En consecuencia, vamos a tener que recurrir con la variación en el tamaño de la componente gigante de la sección 3.4 para calcular la fracción crítica de nodos eliminado y así decidir si la red aeroportuaria de la República Mexicana es vulnerable o invulnerable bajo ataques objetivo.

Utilizando la ecuación (29) de la sección 3.4, calculamos el valor de q^* , que resulta ser 0.36. A partir de la ecuación (3), también determinamos la densidad de la red, la cual es de 0.408. Con estos valores de q^* y D , representemos este par ordenado en la gráfica de la figura 28 y procedamos a analizarla en la figura 43.

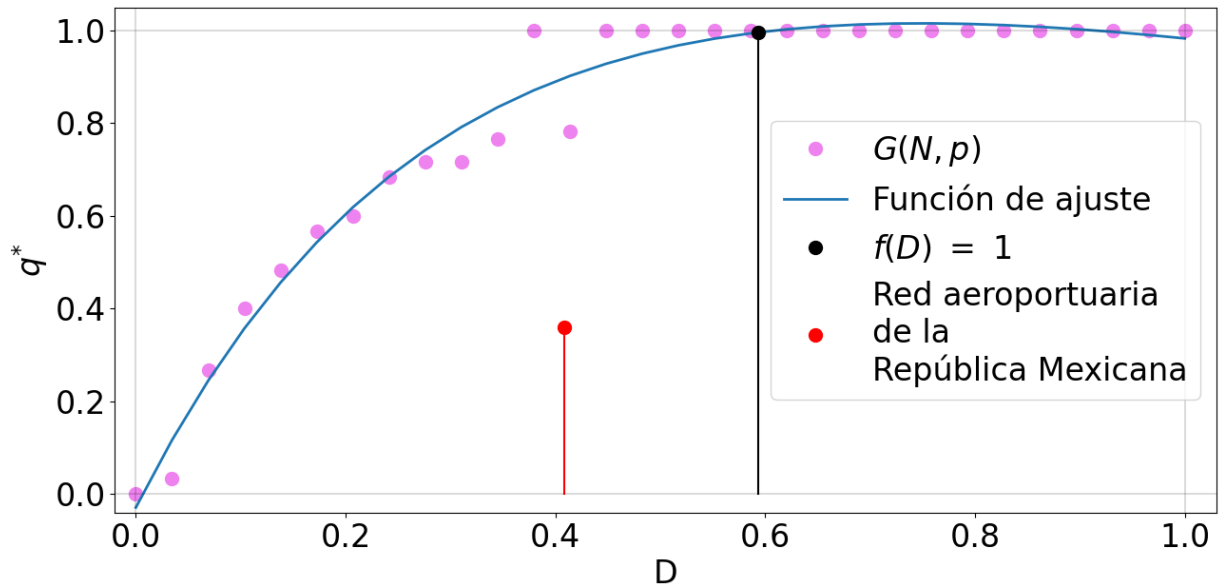


Figura 43. Análisis de la vulnerabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo ataques objetivo

En la gráfica anterior observamos que la red de tráfico aéreo de la República Mexicana es vulnerable con base a una fracción crítica de nodos eliminados q^* , dicho de otra manera, no mantiene su robustez bajo ataques objetivo.

En conclusión, la red aeroportuaria de la República Mexicana es robusta, lo que implica que mantiene su funcionamiento y capacidad de conexión si sufre fallas o ataques aleatorios en algunos de sus 60 aeropuertos. En cambio, si enfrenta ataques de forma objetiva, entonces la red aeroportuaria de la República Mexicana es vulnerable, lo que experimenta interrupciones significativas en la conectividad entre los aeropuertos, generando retrasos masivos y afectaciones en la operación regular de los vuelos.

Capítulo 5

Análisis y Conclusiones

Al analizar la distribución de probabilidad de grado, el coeficiente de agrupamiento local, medidas de centralidad, nodos centrales y periféricos y robustez en la Red Aeroportuaria de la República Mexicana, hemos obtenido resultados interesantes que nos permiten comprender mejor su estructura y características.

En cuanto a la distribución de probabilidad de grado, observamos que la red no sigue una estructura típica de una red aleatoria ni de una red de escala libre. Sin embargo, en la gráfica de la figura 32 pudimos apreciar la existencia de algunos aeropuertos con una mayor conectividad, lo que sugiere la presencia de aeropuertos de gran importancia en la red.

En relación al coeficiente de agrupamiento local, encontramos que varios aeropuertos muestran un valor significativamente alto, lo que indica que éstos tienden a formar grupos densamente interconectados entre sí. Por otro lado, solo tres aeropuertos presentaron un coeficiente de agrupamiento local nulo, sugiriendo una menor tendencia a la formación de conexiones cercanas en estos aeropuertos.

Con base en los cálculos realizados utilizando las medidas de centralidad, hemos logrado determinar la importancia de los aeropuertos dentro del sistema aeroportuario mexicano. Estos análisis nos han permitido identificar de manera precisa aquellos aeropuertos que desempeñan un papel fundamental en la conectividad de la red aeroportuaria de la República Mexicana.

En específico, al considerar la centralidad de intermediación, hemos encontrado un aeropuerto que destaca de manera prominente sobre los demás: el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez. Nuestros resultados

indican que este aeropuerto funciona como escala crucial para la conectividad entre otros dos aeropuertos, ya que estos últimos deben hacer escala en él para poder alcanzarse entre sí. Sin embargo, es preocupante notar que el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México enfrenta una saturación de capacidad operacional en los edificios terminales y en el número de despegues y aterrizajes de las aeronaves [28].

Estos hallazgos resaltan la importancia de considerar no solo la relevancia de los aeropuertos dentro de la red, sino también su capacidad operativa. La centralidad de intermediación puede otorgar un papel protagónico a un aeropuerto, como es el caso del Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, pero esta posición destaca también el riesgo de enfrentar problemas de capacidad y eficiencia.

Por ende, resulta necesario que las autoridades aeroportuarias y los responsables de la planificación del transporte aéreo en la República Mexicana tomen en cuenta estos análisis de centralidad al desarrollar estrategias para el crecimiento y optimización de la red aeroportuaria. Es necesario evaluar cuidadosamente cómo la distribución del tráfico aéreo puede ser mejorada, redistribuyendo ciertas rutas o mejorando la infraestructura de otros aeropuertos estratégicos para reducir la carga sobre el Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, Benito Juárez.

Por otro lado, hemos llevado a cabo un análisis exhaustivo de la red aeroportuaria de la República Mexicana, utilizando la distinción de nodos centrales y periféricos para identificar y clasificar los aeropuertos con base a las distancias máximas y mínimas que pueden efectuar cada aeropuerto dentro de la red, lo que nos ha proporcionado una visión integral del sistema aeroportuario del país.

Los resultados obtenidos de nuestros cálculos han revelado que, de los 60 aeropuertos que conforman la red, 18 de ellos se clasifican como aeropuertos periféricos, mientras que el resto son considerados aeropuertos centrales. Esta distinción entre aeropuertos centrales y periféricos es fundamental para entender la dinámica y la estructura de la red de tráfico aéreo de la República Mexicana.

Es interesante destacar que, dentro de esta clasificación, hemos identificado dos aeropuertos periféricos ubicados en una posición inusual: el Aeropuerto Internacional Felipe Ángeles y el Aeropuerto Internacional de Toluca, Adolfo López Mateos. Estos aeropuertos están estratégicamente ubicados en la parte central de

la República Mexicana, cercanos a la Ciudad de México. Estos aeropuertos desempeñan un papel clave como aeropuertos de complemento para el Aeropuerto de la Ciudad de México.

Nuestra investigación resalta la importancia de considerar tanto la ubicación geográfica como las características operativas de los aeropuertos para comprender plenamente su papel dentro del sistema aeroportuario. La distribución estratégica de los aeropuertos periféricos cerca de áreas de alta demanda, como la Ciudad de México, puede aliviar la presión sobre los aeropuertos centrales, facilitar la movilidad y mejorar la eficiencia en el transporte aéreo a nivel nacional.

En cuanto al estudio sobre la robustez de la red, se ha demostrado que la red aeroportuaria de la República Mexicana exhibe un alto nivel de invulnerabilidad cuando enfrenta fallas o ataques de forma aleatoria a sus 60 aeropuertos. En estas condiciones, la red demuestra una capacidad notable para mantener su estructura y funcionamiento fundamental, como se refleja en la preservación de su componente gigante incluso en presencia de fallas aleatorias.

Sin embargo, se ha observado que la red aeroportuaria de la República Mexicana es vulnerable, es decir, no es completamente robusta, cuando se somete a ataques de forma objetiva. Específicamente, cuando se atacan selectivamente los aeropuertos de mayor conectividad, la red muestra diferentes variaciones en la disminución con el tamaño de su componente gigante, lo que indica una mayor susceptibilidad y una mayor posibilidad de colapsar ante este tipo de ataques focalizados.

A continuación, se presentan dos gráficas que refuerzan las conclusiones obtenidas en la robustez. En la gráfica de la figura 44, se comparó la reducción en el tamaño de la componente gigante de la red aeroportuaria de la República Mexicana, una red aleatoria y una red de escala libre cuando se atacaron de forma aleatoria. Los resultados indican que tanto la red aleatoria como la red aeroportuaria de la República Mexicana demostraron robustez, manteniendo la conectividad su componente gigante, mientras que la red de escala libre presentó variaciones a considerar en la reducción del tamaño de su componente gigante.

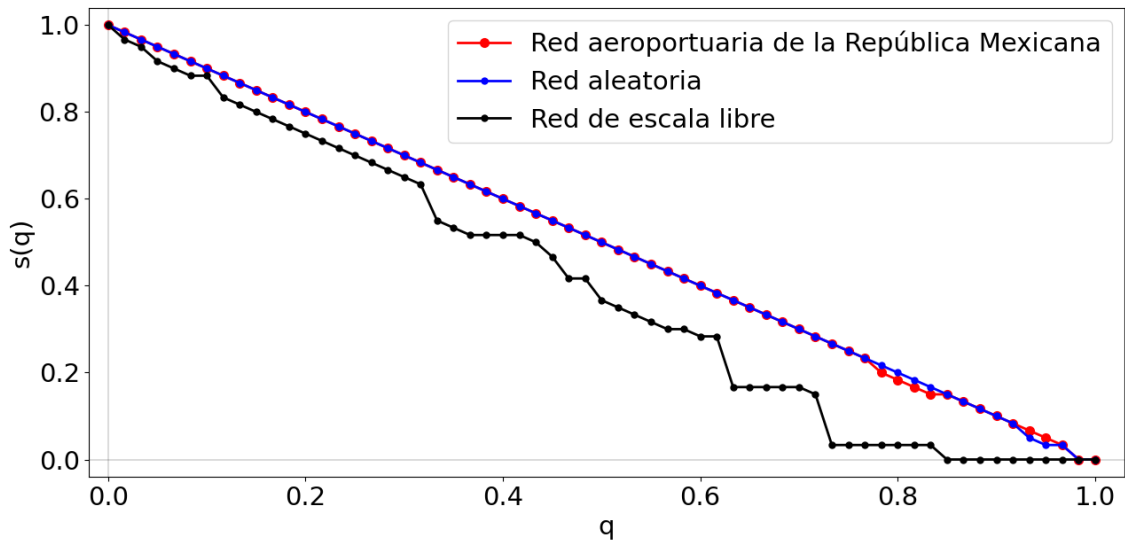


Figura 44. Comparación en la reducción del tamaño de la componente gigante de una red aleatoria, una red de escala libre y de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo fallas aleatorias

En la segunda gráfica de la figura 45, se analizó la reducción en el tamaño de la componente gigante de las tres redes cuando se atacaron de manera objetiva, enfocándose en los nodos de mayor conectividad. En este caso, la red de escala libre mostró una reducción significativa en el tamaño de su componente gigante, lo que la hace especialmente vulnerable a este tipo de ataques. Por otro lado, tanto la red aeroportuaria de la República Mexicana como la red aleatoria exhibieron cierta variabilidad en sus respuestas, demostrando que son más resistentes que la red de escala libre, pero aún así no completamente invulnerables.

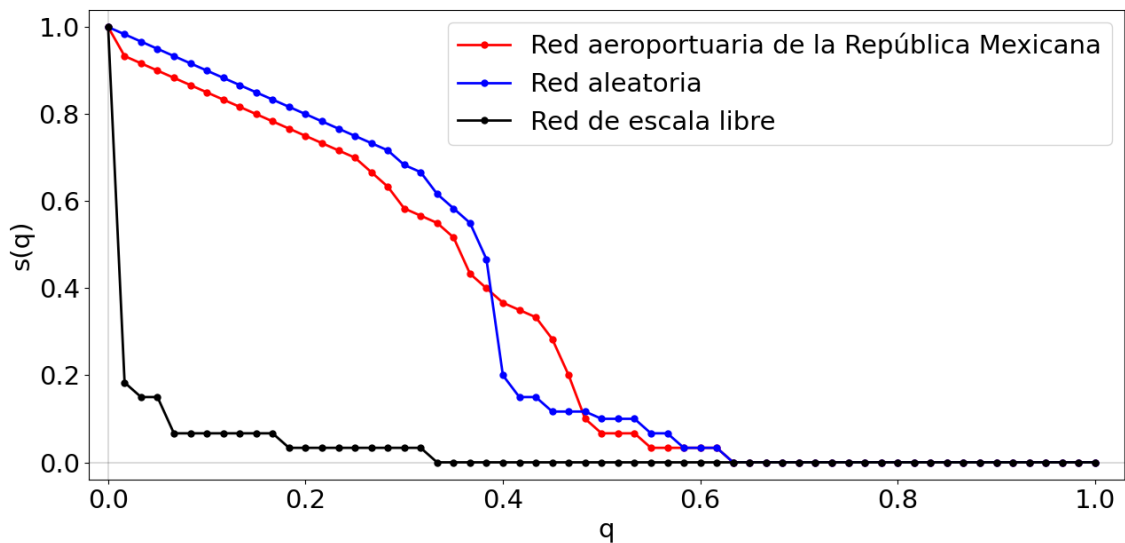


Figura 45. Comparación en la reducción del tamaño de la componente gigante de una red aleatoria, una red de escala libre y de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo ataques objetivo

En consecuencia, estos hallazgos resaltan la importancia de la distribución de la conectividad del sistema aeroportuario mexicano. Si bien la red muestra resistencia ante eventos aleatorios, se hace evidente la necesidad de implementar estrategias específicas para proteger y fortalecer los aeropuertos de mayor importancia y conectividad en la red. Estos resultados tienen implicaciones prácticas para el diseño y la gestión de la red aeroportuaria de la República Mexicana, ya que podríamos comprender la importancia de la conectividad y la distribución de los aeropuertos y pueden ayudar a diseñar estrategias más efectivas para garantizar su funcionamiento óptimo y su resiliencia en situaciones adversas.

Índice de figuras

1	Inicios de la Teoría de Grafos	10
2	Grafo de $N = 4$ nodos	13
3	Grafo $G(5, 6)$ como ejemplo para las medidas de centralidad	16
4	Grafo $G(7, 8)$ como ejemplo para los nodos centrales y periféricos	26
5	Nodos centrales y periféricos de la figura 4	27
6	Red resultante de la programación básica en Python con NetworkX	29
7	Ejemplo de estructura de los datos en Excel	30
8	Red resultante empleando Excel y NetworkX	31
9	Mapa interactivo de la paquetería Folium	33
10	Creación de una red sobre un mapa interactivo	34
11	Red aleatoria con el modelo de Gilbert	36
12	Red de escala libre con el modelo de Barabasi	37
13	Comparación de la distribución de probabilidad de grado promedio de una red aleatoria con la distribución binomial y Poisson	41
14	Similitud de una red aleatoria con la red de carretera de Estados Unidos de América	42
15	Comparación de la Distribución de probabilidad de grado promedio de una red de escala libre con la ley de potencia	43
16	Similitud de una red de escala libre con la red de tráfico aéreo de Estados Unidos de América	43
17	Medidas de centralidad de una red de escala libre	46
18	Nodos centrales y periféricos de una red aleatoria y una red de escala libre	47
19	Ejemplos de redes con existencia de la componente gigante	50
20	Grafo $G(N, L)$ como ejemplo para la medición de su robustez	51
21	Red resultantes al atacar los nodos 2 y 3 de la red $G(N, L)$	52
22	Red resultante al atacar tres nodos de la red $G(N, L)$	53
23	Medición de la robustez de una red aleatoria $G(N, p)$ con fallas aleatorias	55

24	Medición de la robustez de una red de escala libre $G(N, m)$ con ataques objetivo	56
25	Variaciones en la reducción del tamaño de la componente gigante y robustez de una red de escala libre $G(N, m)$ con fallas aleatorias	57
26	Identificación de q^* en la reducción del tamaño de la componente gigante de seis redes aleatorias $G(N, p)$	59
27	Gráfico de D contra q^* para el análisis de la vulnerabilidad de redes bajo fallas aleatorias	60
28	Gráfico de D contra q^* para el análisis de la vulnerabilidad de redes bajo ataques objetivo	61
29	Vulnerabilidad de redes de escala libre	62
30	Red de tráfico aéreo de la República Mexicana	67
31	Enumeración de los aeropuertos de la República Mexicana dentro de la red	68
32	Distribución de probabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana	70
33	Coeficiente de agrupamiento local de la red aeroportuaria de la República Mexicana	70
34	Centralidad de grado de la red aeroportuaria de la República Mexicana	72
35	Centralidad de cercanía de la red aeroportuaria de la República Mexicana	73
36	Centralidad de vector propio de la red aeroportuaria de la República Mexicana	74
37	Centralidad de intermediación de la red aeroportuaria de la República Mexicana	75
38	Centralidad de subgrafo de la red aeroportuaria de la República Mexicana	76
39	Centralidad de comunicabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana	77
40	Aeropuertos centrales y periféricos de la red aeroportuaria de la República Mexicana	78
41	Robustez de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo fallas aleatorias	79
42	Robustez de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo ataques objetivo	80
43	Análisis de la vulnerabilidad de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo ataques objetivo	81

44	Comparación en la reducción del tamaño de la componente gigante de una red aleatoria, una red de escala libre y de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo fallas aleatorias	85
45	Comparación en la reducción del tamaño de la componente gigante de una red aleatoria, una red de escala libre y de la red aeroportuaria de la República Mexicana bajo ataques objetivo	85

Índice de tablas

1	Terminologías entre redes complejas y Teoría de Grafos	11
2	Centralidad de grado de los nodos del grafo $G(5, 6)$	16
3	Centralidad de cercanía de los nodos del grafo $G(5, 6)$	18
4	Centralidad de vector propio de los nodos del grafo $G(5, 6)$	19
5	Centralidad de intermediación de los nodos del grafo $G(5, 6)$	21
6	Centralidad de subgrafo de los nodos del grafo $G(5, 6)$	22
7	Centralidad de comunicabilidad de los nodos del grafo $G(5, 6)$	23
8	Coefficiente de agrupamiento local de los nodos del grafo $G(5, 6)$	24
9	Excentricidad del grafo $G(7, 8)$ usando la ecuación (17)	26
10	Ejemplos de redes del mundo real	44
11	Estimación de la robustez en cada ataque a sus 10 nodos de la red $G(N, L)$	54
12	Densidades D en función de q^* de 30 redes aleatorias $G(N, p)$ bajo fallas aleatorias	59
13	Densidades D en función de q^* de 30 redes aleatorias $G(N, p)$ bajo ataques objetivo	61
14	Resultados de D y de q^* empleando redes de escala libre	62
15	Aerolíneas mexicanas que ofrecen transporte aéreo de pasajeros	64

Bibliografía

- [1] Pastor Román, I. (2009). La seguridad de la aviación en el sistema aeroportuario mexicano: un modelo de seguridad fundamentado en la normatividad. Estructura organizacional, capacitación y coordinación. Tesis de doctorado. Instituto Politécnico Nacional.

- [2] Cámara Mexicana de la Industria de la Construcción. (2020). El antes y el ahora de los aeropuertos mexicanos. *Revista Mexicana de la Construcción*, 643, 60-63. Recuperado de https://issuu.com/helios_comunicacion/docs/rmc_643_27may_

- [3] Ruiz Romero, M. (2003). Aeropuertos: Historia de la construcción, operación y administración aeroportuaria en México.

- [4] Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *nature*, 393(6684), 440-442.

- [5] Barabási, A. L. & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439), 509-512.

- [6] Euler, L. (1956). The seven bridges of Königsberg. *The world of mathematics*, 1, 573-580.

- [7] Evans, T. S. & Chen, B. (2022). Linking the network centrality measures closeness and degree. *Communications Physics*, 5(1), 172.

- [8] Lohmann, G., Margulies, D. S., Horstmann, A., Pleger, B., Lepsien, J., Goldhahn, D., ... & Turner, R. (2010). Eigenvector centrality mapping for

analyzing connectivity patterns in fMRI data of the human brain. PloS one, 5(4), e10232.

- [9] Raghavan Unnithan, S. K., Kannan, B. & Jathavedan, M. (2014). Betweenness centrality in some classes of graphs. International Journal of Combinatorics, 2014.
- [10] Estrada, E. & Rodriguez-Velazquez, J. A. (2005). Subgraph centrality in complex networks. Physical Review E, 71(5), 056103.
- [11] Estrada, E. & Hatano, N. (2008). Communicability in complex networks. Physical Review E, 77(3), 036111.
- [12] En línea. https://networkx.org/documentation/stable/reference/generated/networkx.drawing.nx_pylab.draw_networkx.html
- [13] Erdős, P. & Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. Publ. math. inst. hung. acad. sci, 5(1), 17-60.
- [14] Gilbert, E. N. (1959). Random graphs. The Annals of Mathematical Statistics, 30(4), 1141-1144.
- [15] Albert, R. & Barabási, A. L. (2002). Statistical mechanics of complex networks. Reviews of modern physics, 74(1), 47.
- [16] Chiang, W. K. & Chen, R. J. (1995). The (n, k)-star graph: A generalized star graph. Information Processing Letters, 56, 259-264.
- [17] Guerrero, C. R. (2010). Cálculo promedial. El caso de la media aritmética. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13(4-II), 387-408.

- [18] Barabasi, A. L. (2016). Graph Theory. En Network Science. Cambridge: Cambridge University Press.
- [19] Lahura, E. (2003). El coeficiente de correlación y correlaciones espúreas (Vol. 218). Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Economía.
- [20] Dong, S., Wang, H., Mostafavi, A. & Gao, J. (2019). Robust component: a robustness measure that incorporates access to critical facilities under disruptions. *Journal of the Royal Society Interface*, 16(157), 20190149.
- [21] Schneider, C. M., Moreira, A. A., Andrade Jr, J. S., Havlin, S. & Herrmann, H. J. (2011). Mitigation of malicious attacks on networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(10), 3838-3841.
- [22] Chapra, S. C. (2010). Capítulo 17: Regresión por mínimos cuadrados. En *Métodos numéricos para ingenieros* (pp. 466-502). McGraw-Hill.
- [23] Secretaría de Comunicaciones y Transportes. (2020, 24 de noviembre). Acuerdo por el que se aprueban el Programa Institucional de Aeropuertos y Servicios Auxiliares 2020-2024, y el Programa Institucional del Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México, S.A. de C.V. 2020-2024. *Diario Oficial de la Federación*. Recuperado de https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5605600&fecha=24/11/2020#gsc.tab=0
- [24] Grupo Aeroportuario del Pacífico (GAP). (s.f.). ¿Quiénes somos?. Recuperado de <https://www.aeropuertosgap.com.mx/es/2012-03-02-17-22-49.html>
- [25] Grupo Aeroportuario del Sureste (ASUR). (s.f.). Nuestros Aeropuertos. Recuperado de <https://www.asur.com.mx/nuestros-aeropuertos>

- [26] Grupo Aeroportuario del Centro Norte (OMA). (s.f.). Acerca de nosotros. Recuperado de <https://ir.oma.aero/es/acerca-de-nosotros/>
- [27] En línea. <https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/755446/Boletin-es-jul-2022-26082022.pdf>
- [28] Secretaría de Infraestructura, Comunicaciones y Transportes. (2022, 3 de marzo). Resolución por la que se declara la saturación de los edificios terminales del Aeropuerto Internacional Benito Juárez de la Ciudad de México. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5644607&fecha=03/03/2022#gsc.tab=0