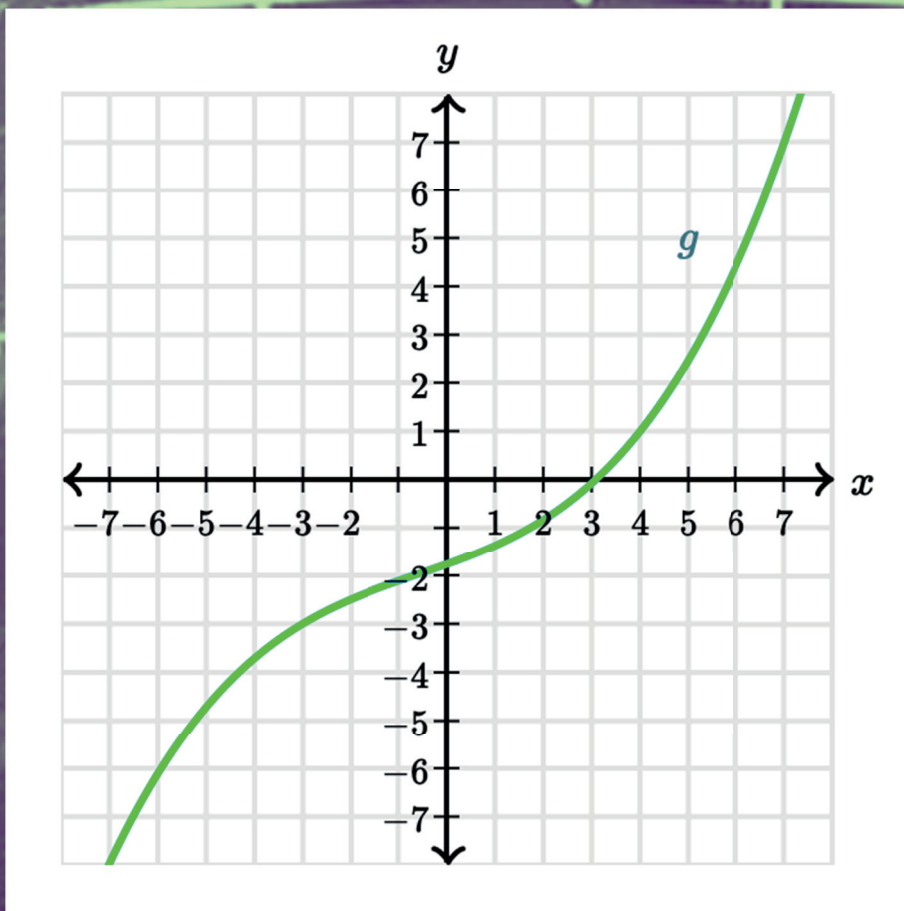


*¿Cuáles son tus límites en matemáticas?*



**Julio César Salas Torres**

*¿Cuáles son tus límites en matemáticas?*

Julio César Salas Torres

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Dra. Tania Hogla Rodríguez Mora  
Rectora

Mtro. César Enrique Fuentes Hernández  
Coordinador Académico

Museógrafo Fernando Fco. Félix y Valenzuela  
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión Universitaria

Equipo de la Biblioteca del Estudiante

Ángeles Godínez Guevara  
Responsable

Ana Beatriz Alonso Osorio  
Daniel Valentin Cruz  
Florina Piña Cancino  
Heber Blass Bautista  
Sergio Javier Cortés Becerril

# *¿Cuáles son tus límites en matemáticas?*

Julio César Salas Torres

FICHA CATALOGRÁFICA E-S/N

Salas Torres, Julio César

¿Cuáles son tus límites en matemáticas? / Julio César Salas Torres. -- Primera edición.  
-- Ciudad de México : Universidad Autónoma de la Ciudad de México, 2024.

177 páginas : fórmulas ; 21 cm

Bibliografía: página 177

ISBN: 978-607-2615-02-1

1. Variables (Matemáticas). 2. Sucesiones (Matemáticas). 3. Series (Matemáticas). 4.  
Funciones de variable real. I. Título

LC QA331.5

Dewey 515

*¿Cuáles son tus límites en matemáticas?*

primera edición, 2024

© Julio César Salas Torres

D.R. © Universidad Autónoma de la Ciudad de México  
García Diego 168, col. Doctores,  
alc. Cuauhtémoc, c. p. 06720, México, D F

ISBN: 978-607-2615-02-1

[https://www.uacm.edu.mx/Organizacion/CoordinacionAcademica/Biblioteca\\_Estudiante](https://www.uacm.edu.mx/Organizacion/CoordinacionAcademica/Biblioteca_Estudiante)

Material educativo universitario de distribución gratuita para estudiantes de la UACM. Prohibida su venta

Hecho e impreso en México

# Dedicatoria

*Para mis papás †*

*Para Abril, Tonalli, Osiris, Shivaya y Balam*

*Para Eledi, Lilian, Cain, Osiris, Tirsis, Ernestina,....*



# Agradecimientos

Por ser un ejemplo a seguir, agradezco:

A mis profesores por sus enseñanzas...

A mis padres por la confianza y el apoyo que siempre me mostraron...



# Introducción

Este trabajo trata sobre el concepto de límites, para entender este concepto nos apoyaremos en las series y sucesiones (en los números reales y complejos). Nos resulta confuso al principio entender que una serie sea una suma, al reflexionar por qué, nos daremos cuenta de que “serie” es una palabra que se usa en el español no-matemático para cosas que no son sumas: en México decimos que vemos una serie de televisión, que necesitamos el número de serie de un vehículo para asegurarlo, que una serie de contratiempos me impidió publicar esta entrada más temprano el día de hoy (verídico), entre otras cosas. Por tanto, para poder trabajar con “series” en matemáticas, debemos estar conscientes de esta diferencia de significado.

En general, las sucesiones se utilizan para representar listas ordenadas de elementos pero, sobre todo, dentro de las matemáticas discretas son empleadas; así como dentro de las ciencias de la computación, en la teoría de juegos; en economía, cuando se considera una renta perpetua, los valores actuales de cada uno de sus términos constituyen una sucesión; en física, la suma de la distancia recorrida por un cuerpo que se deja caer y rebota, también es un tipo de sucesión, en general sus aplicaciones; en biología, es frecuente buscar el límite de una sucesión como solución a problemas relacionados con la evolución de especies o la expansión de genotipos en una población; tienen algunas aplicaciones dentro de la ingeniería y la informática, por ejemplo en el campo de las comunicaciones el manejo de las señales se hace mediante las series de Fourier, la serie de Fibonacci sirven en el campo de la informática para generar números aleatorios; si estamos reuniendo un dinero en una alcancía y todos los días colocamos dos más que el día anterior entonces tenemos lo que colocamos cada día esta dado por una sucesión aritmética y el total que tenemos por una serie o la suma de una sucesión; son usadas siempre en la vida diaria, a veces sin darnos cuenta, así como en cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales ordinarias, análisis real I de la carrera de modelación matemáticas, entre otras.

Se apoya de manera general a los estudiantes de ingeniería y áreas relacionadas del colegio de ciencia y tecnología de cualquier escuela superior, para comprender los conceptos de límites que se imparten en los primeros semestres de cualquier carrera relacionada con las llamadas “ciencias duras”. Por desgracia no se incluye los límites en los temas de variable compleja los cuales son muy importantes.

En el Capítulo 1 se inicia la construcción de esta teoría comenzando desde el concepto de función hasta llegar al significado de límite de una sucesión y saber calcular límites de sucesiones sencillas, saber que las sucesiones monótonas acotadas tienen límite y saber utilizar este hecho, conocer el concepto de subsucesión y el teorema de existencia

de subsucesiones convergentes en una sucesión acotada, conocer que los conceptos de sucesión de Cauchy y de sucesión convergente son equivalentes. En el Capítulo 2 se ve todo lo relacionado con el conocimiento básico de series, trabajamos series con términos positivos, series absolutamente convergentes, series alternantes, convergencia de series de potencias. El aparato matemático que describe las capacidades transmutativas de los número reales es la teoría de funciones reales de una variable real. Esto en general lo vemos en el Capítulo 3 con algunas aplicaciones para un mejor entendimiento de los límites.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Sucesiones</b>	<b>1</b>
1.1. Función . . . . .	1
1.2. Las sucesiones y sus límites . . . . .	2
1.3. Sucesiones convergentes y divergentes . . . . .	15
1.4. Sucesiones monotonas . . . . .	22
1.5. Sucesiones acotadas . . . . .	24
1.6. Interpretación geométrica . . . . .	27
1.7. Subsucesiones, sucesiones monótonas acotadas y sucesiones de Cauchy . . . . .	38
1.8. Divergencia de sucesiones . . . . .	52
1.9. Sucesiones de las medidas aritméticas y geométricas . . . . .	55
1.10. Ejercicios . . . . .	61
<b>2. Conocimientos básicos sobre series</b>	<b>67</b>
2.0.1. Series numéricas . . . . .	67
2.0.2. Series de funciones . . . . .	67
2.0.3. Series csonvergentes y divergentes . . . . .	68
2.0.4. Series condicionalmente convergentes . . . . .	68
2.0.5. Series numéricas . . . . .	69
2.0.6. Series de funciones . . . . .	69
2.0.7. Diferencia entre una serie numérica y una serie de funciones . . . . .	70
2.0.8. Definición y proceso . . . . .	77
2.0.9. Aplicación y uso . . . . .	77
2.1. Series de términos positivos . . . . .	83
2.2. Series absolutamente convergentes . . . . .	97
2.3. Nociones sobre series alternadas . . . . .	99
2.4. Series de potencias . . . . .	102
2.4.1. Convergencia de series de potencias . . . . .	104
2.5. Ejercicios . . . . .	108

<b>3. Aplicaciones</b>	<b>111</b>
3.1. Representación decimal de los números Reales . . . . .	114
3.2. Límites y continuidad en una variable . . . . .	116
3.2.1. Aplicando la teoría matemática . . . . .	137
3.3. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$ . . . . .	139
3.4. Conceptos topológicos . . . . .	142
3.5. Límites y continuidad en más variables . . . . .	145
3.6. Continuidad . . . . .	162
3.6.1. Problema: Optimización Aerodinámica de un Carro de Carreras .	168
3.6.2. Ejemplo Detallado: Simulación de Flujo de Aire . . . . .	169
3.6.3. Modelo Matemático para el Problema de la Extracción de Petróleo	170
3.7. Ejercicios . . . . .	172
<b>Bibliografía</b>	<b>176</b>

# Capítulo 1

## Sucesiones

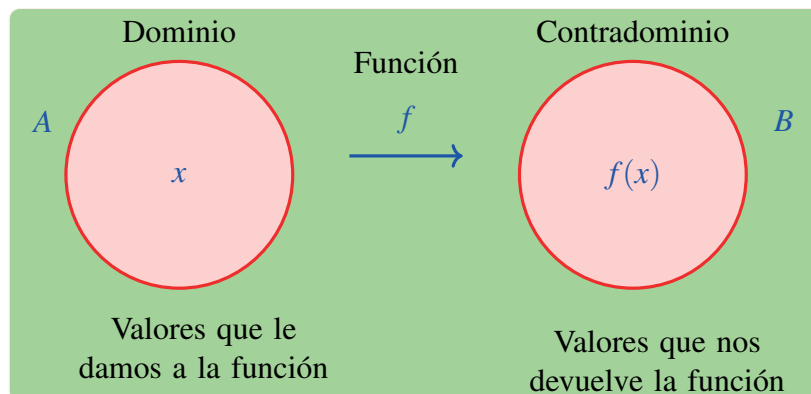
### 1.1. Función

Un concepto importante de todas las matemáticas es, sin duda alguna, el de **Función**. En muchos campos de la matemática moderna, los estudios y las investigaciones se centran en el análisis de funciones. Por ende no debe sorprender que el concepto de función sea de una gran generalidad. Por el momento, iniciaremos nuestra descripción con comentarios y definiciones para el caso de funciones de una o más variables.

En el tratamiento de **funciones de una variable real** no es adecuado pensar que el trabajo que se realiza por comprenderlas es limitado puesto que existe una enorme cantidad de este tipo. En los temas que desarrollaremos a lo largo de este escrito, trataremos de darle una interpretación tanto física como matemática. Los ejemplos que siguen de funciones tienen el fin de ilustrar cómo se trabajan las funciones de una variable real en diversas áreas.

1. La regla que asigna a cada número su cubo.
2. La fecha de nacimiento que se le asigna a cada ser humano (entendemos su fecha de nacimiento como el día de su alumbramiento).
3. Sean  $V = \{a, e, i, o, u\}$  y  $W = \{a, e, o, u\}$ , entonces podríamos definir una regla que asocie a cada elemento del conjunto  $V$  un elemento del conjunto  $W$ .
4. Los números que se le asignan a cada página de algún libro.

**Definición 1.1.1** (El Concepto de Función). Una **Función**  $f$  de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$  es una ley que aplica a cualquier elemento  $x$  de  $A$  hace que se transforme en un elemento  $f(x)$  de  $B$ . Para todo  $x \in A$ , el símbolo  $f(x)$  representa un único elemento de  $B$ , que llamamos el **valor de la función**  $f$  es  $x$  o la **Imagen**  $x$  bajo  $f$ . El conjunto  $A$  es el **Dominio** de  $f$  y el conjunto  $B$  es el **Contradominio** de  $f$ . El subconjunto de  $B$  es el **Rango** de  $f$  o **Conjunto de valores** que toma  $f$  en  $A$ .



Las **funciones reales** de una **variable real** son funciones  $f$  de un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , que en símbolos las denotas:

$$f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

**Ejemplo 1.** Toda sucesión  $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de números reales, es una función  $m$  de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $m \mapsto a_m$ . La siguiente función  $l(m) = \frac{m+1}{3m-1}$  describe la sucesión siguiente:

$$l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$1 \mapsto \frac{2}{2} = 1$$

$$2 \mapsto \frac{3}{5}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$m \mapsto \frac{m+1}{3m-1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

## 1.2. Las sucesiones y sus límites

Un ejemplo de una sucesión de números reales en la vida real es el crecimiento de una planta. Imagina que tienes una planta joven y mides su altura cada semana. Obtendrás varias medidas que representan el crecimiento de la planta a lo largo del tiempo. Esta sucesión de medidas es una sucesión de números reales.

Por ejemplo, podrías tener una sucesión como esta:

Primera semana : 10 cm.  
 Segunda semana : 12 cm.  
 Tercera semana : 15 cm.  
 Cuarta semana : 18 cm.  
 :  
 :

Cada número en esta sucesión representa la altura de la planta en una semana específica. Esta sucesión muestra un patrón claro de crecimiento: cada semana, la planta es un poco más alta que la semana anterior. En matemáticas, podríamos estudiar esta sucesión para entender patrones de crecimiento, predecir la altura futura de la planta, o incluso modelar el crecimiento de plantas en general. Este ejemplo ilustra cómo las sucesiones de números reales no son solo un concepto abstracto en matemáticas, sino que también se pueden encontrar y utilizar para comprender fenómenos en el mundo real.

Otro ejemplo de una sucesión de números reales en la vida real es el ahorro de dinero en una cuenta bancaria con interés compuesto.

Imagina que depositas una cantidad inicial de dinero en una cuenta de ahorros que ofrece un cierto porcentaje de interés compuesto anualmente. Supongamos que no realizas más depósitos ni retiros. Cada año, el saldo de tu cuenta no solo gana interés sobre el monto original, sino también sobre los intereses acumulados de los años anteriores. Esto crea una sucesión de números reales que representa el saldo de tu cuenta a lo largo del tiempo. Por ejemplo:

Primera año : \$1,000.  
 Segunda año : \$1,050 (si el interés es del 5% por año).  
 Tercer año : \$1,102.50 (el saldo del año 2 más el 5% de interés).  
 Cuarta año : \$1,157.63 y así sucesivamente.  
 :  
 :

La fórmula para calcular el saldo en el año  $n$  con un interés compuesto anualmente es:

$$\text{Saldo en el año} = \text{Monto inicial} \times (1 + \text{tasa de interés})^n.$$

Esta sucesión de saldos anuales es un ejemplo clásico de cómo las sucesiones de números reales se utilizan en finanzas para modelar el crecimiento del dinero a lo largo del tiempo bajo el efecto del interés compuesto.

No cabe duda de que las sucesiones constituyen una herramienta muy útil en el estudio de la topología de espacios métricos y en particular en el análisis real. De sobra sabemos que el análisis matemático se caracteriza por utilizar los procesos de paso al límite. La

teoría de sucesiones nos ayudará a introducirnos en el campo de los límites de funciones, mucho más complejos y menos intuitivo que los límites de sucesiones.

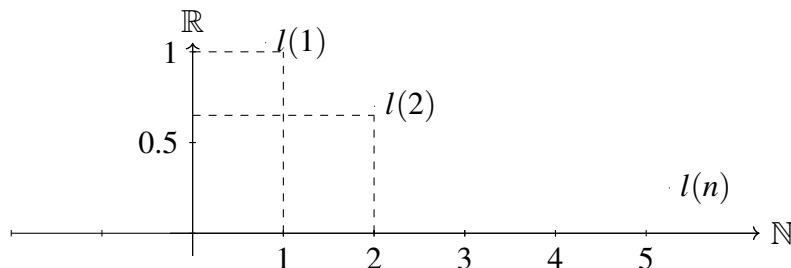
No basta con el solo conocimiento de la existencia de ciertos números reales para disponer eficientemente de ellos, es necesario precisar su identidad. Precisar la identidad de cierto número (real) significará aproximar por números conocidos, pueda demostrarse, deduzcan tal comportamiento o característica del número propuesto. La regla de L'Hospital (véase [5] o [6]) es de especial importancia. La teorías de series y sucesiones son una opción que resuelva parcialmente este problema. Las demostraciones para la convergencia de series se consideran brevemente, con justificaciones intuitivas más que formales. Las estimaciones numéricas de sumas de series están basadas en qué prueba se usó para demostrar convergencia.

Con el estudio de límites de sucesiones se inaugura el estudio del cálculo (o análisis) infinitesimal. Este nombre se debe a que se va a especular con cantidades infinitesimales (infinitamente pequeñas) en el cálculo diferencial e integral, fundamentalmente, y se reflexionará acerca de sucesiones de números al considerar una cantidad infinita de términos. Los conceptos del análisis infinitesimal son de una extraordinaria sutileza y el fruto de muchos años de pensamiento. Las sucesiones numéricas y series pueden parecer conceptos idénticos, pero como objetos matemáticos están definidas de distinta manera. Analicemos, entonces, sus características básicas y sus definiciones para entender sus diferencias.

**Definición 1.2.1.** Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

La imagen de una sucesión será un conjunto de números reales. Otra definición que se puede emplear es la siguiente:

**Definición 1.2.2.** Si a cada entero positivo le corresponde un número real, diremos que se define una **sucesión**.

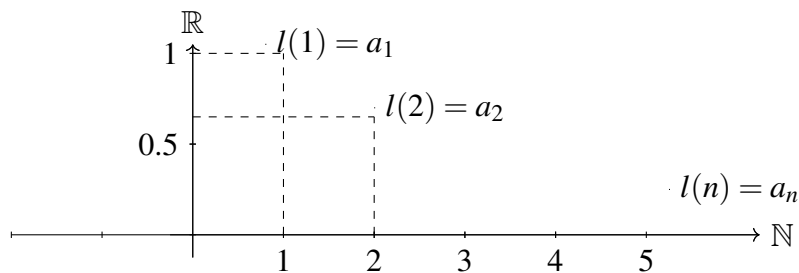


En consecuencia, si  $l$  representa una sucesión, entonces a cada entero positivo  $n$  le corresponde uno y sólo un número real  $l(n)$ , es decir, si el  $n$ -ésimo término está dado por  $l(n)$ , entonces la sucesión es el conjunto de parejas ordenadas  $(n, l(n))$ , lo cual se representa

como:

$$\begin{array}{lcl}
 l & : & \mathbb{N} \rightarrow B \\
 & & 1 \mapsto l(1) \\
 & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 & & n \mapsto l(n) \\
 & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{array}$$

de donde  $l(1)$  es el primer término de la sucesión,  $l(2)$  es el segundo término de la sucesión y así sucesivamente,  $l(n)$  es el  $n$ -ésimo término de la sucesión, muchas veces también se le llama a éste, término general de la sucesión. A ciertas sucesiones les ocurre lo siguiente. Al crecer  $n$ , el término  $n$ -ésimo  $a_n$  se aproxima a cierto número real que lo representaremos por  $L$ . Todas las sucesiones tienen el mismo dominio. Gráficamente



Por lo que en sucesiones no se emplea la notación de funciones, sino una notación con sub-índices, esto es, se reemplaza cada elemento de la imagen  $l(1), l(2), \dots, l(n), \dots$  por  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  en donde  $a_1$  es el primer término de la sucesión,  $a_2$  es el segundo término de la sucesión y así sucesivamente,  $a_n$  es el  $n$ -ésimo término de la sucesión o término general de la sucesión. Notar que los sub-índices representan el dominio de la sucesión.

Con base en lo anterior, se **representa** a una sucesión mediante su término general como  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , es decir, las sucesiones por lo regular se definen mediante una fórmula la cual involucra a su término general. A continuación se presentan algunos ejemplos de sucesiones.

**Ejemplo 2.** Consideremos la sucesión  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

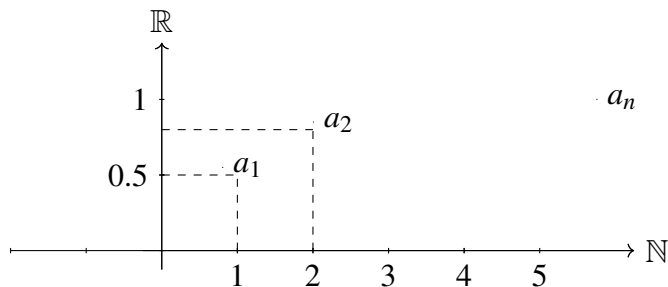
*Demostración.* Los términos de esta sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

donde

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, \dots, a_n = \frac{n}{n+1}, \dots$$

gráficamente



Como podrá notar, los términos de la sucesión se aproximan al número real 1. Nos podemos acercar al uno tanto como lo creamos necesario, pero es imposible que alguno de los términos sea precisamente igual a uno.

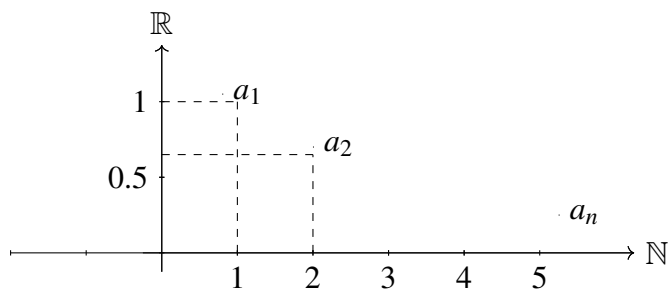
Se puede establecer que  $a_n$  tiende a uno cuando  $n$  tiende a infinito y decimos que el límite de la sucesión es el número real uno.  $\square$

**Ejemplo 3.** Consideremos la sucesión  $\left\{ \frac{2n}{5n-3} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Los términos de esta sucesión son

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{2n}{5n-3}, \dots \text{ donde } a_1 = \frac{2}{2}, a_2 = \frac{4}{7}, \dots, a_n = \frac{2n}{5n-3}, \dots$$

gráficamente



Se puede notar, los términos de la sucesión se aproximan al número real  $\frac{2}{5}$ . Nos podemos acercar al dos quintos tanto como lo creamos necesario, pero es imposible que alguno de los términos sea precisamente igual a  $\frac{2}{5}$ .

Ya podemos establecer que  $a_n$  tiende a  $\frac{2}{5}$  cuando  $n$  tiende a infinito y decimos que el límite de la sucesión es el número real  $\frac{2}{5}$ .  $\square$

**Ejemplo 4.** Consideremos la sucesión  $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

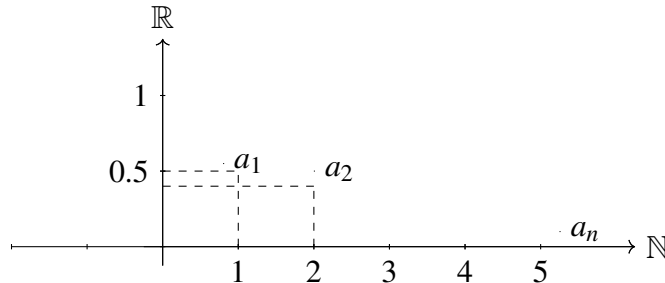
*Demostración.* Los términos de esta sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$$

donde

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, \dots, a_n = \frac{1}{n+1}, \dots$$

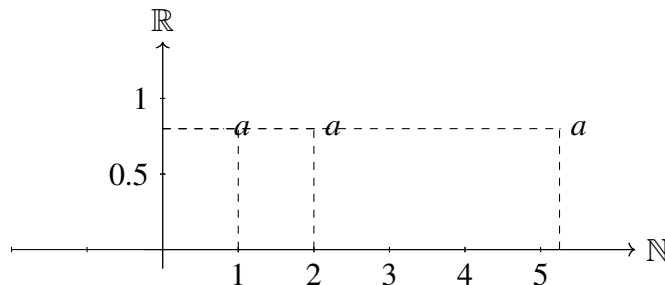
gráficamente



Podemos notar los términos de la sucesión se aproximan al número real 0. Nos podemos acercar al cero tanto como lo creamos necesario, pero es imposible que alguno de los términos sea precisamente igual a cero.

Ya se puede establecer que  $a_n$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito y decimos que el límite de la sucesión es el número real cero.  $\square$

**Ejemplo 5.** Fije  $a \in \mathbb{R}$ .  $n \mapsto a$  es la **sucesión de constantes de valor  $a$**  los términos de esta sucesión son los números  $a, a, \dots, a, \dots$  gráficamente



*Demostración.* Como podrá notar, los términos de la sucesión se aproximan al número real  $a$ . Nos podemos acercar a la  $a$  tanto como lo creamos necesario, pero es imposible que alguno de los términos sea precisamente igual a  $a$ .

Podemos establecer que  $a_n$  tiende a  $a$  cuando  $n$  tiende a infinito y decimos que el límite de la sucesión es el número real  $a$ .  $\square$

**Ejemplo 6.** Para toda  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $a_{2k-1} := 1$ ,  $a_{2k} := 0$ . Es una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , cuyos términos son los números

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$$

**Ejemplo 7.** La sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión cuyos términos son los números  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, -1, 1, -1, \dots$

**Ejemplo 8.** La sucesión  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión cuyos términos son los números  $2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$

**Ejemplo 9.** La sucesión  $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión cuyos términos son los números  $1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}, \dots$

**Ejemplo 10.** Podemos definir una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , de la siguiente manera.

1.  $a_1 = \sqrt{2}$ .
2. Si  $a_k$  está definido, definimos  $a_{k+1} = \sqrt{2a_k}$ . En estas condiciones el principio de inducción afirma que  $a_n$  está definido para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Los términos de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son los números  $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}, 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}}, \dots, 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}}, \dots$

Una progresión es una “sucesión de números o términos algebraicos entre los cuales hay una ley de formación constante”. Lo que quiere decir esta definición es que se llama progresiones a ciertos tipos de sucesiones que se pueden definir dando una regla que relaciona cada término con el término siguiente.

En la práctica, nunca se usa la palabra progresión de forma aislada, sino que siempre va acompañada de uno de estos tres adjetivos: aritmética, geométrica o armónica. Es decir, a efectos prácticos una progresión es una sucesión que cumple una de estas tres condiciones:

1. La diferencia entre dos términos consecutivos es constante (progresión aritmética).
2. El cociente entre dos términos consecutivos es constante (progresión geométrica).
3. La sucesión formada por los inversos (el inverso del número  $a$  es el número  $1/a$ ) de cada uno de los términos es una progresión aritmética (progresión armónica).

Así que, sí: todas las progresiones son sucesiones, pero no todas las sucesiones son progresiones.

**Ejemplo 11** (Progresión geométrica). Fijemos  $a, r \in \mathbb{R}$  con  $r \neq 1$ . Definimos la siguiente sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales de la siguiente manera.

1.  $a_1 =: a$
2. Si  $a_k$  está definido, entonces  $a_{k+1} =: a_k r$ .

*Demostración.* En efecto, en estas condiciones el principio de inducción afirma que  $a_n$  está definido para cualquier natural  $n$ .

Una tal sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se llama **progresión geométrica de razón  $r$** . Convenimos en dar valor a las expresiones de la forma  $S^0$ .

$$a_k = ar^{k-1} \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

En efecto,  $a_1 = a$  y  $ar^{1-1} = a$ , luego la igualdad propuesta se cumple para el número 1. Si la igualdad se cumple para el número  $n$ ,  $a_n = ar^{n-1}$ . Entonces,  $a_{n+1} = a_n r$  implica  $a_{n+1} = (ar^{n-1})r$ , luego  $a_{n+1} = ar^{(n+1)-1}$ . Por lo tanto la igualdad se cumple también para  $n+1$ .

El principio de inducción afirma entonces que la relación se cumple para cualquier natural.

$$a_1 + \cdots + a_k = a \frac{1-r^k}{1-r} \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

En efecto,  $a_1 = a$  y  $a \frac{1-r^1}{1-r} = a$ , luego la igualdad propuesta se cumple para el número 1.

Suponga que la igualdad se cumpla para el número  $n$ :

$$a_1 + \cdots + a_n = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Tenemos

$$a_1 + \cdots + a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1}.$$

Entonces

$$a_1 + \cdots + a_{n+1} = a \frac{1-r^n}{1-r} + a_{n+1}.$$

Pero

$$a_{n+1} = ar^n.$$

Entonces

$$a_1 + \cdots + a_{n+1} = a \frac{1-r^n}{1-r} + ar^n,$$

luego

$$a_1 + \cdots + a_{n+1} = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Hemos probado que entonces la igualdad también se cumple para  $n+1$ .

El principio de inducción afirma entonces que la igualdad propuesta se cumple para cualquier natural. Algunas consecuencias de las relaciones demostradas son las siguientes.

1.  $a_1 + \cdots + a_k = a \frac{1-r^k}{1-r}$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .
2. Si  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \neq b$  y  $a \neq 0$ , entonces  $\frac{a^k - b^k}{a - b} = a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

□

**Ejemplo 12** (Progresión aritmética). Fijamos  $a, d \in \mathbb{R}$ . Definimos una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales como sigue:

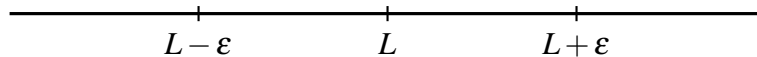
1.  $a_1 =: a$ .
2. Si  $a_k$  está definido, entonces  $a_{k+1} =: a_k + d$ .

Una tal sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  será llamada **progresión aritmética de diferencia  $d$** .

$$a_k = a + (k-1)d \text{ para toda } k \in \mathbb{N},$$

$$a_1 + \cdots + a_k = \frac{k}{2}(2a + (k-1)d) \text{ para toda } k \in \mathbb{N}.$$

En las gráficas de los ejemplos anteriores, podemos observar que cuando más nos aproximamos a los límites, la distancia entre los términos cada vez es menor de modo que todos los términos, una vez alcanzada cierta etapa de la sucesión, pueden concentrarse en un intervalo alrededor del límite entonces  $L$  estará en el intervalo que anteriormente mencionamos.



En esta gráfica  $\varepsilon$  representa un número positivo. (Ahora definiremos el concepto de límite de una sucesión considerando la definición de valor absoluto puesto que estamos tratando con distancias).

Tomando como base las consideraciones anteriores podemos hacer  $|a_n - L|$  menor que cualquier  $\varepsilon$  dada tomando  $n$  bastante grande y que a partir de cierto entero particular  $N$  se cumple, esto es, los primeros términos que pueden ser pocos o bastantes, en un momento dado tiene que rebasar a un cierto número  $N$  es decir, cuando  $n > N$  la distancia entre los términos será muy pequeña puesto que en ese instante ya estaremos ubicados dentro del intervalo en el cual se encuentra el límite. Entonces, una vez que la sucesión alcanza esta etapa, todos los términos se localizan dentro del intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ , o bien

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

de donde

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

y esto será válido, como ya hemos analizado sólo para todo  $n$  mayor que cierto entero particular  $N$ .

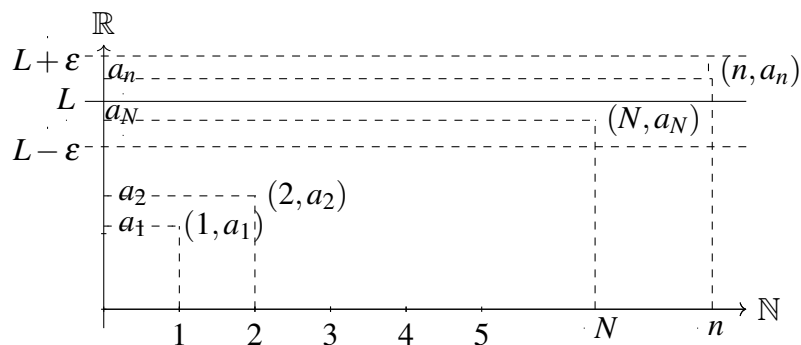
La formulación precisa del concepto de aproximación es la siguiente. La definición formal de límite de una sucesión es:

**Definición 1.2.3.** Dada la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  decimos que  $a_n \rightarrow L$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entero positivo  $N$  talque  $|a_n - L| < \varepsilon$  para todo  $n > N$ ; y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Debe tenerse presente que las sucesiones son funciones y por ello, para una sucesión, lo mismo que para una función, se puede representar por medio de una gráfica, aún cuando no es muy conveniente graficar de igual forma para ambas puesto que el comportamiento de las sucesiones implica en ciertas ocasiones posibles confusiones.

Para evitar este tipo de problemas, se tiene por costumbre, y de antemano ya lo hemos hecho, marcar los términos de una sucesión sobre una recta. El hecho de que una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converja a un número  $L$  lo interpretaremos geoméricamente diciendo que la recta paralela al eje de las abscisas de altura  $L$  es una asíntota para la colección de puntos  $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (N, a_N), \dots, (n, a_n) \dots$  gráficamente



Entonces para cualquier franja de anchura  $2\varepsilon > 0$ , centrada en la recta anterior, existirá  $N \in \mathbb{N}$  tal que la colección de puntos  $(N, a_N), (N+1, a_{N+1}), \dots, (n, a_n), \dots$  estará dentro de la franja.

Luego los términos  $a_N, a_{N+1}, \dots, a_n, \dots$  de la sucesión serán elementos del intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Por lo tanto, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existirá  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  para cualquier  $n \geq N$ , en símbolos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  si y sólo si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N$ .

**Teorema 1.1.** Si una sucesión en  $\mathbb{R}$  converge a algún número, este número debe ser el único al que converja la sucesión.

*Demostración.* Fijemos una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}$  tal que converja a un número real  $L$ . Supongamos que la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  también converja al número  $L'$ . Vamos a probar entonces que  $L = L'$ .

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observe que  $|L - L'| \leq |a_n - L| + |a_n - L'|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Para el número  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  existen  $N, N_1 \in \mathbb{N}$  tales que  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n > N$  y  $|a_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n > N_1$ . Luego  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|a_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq \max\{N_1, N\}$ . Escriba  $N_0 = \max\{N_1, N\}$ . Entonces  $|a_{N_0} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $|a_{N_0} - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$  y

$|L - L'| \leq |a_{N_0} - L| + |a_{N_0} - L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Luego  $|L - L'| \leq \varepsilon$ . Hemos probado que los números  $\varepsilon > 0$  satisfacen

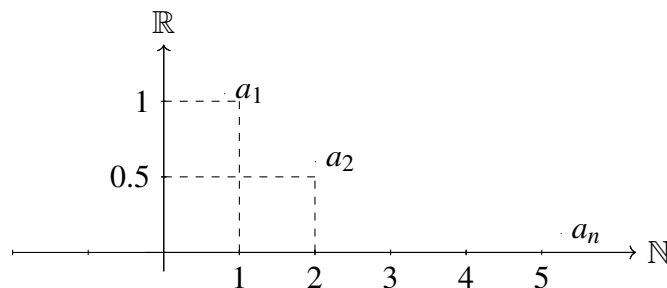
$$|L - L'| \leq \varepsilon. \quad (1.1)$$

Observe que  $|L - L'| \geq 0$ .

Si  $|L - L'|$  fuera positivo debería satisfacer la ecuación (1.1). Esto significaría que  $|L - L'| < |L - L'|$ . Lo cual sería contradictorio. Necesariamente  $|L - L'|$  debe ser el número 0, luego  $L - L' = 0$  por lo que  $L = L'$ .  $\square$

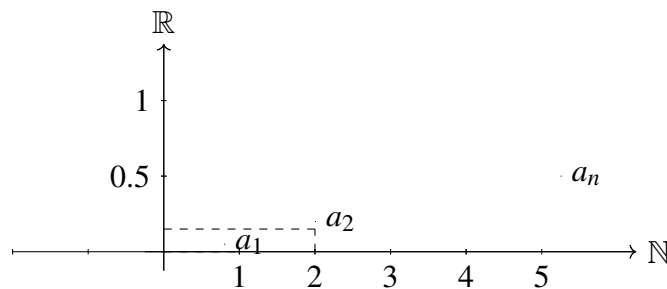
**Definición 1.2.4.** Considere una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{R}$  y un número real  $L$ . Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $L$ , diremos que  $L$  es el **límite de la sucesión**  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cuando  $n$  **tiende a**  $+\infty$  y escribimos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ .

**Ejemplo 13.** Veamos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Gráficamente



*Demostración.* En efecto, fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observe que  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por la propiedad arquimediana de los números reales se justifica la existencia de  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ . Observa que  $n \geq N_0$  implica  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$ . Entonces  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .  $\square$

**Ejemplo 14.** Veamos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$ . Gráficamente

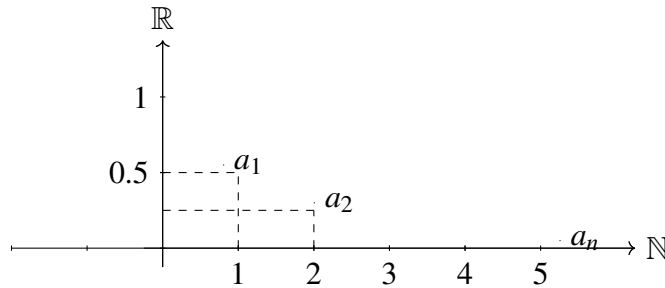


*Demostración.* En efecto, fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observe que  $\left| \frac{n^2 - n}{2n^2 - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{2n - 1}{4n^2 - 1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Pero 
$$\left. \begin{array}{l} 2n-1 \leq 2n \\ 4n^2-1 \leq 3n^2 \end{array} \right\} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces  $\frac{2n-1}{4n^2-1} \leq \frac{2}{3n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $\left| \frac{n^2-n}{2n^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por la propiedad arquimediana de los números reales se justifica la existencia de  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N_0} < \frac{3}{2}\varepsilon$ , luego  $\frac{2}{3N_0} < \varepsilon$ . Observa que  $n \geq N_0$  implica  $\frac{2}{3n} \leq \frac{2}{3N_0}$ . Entonces  $\frac{2}{3n} < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . De donde  $\left| \frac{n^2-n}{2n^2-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .  $\square$

**Ejemplo 15.** Veamos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . Gráficamente



*Demostración.* En efecto, fijemos  $\varepsilon > 0$ . Tenemos que  $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Observa que  $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por la propiedad arquimediana de los números reales se justifica la existencia de  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ . Observa que  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}$  para toda  $n \geq N_0$ . Entonces  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Luego  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .

Por lo tanto  $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .  $\square$

**Ejemplo 16.** Veamos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

*Demostración.* En efecto, fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observe que  $\sqrt[n]{n} - 1 \in \mathbb{R}^+$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Considere la expresión  $[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n$  para  $n \geq 2$ . De acuerdo con la fórmula del binomio tenemos:

$$[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k.$$

Pero

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \geq \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2.$$

Entonces

$$[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n \geq \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \text{ para } n \geq 2.$$

Por otra parte

$$[1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \text{ para } n \geq 2.$$

Luego

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2}{n-1} \text{ para toda } n \geq 2.$$

Observa que

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{4}{n} \text{ para toda } n \geq 2.$$

Entonces

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{4}{n} \text{ para toda } n \geq 2.$$

Por lo tanto

$$|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ para toda } n \geq 2.$$

Por la propiedad arquimediana de los números reales se justifica la existencia de  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Entonces  $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon^2}{4}$  para toda  $n \geq N_0$ , luego  $\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_1$ . Escribamos  $N_0 = \max\{2, N_1\}$ . Por lo tanto  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .  $\square$

Probaremos a continuación un resultado de uso frecuente.

**Proposición 1.2.** Si las sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfacen las condiciones siguientes

1.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a algún número  $L$ .
2.  $\{b_n - a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge algún cero.

Entonces también  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $L$ .

*Demostración.* Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observe que  $|b_n - L| \leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tales que  $|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N_1$  y  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N_2$ . Escribamos  $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ . Entonces  $n \geq N_0$  implica  $|b_n - a_n| + |a_n - L| < \varepsilon$ . Por lo tanto  $|b_n - L| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .  $\square$

Como consecuencia podemos observar que la convergencia de una sucesión no dependerá del comportamiento de alguna colección finita de sus términos.

**Corolario 1.3.** Si las sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfacen las condiciones siguientes

1.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a algún número  $L$ .
2. Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n = b_n$  para toda  $n \geq N$ .

Entonces también  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $L$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

Por otra parte, podemos emplear algunos conceptos de la teoría de funciones y aplicarlos a sucesiones tales como el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.** Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  y  $f$  está definida para todo entero positivo, entonces también  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$  cuando  $n$  es cualquier entero positivo.

Este teorema nos permite ampliar nuestro desarrollo, es decir, podemos aplicar los teoremas sobre límites de funciones (cuando  $x$  tiende a infinito) a los límites que involucren sucesiones.

Antes de escribir un teorema sobre lo anterior, es preciso establecer algunas definiciones importantes.

### 1.3. Sucesiones convergentes y divergentes

Aparece por vez primera la noción de convergencia. Estudiamos la convergencia de sucesiones de números reales, que nos permitirá mejorar nuestro conocimiento de la recta real y será posteriormente una herramienta clave para estudiar las funciones reales de variable real. Como por ejemplo si queremos

**Ejemplo 17.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{5n}{e^{2n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Por la regla de L'Hospital (véase [5] o [6]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{e^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2e^{2n}} = 0$$

en consecuencia la sucesión es convergente. □

**Ejemplo 18.** Determinar si la sucesión  $\left\{ n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} =$  por la regla de L'Hospital (véase [5] o [6])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\pi}{n^2} \cos \frac{\pi}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cos \frac{\pi}{n} = \pi(1) = \pi$$

en consecuencia la sucesión es convergente. □

**Ejemplo 19.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Por la regla de L'Hospital (véase [5] o [6]).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Observación 1** (Reconocimiento de patrones en las sucesiones). *A veces los términos de una sucesión se generan mediante alguna regla que no identifica explícitamente el término  $n$ -ésimo de la sucesión. En tales casos, puede ser necesario descubrir el patrón en la sucesión y describir el término  $n$ -ésimo. Una vez que el término  $n$ -ésimo se ha especificado, se puede investigar la convergencia o divergencia de la sucesión.*

**Definición 1.3.1.** Si una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene un límite, se dice que la sucesión es **convergente** y decimos que  $a_n$  converge a ese límite. Si la sucesión no es convergente recibe el nombre de **divergente**.

Aquí tienes tres ejemplos de la vida real:

**Ejemplo 20** (Acercándote a un árbol paso a paso). Imagina que ves un árbol a lo lejos y decides caminar hacia él. Con cada paso que das, te acercas un poco más, pero decides que cada vez darás pasos más pequeños para no chocar contra el árbol. Si tus pasos se hacen más y más pequeños cada vez, eventualmente estarás tan cerca del árbol que no podrás notar la distancia entre tú y el árbol. En este ejemplo, la distancia entre tú y el árbol es una sucesión convergente porque se va haciendo más pequeña hasta que prácticamente no existe, acercándote cada vez más a tu objetivo sin pasarte.

**Ejemplo 21** (La temperatura del agua caliente al enfriarse). Piensa en una taza de chocolate caliente que acabas de preparar. Al principio, está muy caliente, pero decides esperar a que se enfríe un poco para no quemarte. Con el paso del tiempo, la temperatura del chocolate caliente disminuye gradualmente hasta que se vuelve agradable y perfecta para beber. Si mides la temperatura cada minuto, notarás que los cambios de temperatura son grandes al principio pero se hacen más pequeños hasta que el chocolate alcanza la temperatura ambiente. La sucesión de temperaturas aquí es convergente, ya que se estabiliza o acerca a un valor específico (la temperatura ambiente), sin seguir bajando indefinidamente.

**Ejemplo 22** (Ahorro de monedas en un alcancía). Imagina que tienes un alcancía y decides ahorrar monedas. El primer día ahorras una moneda, al día siguiente ahorras la mitad de lo que ahorraste el día anterior, es decir, media moneda (puedes pensar en esto como una cantidad, no literalmente partiendo monedas). Si continuas este patrón, cada día ahorrarás la mitad del día anterior: un cuarto de moneda, luego un octavo, y así sucesivamente. Aunque sigues ahorrando todos los días, la cantidad que agregas es cada vez menor. La cantidad total de dinero en tu alcancía es una sucesión convergente porque se acerca a un límite (por ejemplo, nunca vas a tener más de dos monedas si sigues este patrón), incluso si sigues agregando un poco más cada día.

En base a los conceptos anteriores podemos establecer el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones convergentes y  $c$  es una constante entonces

1. La sucesión  $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

2. La sucesión  $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right).$$

3. En el caso de ser  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0$ , la sucesión  $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}.$$

*Demostración.* La haremos más adelante. □

**Ejemplo 23.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = 1$ , en consecuencia la sucesión es convergente. □

**Ejemplo 24.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{4n-1}{5n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{5n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{5} = \frac{4}{5}$ , en consecuencia la sucesión es convergente. □

**Ejemplo 25.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{n^2+1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{0}$ , en consecuencia la sucesión es divergente. □

**Ejemplo 26.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{7n^3 - 1}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7n^3}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \frac{7}{0}$ , en consecuencia la sucesión es divergente.  $\square$

**Ejemplo 27.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 2n}{(n+1)(n^2+1)} =$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 2n}{n^3 + n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 1$ , en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

*Nota 1.3.1.* Estos ejemplos también podrían haberse demostrado aplicando la regla de L'Hospital (véase [5] o [6]).

**Ejemplo 28.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} \right) \left( \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{n^2+1 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{0}, \end{aligned}$$

en consecuencia la sucesión es divergente.  $\square$

**Ejemplo 29.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{4 + 2 \cdot 10^n}{9 + 5 \cdot 10^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2 \cdot 10^n}{9 + 5 \cdot 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{10^n} + \frac{2 \cdot 10^n}{10^n}}{\frac{9}{10^n} + \frac{5 \cdot 10^n}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{10^n} + 2}{\frac{9}{10^n} + 5} = \frac{2}{5}$ , en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Ejemplo 30.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{2}{\sqrt{n^2+9}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+9}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1} = 0$ , en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Ejemplo 31.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} =$   
 $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \right) (\pi) = \frac{1}{2} \pi$  en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Ejemplo 32.** Probar que la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$$

converge a  $\frac{1}{2}$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

en consecuencia

$$a_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

**Ejemplo 33.** Determinar el límite de la sucesión .3, .33, .333, .3333, ...

*Demostración.* El  $n$ -ésimo término de la sucesión puede escribirse como

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

$$a_n = \frac{3}{10} \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \right]$$

Ahora si

$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} \quad (1.2)$$

multiplicando ambos miembros por  $\frac{1}{10}$  tenemos

$$\frac{1}{10}S = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}$$

restando (1.2) de esta última ecuación

$$S - \frac{1}{10}S = 1 - \frac{1}{10^n}$$

de donde

$$\frac{9}{10}S = 1 - \frac{1}{10^n} \quad \text{o bien} \quad S = \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Así el  $n$ -ésimo término es  $a_n = \frac{3}{10} \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$  por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$ . □

**Ejemplo 34.** Determinar si la sucesión  $\left\{\frac{e^n}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Por la regla de L'Hospital (véase [5] o [6])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1} = \infty \text{ en consecuencia la sucesión es divergente.} \quad \square$$

El siguiente teorema es importante puesto que nos permite determinar los límites, si existen, de algunas sucesiones diferentes a las que hemos analizado.

**Teorema 1.6.** *Tenemos*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , si  $|r| < 1$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ , si  $|r| > 1$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Ejemplo 35.** Determinar si la sucesión  $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* En efecto, puesto que  $|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$  aplicando el inciso 1. del

Teorema 1.6 tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , en consecuencia la sucesión es convergente. □

**Ejemplo 36.** Determinar si la sucesión  $\{(1.01)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* En efecto, puesto que  $|r| = |1.01| = 1.01 > 1$  aplicando el inciso 2. del Teorema 1.6 tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1.01)^n = \infty$ , en consecuencia la sucesión es divergente.  $\square$

**Ejemplo 37.** Determinar si la sucesión  $\{1 + (0.1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* En efecto, puesto que  $|r| = |0.1| = 0.1 < 1$  aplicando el inciso 1. del Teorema 1.6 tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (0.1)^n] = 1$ , en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Ejemplo 38.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Sea

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{3^{n+1}} + \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

En efecto, puesto que  $|r| = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} < 1$  aplicando el inciso 1. del Teorema 1.6 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{3}$$

en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Ejemplo 39.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{n}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Sea  $\frac{n}{2^n} = \frac{(n^{\frac{1}{n}})^n}{2^n} = \left( \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n$ . Si  $r = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2}$  tenemos que analizar si

$$0 < \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} < 1$$

despejando  $n^{\frac{1}{n}} < 2$  o bien  $n < 2^n$  lo cual es válido para cualquier entero positivo, por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$  en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

**Ejemplo 40.** Determinar si la sucesión  $\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente o divergente.

*Demostración.* Sea  $\frac{n!}{n^n} = \frac{(n!^{\frac{1}{n}})^n}{n^n} = \left( \frac{n!^{\frac{1}{n}}}{n} \right)^n$ . Si  $r = \frac{n!^{\frac{1}{n}}}{n}$  tenemos que analizar si

$$0 < \frac{n!^{\frac{1}{n}}}{n} < 1$$

despejando  $n!^{\frac{1}{n}} < n$  o bien  $n! < n^n$  y esto se satisface puesto que

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 < n \cdot n \cdot n \cdots n$$

de donde

$$\begin{aligned} n &= n \\ n-1 &< n \\ n-2 &< n \\ &\vdots \\ 2 &< n \\ 1 &< n \end{aligned}$$

por lo tanto  $n! < n^n$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  en consecuencia la sucesión es convergente.  $\square$

## 1.4. Sucesiones monótonas

Ahora vamos a discutir una propiedad importante de ciertas sucesiones de números reales: la monotonía. Las sucesiones monótonas son aquellas que siempre siguen el mismo patrón de crecimiento o decrecimiento. Aquí tienes cuatro ejemplos de la vida real que son fáciles de comprender:

**Ejemplo 41** (Subir escaleras paso a paso). Imagina que estás subiendo una escalera. Con cada paso que das, te encuentras un escalón más arriba. No importa cuántos pasos des, siempre estás subiendo y nunca bajas mientras sigas avanzando hacia arriba. Esta es una sucesión monótona creciente, porque con cada paso, la altura a la que te encuentras aumenta.

**Ejemplo 42** (La batería de un juguete disminuyendo). Piensa en tu juguete electrónico favorito cuando lo usas después de haberlo cargado completamente. Con el tiempo, la batería del juguete va disminuyendo gradualmente mientras juegas con él. Cada vez que revisas, la batería tiene menos carga que la vez anterior. Esto es un ejemplo de sucesión monótona decreciente, porque la carga de la batería solo disminuye con el uso, no aumenta.

**Ejemplo 43** (Añadiendo libros a tu estantería). Si comienzas a leer más libros y decides guardar cada nuevo libro que terminas en tu estantería, notarás que la cantidad de libros en tu estantería solo aumenta con el tiempo. Nunca disminuye, porque estás añadiendo libros, no quitándolos. Así que la sucesión de libros en tu estantería es monótona creciente; siempre va hacia arriba, nunca hacia abajo.

**Ejemplo 44** (Hojas cayendo de un árbol en otoño). En otoño, los árboles pierden sus hojas. Si observas un árbol durante esta estación, verás que el número de hojas en el árbol disminuye día tras día. Cada día, hay menos hojas en el árbol que el día anterior, ya que las hojas continúan cayendo y ninguna vuelve a subir al árbol por sí sola. Esta es una sucesión monótona decreciente, porque el número de hojas en el árbol solo disminuye con el tiempo.

Estos ejemplos muestran cómo algunas cosas pueden solo aumentar o solo disminuir con el tiempo, lo cual es la esencia de las sucesiones monótonas. Como primer resultado básico, probaremos que toda sucesión monótona y acotada es convergente, obteniendo un método útil para probar la convergencia de ciertas sucesiones. De ahí deduciremos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, que es sin duda el resultado más importante sobre convergencia de sucesiones. De él se deduce el teorema de “complitud” de  $\mathbb{R}$ , que nos da una auténtica caracterización de las sucesiones convergentes. Por último, las nociones de límite superior e inferior, además de tener utilidad en sí mismas, nos permitirán precisar mejor el contenido del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

**Definición 1.4.1.** Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice que es

1. **Creciente** si  $a_n \leq a_{n+1}$  para toda  $n$ .
2. **Decreciente** si  $a_n \geq a_{n+1}$  para toda  $n$ .

Las sucesiones crecientes y decrecientes reciben el nombre de **sucesiones monotonas**.

**Ejemplo 45.** Probar que la sucesión  $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.

*Demostración.* Los términos de esta sucesión son

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2(n+1)+1}, \dots$$

donde  $a_n = \frac{n}{2n+1}$  y  $a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$ , vemos que

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3}$$

resolviendo la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{n}{2n+1} &\leq \frac{n+1}{2n+3} \\ n(2n+3) &\leq (n+1)(2n+1) \\ 2n^2+3n &\leq 2n^2+3n+1 \\ 0 &\leq 1 \end{aligned}$$

lo cual es válido, en consecuencia la sucesión dada es creciente.  $\square$

**Ejemplo 46.** Probar que la sucesión  $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es monótona.

*Demostración.* Los términos de la sucesión son

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \dots$$

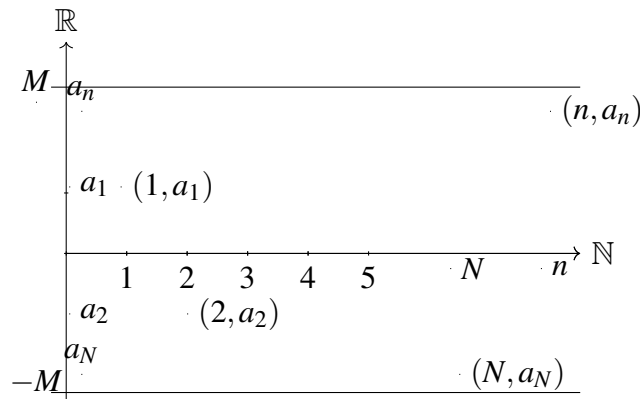
donde  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  y  $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$ , tenemos que  $a_1 > a_2$  pero  $a_2 < a_3$  en consecuencia no es monótona.  $\square$

**Ejemplo 47.** Análogamente tenemos que la sucesión  $\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente.

## 1.5. Sucesiones acotadas

Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **acotada**, si el conjunto de sus términos está acotado, esto es, si existe un número  $M$  tal que la desigualdad  $|a_n| < M$  sea válida para todo valor  $n$ . En otras palabras, la desigualdad  $-M < a_n < M$  se satisface para todos los términos de la sucesión.

La Interpretación geométrica de esta condición es que toda sucesión (considerada como un conjunto en el plano) está contenida entre dos rectas  $y = M$  y  $y = -M$ . Que una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales esté acotada significa que existe una franja, paralela al eje de las abscisas, lo suficientemente ancha para contener a todos los puntos  $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$  Gráficamente



**Definición 1.5.1.** Se dice que una sucesión está **acotada superiormente** (cota superior) si existe un número  $M$  (independiente de  $n$ ) tal que  $a_n \leq M$  para todo entero positivo  $n$ . (Esto es, si la sucesión está por debajo de la recta  $y = M$ ).

**Definición 1.5.2.** Se dice que una sucesión está **acotada inferiormente** (cota inferior) si existe un número  $M$  (independiente de  $n$ ) tal que  $M \leq a_n$  para todo entero positivo  $n$ . (Esto es, si la sucesión está por arriba de la recta  $y = -M$ ).

**Ejemplo 48.** Determine las cotas superior e inferior, si existen, de la sucesión  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Los términos de la sucesión son  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ . El número 1 es una cota superior y cualquier otro número mayor o igual a 1 también lo es.

Cualquier número negativo se puede emplear como una cota inferior. Entonces la sucesión  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada.  $\square$

Las sucesiones acotadas son aquellas que tienen un límite superior e inferior, lo que significa que los números en estas sucesiones no son infinitamente grandes ni infinitamente pequeños. Aquí tienes cuatro ejemplos de la vida real explicados de manera simple:

**Ejemplo 49** (La altura de una montaña rusa). Imagina que estás en un parque de diversiones y ves una montaña rusa. Esta montaña rusa sube y baja, pero no importa cuánto suba, nunca pasa de su punto más alto. También, cuando baja, nunca toca el suelo. La altura de la montaña rusa desde el suelo hasta su punto más alto es un ejemplo de sucesión acotada: tiene un límite superior (el punto más alto que puede alcanzar) y un límite inferior (el suelo, que nunca toca).

**Ejemplo 50** (Los puntos que puedes anotar en un videojuego). Piensa en tu videojuego favorito donde anotas puntos. Hay un puntaje máximo que puedes alcanzar en cada nivel debido a la cantidad limitada de objetivos o enemigos. También hay un puntaje mínimo, que es cero, ya que no puedes tener menos que eso. Así que los puntos que puedes anotar están acotados: no pueden ser menos de cero ni más del máximo establecido por el juego.

**Ejemplo 51** (La cantidad de agua en una botella). Si tienes una botella de agua, la cantidad de agua que puede contener está limitada por el tamaño de la botella. No puede tener más agua de la que cabe en la botella, y también, si bebes toda el agua, la cantidad de agua no puede ser menos de cero. Así que la cantidad de agua en tu botella es una sucesión acotada: está limitada por el tamaño de la botella y el hecho de que no puede ser negativa.

**Ejemplo 52** (La temperatura durante el día). La temperatura durante un día tiene un límite máximo y mínimo. Por ejemplo, puede que la temperatura más alta sea de 30 grados Celsius durante el día y la más baja de 15 grados por la noche. No importa qué suceda, la temperatura se mantiene entre estos dos valores: no cae por debajo de 15 grados ni sube por encima de 30 grados. Esto hace que la temperatura durante el día sea una sucesión acotada.

Estos ejemplos ayudan a comprender que las sucesiones acotadas tienen valores que se mantienen dentro de un rango específico, sin salirse de ciertos límites superior e inferior.

**Ejemplo 53.** Determine si la sucesión  $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.

*Demostración.* Los términos de la sucesión son  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$ . El número  $\frac{1}{3}$  es una cota inferior y cualquier otro número menor o igual a  $\frac{1}{3}$  también lo es. **No existe cota superior.** En consecuencia la sucesión no está acotada, sin embargo está acotada inferiormente.  $\square$

**Ejemplo 54.** Determine si la sucesión  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.

*Demostración.* Los términos de la sucesión son  $1, 2, \dots, n, \dots$ . El número 1 es una cota inferior y cualquier otro número menor o igual a 1 también lo es. **No existe cota superior.** En consecuencia la sucesión no está acotada, sin embargo está acotada inferiormente.  $\square$

**Ejemplo 55.** Determine si la sucesión  $1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots$  está acotada.

*Demostración.* No está acotada ni superior ni inferiormente en consecuencia es una sucesión que **no está acotada.** (Piense en la gráfica y notará que nunca podremos poner esta sucesión entre las dos rectas).  $\square$

**Ejemplo 56.** Determine si la sucesión  $\left\{ \frac{2n-7}{3n+2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.

*Demostración.* Los términos de la sucesión son  $-1, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{11}, \dots, \frac{2n-7}{3n+2}, \dots$ . El número  $-1$  es una cota inferior y cualquier otro número menor o igual a  $-1$  también lo es. El número  $-2$  es una cota superior puesto que  $\frac{2n-7}{3n+2} \leq 2$  para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia la sucesión **está acotada.**  $\square$

Por lo trabajado en los ejemplos anteriores, se puede obtener la siguiente.

**Definición 1.5.3.** Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice que está **acotada** si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior.

Ahora tenemos el siguiente:

**Corolario 1.7.** Considere una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes

1.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.
2. Existen  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$  tales que  $a_n \in [a, b]$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Existe  $R > 0$  tal que  $|a_n| \leq R$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Teorema 1.8.** Las sucesiones convergentes tienen la propiedad de estar acotadas.

*Demostración.* Considere una sucesión convergente  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces existe un número  $L$  tal que  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Vamos a determinar  $R > 0$  tal que  $|a_n| \leq R$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que  $|a_n| \leq |a_n - L| + |L|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Para el número 1 existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < 1$  para toda  $n \geq N_0$ . Luego  $|a_n| < |1| + |L|$  para toda  $n \geq N_0$ . Escribamos  $R := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N_0-1}|, 1 + |L|\}$ . Entonces  $|a_n| \leq R$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . El Corolario 1.7 afirma entonces que la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.  $\square$

Un criterio para la no convergencia de sucesiones es entonces el siguiente.

**Corolario 1.9.** *Si una sucesión no está acotada, tal sucesión no puede ser convergente.*

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Definición 1.5.4.** Las sucesiones acotadas no necesariamente tendrán la propiedad de ser convergentes.

**Ejemplo 57.** En efecto, considere la sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . La sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada. En efecto, el número 1 satisface  $|(-1)^n| \leq 1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . El Corolario 1.7 afirma entonces que  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.

**Ejemplo 58.** La sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no está convergente. En otras palabras, la sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a ningún número real. Fijemos  $L \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Que  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converja a  $L$  significa que no para cualquier  $\varepsilon > 0$  existirá  $N_0 \in \mathbb{N}$ . Tal que  $|(-1)^n - L| \leq \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . O sea, que existe  $\varepsilon_0 > 0$  para el cual no existirá  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|(-1)^n - L| \leq \varepsilon_0$  para toda  $n \geq N_0$ . Es decir, que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cualquier  $N_0 \in \mathbb{N}$  no se cumple  $|(-1)^n - L| \leq \varepsilon_0$  para toda  $n \geq N_0$ . Equivalentemente, que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cualquier  $N_0 \in \mathbb{N}$  existe  $n \geq N_0$  para el cual no se cumple  $|(-1)^n - L| < \varepsilon_0$ .

Por lo tanto, que  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converja a  $L$  quiere decir que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cualquier  $N_0 \in \mathbb{N}$  es posible encontrar  $n \geq N_0$  que satisfaga  $|(-1)^n - L| \geq \varepsilon_0$ .  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $L$ .

En efecto, observe que

$|(-1)^{2k} - L| = |L - 1|$  para toda  $k \in \mathbb{N}$  y  $|(-1)^{2k-1} - L| = |L + 1|$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Al menos uno de los dos números  $|L - 1|$ ,  $|L + 1|$  es positivo. Suponga que  $|L - 1| > 0$  y escriba  $\varepsilon_0 =: \frac{|L - 1|}{2}$ .

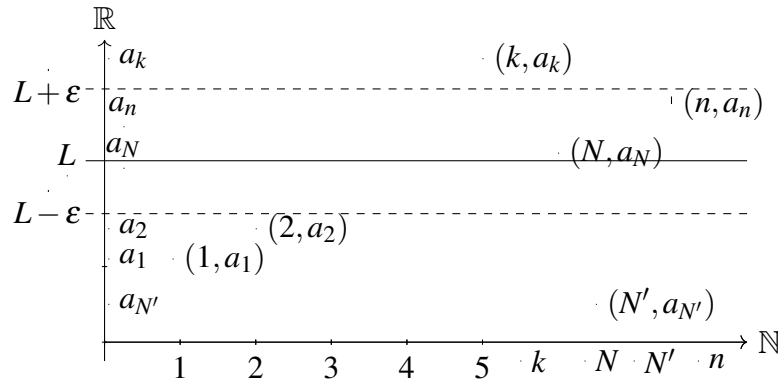
Fije  $N_0 \in \mathbb{N}$ . El número  $2N_0 \geq N_0$  satisface:  $|(-1)^{2N_0} - L| \geq \varepsilon_0$ . En todo caso  $|L + 1| > 0$ , escriba  $\varepsilon_0 =: \frac{|L + 1|}{2}$ .

Fije  $N_0 \in \mathbb{N}$ . El número  $2N_0 - 1 \geq N_0$  satisface:  $|(-1)^{2N_0-1} - L| \geq \varepsilon_0$ . En todo caso hemos encontrado  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cualquier  $N_0 \in \mathbb{N}$  podemos determinar  $n \geq N_0$  que satisfaga  $|(-1)^n - L| \geq \varepsilon_0$ .

Esto prueba que  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a  $L$ . Por lo tanto la sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente.  $\square$

## 1.6. Interpretación geométrica

Que una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales no converja a un número  $L$  significa que existe alguna franja, centrada en la “recta  $L$ ”, lo suficiente angosta para excluir a una infinidad de elementos de la colección de puntos en el plano  $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (N, a_N), \dots, (n, a_n), \dots$  gráficamente



Esto quiere decir que, para algún  $\varepsilon > 0$ , la franja centrada en la “recta  $L$ ”, de ancho  $2\varepsilon$  excluye a tantos puntos de la forma  $(n, a_n)$ , como números naturales haya. O sea, para cualquier  $N \in \mathbb{N}$  es posible determinar  $(n, a_n)$ , con  $n \geq N$ , fuera de la mencionada franja.

Existirá entonces  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cualquier natural  $N$  puede determinarse  $n \geq N$ , tal que el número  $a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq L$  si y sólo si existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para toda  $n \in \mathbb{N}$  existe  $n \geq N$  tal que  $|a_n - L| \geq \varepsilon_0$ .

Ahora haremos la demostración del Teorema 1.5.

*Demostración.* Escribamos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n := L$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n := L'$ . Vamos a probar 1. del Teorema 1.5. En efecto, probaremos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = L + L'$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$ .

Observe que  $|(a_n + b_n) - (L + L')| \leq |a_n - L| + |b_n - L'|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N_1$  y  $|b_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N_2$ . Escribamos  $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ . Entonces  $|a_n - L| + |b_n - L'| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Luego  $|(a_n + b_n) - (L + L')| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $L + L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$ .

Vamos a probar 2. del Teorema 1.5. En efecto, probaremos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = LL'.$$

Fijemos  $\varepsilon > 0$ .

Observe que  $|a_n b_n - LL'| \leq |a_n b_n - a_n L'| + |a_n L' - LL'|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces

$$|a_n b_n - LL'| \leq |a_n| |b_n - L'| + |L'| |a_n - L| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

La condición  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  justifica la existencia de  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < 1$  para toda  $n \geq N_1$ . Luego  $|a_n| < 1 + |L|$  para toda  $n \geq N_1$ .

Entonces  $|a_n||b_n - L'| < (1 + |L|)|b_n - L'|$  para toda  $n \geq N_1$ .

La condición  $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  justifica la existencia de  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $|b_n - L'| < \frac{\varepsilon}{1 + |L|}$  para toda  $n \geq N_2$ . Entonces  $(1 + |L|)|b_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N_2$ . Por lo tanto

$$|a_n||b_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \geq \max\{N_1, N_2\}. \quad (1.4)$$

Nuevamente, la condición  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  justifica la existencia de  $N_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{1 + |L'|}$  para toda  $n \geq N_3$ .

Luego  $|L'||a_n - L| < \left(\frac{|L'|}{1 + |L'|}\right) \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq N_3$ .

Pero  $\left(\frac{|L'|}{1 + |L'|}\right) \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces

$$|L'||a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \geq N_3. \quad (1.5)$$

Aplicando las ecuaciones (1.4) y (1.5) en la relación (1.3):

$$|a_n||b_n - L'| + |L'||a_n - L| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}.$$

Escribamos  $N_0 =: \max\{N_1, N_2, N_3\}$ . Entonces  $|a_n b_n - LL'| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $LL' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n)$ .

Vamos a probar 3. del Teorema 1.5 con la condición adicional de ser  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0$  probaremos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L'}$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $y \neq 0$  para toda  $n \geq N$ . En efecto, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|b_n - L'| < \frac{|L'|}{2}$  para toda  $n \geq N$ . Entonces  $|L'| - |b_n| < \frac{|L'|}{2}$  para toda  $n \geq N$ . Luego

$$|b_n| > \frac{|L'|}{2} \text{ para todo } n \geq N. \quad (1.6)$$

Por lo tanto  $b_n \neq 0$  para toda  $n \geq N$ .

Observe que  $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L'}\right| = \frac{|L' - b_n|}{|b_n||L'|}$  para toda  $n \geq N$ . La ecuación 1.6 implica entonces  $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L'}\right| < \frac{2|L' - b_n|}{|L'|^2}$  para toda  $n \geq N$ . La condición  $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  justifica la existencia

de  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|L' - b_n| < \frac{\varepsilon |L'|^2}{2}$  para toda  $n \geq N_1$ . Luego  $\frac{2|L' - b_n|}{|L'|^2} < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_1$ . Escribamos  $N_0 =: \max\{N_1, N\}$ .

Entonces  $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L'} \right| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L'}$ .  $\square$

**Corolario 1.10.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones convergentes y  $c$  es una constante entonces

1. La sucesión constante  $\{c\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene a  $c$  como límite.
2. Para cualquier número  $c$ , la sucesión  $\{ca_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (ca_n) = c \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right)$ .
3. La sucesión  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}$ , si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

Refiriéndonos al inciso 3. del Teorema 1.5 y al inciso 3. del Corolario 1.10, observamos que si  $b_k = 0$  para algún  $k < N$ , la expresión  $\frac{1}{b_k}$  carecerá de sentido. En este caso, se acostumbra fingir que  $\frac{1}{b_k}$  está definido para esos naturales  $k$  por que, después de todo, el Corolario 1.3 asegura que aunque asignáramos algún valor a tales  $\frac{1}{b_k}$ , esto no influirá ni en la existencia ni en el valor de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n}$ .

**Teorema 1.11.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión convergente, entonces la sucesión  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right|$ .

*Demostración.* Escribamos  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Vamos a probar  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |L|$ .

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observa que  $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La condición  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$  justifica la existencia de  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .

Entonces  $||a_n| - |L|| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |L|$ .  $\square$

Las siguientes propiedades serán de gran utilidad cuando se deseen calcular los límites de sucesiones.

**Teorema 1.12** (Criterio de comparación). Considere una sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface las siguientes condiciones

1. Existen dos sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para toda  $n \geq N$ , para algún natural  $N$ .
2. Las sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen al mismo número real. Si escribimos  $B =: \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =: \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ .

Entonces  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al número  $B$ .

*Demostración.* Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Observe que  $a_n - B \leq b_n - B \leq c_n - B$  para toda  $n \geq N$ . La condición  $B = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$  justifica la existencia de  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|c_n - B| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_1$ .

Entonces  $c_n - B < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_1$ . Luego  $b_n - B < \varepsilon$  para toda  $n \geq \max\{N_1, N\}$ .

La condición  $B = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  justifica la existencia de  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - B| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_2$ .

Entonces  $-\varepsilon < a_n - B$  para toda  $n \geq N_2$ . Luego  $-\varepsilon < b_n - B$  para toda  $n \geq \max\{N_2, N\}$ .

Escribamos  $N_0 =: \max\{N_1, N_2, N\}$ . Entonces  $-\varepsilon < b_n - B < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ .

Es decir  $|b_n - B| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$ .  $\square$

**Corolario 1.13.** Considere una sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface las siguientes condiciones

1. Existen un número  $B$  y una sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $B \leq b_n \leq c_n$  para toda  $n \geq N$ , para algún natural  $N$ .
2. Las sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a  $B$ .

Entonces  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al número  $B$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Corolario 1.14.** Considere una sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface las siguientes condiciones

1. Existen un número  $B$  y una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $a_n \leq b_n \leq B$  para toda  $n \geq N$ , para algún natural  $N$ .
2. Las sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a  $B$ .

Entonces  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al número  $B$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Corolario 1.15.**  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero si y sólo si  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero.

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Teorema 1.16.** 1. Una sucesión estrictamente creciente, no acotada superiormente diverge a infinito. Un Teorema similar es válido para sucesiones estrictamente decrecientes.

Con lo anterior se puede decir que toda sucesión monótona tiene un límite propio o impropio (dependiendo de que esté acotada o no respectivamente).

2. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ . El recíproco de este resultado no es verdadero.

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Ejemplo 59.** Determinar el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\cos^2 n}{3^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Puesto que  $-1 \leq \cos n \leq 1$  para todo entero positivo  $n$ , se sigue que

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1,$$

dividiendo entre  $3^n$  podemos escribir

$$0 \leq \frac{\cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  en este caso  $r = \frac{1}{3}$ , utilizando el Teorema 1.6, por otro

lado  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$  concluimos, por el inciso 1. del Teorema 1.12, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0$ . □

**Ejemplo 60.** Determinar el límite de la sucesión  $\left\{ \frac{\text{sen}(n!)}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Puesto que  $-1 \leq \text{sen}(n!) \leq 1$  para todo entero positivo  $n$ , se sigue que, dividiendo entre  $n$  podemos escribir

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{sen}(n!)}{n} \leq \frac{1}{n},$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  se concluye, por el inciso 1. del Teorema 1.12,

que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} n!}{n} = 0$ . □

**Ejemplo 61.** Sea

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

determinar su límite.

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ n^2+2 &\geq n^2+1 \\ 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Ahora comparando  $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$  con cada uno de los sumandos de  $c_n$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}. \end{array}$$

Al sumar toda la columna derecha como la izquierda obtenemos

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad (1.7)$$

Análogamente,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ n^2+n & \geq & n^2+1 \\ n & \geq & 1 \end{array}$$

Ahora comparando  $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$  con cada uno de los sumandos de  $c_n$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} & \geq & \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}. \end{array}$$

Al sumar toda la columna derecha como la izquierda obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (1.8)$$

De las ecuaciones 1.7 y 1.7 tenemos,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq c_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

por lo tanto, aplicando el inciso 1. del Teorema 1.12, se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ . □

**Ejemplo 62.** Sea

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{2n}}$$

determinar su límite.

*Demostración.* Se tiene que  $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2n}}$  de donde

$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2n}}$  o bien  $\frac{1}{\sqrt[4]{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$  multiplicando ambos miembros por  $n$  y aplicando el inciso 1. del Teorema 1.12 de otras propiedades, se tiene

$$\frac{n}{\sqrt[4]{2n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt[4]{n}}$$

por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[4]{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2}{n^3}}} = \infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[4]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}} = \infty$$

por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . □

**Ejemplo 63.** Determinar si las sucesiones  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{-n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienen límite.

*Demostración.* La sucesión  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente y la sucesión  $\{-n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente decreciente, en consecuencia empleando el inciso 1. del Teorema 1.12 se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$$

Por otra parte, puesto que las sucesiones tienen un límite impropio se puede tener por el inciso 2. del Teorema 1.12 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

como también ya fue probado. □

**Ejemplo 64.** Determinar el límite de la sucesión  $\{\sqrt[n]{3^n + 2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Aplicando el inciso 1. del Teorema 1.12 se tiene.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^n + 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n 3 + 2^n 2}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2^n}{3^n} 2}{1 + \frac{2^n}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n 2}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3}{1}. \end{aligned}$$

Dado que en este caso  $r = \frac{1}{3}$  por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3$ .  $\square$

**Ejemplo 65.** Tenemos que el límite de la sucesión  $\left\{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es  $\frac{1}{e}$ , esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

**Ejemplo 66.** Determine la convergencia o la no convergencia de la sucesión

$$\left\{\frac{n^3 - 4n + 2}{4n^3 + 2n^2 - 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

*Demostración.* Observe que la sucesión  $\left\{\frac{n^3 - 4n + 2}{4n^3 + 2n^2 - 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  se aproxima asintóticamente a la sucesión  $\left\{\frac{n^3}{4n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Puesto que  $\left\{\frac{n^3}{4n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\frac{1}{4}$ , la sucesión  $\left\{\frac{n^3 - 4n + 2}{4n^3 + 2n^2 - 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  deberá converger también a  $\frac{1}{4}$ .

Intentemos aplicar el inciso 3. del Corolario 1.10. Ninguna de las sucesiones

$$\{n^3 - 4n + 2\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \{4n^3 + 2n^2 - 1\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge por no estar acotadas. Sin embargo,

$$\frac{n^3 - 4n + 2}{4n^3 + 2n^2 - 1} = \frac{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión  $\left\{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es combinación de las tres sucesiones  $\{1\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\left\{\frac{4}{n^2}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\left\{\frac{2}{n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

La sucesión  $\{1\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 1.

La sucesión  $\left\{\frac{4}{n^2}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0. En efecto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Entonces, por el inciso

2. del Teorema 1.5 implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , es decir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ . Luego, por el inciso

1. del Corolario 1.10 implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \frac{1}{n^2} = 0$ . La sucesión  $\left\{\frac{2}{n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0. En

efecto, por el inciso 2. del Teorema 1.5 implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , es

decir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ . Luego, por el inciso 1. del Corolario 1.10 implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{n^3} = 0$ .

Entonces, la sucesión  $\left\{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^3} = 1.$$

Analogamente, la sucesión  $\left\{4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 4.$$

Luego, por el inciso 3. del Corolario 1.10 implica entonces que la  $\left\{\frac{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

sucesión es convergente y que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto la sucesión  $\left\{\frac{n^3 - 4n + 2}{4n^3 + 2n^2 - 1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^3 - 4n + 2}{4n^3 + 2n^2 - 1}\right) = \frac{1}{4}.$$

□

**Ejemplo 67.** Fija  $a \in \mathbb{R}^+$ . Determine la convergencia o la no convergencia de la sucesión  $\{\sqrt[n]{a}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Por el inciso 3. del Teorema 1.5 asegura

entonces que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ . Existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} \leq a \leq N$ . Entonces  $\frac{1}{n} \leq a \leq n$  para

toda  $n \geq N$ . Por lo tanto  $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$  para toda  $n \geq N$ . El Teorema 1.12 implica

entonces que  $\{\sqrt[n]{a}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ . □

**Ejemplo 68.** Fija  $R \in \mathbb{Q}$  tal que  $R > 0$ . Si una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisface las condiciones

1.  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a algún número  $L$  entonces

- a)  $L \geq 0$
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^R = L^R$ .

*Demostración.*  $L \geq 0$ .

Si  $L$  fuera negativo, al condición 2. justificaría la existencia de  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < -L$  para toda  $n \geq N$ . Luego  $a_n < 0$  para toda  $n \geq N$ , lo cual contradice la condición 1. Por lo tanto  $L$  debe ser no negativo.

Fijo  $Q \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1}{Q}} = L^{\frac{1}{Q}}$ . Caso  $L = 0$ .

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . La condición 2. justifica la existencia de  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n| < \varepsilon^Q$  para toda  $n \geq N_0$ . Entonces  $\left| a_n^{\frac{1}{Q}} \right| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1}{Q}} = 0$ . Caso  $x > 0$ .

Observe que

$$\left| a_n^{\frac{1}{Q}} - L^{\frac{1}{Q}} \right| = \frac{|a_n - L|}{a_n^{\frac{Q-1}{Q}} + a_n^{\frac{Q-2}{Q}} L^{\frac{1}{Q}} + \dots + a_n^{\frac{1}{Q}} L^{\frac{Q-2}{Q}} + L^{\frac{Q-1}{Q}}} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Pero la condición 1. implica  $a_n^{\frac{Q-1}{Q}} + a_n^{\frac{Q-2}{Q}} L^{\frac{1}{Q}} + \dots + a_n^{\frac{1}{Q}} L^{\frac{Q-2}{Q}} + L^{\frac{Q-1}{Q}} \geq a_n^{\frac{Q-1}{Q}}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $\left| a_n^{\frac{1}{Q}} - L^{\frac{1}{Q}} \right| \leq \frac{1}{\left( a_n^{\frac{Q-1}{Q}} \right)} |a_n - L|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por el inciso 2. implica

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - L| = 0$ . Por el inciso 2. del Corolario 1.10. implica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left( L^{\frac{Q-1}{Q}} \right)} |a_n - L| = 0.$$

Entonces el Teorema 1.12 asegura que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| a_n^{\frac{1}{Q}} - L^{\frac{1}{Q}} \right| = 0$ .

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1}{Q}} = L^{\frac{1}{Q}}$ . Fijo  $Q \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{P}{Q}} = L^{\frac{P}{Q}}$  para toda  $P \in \mathbb{N}$ . En efecto, aplicando el principio de inducción. La fórmula propuesta es válida para el número 1., como acabamos de demostrar.

Si la fórmula es válida para el número  $K$ , también será válida para  $K + 1$ . En efecto, que la fórmula sea válida para el número  $K$  significa que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{K}{Q}} = L^{\frac{K}{Q}}$ . Pero  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1}{Q}} = L^{\frac{1}{Q}}$ . Entonces, por el inciso 2. del Teorema 1.5 asegura que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{K+1}{Q}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{K}{Q}} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1}{Q}} = L^{\frac{K+1}{Q}}.$$

El principio de inducción asegura entonces que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{P}{Q}} = L^{\frac{P}{Q}}$  para toda  $P \in \mathbb{N}$ . Observe finalmente que existen  $P, Q \in \mathbb{N}$  tales que  $R = \frac{P}{Q}$ . En particular tenemos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^P} = 0$  para toda  $P \in \mathbb{N}$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^Q} = 0$  para toda  $Q \in \mathbb{N}$ .  $\square$

## 1.7. Subsucesiones, sucesiones monótonas acotadas y sucesiones de Cauchy

Dada una sucesión, si “quitamos” cierta cantidad de términos de tal forma que aún queda una cantidad infinita de ellos y se conserva el orden de la sucesión original, se genera un tipo particular de sucesión llamado subsucesión. Las subsucesiones son como escoger algunos dulces de una bolsa grande, siguiendo un patrón. No tienes que tomar todos los dulces, solo algunos, siguiendo una regla, como solo tomar los rojos o solo tomar uno sí y uno no. Aquí tienes cuatro ejemplos de la vida real que pueden ayudar a entender qué son las subsucesiones:

**Ejemplo 69** (Saltando en un tablero de ajedrez). Imagina un tablero de ajedrez con todas sus casillas, pero decides jugar un juego donde solo saltas en las casillas blancas, siguiendo el orden del tablero. Aunque el tablero tiene casillas blancas y negras, tú eliges seguir un camino que solo incluye las blancas. Aquí, las casillas blancas en las que saltas forman una subsucesión de todas las casillas del tablero.

**Ejemplo 70** (Recogiendo conchas en la playa). Piensa que estás en la playa recogiendo conchas. Hay muchos tipos diferentes, pero decides recoger solo las conchas rosadas. Aunque pasas por muchas conchas de diferentes colores, solo eliges las rosadas. Las conchas rosadas que has recogido forman una subsucesión de todas las conchas que viste en la playa.

**Ejemplo 71** (Comiendo frutas de una bandeja). Imagina que tienes una bandeja llena de diferentes tipos de frutas: manzanas, plátanos, y uvas. Decides comer solo las uvas. Aunque hay muchas frutas en la bandeja, eliges seguir un patrón donde solo consumes las uvas. Las uvas que comes forman una subsucesión de todas las frutas en la bandeja.

**Ejemplo 72** (Viendo estrellas en el cielo). Por la noche, miras el cielo lleno de estrellas y decides hacer un mapa de las estrellas que forman constelaciones. Aunque hay miles de estrellas, solo incluyes en tu mapa aquellas que son parte de las constelaciones. Las estrellas que has escogido para tu mapa forman una subsucesión de todas las estrellas en el cielo.

Estos ejemplos muestran cómo se puede escoger una secuencia más pequeña a partir de una más grande, siguiendo un patrón específico o una regla de selección. En esta sección probaremos algunas de sus características y veremos cómo se enlazan sus propiedades respecto a la sucesión original.

**Definición 1.7.1.** Considere un subconjunto no vacío  $S$  de  $\mathbb{N}$ .

El conjunto  $S$  será llamado **finito** si está acotado.

El conjunto  $S$  será llamado **infinito** si no está acotado.

*Nota 1.7.1.* El conjunto vacío es finito.

**Ejemplo 73.** Los subconjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\{3n|n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{3n - 1|n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{3n - 2|n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{5^n|n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{5n|n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{5n - 1|n \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathbb{N}$ , son todos conjuntos infinitos.

**Observación 2.** Un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{N}$  es finito si y sólo si existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $s \leq N_0$  para toda  $s \in S$ .

**Definición 1.7.2.** Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice que es creciente

1. Si  $a_n < a_{n+1}$  es una sucesión **estrictamente creciente**.
2. Si  $a_n > a_{n+1}$  es una sucesión **estrictamente decreciente**.

**Ejemplo 74.** Ejemplos de sucesiones estrictamente crecientes:

$\{2n - 1\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{2n - 2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{2n - 3\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
 $\{3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{3n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{3n - 1\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{3n - 2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{3n - 3\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
 $\{5^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , entre otras.

**Ejemplo 75.** Ejemplos de sucesiones estrictamente decrecientes:

$\{-3n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-5n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-7n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-11n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-13n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
 $\{-2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-5^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-7^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{-11^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
 $\{-13^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , entre otras.

**Ejemplo 76.** Dar cuatro ejemplos de sucesiones estrictamente crecientes.

*Demostración.* 1.  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$$

donde  $a_n = n$  y  $a_{n+1} = n + 1$ , luego  $n < n + 1$  para toda  $n$ .

2.  $\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$2, 4, 6, \dots, 2n, 2n + 2, \dots$$

donde  $a_n = 2n$  y  $a_{n+1} = 2(n + 1) = 2n + 2$ , luego  $2n < 2n + 2$  para toda  $n$ .

3.  $\{n^2 - 1\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$0, 3, 8, \dots, n^2 - 1, n^2 + 2n, \dots$$

donde  $a_n = n^2 - 1$  y  $a_{n+1} = (n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ , luego  $n^2 - 1 < n^2 + 2n$  para toda  $n$ .

4.  $\{n^3\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$1, 8, 27, \dots, n^3, (n+1)^3, \dots$$

donde  $a_n = n^3$  y  $a_{n+1} = (n+1)^3$ , luego  $n^3 < (n+1)^3$  para toda  $n$ .

□

**Ejemplo 77.** Dar cuatro ejemplos de sucesiones estrictamente decrecientes.

*Demostración.* 1.  $\{-n\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$-1, -2, -3, \dots, -n, -n-1, \dots$$

donde  $a_n = -n$  y  $a_{n+1} = -(n+1) = -n-1$ , luego  $-n > -n-1$  para toda  $n$ .

2.  $\{-2n\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$-2, -4, -6, \dots, -2n, -2n-2, \dots$$

donde  $a_n = -2n$  y  $a_{n+1} = -2(n+1) = -2n-2$ , luego  $-2n > -2n-2$  para toda  $n$ .

3.  $\{1-n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$0, -3, -8, \dots, 1-n^2, -n^2-2n, \dots$$

donde  $a_n = 1-n^2$  y  $a_{n+1} = 1-(n+1)^2 = -n^2-2n$ , luego  $1-n^2 > -n^2-2n$  para toda  $n$ .

4.  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  los términos de esta sucesión son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

donde  $a_n = \frac{1}{n}$  y  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ , luego  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$  para toda  $n$ .

□

Las sucesiones monótonas acotadas son como juegos o situaciones en las que sigues reglas muy específicas que te hacen avanzar paso a paso en una sola dirección (hacia arriba o hacia abajo), pero también tienes un límite o una frontera que no puedes pasar. Aquí van cuatro ejemplos sencillos para explicar este concepto:

**Ejemplo 78** (Jugando al “limbo”). Imagina que estás jugando al “limbo”, donde tienes que pasar por debajo de una barra sin tocarla. Cada ronda, la barra se baja un poco más. Así, la altura por la que tienes que pasar disminuye gradualmente, pero hay un punto en el que no se puede bajar más porque o bien tocaría el suelo, o sería imposible pasar sin caerse. La altura de la barra forma una sucesión monótona decreciente acotada porque siempre disminuye, pero no puede bajar de cierto límite.

**Ejemplo 79** (Llenando un vaso de agua hasta cierta marca). Piensa en un vaso transparente que tiene marcas de medida en el costado. Decides llenarlo de agua hasta una marca específica, pero no más allá. Cada vez que añades agua, el nivel sube, pero te detienes justo antes de pasar la marca. Este es un ejemplo de sucesión monótona creciente acotada porque el nivel de agua sube cada vez que añades más, pero hay un límite superior que has decidido no pasar.

**Ejemplo 80** (Subiendo escalones con un límite). Imagina que tienes una escalera de 10 escalones y decides subir un escalón cada día, pero solo hasta el escalón número 8, porque el 9 y el 10 están pintados de un color que indica que no se pueden usar. Así, cada día estás un poco más alto, pero no subirás más allá del octavo escalón. Aquí, los escalones que subes forman una sucesión monótona creciente acotada por el número máximo de escalones que has decidido subir.

**Ejemplo 81** (Ahorro de dinero con una meta). Supón que decides ahorrar dinero para comprar algo especial. Cada semana pones algo de dinero en tu alcancía, pero tienes como objetivo ahorrar exactamente 50, no más. A medida que pasa el tiempo, la cantidad de dinero en tu alcancía aumenta, pero una vez que alcanzas los 50, dejas de agregar más dinero. La cantidad de dinero ahorrado forma una sucesión monótona creciente acotada porque se incrementa con cada cantidad que añades, pero está limitada por la meta de 50 que te has propuesto.

Estos ejemplos ayudan a entender cómo algunas cosas pueden aumentar o disminuir de manera ordenada y predecible, pero siempre dentro de un rango establecido, sin salirse de ciertos límites.

**Observación 3.** Si una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente, entonces  $a_n < a_m$  para toda  $n < m$ .

**Teorema 1.17.** Si  $S$  es un subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ , entonces existe una sucesión estrictamente creciente  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales tales que  $S = \{\alpha(n) | n \in \mathbb{N}\}$ . Tal sucesión  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es conocida como la **enumeración creciente del conjunto  $S$** .

Intente hacer la demostración aplicando el principio de inducción y el principio del buen orden para construir la sucesión  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Observación 4.** Si  $\{\beta(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, entonces  $\{\beta(n) | n \in \mathbb{N}\}$  es un subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ .

En efecto, aplique el principio de inducción para demostrar  $\beta(n) \geq n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y deduzca que el conjunto  $\{\beta(n) | n \in \mathbb{N}\}$  no está acotado.

*Nota 1.7.2.* Hablar de los subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  es hablar de las sucesiones estrictamente creciente de números naturales.

Introducimos ahora el concepto de subsucesión. Considere una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales. Elija un subconjunto infinito  $S$  de  $\mathbb{N}$ . Si a cada elemento  $s$  del conjunto  $S$  (enumerado crecientemente) le hacemos corresponder el número  $a_s$ , tendremos una subsucesión de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En otros términos:

**Definición 1.7.3.** Considere una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales. Si  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, la sucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  será llamada la  $\alpha$ -**subsucesión** de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 82.**  $\{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión de los términos pares de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En este caso,  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión  $\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales.

Así por ejemplo  $\left\{1 + \frac{1}{2n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión de los términos pares de la sucesión  $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 83.**  $\{a_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión de los términos impares de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En este caso,  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión  $\{2n-1\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales.

Así  $\left\{1 - \frac{1}{2n-1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión de los términos impares de la sucesión  $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 84.**  $\{a_{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión de los términos con potencia de dos de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En este caso,  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión  $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales.

Así por ejemplo  $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión de los términos con potencia de dos de la sucesión  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 85.**  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la subsucesión trivial de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En este caso,  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales.

Haremos el análisis de la convergencia de una sucesión utilizando el concepto de subsucesión.

**Proposición 1.18.** Si una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un número  $L$ , entonces cualquier subsucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $L$ .

*Demostración.* Considere una subsucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Fije  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Observa que  $\alpha(n) \geq n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $|a_{\alpha(n)} - L| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\alpha(n)} = L$ .  $\square$

**Corolario 1.19.** Si dos subsucesiones  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{a_{\beta(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienen límites distintos, entonces no es convergente la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector.  $\square$

*Nota 1.7.3.* Si  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, entonces  $\alpha(n) \geq n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 86.** La sucesión  $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente. En efecto, la subsucesión de los términos impares  $\left\{-1 + \frac{1}{2n-1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ , converge a  $-1$  y la subsucesión  $\left\{1 + \frac{1}{2n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  de los términos pares de la sucesión  $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $1$ .

**Teorema 1.20.** *Considere una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para la cual existen dos subsucesiones  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{a_{\beta(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface las siguientes condiciones:*

1.  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{a_{\beta(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen al mismo número.
2.  $\{\alpha(n) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\beta(n) | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ .

Escribimos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\alpha(n)} = L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\beta(n)}$ . Entonces  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  y la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Buscamos  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_0$  implica  $|a_n - L| < \varepsilon$ . Observe que la condición 2 implica que cualquier natural  $n$  satisface al menos una de las condiciones siguientes:

$$\text{Existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = \alpha(k) \text{ o existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = \beta(j) \tag{1.9}$$

La condición 1. justifica la existencia de  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|a_{\alpha(k)} - L| < \varepsilon \text{ para toda } k \geq N \text{ y } |a_{\beta(j)} - L| < \varepsilon \text{ para toda } j \geq N.$$

Fije  $n \geq \max\{\alpha(N), \beta(N)\}$ . Apliquemos la condición (1.9). Caso en que  $n = \alpha(k)$  para algún natural  $k$ .

Tal número  $k$  satisface entonces la condición  $\alpha(k) \geq \alpha(N)$ . Pero la sucesión  $\{\alpha(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente. Entonces  $\alpha(k) \geq \alpha(N)$  implica  $k \geq N$ . Luego  $|a_{\alpha(k)} - L| < \varepsilon$ . Por lo tanto  $|a_n - L| < \varepsilon$  en este caso. Caso en que  $n = \beta(j)$  para algún natural  $j$ .

Tal número  $j$  satisface entonces la condición  $\beta(j) \geq \beta(N)$ . Pero la sucesión  $\{\beta(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente. Entonces  $\beta(j) \geq \beta(N)$  implica  $j \geq N$ . Luego  $|a_{\beta(j)} - L| < \varepsilon$ . Por lo tanto  $|a_n - L| < \varepsilon$  en este otro caso.

Escribamos  $N_0 =: \max\{\alpha(N), \beta(N)\}$ . Hemos probado la implicación  $n \geq N_0$  implica  $|a_n - L| < \varepsilon$ . □

**Observación 5.** *La convergencia de una o más subsucesiones de una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no necesariamente implica la convergencia de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  aún en el caso de que dichas subsucesiones convergieran al mismo número.*

Por ejemplo, considere la sucesión

$$1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots$$

las subsucesiones de los términos

$$\alpha(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \beta(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \text{ y } \gamma(n) =: \frac{n(n+1)}{2} + 3$$

convergen todas a cero, pero la sucesión dada no es convergente. Así pues la condición 2. del Teorema 1.20 no puede ser omitida. Este ejemplo sugiere la siguiente idea:

Una propiedad que puede tener una sucesión de números reales es que encuentre puntos de absorción. Describimos esta propiedad como sigue: Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales encuentra un punto de absorción (o de adherencia) es el número real  $L$  cuando todos los elementos  $s$  de un conjunto infinito  $S$  de  $\mathbb{N}$  enumerado crecientemente, próximos a  $+\infty$ , son transformados en números reales  $a_s$  que se absorben en  $L$ . En nuestro modelo la descripción de esta propiedad es la siguiente:

**Definición 1.7.4.** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. El número real  $L$  es un **Punto de Adherencia** de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cuando exista una subsucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converja a  $L$ .

**Ejemplo 87.** Toda sucesión convergente encuentra un único punto de adherencia en su límite.

**Ejemplo 88.** La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $a_{2n} = 1$  y  $a_{2n-1} = 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , encuentra dos puntos de adherencia en 0 y 1.

**Ejemplo 89.** La sucesión  $\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene puntos de adherencia. (La razón es que todas sus subsucesiones no son acotadas).

**Teorema 1.21** (Bolzano-Weirestrass). *Toda sucesión acotada de números reales tiene al menos un punto de adherencia.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada de números reales. Existe  $M > 0$  tal que  $-M < a_n < M$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq a_n \text{ para una infinidad de índices } n\}$ . Se cumple:  $-M < a_n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  implica  $-M \in A$ , luego  $A$  es no vacío. Ahora bien,  $a \in A$  implica que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a \leq a_n$ ;  $a_n < M$  lo que implica  $a < M$ , luego  $M$  es un mayorante de  $A$ . Por lo tanto  $A$  es un conjunto acotado superiormente. Sea  $L := \sup A$ .

Afirmamos que para toda  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $\{n \in \mathbb{N} \mid L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon\}$  es infinito. En efecto,  $L - \varepsilon$  no es mayorante de  $A$ . Entonces existe  $a \in A$  tal que  $L - \varepsilon < a$ . Pero  $a \in A$  implica  $a \leq a_n$  para una infinidad de índices  $n$ . Luego  $L - \varepsilon < a$  para una infinidad de índices  $n$ , es decir,  $\{n \in \mathbb{N} \mid L - \varepsilon < a_n\}$  es infinito.

Ahora bien  $L + \varepsilon \notin A$ , luego  $L + \varepsilon \leq a_n$ , a lo más para un número finito de índices  $n$ . Entonces existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < L + \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0$ . Sea  $N > 0$ .

Puesto que el conjunto  $\{n \in \mathbb{N} \mid L - \varepsilon < a_n\}$  es infinito, existe  $k \in \{n \in \mathbb{N} \mid L - \varepsilon < a_n\}$  tal que  $k > \max\{N, N_0\}$  implica  $a_k < L + \varepsilon$ , luego  $k \in \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < L + \varepsilon\}$ .

Entonces  $k \in \{n \in \mathbb{N} \mid L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon\}$  cumple  $k > N$ . Por lo tanto  $\{n \in \mathbb{N} \mid L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon\}$  no es acotado, es decir, es infinito.

Construyamos una subsucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\alpha(n)}$ .

Sea  $\alpha(1)$  el primer elemento del conjunto  $\{n \in \mathbb{N} \mid L - 1 < a_n < L + 1\}$ . El natural  $\alpha(1)$  cumple  $L - 1 < a_{\alpha(1)} < L + 1$ . Supongamos construido el natural  $\alpha(k)$ . Sea  $\alpha(k+1)$  el primer elemento del conjunto  $\left\{n \in \mathbb{N} \mid L - \frac{1}{k+1} < a_n < L + \frac{1}{k+1}\right\}$  mayor que  $\alpha(k)$ . El

natural  $\alpha(k+1)$  cumple:

$$\alpha(k) < \alpha(k+1) \quad \text{y} \quad L - \frac{1}{k+1} < a_{\alpha(k+1)} < L + \frac{1}{k+1}.$$

Aplicando inducción, tenemos construida una sucesión  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  estrictamente creciente de números naturales que cumple:  $L - \frac{1}{n} < a_{\alpha(n)} < L + \frac{1}{n}$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, aplicando el Teorema 1.12, la subsucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\alpha(n)}$ .  $\square$

Entonces, toda sucesión acotada de números reales tiene al menos una subsucesión convergente. La propiedad de Bolzano-Weierstrass es un concepto matemático que, en términos sencillos, dice que en cualquier sucesión larga y apretada de números (o puntos), siempre puedes encontrar una subsucesión (una serie de números seleccionados de la sucesión original) que se acomoda y se acerca cada vez más a un punto específico. Para explicarlo, vamos a usar ejemplos de la vida cotidiana que reflejen esta idea de “acercarse cada vez más a algo”.

**Ejemplo 90** (Las hojas de un árbol en otoño). Imagina que las hojas de un árbol grande comienzan a caer en otoño. Al principio, caen en diferentes lugares del jardín, pero a medida que pasan los días, te das cuenta de que algunas áreas del jardín acumulan más hojas que otras. Si imaginamos que cada hoja que cae es un número de nuestra sucesión, entonces las áreas donde se acumulan más hojas serían como esos puntos específicos a los que se acercan las subsucesión de nuestra secuencia original. Es decir, aunque las hojas caen de forma dispersa, hay patrones donde se agrupan más.

**Ejemplo 91** (Gotas de lluvia en una ventana). Piensa en las gotas de lluvia deslizándose por una ventana. Al principio, las gotas caen en lugares aleatorios, pero algunas gotas comienzan a seguir el camino de otras, uniéndose y formando riachuelos más grandes que bajan de manera más directa. Cada gota de lluvia es como un número en la sucesión, y los riachuelos que forman son como las subsucesión que se van “acercando” o siguiendo un camino más definido.

**Ejemplo 92** (Personas formando una fila). Imagina que en un parque de diversiones, las personas comienzan a formar filas para subirse a los juegos. Al principio, pueden estar dispersas, pero poco a poco, se van ordenando en filas más estructuradas para esperar su turno. Las personas serían los números de la sucesión, y la formación de filas sería como encontrar esas subsucesión que se van ordenando y acercando a un objetivo común: el juego.

**Ejemplo 93** (Ahorro de monedas). Si un niño comienza a ahorrar monedas, al principio puede que ponga unas pocas en su alcancía en días aleatorios. Pero si decide que quiere comprar algo y comienza a ahorrar más seriamente, empezará a poner monedas más frecuentemente y en cantidades que se acerquen a su objetivo de compra. Aquí, cada vez que ahorra algunas monedas es parte de la sucesión, y el patrón de ahorrar con más frecuencia y enfoque sería la subsucesión que se acerca al objetivo (comprar el juguete).

**Ejemplo 94** (Luz de un faro). Imagina un faro que gira y emite luz. Si estás en un barco, verás que la luz pasa por ti de manera intermitente, pero a medida que te acercas al faro, los momentos en que la luz te ilumina se hacen más frecuentes y predecibles. En este caso, cada vez que la luz pasa por ti podría considerarse un “número” en nuestra sucesión, y el patrón de acercamiento al faro refleja cómo se puede encontrar una subsucesión que se hace más y más predecible a medida que te aproximas. Estos ejemplos ilustran de manera sencilla cómo, en la vida cotidiana, podemos encontrar patrones o subsucesión que se acercan a un punto específico, reflejando la idea detrás de la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Esta es la primera propiedad trascendente de las sucesiones de números reales. La segunda propiedad trascendente que estudiaremos se describe en el siguiente teorema.

**Teorema 1.22.** *Toda sucesión monótona acotada de números reales es convergente.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión monótona acotada de números reales.

1. Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente. Puesto que la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada, el conjunto  $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  es acotado. Sea  $L =: \sup A$ . Se cumple:  $a_n \leq L$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .  $L - \varepsilon$  no es mayorante de  $A$ .

Entonces existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $L - \varepsilon < a_{N_0}$ . Puesto que la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente,  $n \geq N_0$  implica  $a_{N_0} \leq a_n$ . Luego  $n \geq N_0$  implica  $L - \varepsilon < a_n \leq L$ . Así pues  $n \geq N_0$  implica  $|L - a_n| < \varepsilon$ . Por lo tanto  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

2. Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente. Entonces  $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente y además acotada. Aplicando 1.,  $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Por lo tanto  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

□

**Observación 6.** *Si dos subsucesiones de una sucesión convergen a diferentes límites, entonces la sucesión no es convergente. La recíproca de esta afirmación no es válida en general. Sin embargo:*

**Proposición 1.23.** *Una sucesión acotada de números reales no es convergente si y sólo si existen al menos dos subsucesiones que convergen a diferentes límites*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada de números reales. Supongamos que existen dos subsucesiones de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converjan a diferentes límites. Aplicando el Corolario 1.19,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente.

Recíprocamente, supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente. Aplicando el Teorema 1.21 de Bolzano-Wierstrass, existe una subsucesión  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a un número real  $L$ .

Aplicando la hipótesis,  $L$  no es límite de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces existe  $(a_0, b_0)$ ,  $a_0 < L < b_0$  tal que el conjunto  $S = \{n \in \mathbb{N} | a_n \notin (a_0, b_0)\}$  es infinito. Aplicando inducción numeramos de manera creciente a  $S$ . Existe pues una sucesión estrictamente creciente

$\{\beta(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales tal que  $S = \{\beta(n) | n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces  $\{a_{\beta(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una subsucesión de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $a_{\beta(n)} \notin (a_0, b_0)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  acotada implica  $a_{\beta(n)} \notin (a_0, b_0)$  acotada. Aplicando el Teorema 1.21 de Bolzano-Wierstrass, existe una subsucesión  $\{a_{\beta(\gamma(n))}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_{\beta(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a un número real  $P$ .

Se cumple  $a_{\beta(n)} \notin (a_0, b_0)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  implica  $a_{\beta(\gamma(n))} \notin (a_0, b_0)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  por lo cual  $L \neq P$ .

Por lo tanto  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{a_{\beta(\gamma(n))}\}_{n \in \mathbb{N}}$  son dos subsucesiones de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que convergen a diferentes límites. □

Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales es de Cauchy si todos los naturales  $n$  próximos a  $+\infty$  son transformados en  $a_n$  que se absorben. Vamos a introducir un concepto que tiene que ver fuertemente con la completitud de los números reales, las sucesiones de Cauchy. A continuación vamos a establecer un criterio intrínseco de convergencia para sucesiones que es más general pues puede aplicarse a cualquier sucesión. Este criterio fue formulado por Bolzano en 1817 y también, independientemente, por Cauchy en 1821, y establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión. Dicha condición se conoce con el nombre de condición de Cauchy. En nuestro modelo la descripción de esta propiedad es la siguiente.

**Definición 1.7.5.** Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales es una **sucesión de Cauchy** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N_0$  implica  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

De alguna manera, la definición nos dice que la sucesión en el “infinito” se va apretando sobre sí misma. Parece razonable esperar que cuando una sucesión tiene ese comportamiento tenga límite, lo cual va a ser cierto, pero de nuevo apoyándose fuertemente en el Axioma de Completitud. La ventaja de esto, es que ahora, para probar que una sucesión tiene límite no va a ser necesario tener un candidato, simplemente verificar la condición de arriba (¡capaz que aún esto no resulta muy importante, pero vamos a ver más adelante que sí lo es!).

Para que una sucesión de números reales sea convergente es necesario y suficiente que sea una sucesión de Cauchy. Esta es la tercera propiedad trascendente de las sucesiones de números reales que estudiaremos. Las sucesiones de Cauchy son un concepto matemático que se refiere a una secuencia de números (o puntos) que se van haciendo cada vez más y más cercanos entre sí a medida que avanzas en la sucesión, sin importar cuán lejos te encuentres en la lista de números. Aquí hay cinco ejemplos sencillos para explicarlo:

**Ejemplo 95** (Acercándose a un semáforo). Imagina que estás en un coche acercándote a un semáforo. Al principio, cuando estás lejos, avanzas rápidamente, pero a medida que te acercas al semáforo, reduces la velocidad gradualmente hasta que te detienes. En cada paso (cada vez que te mueves), estás más cerca del semáforo que antes, similar a cómo en una sucesión de Cauchy, cada número está más cerca del siguiente.

**Ejemplo 96** (Jugando a la “lava caliente”). Piensa en el juego donde el suelo es “lava” y debes moverte de un mueble a otro sin tocar el suelo. Cada salto es más corto porque intentas ser cuidadoso y no caerte, haciendo que tus saltos sean cada vez más precisos y calculados. Tus saltos se van haciendo más y más pequeños, acercándote cuidadosamente a tu destino final, similar a cómo los términos en una sucesión de Cauchy se acercan cada vez más entre sí.

**Ejemplo 97** (El juego del escondite). Cuando juegas al escondite y alguien está tratando de encontrarte, a medida que se acercan a tu escondite, sus pasos se hacen más pequeños y cuidadosos para no hacer ruido y darte una pista de su ubicación. Esta aproximación cautelosa, con pasos cada vez más cortos, es similar a cómo los términos de una sucesión de Cauchy se acercan entre sí.

**Ejemplo 98** (Afinando un instrumento musical). Piensa en cuando afinas un instrumento, como una guitarra. Al principio, las diferencias en el sonido pueden ser bastante grandes, pero a medida que te acercas a la nota correcta, haces ajustes más finos y pequeños. Cada ajuste es más sutil que el anterior, acercando el tono cada vez más a la afinación perfecta, lo cual es similar a la naturaleza de acercamiento de los términos en una sucesión de Cauchy.

**Ejemplo 99** (La temperatura al amanecer). Justo antes del amanecer, la temperatura comienza a cambiar muy lentamente. Si estuvieras midiendo la temperatura cada minuto, verías que la diferencia de temperatura de un minuto al siguiente es cada vez más pequeña. Esto significa que, a medida que pasa el tiempo, los cambios son menos notorios y la temperatura se estabiliza, reflejando cómo los términos de una sucesión de Cauchy se vuelven cada vez más cercanos entre sí.

Estos ejemplos ilustran cómo, en situaciones cotidianas, podemos encontrar comportamientos que se asemejan a las sucesiones de Cauchy, donde los elementos o eventos se van haciendo cada vez más cercanos o similares entre sí a medida que se suceden.

**Lema 1.24.** *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy. Para el número 1 existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N_0$  implica  $|a_n - a_m| < 1$ . En particular,  $n \geq N_0$  implica  $|a_n - a_{N_0}| < 1$ . Puesto que:  $|a_n| \leq |a_{N_0}| + |a_n - a_{N_0}|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $n \geq N_0$  implica  $|a_n| < 1 + |a_{N_0}|$ . Sea  $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N_0-1}|, 1 + |a_{N_0}|\}$ . Se cumpla  $|a_n| \leq M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada.  $\square$

**Proposición 1.25.** *Una sucesión de Cauchy es convergente si y sólo si existe al menos una subsucesión convergente.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy. La Proposición 1.18 implica la necesidad de la condición. Supongamos ahora que esta condición se cumple. Sea  $\{a_{\alpha(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  una subsucesión convergente de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cuyo límite es  $L$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_1$  implica  $|a_{\alpha(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$n, m \geq N_2 \quad \text{implica} \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se tiene que  $\alpha(n) \geq n$ ,  $|a_n - L| \leq |a_n - a_{\alpha(n)}| + |a_{\alpha(n)} - L|$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ . El natural  $N_0$  cumple:  $n \geq N_0$  implica  $\alpha(n), n \geq N_0$  implica  $|a_n - a_{\alpha(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|a_{\alpha(n)} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  implica  $|a_n - L| < \varepsilon$ . Por lo tanto  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .  $\square$

**Teorema 1.26** (Cauchy). *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales.

1. Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  y  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_0$  implica  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Se tiene:  $|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L|$ , para toda  $n, m \in \mathbb{N}$ . Entonces  $n, m \geq N_0$  implica  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ . Por lo tanto  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.
2. Supongamos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Aplicando el Lema 1.24,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada. El Teorema 1.21 de Bolzano-Wierstrass entonces implica la existencia de un punto adherente  $L$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Aplicando la Proposición 1.25,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

□

Dos razones por las que los Teoremas 1.21, 1.22 y 1.26 dan propiedades trascendente de las sucesiones de números reales, son las siguientes: Una, porque aseguran la convergencia de sucesiones sin tomar como referencia su límite; y otra, porque dan propiedades de los números reales equivalentes a su capacidad de supremo e ínfimo.

Resumiendo la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no está acotada, por tanto no es convergente. Tiene distintas subsucesiones convergentes, a 0 y 1, por ejemplo. Por tanto tampoco converge a infinito o menos infinito. Sin embargo si tiene al menos una subsucesión convergente a infinito. Aplicaciones de las subsucesiones el concepto de subsucesión tiene importantes aplicaciones teóricas dentro del Análisis Matemático. Estas aplicaciones las utilizaremos posteriormente.

**Ejemplo 100.** Construir por inducción la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como sigue:

1. Transformamos el 1 en el número  $a_1 =: \sqrt{2}$ .
2. Habiendo transformado el natural  $n$  en el número  $a_n$ , transformamos el natural  $n + 1$  en el número  $a_{n+1} =: \sqrt{2a_n}$ .

Por ejemplo  $a_1 =: \sqrt{2}$ ,  $a_2 =: \sqrt{2\sqrt{2}}$ ,  $a_3 =: \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ . La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Se cumple:

$$a_n = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \tag{1.10}$$

En efecto,  $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\sum_{k=1}^1 \frac{1}{2^k}}$ . Supongamos que  $a_n = 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \sqrt{2a_n} &= \sqrt{2} \sqrt{a_n} = 2^{\frac{1}{2}} \left[ 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} 2^{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k}} = 2^{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}}. \end{aligned}$$

Aplicando inducción obtenemos la ecuación (1.10). Por otro lado, la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente. En efecto, se cumple

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \text{ implica } 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} < 2^{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}} \text{ luego } a_n < a_{n+1} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada superiormente. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} &= \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} - 1 < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$  implica  $2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} < 2^1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  implica  $a_n < 2$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Aplicando el Teorema 1.22,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 2. En efecto, sea  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . La subsucesión  $\{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}$ .

La sucesión  $\{\sqrt{2a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $\sqrt{2L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2a_n}$ .

Entonces:  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  implica  $\sqrt{2L} = L$ , luego  $L^2 = 2L$ . Finalmente,  $L > 0$  y  $L^2 = 2L$  implica  $L = 2$ . Por lo tanto  $2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

**Ejemplo 101.** Construir por inducción la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como sigue:

1. Transformamos el 1 en el número  $a_1 = 1$ .
2. Habiendo transformado el natural  $n$  en el número  $a_n$ , transformamos el natural  $n+1$  en el número  $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{1}{n+1}$ .

*Demostración.* Por ejemplo  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1 - \frac{1}{2}$ ,  $a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ,  $a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ .

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Se cumple  $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Fijamos  $N_0 \in \mathbb{N}$ . Para todo  $m > N_0$  se cumple

$$\begin{aligned} |a_m - a_{N_0}| &= \left| \sum_{j=N_0+1}^m \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right| \\ \stackrel{\text{sim-}N_0=2k-1}{=} & \left| \frac{(-1)^{N_0}}{N_0+1} + \frac{(-1)^{N_0+1}}{N_0+2} + \dots + \frac{(-1)^{N_0+2k-2}}{N_0+(2k-1)} \right| \\ \stackrel{\text{sim-}N_0=2k}{=} & \left| \frac{(-1)^{N_0}}{N_0+1} + \frac{(-1)^{N_0+1}}{N_0+2} + \dots + \frac{(-1)^{N_0+2k-1}}{N_0+2k} \right|. \end{aligned}$$

Tomando como factor común a  $(-1)^{N_0}$  obtenemos:

$$|a_m - a_{N_0}| \stackrel{\text{si } m - N_0 = 2k - 1}{=} \left| \frac{1}{N_0 + 1} - \frac{1}{N_0 + 2} + \cdots + \frac{1}{N_0 + (2k - 1)} \right|$$

$$\stackrel{\text{si } m - N_0 = 2k}{=} \left| \frac{1}{N_0 + 1} - \frac{1}{N_0 + 2} + \cdots + \frac{1}{N_0 + (2k - 1)} - \frac{1}{N_0 + 2k} \right|.$$

Para todo  $k \in \mathbb{N}$  se cumple:

1.  $0 < \frac{1}{N_0 + 1} - \frac{1}{N_0 + 2} + \cdots + \frac{1}{N_0 + (2k - 1)} < \frac{1}{N_0}$ .
2.  $0 < \frac{1}{N_0 + 1} - \frac{1}{N_0 + 2} + \cdots + \frac{1}{N_0 + (2k - 1)} - \frac{1}{N_0 + 2k} < \frac{1}{N_0}$ .

(La demostración se hace usando inducción, se deja como ejercicio al lector). Entonces para toda  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > N_0$  implica  $|a_m - a_{N_0}| < \frac{1}{N_0}$ . La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces  $m, n \geq N_0 + 1$  implica  $|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{N_0}| + |a_n - a_{N_0}| < \frac{2}{N_0} < \varepsilon$ . El Teorema 1.26 de Cauchy implica que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. (De hecho,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \log 2$ ).  $\square$

**Teorema 1.27.** Sea la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

*Demostración.* La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando la fórmula del binomio de Newton obtenemos:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k},$$

donde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1) \cdots (n-1)n}{k!}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  y  $\binom{n}{0} = 1$ . Entonces

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1) \cdots (n-1)n}{k!} \frac{1}{n^k}. \text{ Por lo tanto}$$

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{k!} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente creciente. En efecto, sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene:

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{k!}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{k!} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

y

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{k!}.$$

Las relaciones:

$$\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$  implican  $a_n < a_{n+1}$ .Para todo  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_n < 3$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Las relaciones

$$\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

y

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Implican

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Luego

$$a_n < 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Aplicando el Teorema 1.22, la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. El límite de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un número real que llamaremos  $e$ . Por lo tanto

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.718\dots$$

Una de las aplicaciones que se le dá al número  $e$  es que se utiliza como base de los Logaritmos Naturales.  $\square$ **Ejemplo 102.** Se cumple que:  $e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ . (Pruebe la afirmación como ejercicio).

## 1.8. Divergencia de sucesiones

En esta sección el objetivo es prestar atención a ciertas sucesiones no acotadas de números reales, que llamaremos “sucesiones divergentes”. Estudiaremos su relación con los

otros tipos de sucesiones que han aparecido hasta ahora: convergentes, acotadas y monótonas. También adaptaremos las reglas sobre cálculo de límites, para poder manejar sucesiones divergentes. Estos ejemplos ayudan a entender cómo algo puede acercarse más y más a un punto específico, o valor, hasta que los cambios son tan pequeños que se considera que ha alcanzado ese punto o valor límite.

**Ejemplo 103** (El volumen de la música en tu reproductor). Imagina que estás escuchando tu canción favorita en un reproductor de música y cada minuto decides subirle el volumen un poco más porque te encanta cómo suena. Si sigues subiendo el volumen sin parar, cada vez será más y más alto. Este volumen no se queda en un punto fijo (por ejemplo, no se queda solo en “alto”), sino que sigue aumentando hasta que tu reproductor ya no pueda más o tus oídos no lo soporten. Aquí, la sucesión de los niveles de volumen es divergente porque no se acerca a un límite específico, sino que sigue creciendo.

**Ejemplo 104** (Los pasos que das hacia atrás). Imagina que estás parado frente a una línea en el suelo y decides dar un paso hacia atrás. Luego, decides dar otro paso hacia atrás, y luego otro más, siempre alejándote más de la línea. Si continúas haciendo esto, cada vez estarás más lejos de la línea inicial. La distancia entre tú y la línea no se queda quieta ni se acerca a un punto específico; en cambio, sigue aumentando cuanto más caminas. La sucesión de tus distancias a la línea es divergente porque se aleja cada vez más, sin limitarse a una distancia máxima.

**Ejemplo 105** (El número de hojas en un árbol gigante). Piensa en un árbol gigante que crece en un mundo mágico donde nunca deja de crecer y cada año duplica la cantidad de hojas que tiene. Si empiezas con una hoja el primer año, luego tendrás dos hojas, luego cuatro, ocho, dieciséis, y así sucesivamente. El número de hojas sigue duplicándose y no se detiene, lo que significa que el árbol tiene más y más hojas cada año sin llegar nunca a un límite. La sucesión de la cantidad de hojas es divergente porque el número de hojas sigue aumentando indefinidamente, sin acercarse a un número final.

Estos ejemplos ayudan a visualizar cómo algo puede seguir creciendo o alejándose sin llegar a un punto específico o límite, lo cual es la esencia de las sucesiones divergentes. Hasta ahora, el estudio de las sucesiones de números reales se ha reducido prácticamente a considerar sucesiones acotadas, que ciertamente son las más útiles. Sin embargo, hay preguntas sobre sucesiones acotadas, o incluso sobre sucesiones convergentes, que no tienen aún respuesta satisfactoria, precisamente porque no hemos prestado más atención a las sucesiones no acotadas, estudiaremos la “convergencia” de sucesiones de números reales a los números  $-\infty$ ,  $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$  y sus propiedades.

**Definición 1.8.1.** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **diverge** a  $+\infty$  (cuando  $n$  **tiende** a  $+\infty$ ) si para cada  $R > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_0$  implica  $R < a_n$ . En este caso escribimos  $+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  o  $a_n \rightarrow +\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  y decimos que  $+\infty$  es el **límite** de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **diverge** a  $-\infty$  (cuando  $n$  **tiende** a  $-\infty$ ) si para cada  $R > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_0$  implica  $a_n < -R$ . En este caso escribimos  $-\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  o  $a_n \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  y decimos que  $-\infty$  es el **límite** de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Observación 7.** *Toda Sucesión que diverge a  $+\infty$  ó  $-\infty$  no es acotada.*

**Observación 8.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
2. Para todo  $R > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N_0$  implica  $R < a_n$ .
3. Para todo  $R > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \in (R, +\infty)$ , para todo  $n \geq N_0$ .
4. Para todo intervalo  $(R, +\infty)$  el conjunto  $\{n \in \mathbb{N} | a_n \notin (R, +\infty)\}$  es finito.

**Observación 9.** *Se cumple relaciones análogas a las de 2. para la divergencia a  $-\infty$ .*

**Observación 10.** *La divergencia a  $+\infty$  o  $-\infty$  es una verdadera convergencia en  $\overline{\mathbb{R}}$ . Sin embargo no tiene las mismas propiedades que la convergencia en  $\mathbb{R}$ . Una razón es que el conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$  no tiene las mismas estructura algebraica y de orden que  $\mathbb{R}$ .*

A continuación enlistamos algunas propiedades que tienen las sucesiones divergentes a  $+\infty$  ó  $-\infty$ .

**Proposición 1.28.** *Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales*

1. *La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente (decreciente) y no acotada superiormente (inferiormente) implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

2. *Supongamos que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ , implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .*

3.  *$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ ) y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  acotada inferiormente (superiormente) implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ .*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = -\infty.$$

4.  *$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ ) y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ ) implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ . ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = -\infty$ ).*

5. *Existe un  $c$  tal que  $0 < c \leq b_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ ) implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = +\infty$ . ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = -\infty$ ).*

6.  *$a_n \leq b_n$  ( $b_n \leq a_n$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ ) implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ . ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ ).*

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Ejemplo 106.** Para todo  $c > 0$  se cumple:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} cn = +\infty$ .

**Ejemplo 107.** Para todo  $a > 1$  se cumple:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} an = +\infty$ .

**Ejemplo 108.** Para todo  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $|q| < 1$  se cumple:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$ .

*Demostración.* En efecto,  $|q| < 1$  implica  $\frac{1}{|q|} > 1$ . Aplicando 2.: tenemos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|q|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ . Aplicando la proposición 1.28 2.:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{|q|^n}} = 0$ . □

**Ejemplo 109.** Para todo  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $|q| < 1$  se cumple:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a[1 + q + q^2 + \cdots + q^n] = \frac{a}{1 - q}$ .

*Demostración.* En efecto,  $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando el Ejemplo 108:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ , luego  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ . Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a[1 + q + q^2 + \cdots + q^n] = a \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a \frac{1}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$ . □

## 1.9. Sucesiones de las medidas aritméticas y geométricas

Las sucesiones de medida aritmética, en un contexto accesible, se pueden explicar como sucesiones donde cada número se obtiene siguiendo una regla sencilla basada en operaciones como sumar o restar. Aquí te doy cinco ejemplos sencillos de cómo se pueden encontrar patrones similares en la vida cotidiana:

**Ejemplo 110** (Añadiendo bloques a una torre). Imagina que estás construyendo una torre con bloques de juguete. Cada día decides añadir un bloque más que el día anterior. Si el primer día pones un bloque, el segundo día pones dos, el tercer día tres, y así sucesivamente. Este patrón, donde cada día añades un bloque más, es similar a una sucesión aritmética donde la diferencia entre los términos consecutivos (el número de bloques que añades cada día) es siempre la misma.

**Ejemplo 111** (Ahorrando dinero). Supón que decides ahorrar dinero y cada semana guardas 5 dólares más que la semana anterior. Si la primera semana guardas 5 dólares, la segunda 10 dólares, la tercera 15 dólares, y así sigues, estás creando una sucesión aritmética con tu ahorro, donde la diferencia entre lo que ahorras cada semana es constante.

**Ejemplo 112** (Contando pasos). Imagina que estás haciendo ejercicio y cada día decides caminar 100 pasos más que el día anterior. Si el primer día caminas 100 pasos, el segundo día 200, el tercer día 300, y así continúas, estás siguiendo una sucesión aritmética en el número de pasos que das cada día.

**Ejemplo 113** (Puntos en un juego). En un juego, ganas puntos cada vez que completas un nivel, y cada nivel te da 10 puntos más que el nivel anterior. Si por el primer nivel ganas 10 puntos, por el segundo 20, por el tercero 30, y así sucesivamente, los puntos que ganas forman una sucesión aritmética, ya que la diferencia de puntos que ganas con cada nivel es siempre la misma.

**Ejemplo 114** (Plantando árboles en filas). Imagina que plantas árboles en filas, y cada fila tiene un árbol más que la fila anterior. Si la primera fila tiene un árbol, la segunda tiene dos, la tercera tres, y así sucesivamente, estás creando una disposición de árboles que sigue una sucesión aritmética, donde el número de árboles por fila aumenta de manera constante.

Estos ejemplos muestran cómo las sucesiones de medida aritmética pueden aparecer en actividades y situaciones cotidianas, siguiendo la idea de que hay una regla simple que determina cómo se forma cada nuevo término de la secuencia a partir del anterior. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales y consideremos la sucesión de las medias aritméticas  $a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \dots$ . Es decir,

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Teorema 1.29.** 1. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$  entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$  donde  $L \in \mathbb{R}$ .

*Esto es válido en el caso de que  $L = \pm\infty$ . El recíproco de este resultado no es verdadero; una sucesión puede ser divergente aunque la de las medias aritméticas sea convergente. Por ejemplo, la sucesión  $1, 0, 1, 0, \dots$  es divergente, pero la de sus medias aritméticas converge a  $\frac{1}{2}$ .*

2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = +\infty$ .
3. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = -\infty$ .

*Demostración.* Probaremos el inciso 1. Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N$ . Toda  $n > N$  cumple

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - L \right| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots + a_{n-1} + a_n - nL}{n} \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - L) + \dots + (a_N - L) + \dots + (a_n - L)}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} [|(a_1 - L)| + \dots + |(a_N - L)|] \\ &\quad + \frac{1}{n} [|(a_{N+1} - L)| + \dots + |(a_n - L)|] \\ &= \frac{1}{n} |a_1 + \dots + a_N - NL| + \frac{1}{n} [|(a_{N+1} - L)| + \dots + |(a_n - L)|] \\ &< \frac{b}{n} + \frac{n - N}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{b}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ donde } b = |a_1 + \dots + a_N - NL|. \end{aligned}$$

Existe  $N' \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{b}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$  para toda  $n \geq N'$ . Sea  $N_0 = \max\{N+1, N'\}$ . El número  $N_0$  cumple:  $n \geq N_0$  implica  $\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L.$$

Ahora probaremos el inciso 2. En efecto, sea  $R > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $4R < a_n$  para toda  $n \geq N$ . Toda  $n \geq 2N$  cumple:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \\ &> \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}{n} + \frac{n-N}{n}(4R) \\ &\geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}{n} + 2R \end{aligned}$$

Se tiene que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$ . Luego, existe  $N'$  tal que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > -R, \text{ para toda } n \geq N'.$$

Sea  $N_0 = \max\{2N, N'\}$ . El número natural  $N_0$  cumple:  $n \geq N_0$  implica

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}{n} + 2R > -R + 2R = R.$$

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$ . Por último el inciso 3. se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Observación 11.** La convergencia a un número real  $L$ , la divergencia a  $-\infty$  o la divergencia a  $+\infty$  de la sucesión de las medias aritméticas  $\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ . No son hipótesis suficientes para la convergencia a  $L$ , la divergencia a  $-\infty$  o la divergencia a  $+\infty$  de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 115.** La sucesión  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente pero la sucesión de las medias aritméticas converge a cero.

Ahora, sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales tales que  $a_n > 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y consideremos la sucesión  $\{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de las medidas geométricas. Las sucesiones geométricas en la vida real se pueden explicar como sucesiones donde cada número se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo. Aquí tienes cinco ejemplos sencillos de cómo esto puede aparecer en situaciones cotidianas, de manera que pueda entenderlo:

**Ejemplo 116** (Duplicando una receta de cocina). Imagina que estás haciendo galletas y decides duplicar la receta para hacer el doble de galletas que la vez anterior. Si la primera vez usas 1 taza de harina, la próxima usarás 2 tazas, luego 4 tazas, y así sucesivamente. Cada vez que cocinas, multiplicas la cantidad de ingredientes por 2, formando una sucesión geométrica con la cantidad de harina.

**Ejemplo 117** (Crecimiento de una planta de frijoles). Supón que una planta de frijoles duplica su altura cada semana. Si comienza midiendo 1 cm, luego mide 2 cm, después 4 cm, y sigue duplicando su altura cada semana, el crecimiento de la planta sigue una sucesión geométrica donde el factor de crecimiento es 2.

**Ejemplo 118** (Ahorro de dinero con interés compuesto). Imagina que ahorras dinero en una cuenta que te da un interés compuesto, lo que significa que tus ahorros crecen un cierto porcentaje cada año. Si tienes 100 dólares y la cuenta crece un 10% cada año, al final del primer año tendrás 110 dólares, luego 121 dólares (10% más que 110), y así sucesivamente. Tu dinero crece siguiendo una sucesión geométrica donde el factor es el interés anual.

**Ejemplo 119** (Virus en una película de ciencia ficción). Piensa en una película donde un virus se duplica en número cada día. Si el primer día hay un virus, el segundo día hay dos, el tercer día cuatro, y así sucesivamente, el número de virus sigue una sucesión geométrica con un factor de duplicación.

**Ejemplo 120** (Contando los descendientes de un par de conejos). Si un par de conejos tiene otro par de conejos cada mes, y cada nuevo par hace lo mismo, podrías contar los pares de conejos cada mes siguiendo una sucesión geométrica. Comienzas con un par, luego tienen otro par (ahora tienes 2), cada uno de estos pares tiene otro par el siguiente mes (ahora 4), y así sucesivamente, multiplicando por 2 el número de pares de conejos cada mes.

Estos ejemplos ayudan a entender cómo las sucesiones geométricas aparecen en la naturaleza y en situaciones creadas por humanos, mostrando cómo algo crece o se multiplica por un factor constante a lo largo del tiempo.

**Teorema 1.30.** 1. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = L$  donde  $L \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = +\infty$ .

Aceptaremos por el momento la validez de este resultado. Más adelante lo demostraremos usando el Teorema 1.29 y las propiedades de la función logaritmo.

**Observación 12.** La convergencia a un número real  $L$ , o la divergencia a  $+\infty$  de la sucesión de las medias geométricas  $\{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . No son hipótesis suficientes para la convergencia a  $L$ , o la divergencia a  $+\infty$  de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejemplo 121.** La sucesión  $\{n^{(-1)^{n+1}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente pero la sucesión de las medias geométricas converge a uno.

Los dos siguientes resultados son usados para aplicaciones prácticas.

**Corolario 1.31.** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales.

1. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = L$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = L$ , donde  $L \in \mathbb{R}$ .

$$2. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

$$3. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = -\infty, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty.$$

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Corolario 1.32.** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales tales que  $a_n > 0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

$$1. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \text{ donde } L \in \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty.$$

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Ejemplo 122.** Determinar el límite de las sucesión  $\{\sqrt[n]{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Aplicando el inciso 1. del Corolario 1.32 se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = 1$$

en consecuencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . □

**Ejemplo 123.** Determinar el límite de las sucesión  $\{\sqrt[n]{n!}\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Aplicando el inciso 2. del Corolario 1.32 se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

en consecuencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ . □

A lo largo de este capítulo trabajamos únicamente con límites numéricos y en el Capítulo 3 integraremos a los límites de funciones. Por lo que describiremos la diferencia entre los límites numéricos y los límites de funciones, en matemáticas en lo que cada uno está intentando describir o aproximar, aunque ambos conceptos comparten la idea fundamental de límite. Aquí te explico la diferencia:

### 1. Límites numéricos:

- a) **Concepto:** Los límites numéricos se refieren generalmente a los límites de sucesiones numéricas. Una sucesión numérica es una lista ordenada de números que puede, por ejemplo, acercarse cada vez más a un cierto valor.
- b) Los límites numéricos generalmente se refieren a la aproximación de un valor numérico específico que resulta de una sucesión o serie numérica. Estos límites se centran en encontrar el valor al que se acerca una secuencia de números reales conforme el índice de la secuencia (a menudo denotado por  $n$ ) tiende hacia el infinito. Un ejemplo clásico es

- c) Considera la sucesión  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ . El límite numérico de esta sucesión es 0, porque los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeños y se acercan a 0 a medida que avanzamos en la sucesión.
- d) Imagina que estás comiendo galletas. Primero comes una galleta entera, luego la mitad de una galleta, después un cuarto de galleta, y así sucesivamente, comiendo siempre la mitad de la galleta anterior. Cada vez te comes una porción más pequeña. Si seguimos así, las porciones de galleta que comes se hacen tan, tan pequeñas que casi no se pueden ver. En matemáticas, decimos que la cantidad de galleta que comes se acerca a cero. Eso es un límite numérico: es como ver cuán pequeñas se hacen las porciones de galleta.
- e) **Enfoque:** El enfoque está en la convergencia de una lista específica de números hacia un valor límite.

## 2. Límites de funciones:

- a) **Concepto:** Los límites de funciones se ocupan de cómo se comporta una función a medida que su variable independiente se acerca a un cierto valor. No se trata sólo de una sucesión de valores, sino de la relación entre dos variables.
- b) Los límites de funciones, por otro lado, se ocupan de entender el comportamiento de una función  $f(x)$  a medida que su argumento  $x$  se acerca a un valor particular o al infinito. Aquí, el enfoque está en cómo se comporta el valor de salida de una función conforme su entrada se aproxima a cierto punto. Un aspecto crucial de los límites de funciones es la idea de límites laterales y la posibilidad de que una función se acerque a diferentes valores dependiendo de la dirección desde la cual  $x$  se aproxima al punto de interés. Un ejemplo típico es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1,$$

donde se examina el comportamiento de la función conforme  $x$  se acerca a 0.

- c) **Ejemplo:** Considere la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ . El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se acerca a 0 no existe en los números reales, ya que los valores de  $f(x)$  se vuelven arbitrariamente grandes.
- d) Ahora imagina que tienes un carrito de juguete que se mueve hacia una línea en el suelo. Cada vez que lo empujas, se detiene justo antes de la línea, pero cada vez más cerca de ella. Si sigues empujando el carrito una y otra vez, se acercará más y más a la línea, pero sin cruzarla. En matemáticas, cuando hablamos de límites de funciones, es como preguntarnos qué tan cerca puede llegar el carrito a la línea sin pasarla. No es solo un número, sino cómo se mueve algo (como el carrito) hacia un lugar o un punto.
- e) **Enfoque:** El enfoque está en el comportamiento de toda una función a medida que nos acercamos a un punto específico, no sólo en una sucesión de valores.

### 3. Diferencias:

- a) **Contexto:** Los límites numéricos se aplican a sucesiones y series de números. Los límites de funciones implican el comportamiento de una función a medida que sus entradas se acercan a un valor específico.
- b) **Aplicación:** Mientras que los límites numéricos son útiles para evaluar el comportamiento asintótico de sucesiones y series, los límites de funciones son fundamentales en el cálculo para analizar la continuidad, las derivadas, y las integrales de funciones.

Entonces, en resumen, los límites numéricos son como ver cuánto se reduce algo (como las porciones de galleta), y los límites de funciones son como ver qué tan cerca puede llegar algo a un punto o lugar específico (como el carrito acercándose a la línea). La principal diferencia radica en que los límites numéricos se centran en el comportamiento de sucesiones de números individuales, mientras que los límites de funciones se centran en el comportamiento de una relación entre dos variables a medida que una de las variables se acerca a un valor particular. Ambos conceptos son fundamentales en el cálculo y el análisis matemático, y cada uno tiene sus propias aplicaciones y significados dentro de estos campos. En los límites numéricos, el enfoque está en el valor al que tiende una sucesión de números. En los límites de funciones, el interés radica en cómo el valor de salida de una función se comporta a medida que su entrada se acerca a un punto particular, incluyendo el comportamiento en los límites laterales y en el infinito. Ambos conceptos son fundamentales en el estudio del cálculo y el análisis matemático, proporcionando herramientas esenciales para entender la convergencia, la continuidad, y el comportamiento asintótico tanto de sucesiones numéricas como de funciones matemáticas.

## 1.10. Ejercicios

1. Calcula el término que ocupa el lugar 1000 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 2 y la diferencia es 3.
2. El término octavo de una progresión aritmética es 5 y la diferencia  $\frac{1}{2}$ . Halla el primer término y el término 100.
3. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 2.
4. Calcula la suma de los múltiplos de 42 comprendidos entre 1000 y 2000.
5. La suma de 16 números en progresión aritmética es 548 y el término 16 es 60.5. Halla el primer término.
6. El producto de 4 términos en progresión geométrica es 5184 y el primer término es 3. Escribe el resto de los términos.

7. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 700 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 30 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?
8. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.
9. Halla  $x$  para que  $x - 1$ ,  $x + 1$ ,  $2(x + 1)$  estén en progresión geométrica.
10. A una cuerda de 350 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 50 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.
11. Halla la fracción generatriz del número decimal  $0.12121212\dots$ , como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada. Se tiene una cuba de vino que contiene 512 litros. El 1 de diciembre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 15 de diciembre?
12. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.
13. Triángulo de Sierpinski: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de Sierpinski, y es un fractal.
- a) Imagina que el primer triángulo tiene un área  $A$ . Cuando aplicamos la primera iteración, el área es  $\left(\frac{3}{4}\right)A$ . ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente?
- b) Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es  $L$ . Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?
14. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:
- a)  $a_n = \frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}$ ,
- b)  $a_n = \frac{5n^2 - 4}{n^2 - 6n}$ ,
- c)  $a_n = \frac{5n^{10} + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$ ,
- d)  $a_n = \frac{n - 3}{n + 7}$ ,

$$e) a_n = \frac{2n^2 + 2n}{2n^3 - 6}$$

$$f) a_n = \frac{5n - 4}{n^2 - 6n}$$

$$g) a_n = \frac{5n^7 + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$$

$$h) a_n = \frac{-3}{n + 7}$$

$$i) a_n = \frac{2n^5 + 2n}{2n^3 - 6}$$

$$j) a_n = \frac{5n^7 - 4}{n^2 - 6n}$$

$$k) a_n = \frac{5n^{12} + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$$

$$l) a_n = \frac{n^2 - 3}{n + 7}$$

$$m) a_n = \frac{\sqrt{2n^5 + 2n}}{2n^3 - 6}$$

$$n) a_n = \frac{5n^7 - 4}{\sqrt{n^2 - 6n}}$$

$$\tilde{n}) a_n = \frac{\sqrt{n^{12} + 2n^2}}{3n^{10} + 8n}$$

$$o) a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3}}{n + 7}$$

### Exponencial y logarítmica

15. La población de peces de una piscifactoría sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 100 ejemplares a 1500 en 60 días. ¿Qué población tendrá en 100 días?
16. Ingresamos en un banco 20000 euros al 3% de interés compuesto anual. ¿En cuánto tiempo habremos duplicado nuestro dinero?
17. Vanesa ha comprado un coche por 17000 euros. Se estima que el precio se devalúa un 10% cada año. ¿A cuánto lo podrá vender al cabo de 5 años? Si tiene un accidente en que el coche queda destrozado cuando tiene 7 años, ¿cuánto le pagará la compañía de seguros?
18. La escala de Richter relaciona la intensidad de un terremoto,  $x$ , con su energía  $y$  (en ergios):  $\log y = 11.4 + 1.5x$ . Calcula la energía de un terremoto:  $a)$  de una intensidad 5 en dicha escala, y  $b)$  de una intensidad 7.

19. Juan ha visto cucarachas en su casa. Mira de qué tipo es y se entera que se triplican cada mes siguiendo un modelo exponencial. Estima que en este momento podría tener 20. Si no hiciera nada, ¿cuántas tendría al cabo de 5 meses?
20. En la fórmula del término  $n$ -ésimo de una progresión geométrica, despeja  $n$ , aplicando logaritmos.
21. Nieves tiene un gran frasco de perfume muy concentrado de un litro. Saca con una pipeta  $10 \text{ cm}^3$  que sustituye con agua. Vuelve a sacar de la mezcla con una pipeta  $10 \text{ cm}^3$  que vuelve a sustituir con agua. Así hasta conseguir una mezcla con el 75 % de la inicial. ¿Cuántas operaciones ha debido hacer?
22. Resuelve, tomando logaritmos, la ecuación exponencial:  $(0.99)^n = 0.75$ .
23. Utiliza la calculadora para estimar el valor de  $263$ . Estima también  $264 - 1$ .
24. Resuelve las ecuaciones:
- $3^{2x-4} = 81$ .
  - $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5}$ .
  - $x^{-1}\sqrt[8]{8} = 2$ .
  - $3^{\frac{1}{5}x} = 27$ .
25. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica:  $a_n = 7 \cdot 4n - 1$ ? a) 7 b) 4 c) -1 d) No es una progresión geométrica.
26. En la sucesión de múltiplos de 11, el 121 ocupa el lugar: a) 1. b) 2. c) 11. d) 121.
27. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20, ... es: a) 220. b) 275. c) 55. d) 250.
28. La sucesión  $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$
- Es una progresión geométrica de razón 5.
  - Es una progresión aritmética de diferencia 5.
  - Es una progresión geométrica de razón  $\frac{1}{5}$ .
  - Es una progresión aritmética de diferencia  $\frac{1}{5}$ .
29. La solución de la ecuación  $5^{\frac{1}{5}x} = 625$  es: a) 40, b) 8, c) 10, d) 20.
30. La progresión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia 5, tiene como término general: a)  $a_n = 5n$ , b)  $a_n = 5n + 2$ , c)  $a_n = 5n - 1$ , d)  $a_n = 5n - 2$ .

31. Hilbert está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 5 días?  
a) 62, b) 32, c) 1024, d) 128.
32. A Luis le han tocado 6000€ en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4%. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?  
a) 6240€, b) 6104€, c) 7832.04€, d) 7299.92€.
33. La sucesión  $a_n = \frac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$  tiene como límite: a) 0, b)  $\infty$ , c)  $-\frac{3}{2}$ , d) 7.
34. La sucesión  $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$  tiene como límite: a)  $e^2$ , b)  $\infty$ , c)  $e^{-2}$ , d)  $-e$ .



## Capítulo 2

# Conocimientos básicos sobre series

Por lo general, hasta antes de llegar a este punto, siempre hemos tratado con la operación de suma relacionada a un conjunto finito de números. Empleando la teoría de la sección anterior ampliaremos el concepto de suma a una infinidad de números y esto nos conducirá a definir el significado de suma en un sentido más amplio. En este tema abordamos el estudio de otra noción fundamental en Análisis Matemático, la convergencia de series de números reales. De hecho, el concepto no es nuevo, pues veremos que una serie no es más que una sucesión definida de forma muy concreta a partir de otra, pero ocurre también que cualquier sucesión puede verse como una serie. Por tanto, al estudiar las series no hacemos otra cosa que estudiar la convergencia de sucesiones, sólo que desde un punto de vista diferente. El interés de este nuevo punto de vista consiste en que intentamos dar sentido a la idea intuitiva de “sumar todos los términos” de una sucesión. Parte de nuestro trabajo consistirá precisamente en comprender hasta qué punto la teoría que vamos a desarrollar responde a esa idea intuitiva.

Veamos la diferencia entre una serie numérica y una serie de funciones:

### 2.0.1. Series numéricas

Imagina que tienes una torre de bloques de construcción. Cada bloque representa un número. Si pones un bloque encima de otro, y luego otro, y sigues añadiendo más bloques, estás haciendo lo que en matemáticas llamamos una serie numérica. Es como sumar números uno tras otro. A veces, si sigues sumando sin parar, puedes llegar tan alto que no tiene fin, eso es cuando una serie numérica no tiene un límite. Pero otras veces, puedes sumar y sumar y, sin embargo, no pasas de cierta altura, eso es cuando una serie numérica tiene un límite o converge.

### 2.0.2. Series de funciones

Ahora imagina que en lugar de bloques, tienes cajas de música. Cada caja de música toca una melodía diferente cuando la abres. Si abres una caja de música, luego otra, y otra, y cada vez que abres una nueva caja, la melodía cambia un poco, eso es como una serie de funciones. En matemáticas, en lugar de melodías, tenemos funciones (que son como reglas especiales que nos dicen qué hacer con los números). Cuando sumamos estas

funciones, estamos combinando sus reglas para ver qué nueva regla o patrón obtenemos. A veces, todas estas funciones juntas pueden crear un patrón claro y definido, eso es cuando una serie de funciones converge o tiene un límite.

Entonces, una serie numérica es como sumar números uno tras otro, como apilar bloques, y ver qué tan alto llega la torre. Una serie de funciones es como sumar diferentes reglas o patrones, como combinar melodías de cajas de música, para ver qué patrón mayor se forma al final. En matemáticas, existen varios tipos de series, cada una con sus características y aplicaciones. Aquí te presento algunos de los tipos más comunes:

**Ejemplo 124** (Series aritméticas). Estas series se forman sumando una constante a cada término para obtener el siguiente. Por ejemplo, en la serie  $2, 4, 6, 8, \dots$ , cada término se obtiene sumando 2 al término anterior.

**Ejemplo 125** (Series geométricas). En una serie geométrica, cada término se obtiene multiplicando una constante por el término anterior. Un ejemplo es  $2, 4, 8, 16, \dots$ , donde cada término se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

**Ejemplo 126** (Series armónicas). Estas series se forman a partir de los inversos de los números enteros positivos. Por ejemplo, la serie armónica es  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ , y así sucesivamente.

**Ejemplo 127** (Series de potencias). Una serie de potencias es una serie donde cada término es una potencia de una variable, generalmente multiplicada por un coeficiente. Un ejemplo clásico es la serie de Taylor, que se usa para aproximar funciones.

**Ejemplo 128** (Series de Fourier). Las series de Fourier descomponen una función periódica en una suma infinita de senos y cosenos. Son muy útiles en ingeniería y física, especialmente en el análisis de señales y sistemas.

**Ejemplo 129** (Series alternadas). Son series donde los signos de los términos alternan entre positivo y negativo. Por ejemplo, la serie  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  es una serie alternada.

### 2.0.3. Series convergentes y divergentes

1. Una serie convergente es una serie cuya suma se acerca a un límite finito. Por ejemplo, la suma de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  converge a 1.
2. Una serie divergente es una serie cuya suma no se acerca a un límite finito. Un ejemplo es la serie armónica, que diverge a medida que se suman más términos.

### 2.0.4. Series condicionalmente convergentes

Estas son series que convergen solo bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, una serie alternada puede ser condicionalmente convergente, dependiendo de cómo se comporten los términos. Cada tipo de serie tiene su propio conjunto de reglas y características, y su

estudio es una parte fundamental del análisis matemático y tiene numerosas aplicaciones en ciencias, ingeniería y otros campos.

La diferencia entre una serie numérica y una serie de funciones radica en los elementos que componen cada serie y en lo que se busca al sumar estos elementos:

### 2.0.5. Series numérica

1. **Elementos:** Una serie numérica está formada por números. Cada término de la serie es un número real o complejo.
2. **Estructura:** Se presenta como una suma de términos numéricos, como  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  donde cada  $a_i$  es un número.
3. **Objetivo:** El objetivo principal al estudiar una serie numérica es determinar si converge o diverge. Converge si la suma de todos sus términos tiende a un valor finito; diverge si no se asienta en ningún valor finito.

**Ejemplo 130.** La serie  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  es una serie numérica que converge a 2.

### 2.0.6. Series de funciones

1. **Elementos:** Una serie de funciones está compuesta por funciones en lugar de números. Cada término de la serie es una función.
2. **Estructura:** Se ve como una suma de funciones, como  $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$ , donde cada  $f_i(x)$  es una función de una variable  $x$ .
3. **Objetivo:** Al estudiar series de funciones, el objetivo es determinar la convergencia de la serie en diferentes puntos o intervalos y, en algunos casos, encontrar una función que represente la suma de la serie. Además, se estudia el tipo de convergencia (punto a punto, uniforme, etc.).

**Ejemplo 131.** La serie de funciones

$$\text{sen}(x) + \frac{\text{sen}(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \dots,$$

y uno podría estar interesado en saber si esta serie converge a una función específica para valores de  $x$ .

En resumen, la diferencia clave es que una serie numérica suma números para llegar a un valor numérico (si converge), mientras que una serie de funciones suma funciones para llegar potencialmente a una función que describe el comportamiento de la suma en diferentes puntos. Ambos tipos de series son fundamentales en diferentes áreas de las matemáticas y tienen aplicaciones en física, ingeniería, y otras ciencias. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. La estructura algebraica del conjunto  $\mathbb{R}$  permite adicionar toda colección finita de números reales.

### 2.0.7. Diferencia entre una serie numérica y una serie de funciones

**Serie numérica:** Imagina que tienes una torre de bloques de construcción. Cada bloque representa un número. Si pones un bloque encima de otro, y luego otro, y sigues añadiendo más bloques, estás haciendo lo que en matemáticas llamamos una serie numérica. Es como sumar números uno tras otro. A veces, si sigues sumando sin parar, puedes llegar tan alto que no tiene fin, eso es cuando una serie numérica no tiene un límite. Pero otras veces, puedes sumar y sumar y, sin embargo, no pasas de cierta altura, eso es cuando una serie numérica tiene un límite o converge.

**Serie de funciones:** Ahora imagina que en lugar de bloques, tienes cajas de música. Cada caja de música toca una melodía diferente cuando la abres. Si abres una caja de música, luego otra, y otra, y cada vez que abres una nueva caja, la melodía cambia un poco, eso es como una serie de funciones. En matemáticas, en lugar de melodías, tenemos funciones (que son como reglas especiales que nos dicen qué hacer con los números). Cuando sumamos estas funciones, estamos combinando sus reglas para ver qué nueva regla o patrón obtenemos. A veces, todas estas funciones juntas pueden crear un patrón claro y definido, eso es cuando una serie de funciones converge o tiene un límite.

Entonces, una serie numérica es como sumar números uno tras otro, como apilar bloques, y ver qué tan alto llega la torre. Una serie de funciones es como sumar diferentes reglas o patrones, como combinar melodías de cajas de música, para ver qué patrón mayor se forma al final.

Una expresión tal como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{30}$$

recibe el nombre de **serie finita**. La **suma** de tal serie se obtiene sumando los 30 elementos.

Si  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  es una sucesión infinita, entonces una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

recibe el nombre de **serie infinita** o simplemente **serie**.

Para definir el concepto de **suma** para una serie infinita, debemos considerar las **sumas parciales** de la sucesión dada, puesto que ya hemos mencionado que la suma de una infinidad de números nunca ha sido definida, o en otras palabras, únicamente se puede sumar algebraicamente sumas finitas. Es un hecho comprobado de que la sumas infinitas pueden definirse en términos de estas sumas parciales, las cuales se determinan de la siguiente forma:

Dada la serie infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

la expresión

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

recibe el nombre de  $n$ -ésima **suma parcial**  $S_n$  de la serie. Esto es

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene cada suma parcial con un número finito de sumas.

La sucesión infinita

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots \quad (2.1)$$

se le conoce como **sucesión de sumas parciales** asociada a la serie infinita y que podemos representar como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (2.2)$$

**Ejemplo 132.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  denota la sucesión  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ , donde

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

**Definición 2.0.1.** Dada la serie (2.2) con la sucesión de sumas parciales (2.1) definimos la **suma de la serie** como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

siempre que exista.

Empleando el símbolo  $\sum$  para la suma, se puede escribir lo anterior como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Si no existe el límite, entonces no está definida la suma.

Por lo tanto, estudiar series y estudiar sucesiones es lógicamente lo mismo. La distinción se mantiene por razones prácticas.

Ahora ya se está en condiciones de escribir una definición formal.

**Definición 2.0.2.** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie infinita dada y  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de sumas parciales que define esta serie infinita. Entonces si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe y es igual a  $S$ , se dice que la serie dada es **convergente** y que  $S$  es la **suma** de tal serie. Si el límite no existe, se dice que la serie dada es **divergente** y la serie no tiene una suma.

Para aclarar este concepto analice lo siguiente: Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una serie convergente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , entonces  $S$  recibe el nombre de **suma** de la serie y podemos expresar esto como

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Si la serie diverge, entonces no tiene suma. Las series geométricas tienen muchas aplicaciones importantes. Por ejemplo: Los núcleos de un isótopo radiactivo tienen un decaimiento de forma aleatoria. Como resultado de núcleos que se desintegran en un determinado período de tiempo el número puede ser descrito por una serie geométrica. En esta aplicación se utiliza serie geométrica para ver la desintegración radiactiva. La serie geométrica nos puede ayudar a analizar los beneficios relativos de dos estrategias diferentes para el tenis y otros juegos similares - una estrategia agresiva y una estrategia más conservadora. Ejemplo: Banqueros, empresarios y los consumidores necesitan ser capaces de trabajar con los ingresos y los gastos.

**Ejemplo 133** (Serie geométrica). Sea  $a, r \in \mathbb{R}$ . Si  $|r| < 1$ , la **serie geométrica**  $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$  es convergente cuya suma es el número real.  $a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ , donde  $S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, tenemos que la serie geométrica es de la forma  $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$  donde  $a$  y  $r$  son números reales y  $a \neq 0$ . Las sumas parciales de la serie geométrica son

$$\begin{aligned} S_1 &= a \\ S_2 &= a + ar \\ S_3 &= a + ar + r^2 \\ &\vdots \\ S_n &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \end{aligned}$$

de la identidad  $1 - r^n = (1 + r + \cdots + r^{n-1})(1 - r)$  la cual es válida (basta efectuar la multiplicación) se tiene que

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ si } r \neq 1.$$

En sucesiones demostramos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$  siempre que  $|r| < 1$ . Luego tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}, \text{ de donde se prueba que la serie geométrica converge y su suma es } \frac{a}{1 - r}, \text{ es decir, } \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

**Ejemplo 134.** La serie infinita  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$  es divergente. En efecto, sea la sucesión de sumas parciales:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \\ &\vdots \quad \dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n \end{aligned}$$

en consecuencia  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ .

**Ejemplo 135.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  no tiene límite. En efecto, sea

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \quad \vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned}$$

obtenemos  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de sumas parciales en consecuencia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  no existe.

Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie convergente cuya suma es  $s$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $r_n = s - S_n$ ,  $r_n$  se

llama el **resto**(o **residuo**) de la serie después de  $n$  términos y se denota por  $r_n =: \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Se cumple:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ .

**Proposición 2.1.** 1. Si la serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente, entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

*El resultado inverso no es válido.*

2. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es divergente.

*Demostración.* Probaremos el inciso 1. Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de sumas parciales de la serie.  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ , las relaciones  $a_n = S_n - S_{n-1}$  para todo  $n \geq 2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = s \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = s$$

implican  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . El inciso 2. se deja como ejercicio al lector.  $\square$

**Ejemplo 136.** La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  no es convergente. En efecto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$  implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ . El inciso 1. de la Proposición 2.1 implica que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  no es convergente.

**Ejemplo 137** (Serie estándar). La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  no es convergente.

*Demostración.* En efecto, sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La sucesión de sumas parciales. La subsucesión  $\{S_{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cumple la relación:  $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Demostremos esta afirmación por inducción.  $S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}$ . Supongamos que  $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ . Entonces  $S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \left[1 + \frac{n}{2}\right] + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ . Luego  $S_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$ . Aplicando la Proposición 1.28, inciso 6.:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = +\infty$  implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2^n} = +\infty$ . Así pues  $\{S_{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente, luego  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente. Por lo tanto  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  no es convergente.  $\square$

Observemos que la serie no convergente  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  cumple la relación  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Entonces el recíproco de la Proposición 2.1 inciso 1. es falso. Por lo tanto, no es suficiente probar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  para demostrar la convergencia de una serie infinita.

**Ejemplo 138** (Serie geométrica). Sea  $a, r \in \mathbb{R}$ . Si  $a \neq 0$  y  $|r| \geq 1$ , la **serie geométrica**  $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$  no es convergente.

*Demostración.* En efecto, si  $r = 1$ , entonces  $S_n = a + a + \dots + a = na$  y la serie diverge puesto que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  no existe. Si  $r = -1$  la serie geométrica que se tiene es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a1^{n-1} = a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$$

de donde

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ a & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  no existe. Lo cual implica que la serie geométrica diverge cuando  $|r| = 1$ . Si  $|r| > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ar^{n-1} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n-1}.$$

El  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n-1}$  siempre es diferente de cero, entonces por el inciso 2. de la Proposición 2.1 tenemos que la serie es divergente dado que  $|r| > 1$ .  $\square$

**Ejemplo 139.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$  es convergente. En efecto, se tiene que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$  es geométrica donde  $a = 1$  y  $r = \frac{1}{2}$  la serie converge a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .

**Ejemplo 140.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$  es convergente. En efecto, se tiene que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$  es geométrica donde  $a = 1$  y  $r = \frac{1}{3}$  la serie converge a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

**Ejemplo 141.** La serie infinita  $\frac{5}{9} + \frac{5}{9^2} + \frac{5}{9^3} + \cdots + \frac{5}{9^n} + \cdots$  es convergente. En efecto, se tiene que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{9^n} = \frac{5}{9} + \frac{5}{9^2} + \frac{5}{9^3} + \cdots + \frac{5}{9^n} + \cdots$  es geométrica donde  $a = 5$  y  $r = \frac{1}{9}$  la serie converge a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{9^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{9}} = \frac{5}{\frac{8}{9}} = \frac{45}{8}.$$

**Ejemplo 142.** La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5^{n-1}} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 3 \left( 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \cdots \right)$$

es convergente. En efecto, se tiene que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5^{n-1}}$  es geométrica donde  $a = 3$  y  $r = \frac{1}{5}$  la serie converge a

$$3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = a \frac{1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = \frac{15}{4}.$$

**Observación 13.** Puesto que

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

y

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

tenemos la fórmula  $S_n = S_{n-1} + a_n$ .

**Observación 14.** *En algunos casos se tiene que a partir de cierto  $k$ , todos los términos son iguales a cero, por lo tanto se tendrá una suma ordinaria de un número finito de términos, esto es, una serie finita. En consecuencia, la suma de un serie infinita es una generalización de esta suma cuando el número de términos es infinito, sin embargo existe una diferencia importante entre la suma de un número finito de términos y la suma de un número infinito de ellos y ella es que en los primeros es posible efectuar tal suma y en los segundos no siempre es posible determinar una expresión para  $S_n$ . Posteriormente veremos algunos métodos o criterios para determinar si una serie infinita tiene una suma o no o, al menos conocer si tal serie es convergente o divergente.*

La diferencia entre resolver una serie y sumar de manera cotidiana se puede entender explorando la naturaleza de cada proceso y sus aplicaciones. Aquí te detallo las diferencias clave:

### Concepto y naturaleza

1. **Sumar de manera cotidiana** se refiere a la operación básica de aritmética en la que se añaden dos o más números para obtener un total. Es una de las primeras habilidades matemáticas que aprendemos y se aplica en situaciones diarias, como calcular cuánto gastamos en compras, contar objetos, o determinar el tiempo total invertido en varias actividades.
2. **Hacer una serie**, en el contexto matemático, implica sumar los términos de una sucesión de números que siguen una regla o patrón específico. Las series pueden ser finitas (cuando la sucesión tiene un número determinado de términos) o infinitas (cuando la sucesión continúa sin fin). Las series se utilizan para representar y analizar conceptos más avanzados en matemáticas, como series geométricas, series armónicas, o para sumar infinitos términos bajo ciertos criterios de convergencia.

### Aplicación y uso

1. **Sumar de manera cotidiana** se usa en tareas simples y directas. No requiere de conocimientos matemáticos avanzados y es fundamental para la vida diaria.
2. **Hacer una serie** se emplea en contextos más complejos y especializados. Las series son fundamentales en el estudio del cálculo, análisis matemático, física, y otras disciplinas científicas para resolver problemas que involucran patrones recurrentes o para modelar fenómenos naturales y procesos. Por ejemplo, las series de Fourier se utilizan para analizar señales periódicas en ingeniería y física.

### Complejidad

1. **Sumar de manera cotidiana** es conceptualmente más simple. Involucra números concretos y situaciones claras y definidas.
2. **Hacer una serie** requiere una comprensión más profunda de los principios matemáticos. Implica reconocer patrones, entender la convergencia de series infinitas, y aplicar teorías específicas para sumar términos de manera efectiva.

**Ejemplo 143** (Sumar de manera cotidiana). Calcular el total de una factura, contar cuántas manzanas hay en dos bolsas, o sumar las horas trabajadas en una semana.

**Ejemplo 144** (Hacer una serie). Calcular el valor de  $e$  usando la serie de Taylor, sumar una serie geométrica para encontrar el valor de una inversión a largo plazo, o usar series para calcular la suma de probabilidades en eventos dependientes.

Por lo que, la principal diferencia entre hacer una serie y sumar de manera cotidiana radica en la complejidad, aplicación, y el conocimiento matemático requerido. Sumar es una habilidad fundamental usada en la vida diaria, mientras que hacer una serie es una operación matemática avanzada que se aplica en contextos específicos para analizar patrones, modelar fenómenos complejos, y resolver problemas matemáticos y científicos sofisticados.

La diferencia entre resolver una serie y sumar de manera cotidiana son conceptos matemáticos que, aunque relacionados, tienen diferencias fundamentales en sus aplicaciones, propiedades y en los contextos en los que se utilizan. Aquí te doy ejemplos que ilustran estas diferencias:

### 2.0.8. Definición y proceso

1. **Sumar de manera cotidiana** implica la acción de añadir dos o más números para obtener un total. Es una operación básica de la aritmética.
2. **Hacer una serie** se refiere a sumar los términos de una sucesión de números, que pueden seguir una regla específica o patrón. La serie puede ser finita o infinita.

### 2.0.9. Aplicación y uso

1. **Sumar de manera cotidiana** se usa en cálculos sencillos del día a día, como calcular el total de una cuenta o sumar cantidades.
2. **Hacer una serie** se emplea en contextos más complejos como en matemáticas avanzadas, física, y otras ciencias para resolver problemas que involucran patrones o sucesiones numéricas.

### Propiedades matemáticas

1. **Sumar de manera cotidiana** de números tiene propiedades como la conmutativa y la asociativa, que permiten cambiar el orden de los sumandos sin afectar el resultado.
2. **Hacer una serie**, especialmente las infinitas, requieren de criterios de convergencia para determinar si tienen un valor finito. No siempre se pueden aplicar las mismas propiedades que en la suma simple.

### Comprensión conceptual

1. **Sumar de manera cotidiana** es un concepto que se aprende en los primeros años de educación, dada su simplicidad y aplicación directa.
2. **Hacer una serie** requiere un conocimiento más avanzado de matemáticas, incluyendo el análisis matemático y la comprensión de límites y convergencia.

### Herramientas para resolverlas

1. **Sumar de manera cotidiana**, a menudo basta con usar una calculadora básica o realizar el cálculo mentalmente.
2. **Hacer una serie**, especialmente las infinitas o las que siguen patrones complejos, se pueden requerir métodos específicos de sumación, programas informáticos o conocimientos de cálculo diferencial e integral.

### Ejemplos y contextos

1. **Sumar de manera cotidiana** se ve en ejemplos como sumar el costo de varios productos para obtener un total a pagar.
2. **Hacer una serie** puede observarse en el cálculo del valor de  $e$  (la base del logaritmo natural) a través de la serie de Taylor, o en física al sumar las fuerzas en una serie de partículas para determinar la fuerza neta.

Estos ejemplos destacan las diferencias entre la suma de números en situaciones cotidianas y el proceso más complejo y matemáticamente profundo de construir y analizar series. Las series permiten explorar conceptos que van más allá de la simple adición, abarcando ideas de infinito, convergencia, y representación de funciones y fenómenos mediante secuencias numéricas.

**Ejemplo 145** (Sumar es como contar manzanas). Si tienes 2 manzanas y consigues 3 más, sumas  $2 + 3$  para saber que ahora tienes 5 manzanas. Es simplemente añadir una cantidad a otra.

**Ejemplo 146** (Hacer una serie es como construir un tren de bloques). Imagina que cada día agregas un bloque a tu tren. El primer día pones 1 bloque, el segundo día agregas otro para tener 2 bloques en total, y así sucesivamente. Si quieres saber cuántos bloques tendrás en total después de 5 días, sumarías  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ . Esto es hacer una serie porque sigues un patrón y sumas varios números.

**Ejemplo 147** (Sumar es como llenar un balde de agua). Si tienes un balde y agregas dos tazas de agua y luego tres tazas más, sumas  $2 + 3$  para encontrar cuántas tazas de agua hay en total en el balde.

**Ejemplo 148** (Hacer una serie es como sumar los pasos que das). Si das 1 paso el primer minuto, 2 pasos el segundo minuto, 3 pasos el tercer minuto, y así sucesivamente, y quieres saber cuántos pasos has dado en total después de 4 minutos, sumarías  $1 + 2 + 3 + 4$ . Estás haciendo una serie porque cada cantidad que sumas sigue una secuencia.

**Ejemplo 149** (Sumar es como juntar piezas de un rompecabezas). Si tienes 4 piezas de un lado y 5 de otro, y las juntas todas, sumas  $4 + 5$  para saber que ahora tienes 9 piezas del rompecabezas en total.

**Ejemplo 150** (Hacer una serie es como contar estrellas de forma especial). Imagina que cuentas estrellas formando patrones; la primera noche cuentas 1 estrella, la segunda noche cuentas 2 más, la tercera noche 3 más, y así sucesivamente. Para saber cuántas estrellas has contado después de varias noches, sumarías los números siguiendo el patrón.

**Ejemplo 151** (Sumar es como tener puntos en un juego). Si en un juego ganas 10 puntos y luego ganas 20 puntos más, sumas  $10 + 20$  para saber que tienes 30 puntos en total.

**Ejemplo 152** (Hacer una serie es como sumar golosinas de una forma mágica). Imagina que tienes una bolsa mágica que el primer día te da 1 golosina, el segundo día te da 2 golosinas más, el tercer día 3 golosinas más, y así sucesivamente. Para saber cuántas golosinas tendrás después de 5 días, tendrías que sumar  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ . Esto es hacer una serie porque sigues un patrón especial para sumar las golosinas.

**Ejemplo 153** (Sumar es como contar naranjas). Si tienes 4 naranjas y luego consigues 7 naranjas más, sumar te dice cuántas naranjas tienes en total ( $4 + 7 = 11$  naranjas).

**Ejemplo 154** (Hacer una serie es como sumar escalones uno tras otro). Imagina que subes una escalera y cuentas cada escalón a medida que avanzas. Si cada escalón tiene un número, hacer una serie sería sumar esos números conforme subes.

**Ejemplo 155** (Sumar es como juntar piezas de LEGO). Si tienes 4 piezas de LEGO y tu amigo te da 6 piezas más, sumar te ayuda a saber cuántas piezas tienen entre los dos.

**Ejemplo 156** (Hacer una serie es como agregar monedas en un frasco cada día). Si un día pones 1 moneda en un frasco, al siguiente día pones 2 monedas, luego 3 monedas, y así sucesivamente, hacer una serie te ayudaría a saber cuánto dinero has ahorrado después de varios días.

**Ejemplo 157** (Sumar es como sumar puntos en un juego). Si en una ronda obtienes 10 puntos y en la siguiente obtienes 20 puntos, sumar esos puntos te da el total de puntos que has ganado.

**Ejemplo 158** (Hacer una serie es como llenar un álbum de figuritas). Imagina que cada página de un álbum puede tener diferente número de figuritas. Si la primera página tiene 1 figurita, la segunda tiene 2, y así hasta la última página, hacer una serie te diría cuántas figuritas necesitas en total para completar el álbum.

**Ejemplo 159** (Sumar es como mezclar colores de pintura). Si tienes un poco de pintura roja y le añades un poco de pintura amarilla, sumar te diría cuánta pintura tienes después de mezclarlas.

**Ejemplo 160** (Hacer una serie es como seguir una receta que cambia). Imagina que estás haciendo galletas y la receta dice que cada día que haces galletas debes añadir un ingrediente más que el día anterior. Hacer una serie te ayudaría a saber cuántos ingredientes diferentes habrás usado después de varios días.

Estos ejemplos están diseñados para hacer comprensibles los conceptos de suma y series, utilizando situaciones familiares y divertidas que puedan captar su interés y comprensión. Estos ejemplos están diseñados para hacer la distinción entre sumar (una operación simple) y hacer una serie (sumar siguiendo un patrón o sucesión) más accesible y comprensible, utilizando situaciones y objetos con los que puedan estar familiarizados o encuentren interesantes.

Observe que son la estructura algebraica y el orden del conjunto  $\mathbb{R}$  los que permiten la presencia de límite en sucesiones de números reales, es decir, la adición de la infinidad de términos de sucesiones. Antes de analizar algunos criterios de convergencia se considera pertinente ver los siguientes:

**Ejemplo 161.** Escribe los términos de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

*Demostración.*  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$  □

**Ejemplo 162.** Escribe los términos de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^2}$ .

*Demostración.*  $\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{(-1)^n}{(n+2)^2} + \dots$  □

**Ejemplo 163.** Escribe los términos de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 5n + 6}{6(n!)}$ , donde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .

*Demostración.*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{2n^2 - 5n + 6}{6(n!)} + \dots$  □

**Ejemplo 164.** Dada la serie  $\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \dots + \frac{6}{10^n} + \dots$  obtener los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales.

*Demostración.* Esta serie también puede escribirse como

$$0.6 + 0.66 + 0.666 + 0.6666 + 0.66666 + \dots + \frac{6}{10^n} + \dots$$

por lo tanto

$$S_1 = a_1 = 0.6$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 0.6 + 0.66$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0.6 + 0.66 + 0.666$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.6 + 0.66 + 0.666 + 0.6666$$

□

**Ejemplo 165.** Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

converge y determinar su suma.

*Demostración.* Por el método de fracciones parciales podemos descomponer  $a_n$  en dos fracciones, las cuales son

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

por lo tanto, la  $n$ -ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

simplificando  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$  por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

lo cual demuestra que la serie infinita converge y su suma es 1. Se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1$$

□

**Ejemplo 166.** ¿La serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{7n+3}$  es convergente o divergente?

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{7n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{7 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{7} \neq 0$  se emplea el resultado 2 de

la página 73, en consecuencia la serie es divergente. □

**Ejemplo 167.** Probar que la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} 5(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$  no tiene límite.

*Demostración.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5(-1)^{n+1}$  este límite no existe, en consecuencia la serie es divergente. □

**Proposición 2.2.** Sean  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  dos series convergentes, entonces, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  es convergente y  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ . En particular, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n)$  es convergente y  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

*Demostración.* Sean  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  las sucesiones de sumas parciales de las series  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ , respectivamente. Las relaciones  $q_n = \alpha s_n + \beta t_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , y las hipótesis, implican la convergencia de  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n + \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ .  $\square$

**Observación 15.** Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , es una serie convergente y  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  es divergente, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  es divergente.

**Ejemplo 168.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{3^n} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$  converge y encuentre su suma.

*Demostración.* En efecto, la primera serie converge a 1 y la segunda es geométrica donde  $a = 5$  y  $r = \frac{1}{9}$  la serie converge a  $\frac{45}{8}$ . Por los resultados anteriores tenemos  $1 + \frac{45}{8} = \frac{53}{8}$ .  $\square$

**Ejemplo 169.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n} + \frac{3}{5^n} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5^n}$  diverge.

*Demostración.* En efecto, la primera serie es la serie armónica o estándar la cual diverge y la segunda es geométrica dado que  $a = 3$  y  $r = \frac{1}{5}$  la serie converge. Por los resultados anteriores tenemos que la serie diverge.  $\square$

**Ejemplo 170.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{7n}$  diverge.

*Demostración.* En efecto, tenemos que  $\frac{3}{7} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{7n}$  es la serie armónica o estándar  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  la cual esta multiplicada por  $c = \frac{3}{7}$ , luego en consecuencia la serie dada es divergente.  $\square$

*Nota 2.0.1.* Decir que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es **acotada** es decir que la sucesión  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada. Análogamente, que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es de **Cauchy** significa que la sucesión  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.

**Observación 16.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es de **Cauchy** si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|S_m - S_n| < \varepsilon$ , para toda  $m, n \geq N_0$  si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N_0, k \in \mathbb{N}$ .

**Observación 17.** Toda serie convergente es acotada, pero no toda serie acotada es convergente.

**Observación 18.** Una serie es convergente si y sólo si es de Cauchy.

**Observación 19.** La convergencia de una serie no depende de las propiedades de la transformación sobre ningún subconjunto finito de los naturales. Es decir, las propiedades de toda colección finita de términos de la sucesión no determina la convergencia de la misma. La descripción de esta propiedad en nuestro modelo es la siguiente:

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. Sea  $p \in \mathbb{N}$ . La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente si y sólo si  $\{a_{p+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

Además  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{p+n}$ . En el caso de series se cumple. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente si y sólo si  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p+n}$  es convergente. Además  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=1}^p a_p = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{p+k}$ , número que denotamos por  $\sum_{k=p+1}^{+\infty} a_k$ .

## 2.1. Series de términos positivos

Imagina que tienes una larga fila de hormigas, cada una cargando un pedacito de azúcar para hacer una montaña de azúcar. Cada hormiga añade su pedacito de azúcar uno tras otro, y todos los pedacitos de azúcar son importantes porque ayudan a que la montaña crezca. En este ejemplo, las hormigas y sus pedacitos de azúcar son como los números en una serie de términos positivos.

En las matemáticas, cuando hablamos de “series de términos positivos”, estamos pensando en algo parecido a nuestra fila de hormigas trabajadoras. En lugar de hormigas y azúcar, tenemos números, y todos estos números son positivos, lo que significa que son mayores que cero, como 1, 2, 3, o cualquier otro número que puedas contar hacia arriba. Estos números se suman uno tras otro, al igual que las hormigas añaden sus pedacitos de azúcar a la montaña.

Así que, una “serie de términos positivos” es simplemente una suma larga de números, donde cada número que añades es como un pedacito de azúcar más para la montaña.

Ningún número es negativo, así que nunca quitas azúcar de la montaña; solo haces que crezca más y más. Por ejemplo, si sumas  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ , cada uno de esos números (como los pedacitos de azúcar) es positivo, y estás construyendo una montaña de azúcar más grande con cada suma.

Lo especial de estas series es que, al ser todos los números positivos, sabemos que la montaña de azúcar (o la suma total) solo puede quedarse igual o crecer; nunca se hará más pequeña. Los matemáticos están muy interesados en estas series porque, dependiendo de cómo crezcan los números, pueden decirnos si nuestra montaña de azúcar puede llegar a tener una altura máxima o si podría crecer infinitamente, sin parar nunca.

En la mayoría de las series infinitas no es posible determinar una fórmula para  $S_n$  y por ello no podemos emplear la definición de convergencia o divergencia que ya hemos tratado.

Ahora desarrollaremos algunos criterios que nos permitirán saber si una serie es convergente o divergente por medio del análisis del  $n$ -ésimo término  $a_n$ . Cabe aclarar que estos criterios nos ofrecen información acerca de si la serie converge o diverge, pero no acerca de la suma y además son aplicables únicamente a las series con términos positivos, esto es, tendremos que  $a_n \geq 0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Posteriormente discutiremos algunos criterios para series con términos en los cuales no necesariamente tienen que ser positivos.

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es una **Serie de Términos Positivos** si  $a_n \geq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposición 2.3.** *Una serie de términos positivos es convergente si y sólo si es acotada.*

*Demostración.* La sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de una serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es una sucesión creciente. Aplicando el Teorema 1.22, la sucesión  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es

convergente si y sólo si es acotada, es decir,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente si y sólo si es acotado. □

Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos. Que la serie no sea acotada significa que la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada. La Proposición 1.28 implica

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$ . En este caso decimos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  **Diverge a**  $+\infty$  y escribimos  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ .

La utilidad que presenta este criterio es mínima puesto que decidir si  $S_n$  es o no acotado, es precisamente nuestro gran problema. Sin embargo este criterio se vuelve importante cuando se tienen series convergentes conocidas y podemos hacer comparaciones con las que pretendemos analizar. De estas consideraciones se desprende el siguiente teorema el cuál es uno de los más útiles para decidir la convergencia o divergencia de una serie dada.

**Teorema 2.4** (Principio de comparación). *Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  dos series de términos positivos. Supongamos que existe  $M > 0$  tal que  $a_n \leq Mb_n$ , para casi todo  $n$  excepto un*

número finito de elementos. Entonces, la convergencia de  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  implica la convergencia de  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  y la divergencia a  $+\infty$  de  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  implica la divergencia a  $+\infty$  de  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ .

*Demostración.* La hipótesis  $a_n \leq Mb_n$ , para casi todo  $n$  excepto un número finito de elementos, implica que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \leq Mb_n$ , para toda  $n \geq p$ . Consideramos las series de términos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p+n}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_{p+n}$ . Se cumple:  $a_{p+n} \leq Mb_{p+n}$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces las sucesiones de sumas parciales  $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de las series  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p+n}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_{p+n}$  son crecientes y satisfacen la relación  $S'_n \leq Mt'_n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto: La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  convergente implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_{p+n}$  convergente implica  $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente implica  $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  acotada implica  $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  acotada implica  $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p+n}$  convergente implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  convergente.

Luego  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  convergente implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  convergente.

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es divergente a  $+\infty$  implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  no es convergente implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p+n}$  no es convergente implica  $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es convergente implica  $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada implica  $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty$

Ahora sea  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de sumas parciales de  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ . Se cumple  $t'_n = t_{p+n} - t_p$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty$  si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{p+n} = +\infty$  si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  si y sólo si  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ . Luego  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$  implica  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ .  $\square$

En particular hemos demostrado:

**Corolario 2.5.** Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos y sea  $p \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$  si y sólo si  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{p+n}$  diverge a  $+\infty$ .

Una consecuencia del Teorema 2.4 es el siguiente

**Corolario 2.6** (Principio de comparación en su forma de límite). Sean  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  dos series de términos positivos. Supongamos que la sucesión  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea

$t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ . Si  $t > 0$ , entonces ó ambas series son convergentes o ó ambas series son divergentes y divergen a  $+\infty$ .

*Demostración.* Existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\left| \frac{a_n}{b_n} - t \right| < \frac{t}{2}$ , para toda  $n \geq p$ .

Se cumple  $\left| \frac{a_n}{b_n} - t \right| < \frac{t}{2}$  de donde  $-\frac{t}{2} < \frac{a_n}{b_n} - t < \frac{t}{2}$  se tiene  $\frac{t}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3t}{2}$  luego  $b_n < \frac{2}{t}a_n$  y  $a_n < \frac{3t}{2}b_n$ .

Por lo tanto,  $b_n < \frac{2}{t}a_n$  y  $a_n < \frac{3t}{2}b_n$  para toda  $n \geq p$ . El Teorema 2.4 implica que ambas series son convergentes ó ambas series divergen a  $+\infty$ .  $\square$

**Ejemplo 171.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n^2+n+1}$  diverge a  $+\infty$ .

*Demostración.* En efecto, comparemos esta serie con la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  (la razón es que  $\frac{2n}{3n^2+n+1}$  es de “orden”  $\frac{1}{n}$ ) Primero, aplicando el principio de comparación. Se cumple:

$\frac{2n}{3n^2+n+1} \geq \frac{2n}{3n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$  para toda  $n \geq 1$ . Luego  $\frac{1}{n} \leq 2 \frac{2n}{3n^2+n+1}$  para toda  $n \geq 1$ .

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge a  $+\infty$ . Entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n^2+n+1}$  diverge a  $+\infty$ .

Ahora, aplicando el principio de comparación en su forma de límite. Se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2n}{3n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{3n^2+n+1} = \frac{2}{3} > 0.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge a  $+\infty$ . Entonces ambas series  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n^2+n+1}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge a  $+\infty$ .  $\square$

En el siguiente resultado establecemos la convergencia y la divergencia a  $+\infty$  de una colección de series que se utilizan como modelos para aplicar el principio de comparación.

**Proposición 2.7.** Sea  $p \in \mathbb{Q}$ . La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  es convergente en el caso  $1 < p$ ; y en el

caso  $p \leq 1$  la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  diverge a  $+\infty$ .

*Demostración.* Caso  $p \leq 1$ . Se cumple la relación:  $p \leq 1$  implica  $n^p \leq n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Luego  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge a  $+\infty$ . Aplicando el principio de

comparación, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  diverge a  $+\infty$ .

Caso  $1 < p$ . Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ . La  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de números reales. Aplicando el Teorema 1.22,  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente si y sólo si es acotada. Se cumple:

$$\{S_{n+1}\} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^p} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^p}$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Dado que  $1 < p$  tenemos  $(2k)^p < (2k+1)^p$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , luego  $\frac{1}{(2k+1)^p} < \frac{1}{(2k)^p}$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

Entonces  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^p} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^p}$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

Luego  $\{S_{n+1}\} < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^p} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^p} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^p k^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} S_n$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Además,  $S_n < S_{2n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Entonces  $S_{2n+1} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} S_{2n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Luego  $S_{2n+1} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto  $0 < S_n < S_{2n+1}$  implica  $0 < S_n < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada, luego la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  es convergente.  $\square$

**Ejemplo 172.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{2^n}}{n^2}$  converge.

*Demostración.* En efecto,  $\frac{\sqrt{n} + \frac{1}{2^n}}{n^2}$  es de orden  $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ . Así pues compararemos con la serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ . Se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n} + \frac{1}{2^n}}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n} + \frac{1}{2^n})}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{2^n}}{\sqrt{n}} = 1.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  es convergente, pues  $1 < \frac{3}{2}$ . Entonces la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{1}{2^n}}{n^2}$  es convergente.  $\square$

**Ejemplo 173.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \frac{n}{10^n}}{\sqrt{n^7 + 4n^2}}$  converge.

*Demostración.* En efecto,  $\frac{n^3 + \frac{n}{10^n}}{\sqrt{n^7 + 4n^2}}$  es de orden  $\frac{1}{n^2}$ . Así pues compararemos con la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ . Se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3 + \frac{n}{10^n}}{\sqrt{n^7 + 4n^2}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{7}{2}} + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{10^n}}{\sqrt{n^7 + 4n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2 10^n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n^5}}} = 1.$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  es divergente a  $+\infty$ , pues  $\frac{1}{2} \leq 1$ . Entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \frac{n}{10^n}}{\sqrt{n^7 + 4n^2}}$  es divergente a  $+\infty$ .  $\square$

Para estudiar las series, primero se recomienda al lector elaborar una lista de series de términos positivos en las cuales se conozcan si son o no convergentes. Aquí tienes ejemplos para ilustrar la idea de una manera que sea relevante y comprensible:

**Ejemplo 174 (Ahorro Progresivo).** Imagina que decides ahorrar dinero cada mes, empezando con 10 pesos el primer mes, 20 pesos el segundo mes, 30 pesos el tercer mes, y así sucesivamente, aumentando 10 pesos cada mes. Esta secuencia de ahorros es una serie de términos positivos, donde la cantidad total de dinero ahorrado sigue creciendo.

**Ejemplo 175 (Puntos en un Videojuego).** Cada nivel de un videojuego que completas te da puntos, y cada nivel ofrece más puntos que el anterior. Sumar todos los puntos que obtienes es como sumar una serie de términos positivos, donde cada término representa los puntos de cada nivel.

**Ejemplo 176 (Carrera de Kilómetros).** Si te propones correr más kilómetros cada semana para entrenar para una maratón, por ejemplo, 5 km la primera semana, 10 km la segunda semana, 15 km la tercera semana, etc., estás creando una serie de términos positivos con los kilómetros que corres cada semana.

**Ejemplo 177 (Colección de Libros).** Cada año decides comprar más libros que el año anterior para aumentar tu colección. Si compras 5 libros el primer año, 10 el segundo, 15 el tercero, y así sucesivamente, la cantidad total de libros es una serie de términos positivos.

**Ejemplo 178 (Crecimiento de Seguidores en Redes Sociales).** Supón que cada mes ganas más seguidores que el mes anterior en tu cuenta de redes sociales. Este crecimiento mensual puede representarse como una serie de términos positivos.

**Ejemplo 179 (Plantar Árboles).** Si te unes a una iniciativa para plantar árboles y cada año plantas más árboles que el año anterior, la cantidad total de árboles plantados forma una serie de términos positivos.

**Ejemplo 180** (Acumulación de Puntos de Fidelidad). Cada compra que realizas en tu tienda favorita te da puntos de fidelidad, y decides comprar más cada vez. La suma de todos los puntos obtenidos es una serie de términos positivos.

**Ejemplo 181** (Subida Gradual de la Montaña). Imagina que haces una caminata que se hace progresivamente más empinada. La distancia vertical que subes cada hora puede verse como una serie de términos positivos, donde cada término es mayor que el anterior.

**Ejemplo 182** (Estudio Diario). Si decides estudiar un poco más cada día que el día anterior para prepararte para un examen, estás aplicando una serie de términos positivos a tu tiempo de estudio.

**Ejemplo 183** (Creación de Contenido). Si cada mes produces más contenido que el mes anterior para tu blog o canal de YouTube, la cantidad de contenido creado es una serie de términos positivos.

**Ejemplo 184** (Incremento en la Capacidad de Memoria USB). Cada nueva memoria USB que compras tiene más capacidad que la anterior, reflejando una serie de términos positivos en términos de GB o TB.

**Ejemplo 185** (Mejora Continua en Tiempos de Vuelta). Como corredor de carreras, cada vuelta que das en la pista es más rápida que la anterior durante un entrenamiento intensivo, representando una serie de términos positivos en el tiempo de vuelta.

Estos ejemplos muestran cómo las series de términos positivos pueden aparecer en diferentes contextos, desde el ahorro y la acumulación de objetos o experiencias, hasta el crecimiento personal y el desempeño en diversas actividades. La idea es que, con cada término sucesivo siendo positivo y, a menudo, mayor que el anterior, el total acumulado o el resultado final sigue aumentando. De esta forma, cuando se pretenda analizar una serie desconocida de términos positivos, podremos efectuar las comparaciones de inmediato como un segundo paso. Es fácil comprender que por el momento, esta lista será pequeña por lo poco que hemos tratado acerca de estos temas, pero posteriormente, al estudiar otros criterios esta lista deberá ampliarse.

De este modo, se va a comenzar restando el primer número del segundo; después el segundo del tercero y se continúa haciendo de esa manera sucesivamente, hasta que todas las distancias se hayan calculado. Antes de ver algunos ejemplos, describiremos otra serie que se emplea frecuentemente en el criterio de comparación. Si la distancia es la misma, se habrá hallado el patrón de la serie. Por el contrario, cuando no se encuentre de ese modo el patrón, lo recomendable es buscar este patrón en las diferencias que haya entre los números que componen la serie. Cabe la posibilidad de que estos cada vez sean más grandes para algún número, tal como en el caso del ejemplo de la serie numérica 1, 3, 5, 9.

Una forma de encontrar el patrón en las series y secuencias consiste en extender la serie original entre 2 o 3 números. Esto permitirá corroborar que en la solución se cumple el patrón que se consiguió.

**Definición 2.1.1.** La serie  $p$  o la serie hiperarmónica La serie infinita

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

donde  $p$  es una constante dada, recibe el nombre de **serie  $p$  o la serie hiperarmónica** y si

- i)  $p < 1$  diverge.
- ii)  $p = 1$  diverge (Serie armónica).
- iii)  $p > 1$  converge.

No es necesario que  $p$  sea un entero.

Para demostrar la convergencia o divergencia de la serie  $p$  existen varias formas. Posteriormente en base a uno de los criterios que estamos analizando, haremos la demostración respectiva.

Ahora tenemos una herramienta mayor para estudiar la siguiente serie de ejemplos.

**Ejemplo 186.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots$  es una serie geométrica con  $r = \frac{1}{3} < 1$ , por lo tanto converge.

**Ejemplo 187.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}} + \cdots$  es una serie geométrica con  $r = \frac{1}{5} < 1$ , por lo tanto converge.

**Ejemplo 188.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \cdots + \frac{1}{7^{n-1}} + \cdots$  es una serie geométrica con  $r = \frac{1}{7} < 1$ , por lo tanto converge.

**Ejemplo 189.** La serie infinita  $1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} + \frac{125}{27} + \cdots + \frac{5^{n-1}}{3^{n-1}} + \cdots$  es una serie geométrica con  $r = \frac{5}{3} > 1$ , por lo tanto divergente.

**Ejemplo 190.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \cdots$  es una serie  $p$  con  $p = 5 > 1$ , por lo tanto converge.

**Ejemplo 191.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \cdots$  es una serie  $p$  con  $p = 7 > 1$ , por lo tanto converge.

**Ejemplo 192.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$  es una serie  $p$  con  $p = 1$ , por lo tanto la serie es armónica la cual es divergente.

**Ejemplo 193.** La serie infinita  $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots$  es una serie  $p$  con  $p = \frac{1}{3} < 1$ , por lo tanto convergente.

**Ejemplo 194.** La serie infinita  $9 + \frac{9}{2^3} + \frac{9}{3^3} + \frac{9}{4^3} + \dots$  es una serie  $p$  con  $p = 3 > 1$ , por lo tanto convergente.

**Ejemplo 195.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie  $p$  convergente  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$   $p = 2 > 1$  tenemos

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es convergente.  $\square$

**Ejemplo 196.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n+1}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \dots + \frac{4}{3^n+1} + \dots$$

comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie geométrica convergente  $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots$   $r = \frac{1}{3} < 1$  tenemos

$$\frac{4}{3^n+1} < \frac{4}{3^n}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es convergente.  $\square$

**Ejemplo 197.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n2^n} + \dots$$

comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie geométrica convergente  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

$$r = \frac{1}{2} < 1 \text{ tenemos}$$

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es convergente.  $\square$

**Ejemplo 198.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  es divergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie armónica divergente  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$  tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es divergente.  $\square$

**Ejemplo 199.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$  es divergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{3} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}}{n} + \cdots$$

comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie armónica divergente

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

tenemos

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} > \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es divergente.  $\square$

**Ejemplo 200.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+15}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{n+15} + \cdots$$

comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie armónica divergente  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$  tenemos

$$\frac{1}{n+15} < \frac{1}{n}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es divergente.  $\square$

**Observación 20.** *Un número finito de términos al inicio de una serie no afecta la convergencia o divergencia, lo cual implica según hemos visto en los ejemplos, que se puede demostrar en la comparación de series que puede ser para todo entero positivo  $n$ , o bien, para todo entero positivo  $n$ , excepto un número finito.*

**Ejemplo 201.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$  comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie geométrica convergente  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$   $r = \frac{1}{2} < 1$  tenemos

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es convergente.  $\square$

**Ejemplo 202.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}^3(n\pi)}{n!}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, se tiene

$$|\text{sen}^3(n\pi)| \leq 1$$

de donde podemos hacer comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  convergente  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$  tenemos

$$\frac{\text{sen}^3(n\pi)}{n!} < \frac{1}{n!}$$

para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es convergente.  $\square$

**Ejemplo 203.** La serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^2}$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, se tiene

$$\frac{2 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^2} < \frac{3}{2^n}$$

de donde podemos hacer comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie geométrica convergente

$$3 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \right)$$

$a = 3$  y  $r = \frac{1}{2} < 1$  para todo entero positivo  $n$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es convergente.  $\square$

**Ejemplo 204.** La serie infinita  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$  es divergente.

*Demostración.* En efecto, la serie dada es

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} + \frac{3}{\sqrt{2}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-1} + \cdots + \frac{3}{\sqrt{n}-1} + \cdots$$

de donde podemos hacer comparando el  $n$ -ésimo término de esta serie con el  $n$ -ésimo término de la serie divergente

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

tenemos

$$\frac{3}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

para todo entero positivo  $n \geq 2$ . En consecuencia por el **criterio de comparación** la serie dada es divergente.  $\square$

A continuación establecemos dos criterios de convergencia para series de términos positivos. Ambos criterios se obtienen aplicando el principio de comparación al tomar como modelo las series geométricas.

**Teorema 2.8** (Criterio de Cauchy o prueba de la raíz). Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos. Supongamos que  $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea  $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  entonces

i) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge cuando  $t < 1$ .

ii) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$  cuando  $t > 1$ .

iii) Nada puede afirmarse cuando  $t = 1$ .

*Demostración.* Veamos el caso i), en efecto, tenemos el caso cuando  $t < 1$ . Sea  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $t < b < 1$ . La hipótesis  $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  implica  $\sqrt[n]{a_n} < b$  para casi toda  $n$  excepto un número finito de elementos, luego  $a_n < b^n$  para casi toda  $n$  excepto un número finito de elementos. La serie geométrica  $\sum_{n=1}^{+\infty} b^n$  es convergente. Aplicando el principio de

comparación, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente.

Ahora probemos el caso ii), en efecto, tenemos el caso cuando  $t > 1$ . Sea  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $t < b < 1$ . La hipótesis  $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  implica  $1 < \sqrt[n]{a_n}$  para casi toda  $n$  excepto un número finito de elementos, luego  $1 < a_n$  para casi toda  $n$  excepto un número finito de elementos. Entonces la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a cero. Aplicando la Proposición

2.1 la serie infinita  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  no es convergente, luego diverge a  $+\infty$ .

Por ultimo veamos el caso iii), en efecto, tenemos el caso cuando  $t = 1$ . La series  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  cumplen  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ . Sin embargo  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge a  $+\infty$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente.  $\square$

**Teorema 2.9** (Criterio de Dálambert ó prueba del cociente). Sea  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie de términos positivos. Supongamos que  $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea  $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  entonces

i) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge cuando  $t < 1$ .

ii) La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$  cuando  $t > 1$ .

iii) Nada puede afirmarse cuando  $t = 1$ .

*Demostración.* Aplicando el Corolario 1.32  $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  implica  $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ . Veamos el caso i), en efecto, tenemos el caso cuando  $t < 1$ . El Teorema 2.8 implica que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente.

Ahora probemos el caso ii), en efecto, tenemos el caso cuando  $t > 1$ . El Teorema 2.8 implica que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  no es convergente, luego diverge a  $+\infty$ .

Por ultimo veamos el caso *iii*), en efecto, tenemos el caso cuando  $t = 1$ . La series  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  cumplen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Sin embargo  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge a  $+\infty$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente.  $\square$

**Ejemplo 205.** Usando el criterio de Cauchy o de D'alambert determina la convergencia o divergencia a  $+\infty$  de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$  de términos positivos.

*Demostración.* En efecto, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = 0.$$

Aplicando el criterio de D'alambert, la relación  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} < 1$ , implica la conver-

gencia de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ .  $\square$

**Ejemplo 206.** Usando el criterio de Cauchy o de D'alambert determina la convergencia o divergencia a  $+\infty$  de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^{n^2}$  de términos positivos.

*Demostración.* En efecto, tenemos

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

luego  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Implica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{e} < 1$ . Aplicando el criterio de Cauchy, la relación  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} < 1$ , implica la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ . La convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ , implica en particular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$ .  $\square$

*Nota 2.1.1.* Existen otros criterios de convergencia de series de términos positivos. Entre ellos encontramos la Prueba de la integral que se establecerá en un trabajo más adelante. Sin embargo hay que observar que todos los criterios conocidos únicamente resuelven parcialmente el problema de la convergencia o divergencia a  $+\infty$  de las series de términos positivos.

## 2.2. Series absolutamente convergentes

Imagina que tienes un frasco de dulces y quieres llenarlo, pero solo puedes añadir o quitar dulces siguiendo ciertas reglas para que al final, de alguna manera mágica, sepas exactamente cuántos dulces caben en el frasco sin tener que adivinar o probar muchas veces. Ahora, vamos a relacionar esta idea con algo llamado “series absolutamente convergentes” de una manera muy sencilla.

Piensa en una serie como una fila larga de números que están haciendo fila para entrar en un cine. Algunos de estos números son positivos, lo que significa que dan un paso hacia adelante, y algunos son negativos, lo que significa que dan un paso hacia atrás. Pero en lugar de mirar hacia dónde se mueven, solo te importa cuántos pasos en total pueden dar, sin importar si son hacia adelante o hacia atrás.

Una serie absolutamente convergente es como una fila especial de números que, incluso si cuentas todos sus pasos (hacia adelante y hacia atrás) sin preocuparte por la dirección, al final sabrás exactamente cuántos pasos han dado en total. Es como saber que todos los números de la fila podrán entrar en el cine sin empujarse ni dejar espacios vacíos entre ellos, no importa si algunos dieron pasos hacia atrás en algún momento.

En el mundo de las matemáticas, decir que una serie es “absolutamente convergente” significa que si sumas todos los números de la fila, incluso cambiando los pasos hacia atrás por pasos hacia adelante (o sea, haciendo que todos los números sean positivos), al final, el total de pasos (o la suma de los números) llegará a un número específico y no seguirá creciendo para siempre. Es una manera de asegurarnos de que la fila de números entra perfectamente en nuestro “cine”, o en este caso, que la suma de los números tiene un valor exacto y no es infinita.

Así que, cuando los matemáticos hablan de series absolutamente convergentes, están diciendo que no importa cómo mires los números (sin importar la dirección de sus pasos),

al sumarlos todos, el resultado será algo muy claro y definitivo, como saber cuántos dulces caben en tu frasco sin tener que contarlos uno por uno.

Ya que disponemos de diversos criterios de convergencia para series de términos positivos, abordamos el estudio de la convergencia de series de números reales cualesquiera. Introducimos para ello la noción de convergencia absoluta y, usando el teorema de completitud de  $\mathbb{R}$ , probamos que toda serie absolutamente convergente es convergente. El recíproco no es cierto y para probarlo estudiamos las series alternadas, así llamadas porque el signo de sus términos va alternando. Presentamos un criterio de convergencia muy útil para el estudio de este tipo de series, el criterio de Leibniz, que permite mostrar abundantes ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes. Finalmente abordamos la pregunta de si la convergencia de una serie se conserva al permutar sus términos, lo que nos lleva a la noción de convergencia incondicional, que resulta ser equivalente a la convergencia absoluta.

**Teorema 2.10** (Definición). *La serie de números reales  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es **absolutamente convergente** cuando la serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  es convergente. Si  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  es convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente. Además  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ .*

*Demostración.* Las relaciones  $a_n \leq |a_n|$  y  $-a_n \leq |a_n|$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , implica

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  es convergente. Aplicando el principio de comparación, la serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| - a_n)$  es convergente.

Se cumple  $a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando la Proposición 2.2, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  es convergente. Falta probar la relación  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ . La desigualdad del

triángulo  $\left| \sum_{n=1}^k a_n \right| = \sum_{n=1}^k |a_n|$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Luego  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

Entonces,  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| = \left| \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k a_n \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ . □

(Observe que la relación  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  es una versión de la desigualdad del triángulo para sumas infinitas).

Tal como está expresado en la definición, investigar la convergencia absoluta de una serie de números reales es investigar la convergencia de una serie de términos positivos.

Entonces, una de las aplicaciones de la teoría de series de términos positivos que hemos desarrollado es determinar la convergencia absoluta de series de números reales. (Calcular la suma de una serie convergente equivale a sumar una infinidad de números reales). Las series absolutamente convergentes tienen propiedades análogas a las de las sumas finitas de números reales (Propiedades que no tienen las series convergentes pero no absolutamente convergentes).

**Ejemplo 207.** La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$  converge absolutamente.

*Demostración.* La serie en cuestión converge absolutamente porque converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

esta última serie es una serie geométrica con  $r = \frac{1}{2}$ . □

Por ejemplo no se afecta ni la absoluta convergencia ni la suma de una serie absolutamente convergente efectuando una permutación arbitraria de sus términos. También vale una ley de irrestricta asociatividad. Es válida la desigualdad del triángulo para la suma de una serie absolutamente convergente. Existen reglas sencillas para calcular la “multiplicación” de series absolutamente convergentes.

Estas propiedades dentro del contexto más general de “familias sumables de elementos de un espacio normado”.

**Ejemplo 208.** Determine si la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$  es convergente.

*Demostración.* Del ejemplo anterior la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$  converge absolutamente, por lo tanto, es convergente. □

## 2.3. Nociones sobre series alternadas

Las series alternadas son aquellas en las que los términos cambian de signo de manera sistemática, como pasar de positivo a negativo y viceversa. Aquí te doy algunos ejemplos que pueden ser relevantes, ilustrando cómo este concepto puede aparecer en situaciones tanto matemáticas como de la vida diaria:

**Ejemplo 209 (Ahorros y Gastos).** Imagina que un mes ahorras dinero y al siguiente lo gastas en algo que quieres, luego vuelves a ahorrar el mes siguiente, y así sucesivamente.

**Ejemplo 210 (Ejercicio).** Un día decides correr (sumando energía y salud) y al día siguiente decides descansar (restando energía pero recuperándote), alternando entre actividad y descanso.

**Ejemplo 211** (Temperaturas Alternas). La temperatura sube un día (positivo) y baja al siguiente (negativo), como en un patrón de clima variable entre días cálidos y fríos.

**Ejemplo 212** (Puntos en un Juego). En un juego de mesa o videojuego, ganas puntos en un turno (positivo) y pierdes algunos en el siguiente debido a una penalización (negativo), alternando entre ganar y perder.

**Ejemplo 213** (Estado de Ánimo). Algunos días te sientes muy feliz y optimista (positivo), y otros días te sientes un poco menos entusiasta o incluso triste (negativo), alternando tus emociones.

**Ejemplo 214** (Balance en una Cuenta). Realizas depósitos en tu cuenta bancaria (positivos) y luego retiros (negativos), alternando entre aumentar y disminuir tu saldo.

**Ejemplo 215** (Puntajes en Deportes). En un partido, tu equipo marca un punto (positivo) y luego el otro equipo marca (negativo), y así sucesivamente.

**Ejemplo 216** (Energía Solar). La producción de energía solar aumenta durante el día (positivo) y disminuye o se detiene por la noche (negativo), alternando con el ciclo de luz.

**Ejemplo 217** (Intereses de Préstamos). Algunos meses puedes hacer pagos extra hacia el principal de tu préstamo (positivo) y otros meses solo pagas el interés (negativo), alternando tu progreso en el pago.

**Ejemplo 218** (Crecimiento de Plantas). Las plantas crecen durante la primavera y el verano (positivo) y entran en un estado de dormancia durante el otoño e invierno (negativo).

**Ejemplo 219** (Noticias en Redes Sociales). Un día ves noticias positivas o inspiradoras (positivo) y al siguiente día encuentras noticias negativas o desalentadoras (negativo), alternando tu percepción del mundo.

**Ejemplo 220** (Resultados Escolares). Recibes calificaciones altas en algunos exámenes o proyectos (positivo) y calificaciones más bajas en otros (negativo), alternando tu rendimiento académico.

**Ejemplo 221** (Carga y Descarga de un Celular). Cargas tu celular (positivo, aumentando la batería) y luego lo usas hasta que se descarga (negativo, disminuyendo la batería).

**Ejemplo 222** (Flujo de Tráfico). Al conducir, encuentras tramos donde puedes avanzar rápidamente (positivo) y luego te topas con tráfico lento o detenido (negativo).

**Ejemplo 223** (Popularidad en Redes). Un día tu publicación recibe muchos “me gusta” (positivo) y al siguiente, una publicación puede pasar casi desapercibida (negativo).

**Ejemplo 224** (Rutina Diaria). Alternas entre días productivos donde logras hacer muchas tareas (positivo) y días menos productivos donde haces poco o descansas (negativo).

Estos ejemplos muestran cómo las series alternadas, con sus cambios entre positivo y negativo, pueden aparecer en una amplia variedad de contextos en la vida cotidiana, desde el manejo de finanzas personales hasta el rendimiento académico, pasando por las emociones y la actividad física. Este concepto no solo es aplicable en matemáticas para sumar y restar números en sucesiones, sino también para entender patrones y ciclos en la vida cotidiana y la naturaleza.

**Definición 2.3.1** (Series alternadas). Una **serie alternada** es una serie de números reales de la forma  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , donde  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una serie de términos positivos.

**Teorema 2.11.** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión decreciente de números positivos. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,$$

entonces la serie alternada  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  es convergente.

*Demostración.* Sea  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ .

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente y acotada superiormente.

En efecto,  $s_{2n+2} = s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2}$  implica  $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis se tiene que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente implica  $s_{2n} \leq s_{2n+2}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto la sucesión  $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.

Ahora bien  $s_{2n+1} = a_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{2k+1} a_{2k} + \sum_{k=1}^n (-1)^{2k+2} a_{2k+1}$  implica  $s_{2n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^n (a_{2k} - a_{2k+1})$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La hipótesis de que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente implica  $s_{2n+1} \leq a_1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Se cumple  $s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $0 < a_n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  implica  $s_{2n} < s_{2n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $s_{2n} < a_1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , es decir  $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada superiormente. Entonces  $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente. Sea  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} := s$ . La hipótesis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  y la relación  $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$  entonces implica que  $\{s_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = s$ .

Por lo tanto  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ . □

**Ejemplo 225.** Sea  $p \in \mathbb{Q}$ . La serie alternante  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ , es:

1. converge si y sólo si  $0 < p$ .
2. absolutamente convergente si y sólo si  $1 < p$ .

*Demostración.* 1. Supongamos que  $0 < p$ . La sucesión de números positivos  $\left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ . Aplicando el Teorema 2.11, la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ , es convergente.

Si  $p \leq 0$ , la sucesión  $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a cero. Luego la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$  no es convergente.

Por lo tanto la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$  es convergente si y sólo si  $0 < p$ .

2. Decir que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$  es absolutamente convergente es decir que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$  es convergente. Este es el caso si y sólo si  $1 < p$ . □

**Observación 21.** En particular la serie **Anarmonica**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  es convergente pero no absolutamente convergente.

## 2.4. Series de potencias

Las series de potencias son una herramienta matemática que se utiliza para representar funciones complejas de una manera más sencilla y manejable, mediante la suma de términos que involucran potencias de una variable. Aunque el concepto puede parecer abstracto, hay muchas situaciones en la vida diaria y en la ciencia donde se aplican ideas similares. Aquí te doy algunos ejemplos para ilustrar el concepto de series de potencias de manera accesible:

**Ejemplo 226** (Crecimiento de una inversión). Imagina que inviertes dinero en una cuenta con interés compuesto; el cálculo de cuánto dinero tendrás en el futuro se puede aproximar usando una serie de potencias.

**Ejemplo 227** (Predicción del clima). Los modelos climáticos usan series de potencias para predecir cómo cambiará el clima basándose en diferentes variables, como la temperatura y la presión atmosférica.

**Ejemplo 228** (Diseño de videojuegos). En el desarrollo de videojuegos, las series de potencias pueden ayudar a simular trayectorias y movimientos de objetos, como el arco de una pelota o el movimiento de un personaje.

**Ejemplo 229** (Efectos de sonido). Los ingenieros de sonido utilizan series de potencias para modelar y crear efectos de sonido complejos, ajustando las ondas sonoras para obtener el efecto deseado.

**Ejemplo 230** (Crecimiento poblacional). Los biólogos pueden usar series de potencias para modelar el crecimiento de una población de animales o bacterias bajo ciertas condiciones.

**Ejemplo 231** (Física cuántica). En física cuántica, las series de potencias ayudan a describir el comportamiento de las partículas a niveles subatómicos, como los electrones en un átomo.

**Ejemplo 232** (Economía). Los economistas utilizan series de potencias para modelar tendencias económicas y predecir el impacto de ciertas políticas fiscales o cambios en el mercado.

**Ejemplo 233** (Ingeniería civil). Al diseñar estructuras como puentes o edificios, los ingenieros utilizan series de potencias para calcular cargas y tensiones en diferentes puntos.

**Ejemplo 234** (Medicina). Las series de potencias pueden ayudar a modelar la propagación de enfermedades o la efectividad de los tratamientos farmacológicos a lo largo del tiempo.

**Ejemplo 235** (Acústica). En el diseño de salas de conciertos, se usan series de potencias para modelar cómo se propagará el sonido y asegurar la mejor calidad acústica.

**Ejemplo 236** (Óptica). Las series de potencias se aplican en óptica para modelar la refracción de la luz a través de diferentes medios.

**Ejemplo 237** (Estadísticas). Las series de potencias se utilizan en estadísticas para hacer extrapolaciones y predicciones basadas en datos existentes.

**Ejemplo 238** (Música electrónica). Los sintetizadores generan sonidos a través de la manipulación de ondas, proceso que puede describirse y ajustarse usando series de potencias.

**Ejemplo 239** (Astronomía). Para calcular las órbitas de planetas y estrellas, los astrónomos recurren a series de potencias que ayudan a predecir sus posiciones futuras.

**Ejemplo 240** (Teoría de juegos). En teoría de juegos, las series de potencias pueden ayudar a modelar las estrategias y decisiones de los participantes en un juego complejo.

**Ejemplo 241** (Cinemática). En física, las series de potencias se utilizan para describir el movimiento de objetos, incluyendo la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

**Ejemplo 242** (Robotics). Los robots usan series de potencias para calcular trayectorias y movimientos precisos, permitiendo acciones complejas como caminar o agarrar objetos.

**Ejemplo 243** (Genética). Los modelos genéticos que predicen cómo se expresan ciertos genes pueden basarse en series de potencias.

**Ejemplo 244** (Meteorología espacial). Para predecir tormentas solares y su impacto en la Tierra, se utilizan series de potencias que modelan la actividad solar.

**Ejemplo 245** (Marketing digital). Al analizar tendencias de consumo y comportamiento de usuarios en línea, se pueden usar series de potencias para predecir futuras tendencias de mercado.

Estos ejemplos demuestran cómo las series de potencias se aplican en una amplia variedad de campos, desde ciencias puras hasta aplicaciones prácticas en ingeniería, economía, y más allá. Aunque el cálculo detrás de las series de potencias puede ser complejo, su utilidad radica en simplificar y modelar situaciones complejas del mundo real. Hemos tratado con series cuyos términos eran constantes. Ahora ya estamos en condiciones de analizar series en las cuales existen términos que contienen variables, este tipo de series tienen más aplicaciones y por ello su relevante importancia.

Una **serie de potencias** es una serie de la siguiente forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a)^1 + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

donde  $a$  y las  $c_i$  con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  son constantes. A este tipo de series también se le conoce como **serie de potencias centrada en  $a$** .

Por otra parte, si damos un valor a  $x$ , obtendremos una serie de términos constantes cuya convergencia o divergencia puede ser determinada por los criterios ya establecidos. Debemos aclarar que el primer término de esta serie sería  $c_0(x-a)^0$  lo cual nos indica el por qué de la sola aparición del término único  $c_0$ . Un caso especial de este tipo de series se presenta cuando  $a = 0$ , de donde se tiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Para distinguir una de la otra, decimos que tenemos una serie de potencia en  $x-a$  ó serie de potencia en  $x$ . Para simplificar el término general de la serie de potencias en  $x$  supondremos que  $x^0 = 1$  aún en el caso en que  $x = 0$ .

Intuitivamente hablando las series de potencias ocupan el lugar de los “polinomios de grado  $+\infty$ .”Entonces para construir una tal serie es razonable pedir una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales, que serían los coeficientes del “polinomio,”y un número real  $x$ , que sería la “variable”del polinomio.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales y sea  $x$  un número real.

La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  se llama **serie de potencias**.

### 2.4.1. Convergencia de series de potencias

Por investigar la convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  entendemos determinar su conjunto de convergencia:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ es convergente} \right\}.$$

El objetivo principal es determinar todos los valores de  $x$  para los cuales una serie de potencias converge. Por ello podemos emplear el importante criterio de la razón.

El conjunto de valores de  $x$  par los cuales una serie de potencias converge recibe el nombre de **Intervalo de convergencia**. El conjunto de convergencia de una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  es un intervalo simétrico con centro en cero. Este resultado es una consecuencia del siguiente:

**Teorema 2.12.** Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Supongamos que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$  es convergente cuando  $x$  es  $x_0$ . Entonces la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  es absolutamente convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < |x_0|$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < |x_0|$ . Por hipótesis, la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$  es convergente. Entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_0^n = 0$ , luego  $\{a_n x_0^n\}_{n=0}^{+\infty}$  es acotada. Existe pues  $M > 0$  tal que  $|a_n x_0^n| \leq M$ , para toda  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Se cumple:  $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ , para toda  $n \geq 0$ .  $|x| < |x_0|$  implica  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ . Luego, la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  es convergente.

Aplicando el principio de comparación, la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  es convergente, es decir, la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  es absolutamente convergente.  $\square$

**Ejemplo 246.** Determinar el intervalo de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

*Demostración.* Aplicando el criterio de la razón tenemos  $a_n = \frac{x^n}{n}$  y  $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  por lo tanto

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}n}{x^n(n+1)} \right| = \left| \frac{xn}{(n+1)} \right| = |x| \frac{n}{n+1}.$$

Entonces

$$|x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = |x|.$$

- La serie converge para  $|x| < 1$ , o bien para  $-1 < |x| < 1$ .
- Diverge para  $|x| > 1$ , o bien para  $x > 1$  o  $x < -1$ .

- c) La prueba falla para  $|x| = 1$ . Para  $x = 1$  la serie es  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$  la cual diverge. Para  $x = -1$  la serie es  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  la cual converge. En consecuencia el intervalo de convergencia de la serie dada es  $[-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$ , gráficamente tenemos

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \text{-----} \longrightarrow \\ -1 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$$

con lo que concluimos el ejercicio. □

**Ejemplo 247.** Determinar el intervalo de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ .

*Demostración.* Aplicando el criterio de la razón tenemos  $a_n = \frac{x^n}{2^n}$  y  $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x^n x}{2^n 2}$  por lo tanto

$$\left| \frac{\frac{x^n x}{2^n 2}}{\frac{x^n}{2^n}} \right| = \left| \frac{2^n x^n x}{2 x^n 2^n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right| = |x| \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$|x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |x|.$$

- a) La serie converge para  $\frac{1}{2}|x| < 1$ , o  $|x| < 2$ , o bien para  $-2 < |x| < 2$ .  
 b) Para  $x = -2$ , la serie es  $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  la cual diverge.  
 c) Para  $x = 2$ , la serie es  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$  la cual diverge.

En consecuencia el intervalo de convergencia de la serie dada es

$$(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\},$$

gráficamente tenemos

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \text{-----} \longrightarrow \\ -2 \qquad \qquad \qquad 2 \end{array}$$

con lo que concluimos el ejercicio. □

El siguiente teorema se comprende con mayor facilidad después de haber analizado los ejemplos anteriores.

**Teorema 2.13.** Sea  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie de potencias dada. Entonces exactamente una de las siguientes condiciones se satisface:

- a) La serie converge solamente cuando  $x = 0$ .
- b) La serie es absolutamente converge para todos los valores de  $x$ .
- c) Existe un número  $R > 0$  tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de  $x$  para los cuales  $|x| < R$  y es divergente para todos los valores de  $x$  para los cuales  $|x| > R$ .

Existe un Teorema similar para cuando tenemos una serie de potencias en  $x - a$  y las condiciones se escriben de la siguiente manera:

- a) La serie converge solamente para  $x = a$ .
- b) La serie converge para todos los valores de  $x$ .
- c) Existe un número  $R > 0$  tal que la serie converge para toda  $x$  con  $|x - a| < R$  y es divergente para toda  $x$  con  $|x - a| > R$ .

Ya hemos mencionado que el conjunto de todos los valores de  $x$  para los cuales es convergente una serie de potencias dada recibe el nombre de **intervalo de convergencia** de la serie de potencias. El número  $R$  que tenemos en las condiciones c) se conoce como **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Si la condición a) se cumple, se tiene  $R = 0$ .

Si la condición b) se cumple, se tiene  $R = \infty$ .

Si la condición c) se cumple, se tiene  $R$  tendrá un valor según la serie que se este analizando.

Si el radio de convergencia  $R$  es positivo, entonces el intervalo de convergencia de una serie de potencias en  $x$  es uno de los siguientes:

$$(-R, R), [-R, R], (-R, R], [-R, R).$$

Para la serie de potencias en  $x - a$  el intervalo de convergencia puede ser uno de los siguientes:

$$(a - R, a + R), [a - R, a + R], (a - R, a + R], [a - R, a + R).$$

## 2.5. Ejercicios

1. Identifique la sucesión de sumas parciales asociada a cada una de las siguientes series y determine si son o no convergentes.

$$a) \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{3^{n-1}}.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{n}.$$

$$d) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

$$e) 0.\overline{45} = \frac{45}{10^2} + \frac{45}{10^4} + \frac{45}{10^6} + \dots + \frac{45}{10^{2n}} + \dots$$

2. Convierta la serie  $0.\overline{6}$  al cociente de dos enteros con el límite de la sucesión de sumas parciales.
3. Calcule si es posible, el valor de la serie

$$5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \dots + \frac{5}{3^{n-1}} + \dots$$

4. Si es posible, calcule el valor de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{11^n}{5^{n-1}}$ , justifique su respuesta.

5. Determina si la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{4n^3 + 2}$  converge o diverge.

6. Determina la convergencia de la serie cuyo  $n$ -ésimo término es  $\frac{2n^3 + 1}{5n^3 + n^2}$ .

7. Demuestre que la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 5}$  diverge.

8. Determina si las siguientes series son convergentes o divergentes. En caso de que sean convergentes, calcule la suma.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \left( \frac{3}{4} \right)^n.$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^3}{3^n}.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n}.$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} 7 \left(\frac{e}{4}\right)^n.$$

$$e) 2.3 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{17}{10^3} \left(\frac{1}{10^{2n}}\right).$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

$$g) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{4+n^2}}.$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7+2^{-n}}.$$

$$j) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{6^n}.$$

9. Investigue si las siguientes series son absolutamente convergentes.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{100^n}{n!}.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n^2)}.$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n)!}.$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (0.01)^n.$$



## Capítulo 3

### Aplicaciones

Resumiendo, la representación decimal de los números reales está íntimamente relacionada con las sucesiones y series en matemáticas. Aquí te explico cómo:

**Sucesiones:** Una sucesión es una lista ordenada de números. Por ejemplo, una sucesión podría ser  $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots$  donde cada número es una aproximación más precisa de  $\pi$  (pi).

**Series:** Una serie es la suma de los términos de una sucesión. En el caso de la representación decimal, en lugar de sumar, construimos un número más grande con más y más dígitos.

**Representación decimal:** Cada número real puede representarse como una serie de dígitos. Por ejemplo, el número  $123.456$  puede verse como la suma de  $100(1 \times 10^2) + 20(2 \times 10^1) + 3(3 \times 10^0) + 0.4(4 \times 10^{-1}) + 0.05(5 \times 10^{-2}) + 0.006(6 \times 10^{-3})$ .

**Números Irracionales y Representación Decimal Infinita:** Para números irracionales (como  $\pi$  o  $\sqrt{2}$ ), la representación decimal es infinita y no periódica. Aquí es donde las sucesiones y series se vuelven realmente importantes. Por ejemplo,  $\pi = 3.14159\dots$  se puede pensar como el límite de una sucesión de aproximaciones decimales cada vez más precisas.

**Límites de sucesiones y series:** En matemáticas, decimos que un número real es el límite de una sucesión de aproximaciones.

**Ejemplo 248.** Podemos aproximarnos a  $\sqrt{2}$  con la sucesión

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$$

Cada término es una aproximación decimal más precisa, y la serie completa se acerca cada vez más al verdadero valor de  $\sqrt{2}$ .

Por lo que, la representación decimal de los números reales se basa en el concepto de sucesiones y series, y en el uso de límites para entender cómo se pueden aproximar los números reales mediante cifras decimales, tanto finitas como infinitas. Esto demuestra la profunda conexión entre diferentes áreas de las matemáticas y cómo se utilizan para describir y entender los números y sus propiedades.

Vamos a ilustrar la teoría de series y sucesiones con un problema de la vida real que pueda ser interesante para entender estos temas: la creación y el lanzamiento de una aplicación móvil.

**Ejemplo 249.** Este ejemplo te ayudará a entender cómo conceptos matemáticos abstractos tienen aplicaciones muy concretas y valiosas en proyectos tecnológicos y empresariales.

### Contexto del problema

Imagina que has desarrollado una nueva aplicación móvil que ayuda a las personas a organizar sus tareas diarias de manera más efectiva. Para crecer y mantener tu app, necesitas entender dos cosas principales: cómo crecerá tu base de usuarios a lo largo del tiempo (sucesiones) y cómo calcular los ingresos esperados a partir de suscripciones o anuncios dentro de la app (series).

### Sucesiones: crecimiento de usuarios

Para modelar el crecimiento de tus usuarios, decides usar una **sucesión**, que es básicamente una lista ordenada de números que siguen una regla específica. Supongamos que empiezas con 100 usuarios en el primer mes. Si tu estrategia de marketing es efectiva, esperas que el número de usuarios crezca un 10% cada mes.

Esto se puede representar como una sucesión donde el número de usuarios en el mes  $n$  es  $U_n = 100 \times (1.1)^{n-1}$ , donde  $n$  es el número de meses desde el lanzamiento. Así, puedes predecir cuántos usuarios tendrás en cualquier mes futuro aplicando esta fórmula.

### Series: calculando ingresos

Ahora, supongamos que tu aplicación genera ingresos a través de suscripciones, con cada usuario pagando 5 pesos al mes. Quieres calcular tus ingresos totales después de un año. Para esto, puedes usar una *serie*, que es la suma de los términos de una sucesión. Si multiplicas el número de usuarios cada mes por la cantidad que paga cada uno, obtienes los ingresos de ese mes. Sumando los ingresos de cada mes durante un año, calculas los ingresos totales.

Los ingresos del mes  $n$  serían  $I_n = U_n \times 5$ . Los ingresos totales después de 12 meses serían la suma de  $I_n$  de  $n = 1$  hasta  $n = 12$ .

### Aplicación Práctica

#### 1. Calculando el Crecimiento de Usuarios:

- a) Mes 1 : 100 usuarios.
- b) Mes 2 :  $100 \times (1.1) = 110$  usuarios.
- c) Y así sucesivamente, aplicando la fórmula de la sucesión.

#### 2. Calculando Ingresos:

- a) Ingresos Mes 1 :  $100 \times 5 = 500$ .
- b) Ingresos Mes 2 :  $110 \times 5 = 550$ .
- c) Los ingresos totales después de 12 meses serían la suma de estos ingresos mensuales.

### Solución y conclusión

Para encontrar los ingresos totales después de un año, necesitarías sumar todos los ingresos mensuales, aplicando la serie. Esto te da una visión clara de cómo tu app podría ser rentable a lo largo del tiempo, permitiéndote hacer planes para futuras inversiones, mejoras de la app, o estrategias de marketing.

Este ejemplo muestra cómo las sucesiones y series no son solo conceptos matemáticos abstractos, sino herramientas poderosas que pueden aplicarse para modelar y predecir el crecimiento y los ingresos en proyectos reales como el lanzamiento de una aplicación móvil. Permite a los emprendedores y desarrolladores tomar decisiones basadas en proyecciones matemáticas precisas y planificar estratégicamente para el futuro.

Cuando hablamos de series y sucesiones, estamos hablando de seguir patrones y sumar números de acuerdo a reglas especiales. Aquí tienes algunos ejemplos sencillos y divertidos:

**Ejemplo 250 (Ahorros Semanales).** Imagina que ahorras 1 peso la primera semana, 2 pesos la segunda semana, 3 pesos la tercera semana, y así sucesivamente. Cada semana ahorras un dólar más que la semana anterior. Esto es una sucesión porque sigues un patrón para decidir cuánto ahorras.

**Ejemplo 251 (Llenando un Frasco de Dulces).** Si pones 2 dulces en un frasco el primer día, 4 dulces el segundo día, 6 dulces el tercer día, y continúas agregando 2 dulces más cada día, estás creando una sucesión con los dulces.

**Ejemplo 252 (Historia de Conejos).** Comienzas con 2 conejitos. Si cada mes, esos conejitos tienen 2 conejitos más, entonces tienes 2, 4, 8, 16 conejitos, y así sucesivamente. Esto muestra cómo algo puede crecer rápidamente siguiendo un patrón, una idea clave en las sucesiones.

**Ejemplo 253 (Peldaños de una Escalera).** Imagina que cada peldaño de una escalera está pintado de un color diferente, alternando entre rojo y azul. El primer peldaño es rojo, el segundo es azul, el tercero es rojo, y así sucesivamente. Esto es como una serie alternada con colores en lugar de números.

**Ejemplo 254 (Estrellas en el Cielo Nocturno).** Si cuentas 5 estrellas la primera noche, 10 estrellas la segunda noche, 15 estrellas la tercera noche, porque cada noche encuentras una constelación que tiene 5 estrellas más que la noche anterior, estás siguiendo un patrón de sucesión con las estrellas.

**Ejemplo 255 (Bloques de Construcción).** Construyes una torre donde el primer nivel tiene 1 bloque, el segundo nivel tiene 2 bloques, el tercer nivel 3 bloques, y así sucesivamente. Al sumar todos los bloques, estás haciendo una serie para ver cuántos bloques usaste en total.

**Ejemplo 256 (Días de la Semana).** Piensa en los días de la semana como una sucesión que siempre sigue el mismo patrón: lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo, y luego comienza de nuevo. Es un ciclo sin fin.

**Ejemplo 257 (Saltos en Longitud).** Cada día practicas saltos largos y cada día saltas 10 cm más lejos que el día anterior. Si el primer día saltas 50 cm, el segundo día saltas 60 cm, el tercer día 70 cm, y así sucesivamente. Esto es seguir una sucesión en tus saltos.

**Ejemplo 258 (Cuentas de Perlas).** Tienes una cuerda para hacer un collar y decides añadir 3 perlas el primer día, 6 perlas el segundo día, 9 perlas el tercer día, añadiendo siempre 3 perlas más cada día. Esto es una serie porque sumas un número específico de perlas cada día hasta completar tu collar.

Estos ejemplos están diseñados para ayudar a entender cómo las series y sucesiones son simplemente formas de seguir patrones y sumar números siguiendo esas reglas, algo que pueden ver y experimentar en actividades diarias y juegos.

### 3.1. Representación decimal de los números Reales

**Definición 3.1.1.** Una **expansión decimal positiva** es una serie de potencias de la forma  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$  donde  $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos del conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . La notación  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  representa tanto la expansión decimal positiva  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ , como la suma de ésta.

**Teorema 3.1.** *Toda expansión decimal positiva representa (es decir, converge) a un número real no negativo.*

*Demostración.* La expansión decimal  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  cumple:  $0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq 9 \frac{1}{10^n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . La serie geométrica  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$  es convergente. Aplicando el principio de comparación, la expansión decimal  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  es convergente.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Todo número real no negativo está representado (es decir, es el límite) por una expansión decimal positiva.*

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq x$ . Elegimos  $a_0$  como el mayor elemento de  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $a_0 \leq x$ . Sea  $a_1$  el mayor elemento de  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  tal que  $a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x$ . Supongamos que  $a_n$  ha sido seleccionado. Elegimos  $a_{n+1}$  como el mayor elemento de  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  tal que  $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10} + \frac{a_{n+1}}{10} \leq x$ . Por inducción hemos construido una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10} + \frac{a_{n+1}}{10},$$

para toda  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Aplicando el Teorema 3.1, la expansión decimal  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  es convergente. La relación  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$  implica entonces  $x = a_0.a_1a_2 \dots a_n \dots$   $\square$

**Observación 22.** *La representación de los números reales no negativos por expansión decimal positiva no es única. Por ejemplo,  $1.000 \dots 0 \dots$  y  $9.999 \dots 9 \dots$  son dos expansiones decimales distintas que representan al número 1. De hecho tenemos:*

**Proposición 3.3.** *Dos expansiones decimales positivas  $a_0.a_1a_2 \dots a_n \dots$  y  $b_0.b_1b_2 \dots b_n \dots$  representan el mismo número real no negativo si y sólo si existe  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que:  $a_k = b_k$ , para toda  $0 \leq k \leq N - 1$ ;  $a_N = b_N + 1$  y  $a_k = 0$ ,  $b_k = 9$ , para toda  $k \geq N + 1$ . Por lo tanto, los únicos números reales no negativos que admiten dos representaciones en expansiones decimales positivas son aquellos de la forma:  $\frac{k}{10^n}$ , donde  $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .*

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Ejemplo 259.**  $3.84757000\dots 0\dots = 3.84756999\dots 9\dots$  (Aquí  $N = 5$ .)

**Definición 3.1.2.** Una expansión decimal positiva  $a_0.a_1a_2\dots a_n\dots$  es **Periodica** si existen  $k, N \in \mathbb{N}$  tales que  $a_{n+k} = a_n$ , para toda  $n \geq N$ .

**Ejemplo 260.**  $\frac{18}{7} = 2.571428571428\dots 571428\dots$  (Aquí  $k = 6$  y  $N = 1$ .)

**Ejemplo 261.**  $\frac{24}{9} = 2.44444\dots 4444\dots$  (Aquí  $k = 1$  y  $N = 2$ .)

**Teorema 3.4.** *Un número real no negativo es un número racional si y sólo si admite una representación en expansión decimal positiva periódica.*

*Demostración.* Se deja como ejercicio al lector. □

**Definición 3.1.3.** Una **expansión decimal negativa** es la serie opuesta  $-a_0.a_1a_2\dots a_n\dots$  de una expansión decimal positiva  $a_0.a_1a_2\dots a_n\dots$ .

Una **expansión decimal** es una expansión decimal positiva o una expansión decimal negativa.

Los Teoremas 3.4, 3.2, 3.1 y la Proposición 3.3 son válidos al cambiar los letreros: “expansión decimal positiva”, “número real no negativo” por “expansión decimal negativa”, “número real no positivo” o “expansión decimal”, “número real”. Nada cambia si reemplazamos el número 10 por cualquier otro número natural  $p \geq 2$  y el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  por  $\{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ .

**Ejemplo 262.** En el caso  $p = 2$ , tenemos las **expansiones binarias**

$$a_0.a_1a_2\dots a_n\dots \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

ó

$$-a_0.a_1a_2\dots a_n\dots \equiv -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

donde  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos del conjunto  $\{0, 1\}$  y  $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

De los resultados de esta sección y de la teoría de series obtenemos como corolarios. Todo número real es una suma infinita de números racionales. Existencia de números racionales. Todo intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  contiene un número racional y un número irracional. También, una técnica aproximativa para el cálculo de la suma y producto de números reales basada en la suma y producto de números racionales.

## 3.2. Límites y continuidad en una variable

El límite es un concepto matemático que puede parecer complicado, pero aquí te dejo una manera sencilla de entenderlo: imagina que tienes un juguete de un carrito y lo empujas a lo largo de una pista recta hacia una caja. Mientras más cerca llegue el carrito a la caja, más pequeña se vuelve la distancia entre el carrito y la caja. El “límite” es como preguntarnos “¿a qué punto se acerca el carrito si lo seguimos empujando hacia la caja sin detenernos?” En matemáticas, usamos el límite para describir hacia qué número se acerca algo (como la distancia entre el carrito y la caja) cuando hacemos algo continuamente (como empujar el carrito). Es una forma de pensar en dónde algo va a terminar, incluso si nunca llegamos a detenernos exactamente allí. Así que, en resumen, el límite es como una forma de jugar a la imaginación matemática, donde tratamos de adivinar a qué número se acerca algo cuando hacemos algo muchas veces.

Imagina un mosquito que está volando hacia una lámpara en una habitación. El mosquito comienza lejos de la lámpara y se mueve más y más cerca de ella en cada momento. Ahora, si queremos usar este escenario para explicar el concepto de límites, podemos hacerlo así:

1. **Posición Inicial:** El mosquito está a una cierta distancia de la lámpara. Esta es su posición inicial.
2. **Movimiento hacia la Lámpara:** El mosquito se mueve hacia la lámpara. Con cada movimiento, se acerca un poco más a la lámpara.
3. **Acercándose al Límite:** A medida que el mosquito sigue volando, la distancia entre él y la lámpara se hace más y más pequeña. En matemáticas, diríamos que la distancia está “tendiendo a cero”.
4. **El Límite:** El “límite” en este caso sería el punto al que se acerca el mosquito. Imaginamos que se acerca infinitamente a la lámpara, pero sin tocarla realmente. En términos matemáticos, diríamos que el límite de la distancia del mosquito a la lámpara es cero a medida que el tiempo avanza.
5. **Nunca Alcanzando el Límite:** Lo interesante de los límites es que, como en nuestro ejemplo, el mosquito se acerca cada vez más a la lámpara pero no necesariamente tiene que llegar a la lámpara. En matemáticas, a menudo hablamos de acercarnos a un valor tanto como queramos, sin necesariamente alcanzarlo.

Este ejemplo muestra cómo el límite representa un valor al que una cantidad se acerca cada vez más. Es una manera efectiva de visualizar el concepto, especialmente para aquellos que están empezando a aprender sobre los fundamentos del cálculo y los límites en matemáticas.

Los límites matemáticos se aplican en muchas áreas, tanto en matemáticas como en situaciones del mundo real.

1. **Ciencias:** En física, por ejemplo, los límites ayudan a entender el movimiento y las velocidades. Imagina que quieres saber qué tan rápido se mueve un automóvil en

un instante específico. Usando límites, puedes calcular la velocidad exacta en ese momento.

2. **Ingeniería:** Los ingenieros usan límites para diseñar edificios y puentes. Esto ayuda a entender cómo se comportan las estructuras bajo diferentes cargas y condiciones, asegurándose de que sean seguras y estables.
3. **Economía:** En economía, los límites pueden ayudar a predecir el comportamiento de los mercados. Por ejemplo, pueden mostrar cómo reaccionará el precio de un producto si la demanda aumenta gradualmente.
4. **Medicina:** Los límites se usan en medicina, por ejemplo, para entender cómo cambian los niveles de medicamentos en el cuerpo con el tiempo, lo que ayuda a los médicos a determinar las dosis adecuadas.
5. **Ecología:** En ecología, los límites pueden ayudar a entender patrones de crecimiento de poblaciones de animales o la propagación de enfermedades en un ecosistema.
6. **Meteorología:** Los meteorólogos utilizan límites para hacer predicciones sobre el clima, como la velocidad del viento o la cantidad de lluvia.
7. **Matemáticas:** Por supuesto, en matemáticas mismas, los límites son fundamentales para el cálculo, ayudando a entender conceptos como la derivada e integral, que son cruciales en muchas aplicaciones científicas y técnicas.

En resumen, los límites son como herramientas matemáticas que nos ayudan a entender y predecir cómo cambian las cosas gradualmente en una gran variedad de campos.

Por ejemplo, para explicar la velocidad de un mosquito utilizando el concepto de límites, podemos recurrir a una idea básica del cálculo: la derivada. La velocidad es un ejemplo clásico de una derivada, que es la tasa de cambio de una cantidad con respecto a otra. En este caso, es cómo cambia la posición del mosquito con respecto al tiempo. Aquí te ofrezco una manera sencilla de explicarlo:

1. **Posición y Tiempo:** Imagina que estás observando a un mosquito volando. Registramos su posición en diferentes momentos. En matemáticas, la posición sería una función del tiempo, digamos  $f(t)$ .
2. **Cambios en Pequeños Intervalos de Tiempo:** Ahora, piensa en dos momentos muy cercanos, por ejemplo,  $t$  y  $t + \Delta t$  (donde  $\Delta t$  es un intervalo de tiempo muy pequeño). El mosquito se ha movido de  $f(t)$  a  $f(t + \Delta t)$  en ese breve período.
3. **Calculando la Velocidad Instantánea:** Para encontrar la velocidad del mosquito en el momento exacto  $t$ , queremos saber cómo cambia su posición en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. En matemáticas, calculamos la velocidad instantánea como el límite de la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo, a medida que  $\Delta t$  se acerca a cero. Esto se escribe como:

$$\text{Velocidad en el tiempo } t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t}$$

4. **El Límite Representa la Velocidad Instantánea:** Este límite nos da la velocidad del mosquito en el momento exacto  $t$ . Es la velocidad instantánea, que es diferente de la velocidad promedio. La velocidad instantánea es cómo de rápido se mueve el mosquito en ese preciso instante, no a lo largo de un periodo de tiempo.
5. **Aplicación Práctica:** En la práctica, esto significa que si podemos medir cómo cambia la posición del mosquito en intervalos de tiempo muy pequeños, podemos aproximarnos a cuán rápido se está moviendo en cualquier momento dado.

Este ejemplo demuestra cómo los conceptos matemáticos de límites y derivadas se aplican para entender fenómenos del mundo real, como la velocidad de un mosquito. Es una forma de conectar las ideas abstractas del cálculo con situaciones cotidianas y tangibles.

**Definición 3.2.1** (De la derivada). Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in A$ . Se dice que  $f$  es derivable o diferenciable en  $a$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe y en este caso este límite se la llama la derivada o la diferencial de  $f$  en  $a$  y se denota por  $f'(a)$ . Se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

**Ejemplo 263.** Sea  $f(x) = c = \text{constante}$ . Entonces:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

**Ejemplo 264.** Sea  $f(x) = x$ . Entonces

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

**Ejemplo 265.** Sea  $f(x) = x^2$ . Entonces

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a. \end{aligned}$$

**Ejemplo 266.** Sea  $f(x) = |x|$ . Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Consideremos  $h > 0$ . Entonces  $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$ . Ahora, si  $h < 0$ , tendremos  $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ . Es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Por lo tanto  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$  no existe.

La relación entre diferenciabilidad y continuidad nos la proporciona el siguiente resultado.

**Teorema 3.5.** *Si una función  $f$  es derivable en un punto  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .*

*Demostración.* Se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{(f(x) - f(a))}{(x - a)} \cdot (x - a) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  y  $f$  es continua en  $a$ . □

**Observación 23.** *El recíproco del Teorema 3.5 no se cumple. Por ejemplo,  $f(x) = |x|$  es continua en 0 pero no es derivable en 0. De hecho, es posible construir una función continua en todo  $\mathbb{R}$  pero que no sea derivable en ningún  $a \in \mathbb{R}$ .*

Los límites laterales en la derivada son importantes porque nos ayudan a entender cómo se comporta una función (o la velocidad de un objeto, como un mosquito) en un punto específico, especialmente cuando esa función tiene un comportamiento diferente de un lado del punto que del otro. Aquí te dejo un ejemplo con el mosquito para explicarlo mejor: Imagina que un mosquito está volando en línea recta y se acerca a un punto en el aire, digamos el punto “A”. A medida que se acerca a “A”, su velocidad cambia. Pero aquí hay algo interesante: la manera en que cambia su velocidad puede ser diferente justo antes de llegar a “A” (esto sería el límite lateral izquierdo) y justo después de pasar “A” (esto sería el límite lateral derecho). Supongamos que el mosquito se acelera a medida que se acerca a “A” pero, una vez que pasa “A”, de repente disminuye su velocidad debido a un cambio de dirección o por haber encontrado un obstáculo. En términos de límites y derivadas:

1. **Antes de “A” (Límite Lateral Izquierdo):** Observamos cómo se comporta la velocidad del mosquito a medida que se acerca a “A” desde la izquierda. Si vemos que su velocidad aumenta continuamente, el límite lateral izquierdo de la derivada (velocidad) en “A” es mayor.
2. **Después de “A” (Límite Lateral Derecho):** Observamos la velocidad del mosquito justo después de pasar “A”. Si encontramos que su velocidad disminuye bruscamente, el límite lateral derecho de la derivada en “A” es menor.
3. **Importancia de los Límites Laterales:** Los límites laterales son cruciales aquí porque nos dicen que hay un cambio en el comportamiento del mosquito en el punto “A”. Si los límites laterales izquierdo y derecho no son iguales, indica que hay una discontinuidad o un punto de inflexión en la velocidad del mosquito en ese punto.

Este concepto es fundamental en matemáticas, especialmente en cálculo, porque nos ayuda a comprender y predecir el comportamiento de funciones y fenómenos físicos en puntos específicos, como cambios bruscos en la velocidad o la dirección de un objeto. En el

estudio de las derivadas, los límites laterales son esenciales para definir la derivada en un punto y para entender el comportamiento de las funciones en puntos donde pueden no ser continuas o donde su comportamiento cambia drásticamente.

**Definición 3.2.2.** Se define la derivada por la derecha de  $f$  en  $x_0$  por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell := f'(x_0+).$$

Es decir, si para cada  $\varepsilon > 0$  dada, existe  $\delta > 0$  tal que si  $0 < x - a < \delta$ , es tiene  $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| < \varepsilon$ . Análogamente, definimos la derivada por la izquierda de  $f$  en  $x_0$  por:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell := f'(x_0-).$$

En matemáticas, los límites pueden clasificarse de diversas maneras según diferentes criterios. Aquí te presento una clasificación básica de los tipos de límites:

### 1. Según la Variable que se Aproxima:

- a) **Límites de una Variable:** Estos límites se refieren a funciones de una sola variable. Por ejemplo, el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  se acerca a un valor específico.
- b) **Límites de Varias Variables:** Se aplican a funciones de más de una variable, como  $f(x, y)$ . En estos casos, se estudia cómo se comporta la función cuando las variables se acercan a un punto específico en un espacio multidimensional.

### 2. Según la Dirección de Aproximación:

- a) **Límites Laterales:** Se refieren a la aproximación a un punto desde una sola dirección. Estos pueden ser límites por la izquierda (cuando nos acercamos al punto desde valores menores) o por la derecha (desde valores mayores).
- b) **Límites Bilaterales:** Son aquellos en los que la variable se acerca al punto desde ambas direcciones. Para que exista un límite bilateral, los límites laterales deben ser iguales.

### 3. Según el Punto de Acercamiento:

- a) **Límites en Puntos Finitos:** Se refieren al comportamiento de la función cuando la variable se acerca a un valor numérico finito.
- b) **Límites en el Infinito:** Estudian el comportamiento de la función cuando la variable se acerca a infinito (positivo o negativo). Indican cómo se comporta la función en valores muy grandes.

### 4. Según el Valor al que se Aproxima la Función:

- a) **Límites Finitos:** Son aquellos en los que la función se aproxima a un número real específico.

- b) **Límites Infinitos:** Ocurren cuando la función se aproxima a infinito (positivo o negativo). Esto suele suceder cuando la función crece o decrece sin límite en torno al punto de aproximación.

### 5. Límites Especiales:

- a) **Límites Indeterminados:** Son situaciones en las que la aplicación directa de las reglas de límites conduce a una expresión sin un valor claro, como  $\frac{0}{0}$  o  $\infty$ ,  $-\infty$ . Estos requieren manipulación adicional o técnicas especiales para resolverlos.

### 6. Límites en el Contexto de las Sucesiones:

- a) **Límites de Sucesiones:** Aquí se analiza el comportamiento de las sucesiones numéricas a medida que el índice de la sucesión tiende al infinito.

Cada uno de estos tipos de límites tiene sus propios métodos y reglas para su cálculo y análisis, y son fundamentales en el estudio del cálculo y el análisis matemático.

**Observación 24.** Se tiene que  $f$  es derivable en  $x_0$  si y sólo si existen las derivadas de  $f$  tanto por la izquierda como por la derecha en  $x_0$  y son iguales.

**Ejemplo 267.** Sea  $f(x) = |x|$ . Entonces

$$f'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'(0-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Puesto que  $f'(0+) \neq f'(0-)$  se tiene que  $f$  no es derivable en 0.

**Ejemplo 268.** Clasificar las discontinuidades (véase [1] o [5] o [6]) de la función  $f(x)$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0, \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Hay una discontinuidad (véase [1] o [5] o [6]) de salto en  $x = 0$  y una esencial de primera especie en  $x = 1$ . La función  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y en consecuencia es continua en la región donde está definida, es decir  $(-\infty, 0)$ .

Por su parte, la función  $e^{\frac{1}{x-1}}$  es continua en todos los puntos en que sea continuo el exponente  $\frac{1}{x-1}$ , es decir en  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , en consecuencia, es continua en toda la región en donde está definida, menos en el 1. Así pues, reduciremos el estudio de la continuidad a dos puntos, el 0 por ser donde cambia la definición de la función y el 1, por no estar definida la función  $e^{\frac{1}{x-1}}$ .

Estudiamos primero la continuidad en el punto  $x = 0$  (véase [1] o [5]):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}.$$

Como ambos límites laterales son distintos, en  $x = 0$  hay una discontinuidad de salto (vease [1] o [5] o [6]).

Estudiamos ahora la continuidad en el punto  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\infty} = \infty.$$

Como el límite lateral por la derecha no existe, en  $x = 1$  hay una discontinuidad esencial de primera especie (véase [1] o [5] o [6]).  $\square$

**Ejemplo 269.** Clasificar las discontinuidades (véase [1] o [5] o [6]) de la función

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

*Demostración.* Hay una discontinuidad evitable en  $x = 0$  y  $x = 1$  y una discontinuidad esencial en  $x = -1$  y  $x = -\frac{1}{2}$  (véase [1] o [6]).

A simple vista, podemos ver que se trata de una función racional y estará definida en todo  $\mathbb{R}$  salvo en los puntos que anulen alguno de los denominadores. Dichos puntos son fáciles de obtener igualando a 0 los denominadores:

- |  |  |
|--|--|
| a) $x = 0$ .                           | c) $x - 1 = 0$ si y sólo si $x = 1$ .                                  |
| b) $x + 1 = 0$ si y sólo si $x = -1$ . | d) $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} = 0$ si y sólo si $x = -\frac{1}{2}$ . |

Por tanto, obtenemos cuatro puntos de discontinuidad, que son:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$  y  $x = -\frac{1}{2}$  (véase [5] o [6]).

Para clasificar estas cuatro discontinuidades (véase [1] o [6]), tenemos que estudiar los correspondientes límites por la izquierda y por la derecha. Veamos primero,

a) Discontinuidad en  $x = 0$  (véase [1] o [5] o [6]) :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1} = -1.\end{aligned}$$

Como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable (véase [1] o [5] o [6]) . ahora tenemos,

b) Discontinuidad en  $x = 1$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{6} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0}{6} = 0.\end{aligned}$$

De nuevo, como ambos límites coinciden, se trata de una discontinuidad evitable. Ahora veamos,

c) Discontinuidad en  $x = -1$  (véase [1] o [5] o [6]):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2}{(-0)(-1)} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2}{(+0)(-1)} = \infty.\end{aligned}$$

Como ambos límites divergen, se trata de una discontinuidad de tipo esencial (véase [1] o [5] o [6]). Por último,

d) Discontinuidad en  $x = -\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1/2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{-\frac{2}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)(-0)} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1/2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{x-1}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(+0)}{-2} = -\infty.\end{aligned}$$

Por último, como ambos límites divergen, se trata también de una discontinuidad de tipo esencial (véase [1] o [5] o [6]).

□

**Ejemplo 270.** Estudiar si es derivable (véase [1] o [5] o [6]) la función  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$  en el punto  $x = 1$ .

*Demostración.* La función no es derivable (véase [1] o [5] o [6]) ya que

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \infty.$$

Aplicando la definición de derivada (véase [1] o [5] o [6]), tenemos:

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+h-1} - \sqrt[3]{1-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2/3} = \infty.\end{aligned}$$

Así pues, la función no es derivable en  $x = 1$  (véase [1] o [5] o [6]).

□

**Ejemplo 271.** Estudiar la derivabilidad (véase [1] o [5] o [6]) de la siguiente funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista  $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

*Demostración.* Primero veamos, la función es derivable en  $x = 0$  ya que  $f'^-(0) = f'^+(0) = 1$  (véase [1] o [5] o [6]) y la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

□

**Ejemplo 272.** Estudiar la derivabilidad (véase [1] o [5] o [6]) de la siguiente funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.  $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$ .

*Demostración.* La función no es derivable en  $x = -\sqrt{2}$  ya que  $g'^-(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$  y  $g'^+(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$ , y tampoco es derivable en  $x = \sqrt{2}$  ya que  $g'^-(\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$  y  $g'^+(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$ . En el resto de los puntos, la derivada vale

$$g'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2 + 2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad primero vamos a expresar la función  $|x^2 - 2|$  como una función a trozos (véase [1] o [5] o [6]). Para ello necesitamos saber en qué puntos la función  $x^2 - 2$  es positiva, y en qué puntos es negativa. Si calculamos las raíces de esta función tenemos:

$$|x^2 - 2| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x^2 = 2 \quad \text{si y sólo si} \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Si estudiamos el signo en los intervalos definidos por las raíces, podemos comprobar fácilmente sin más que calcular la función en cualquier punto de los intervalos que  $x^2 - 2$  es negativa en el intervalo  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y positiva en el resto de su dominio. Por tanto, podemos expresar el valor absoluto de la siguiente manera:

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ -x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

y entonces, la función original puede expresarse como:

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 2 & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2x - x^2 + 2 & \text{si } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 2x + x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ahora, si estudiamos la derivabilidad de cada una de estas funciones en los trozos correspondientes (véase [1] o [5] o [6]), vemos que ambas son polinomios y por tanto son derivables en sus dominios. Faltaría por estudiar la derivabilidad en los puntos donde

cambia la definición de la función. Para ello hay que estudiar la derivada por la izquierda y por la derecha y ver si coinciden. En el punto  $x = -\sqrt{2}$  tenemos:

$$\begin{aligned}g'^{-}(-\sqrt{2}) &= 2 - 2\sqrt{2} \\g'^{+}(-\sqrt{2}) &= 2 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Y como ambas derivadas no coinciden la función no es derivable en  $x = -\sqrt{2}$ . En  $x = \sqrt{2}$  (véase [1] o [5] o [6]) tenemos:

$$\begin{aligned}g'^{-}(\sqrt{2}) &= 2 - 2\sqrt{2} \\g'^{+}(\sqrt{2}) &= 2 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ambas derivadas no coinciden y tampoco es derivable en  $x = \sqrt{2}$ . Así pues, la derivada vale:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{si } x < -\sqrt{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ 2 + 2x & \text{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

□

**Ejemplo 273.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{si } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes.

1. ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea continua en todo su dominio (véase [1] o [5] o [6])? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.
2. ¿Existen algunos valores de las constantes para los que la función sea derivable en todo su dominio (véase [1] o [5] o [6])? En caso afirmativo, indicar cuáles son esos valores, y en caso contrario, razonar la respuesta.

*Demostración.* 1. La función es continua en todo el dominio si  $a = -3$  y  $b = -1$ .

2. No existe ningún valor de  $a$  y  $b$  con los que la función sea derivable en todo el dominio.

□

**Ejemplo 274.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{si } c < x, \end{cases}$$

con  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes, ¿existe algún valor de las constantes de manera que la función sea continua y derivable en todo su dominio (véase [1] o [5] o [6])?

*Demostración.* Sea  $a = \frac{1}{2e}$ ,  $b = 0$ ,  $c = e^{1/2}$ . Estudiaremos primero la continuidad y luego la derivabilidad (véase [1] o [5] o [6]).

Las funciones  $\operatorname{sen} 2x$ ,  $ax^2 + b$  y  $\ln x$  son todas continuas en sus dominios (véase [1] o [5] o [6]), por tanto, basta con estudiar los puntos donde cambia la definición de la función.

En el punto  $x = 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + b = a0^2 + b = b, \\ f(0) &= \operatorname{sen}^2 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego la función será continua en  $x = 0$  si y sólo si  $b = 0$ .

En el punto  $x = c$  tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} ax^2 + b = ac^2 + b, \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} \ln x = \ln c, \\ f(c) &= ac^2 + b. \end{aligned}$$

Luego la función será continua en  $x = c$  si y sólo si  $ac^2 + b = \ln c$ .

Por consiguiente, para que la función sea continua en todo su dominio deben cumplirse las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln c \end{cases}$$

Con la derivabilidad ocurre lo mismo pues las funciones  $\operatorname{sen} 2x$ ,  $ax^2 + b$  y  $\ln x$  son derivables en su dominio y basta con estudiar la existencia de la derivada en los puntos donde cambia la definición de la función.

En el punto  $x = 0$  (tomamos  $b = 0$  pues de lo contrario la función no sería continua

en este punto y tampoco derivable) tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(0+h) - \sin^2 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 h}{h} \stackrel{\text{L'Hôpital (véase [5])}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin h \cos h}{1} = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a(0+h)^2 - \sin^2 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah^2}{h} \stackrel{\text{L'Hôpital (véase [6])}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2ah}{1} = 0.\end{aligned}$$

Luego la función es derivable en  $x = 0$  si y sólo si  $b = 0$ .

En el punto  $x = c$  tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(c+h)^2 + b - (ac^2 + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ac^2 + ah^2 + 2ach + b - ac^2 - b}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah^2 + 2ach}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} ah + 2ac = 2ac, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(c+h) - (ac^2 + b)}{h} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1/(c+h)}{1} = \frac{1}{c}.\end{aligned}$$

Observe que el último límite conduce a una indeterminación porque se debe cumplir  $ac^2 + b = \ln c$ , para que la función sea continua en dicho punto. Luego para que la función sea derivable en  $x = c$ , además de la condición de continuidad, se debe cumplir  $2ac = \frac{1}{c}$ . Así pues, para que la función sea continua y derivable en todo su dominio deben cumplirse las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} b = 0 \\ ac^2 + b = \ln c \\ 2ac = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a:

$$\begin{aligned}a = \frac{1}{2c^2} \quad \text{si y sólo si} \quad \ln c = ac^2 + b = \frac{1}{2c^2}c^2 = \frac{1}{2} \quad \text{si y sólo si} \\ c = e^{1/2}, a = \frac{1}{2(e^{1/2})^2} = \frac{1}{2e},\end{aligned}$$

y los valores de las constantes que hacen que la función sea continua y derivable en todo su dominio son:  $a = \frac{1}{2e}$ ,  $b = 0$ ,  $c = e^{1/2}$ .  $\square$

**Ejemplo 275.** Hallar la función derivada (véase [1] o [5] o [6]) de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3.$

3.  $h(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{1+x}{1-x}.$

2.  $g(x) = \log_3(1+x)^2.$

4.  $l(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1}).$

*Demostración.* 1.  $\frac{df}{dx} = (1 + \operatorname{tg}^2((1+x)^3))3(1+x)^2.$

2.  $\frac{dg}{dx} = \frac{2(1+x)\log_3 e}{(1+x)^2}.$

3.  $\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} \frac{2}{(1-x)^2}.$

4.  $\frac{dl}{dx} = \frac{1}{x^2+2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

□

**Ejemplo 276.** Hallar la expresión de la derivada  $n$ -ésima (véase [1] o [5] o [6]) de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = a^x \log a.$

3.  $h(x) = \frac{9x^2 - 2x - 25}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$

2.  $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}.$

4.  $j(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$

*Demostración.* 1.  $f^{(n)} = (\log a)^{n+1} a^x.$

2.  $g^{(n)} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} & \text{si } x = 4k, \\ \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2} & \text{si } x = 4k + 1, \\ -\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} & \text{si } x = 4k + 2, \\ \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{2} & \text{si } x = 4k + 3. \end{cases}$

3. Descomponiendo en fracciones simples,

$$h^{(n)}(x) = \frac{3(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}.$$

4.  $j^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \prod_{i=1}^n 2i-1}{2^n} (1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}.$

□

**Ejemplo 277.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{si } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

Calcular  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que la función sea continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$  (véase [1] o [5] o [6]).

*Demostración.* Estudiamos primero la continuidad. Los distintos trozos de la función están formados por funciones polinómicas (véase [1] o [5] o [6]) y la función  $\cos x$  que están definidas en todo su dominio, de manera que los únicos posibles puntos de discontinuidad son los puntos donde cambia la definición de la función. Calculamos los límites laterales en dichos puntos: En el punto  $x = -\pi$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^-} (ax^2 + bx) = a\pi^2 - b\pi, \\ \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (\cos x) = \cos(-\pi) = -1, \end{aligned}$$

de modo que para que la función sea continua en este punto debe cumplirse

$$a\pi^2 - b\pi = -1 \quad (3.1)$$

Y en el punto  $x = \pi$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos x = \cos \pi = -1, \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (cx^2 + dx) = c\pi^2 + d\pi, \end{aligned}$$

de modo que para que la función sea continua en este punto debe cumplirse

$$c\pi^2 + d\pi = -1 \quad (3.2)$$

En cuanto a la derivabilidad, calculamos primero las derivadas de las funciones de cada uno de los trozos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b, & \text{si } x < -\pi; \\ -\operatorname{sen} x, & \text{si } -\pi < x < \pi; \\ 2cx + d, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

Al igual que antes, las derivadas de las funciones de cada uno de los trozos existen en sus respectivos dominios por lo que faltaría por ver si existe la derivada en los puntos donde cambia la definición de la función. Calculamos las derivadas laterales en dichos puntos: En el punto  $x = -\pi$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^-} (2ax + b) = -2a\pi + b, \\ \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen}(-\pi) = 0, \end{aligned}$$

de modo que para que la función sea derivable en este punto, además de la condición (3.1) debe cumplirse la condición

$$-2a\pi + b = 0 \quad (3.3)$$

Y en el punto  $x = \pi$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^-} (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} \pi = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (2cx + d) = 2c\pi + d, \end{aligned}$$

de modo que para que la función sea derivable en este punto, además de la condición (3.2) debe cumplirse la condición

$$2c\pi + d = 0 \quad (3.4)$$

Así pues, para que  $f(x)$  sea continua y derivable en el punto  $x = -\pi$  deben cumplirse las ecuaciones (3.1) y (3.3). Resolviendo el sistema que forman llegamos a que  $a = \frac{1}{\pi^2}$  y  $b = \frac{2}{\pi}$ . Y para que sea continua y derivable en el punto  $x = \pi$  deben cumplirse las ecuaciones (3.2) y (3.4). Resolviendo el sistema que forman llegamos a que  $c = \frac{1}{\pi^2}$  y  $d = \frac{-2}{\pi}$ .  $\square$

**Ejemplo 278.** Se considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x - 1} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

siendo  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

- Hallar  $a$  y  $b$  para que la función  $f$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$  y su derivada se anule en  $x = 2$  (véase [1] o [5] o [6]). Con los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos en el apartado anterior:
- Estudiar la derivabilidad de la función  $f$  (véase [1] o [5] o [6]).
- Hallar las asíntotas de  $f$  (véase [1] o [5] o [6]).

*Demostración.* a) Estudiemos primero la continuidad de la función. Puesto que se trata de una función definida por tramos, primero estudiamos cada tramo por separado. En el primer tramo  $x < 0$  la función vale

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

que es una función racional, y por tanto, está definida y es continua en todos los puntos excepto en aquellos que anulen en denominador. Pero el único punto que anula el denominador es  $x = 1$  que se sale del tramo de definición de la función, por lo que en el primer tramo la función es continua. En el segundo tramo  $x > 0$  la función vale

$$\frac{ax + b}{x^2 + 2x + 1} = \frac{ax + b}{(x + 1)^2}$$

que también es una función racional. El único punto que anula el denominador es  $x = -1$ , pero al igual que antes, se sale del intervalo de definición de la función, por lo que también es continua en su tramo. Por último queda estudiar la continuidad en  $x = 0$ , que es donde cambia la definición de la función, por lo que procedemos a calcular los límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{0^2 + 1}{0 - 1} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 1} = \frac{a \cdot 0 + b}{0^2 + 2 \cdot 0 + 1} = b,\end{aligned}$$

de donde se deduce que para que exista el límite debe ser  $b = -1$ . En este caso, el límite coincidiría con el valor de la función  $f(0) = -1$ , por lo que la función sería continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Estudiamos ahora la derivada en  $x = 2$ . Puesto que el punto pertenece al segundo tramo de la función, derivamos este tramo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 1} \right) &= \frac{\frac{d}{dx}(ax + b)(x^2 + 2x + 1) - (ax + b)\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 2x + 1)^2} \\ &= \frac{a(x^2 + 2x + 1) - (ax + b)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}\end{aligned}$$

Sustituyendo en  $x = 2$  y  $b = -1$  tenemos

$$f'(2) = \frac{a(2^2 + 2 \cdot 2 + 1) - (2a - 1)(2 \cdot 2 + 2)}{(2^2 + 2 \cdot 2 + 1)^2} = \frac{-3a + 6}{81} = 0$$

si y sólo si  $-3a + 6 = 0$  si y sólo si  $a = 2$ .

- b) Antes de estudiar la derivabilidad, sustituimos  $a$  y  $b$  por los valores obtenidos con lo que tenemos la función

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x - 1} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad, derivamos cada tramo por separado. La derivada del segundo tramo la calculamos en el apartado anterior, así que falta calcular la del primer tramo que es inmediata

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + 1}{x - 1} \right) &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)(x - 1) - (x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x - 1)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}\end{aligned}$$

Así pues, a falta de estudiar la derivabilidad en el punto  $x = 0$ , tenemos que  $f$  es derivable en cada uno de los tramos y sus derivadas valen

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0. \\ \frac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Por último estudiamos la derivabilidad en  $x = 0$  mirando la derivada por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{aligned} f'^-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 - 1}{(0-1)^2} = -1, \\ f'^+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 4}{(0^2 + 2 \cdot 0 + 1)^2} = 4, \end{aligned}$$

y como no coinciden, la función es derivable en todo  $\mathbb{R}$  excepto en el 0, y su derivada es la anterior.

c) Por último para hallar las asíntotas de  $f$  tenemos.

- i) Asíntotas Verticales. Puesto que la función está definida en todo  $\mathbb{R}$  y además es continua, no existen puntos en los que la función tienda a  $\pm\infty$ , de modo que no hay asíntotas verticales.
- ii) Asíntotas Horizontales. Para las asíntotas horizontales estudiamos la tendencia de  $f$  en  $\pm\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x-1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2 + 2x + 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x+2} = 0, \end{aligned}$$

(1) Indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital (véase [1] o [5] o [6]).

Así pues, la recta  $y = 0$  es asíntota horizontal por la derecha. Por la izquierda no hay asíntota horizontal.

- iii) Asíntotas oblicuas. Estudiamos la existencia de asíntotas oblicuas sólo por la izquierda porque por la derecha no puede existir asíntota oblicua al haber asíntota horizontal.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x-1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

(1) Indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital (véase [1] o [5] o [6]).

Así pues, existe asíntota oblicua con pendiente 1. El término independiente nos lo da el siguiente límite

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} = 1,\end{aligned}$$

(1) Indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos la regla de L'Hôpital (Véase [1] o [5] o [6]).

de manera que la ecuación de la asíntota oblicua es  $y = x + 1$ . □

**Ejemplo 279.** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}} & \text{si } x \neq 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

- Estudiar su continuidad en  $x = 1$  (véase [1] o [5] o [6]).
- Mediante la definición de derivada de una función en un punto, calcular tanto la derivada por la derecha como la derivada por la izquierda en  $x = 1$  (véase [1] o [5] o [6]).

*Demostración.* a) Para que la función sea continua en  $x = 1$  debe cumplirse que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ . En primer lugar, la función está bien definida en  $x = 1$  y  $f(1) = 0$ . Veamos ahora los límites laterales:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{1 - 2^{+\infty}} = \frac{1}{1 - \infty} = \frac{1}{-\infty} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{1 - 2^{-\infty}} = \frac{1}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Así pues, como los límites laterales no coinciden luego, no existe el límite y la función presenta una discontinuidad de primera especie de salto finito.

- Puesto que la función no es continua en  $x = 1$ , tampoco será derivable. No obstante, pueden existir las derivadas laterales. Pasamos a calcularlas mediante la definición de derivada:

$$\begin{aligned}f'^-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1 - 2^{\frac{1+h}{1-(1+h)}}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1/h}{1 - 2^{\frac{1+h}{-h}}} = \frac{1/0^-}{1 - 2^{\frac{1+0}{0^+}}} = \frac{-\infty}{1 - 2^{+\infty}} = \frac{-\infty}{-\infty},\end{aligned}$$

que es una indeterminación. Aplicando la regla de L'Hôpital (véase [1] o [5] o [6])

tenemos

$$\begin{aligned} f'^-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1/h)'}{\left(1 - 2^{\frac{1+h}{h}}\right)'} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1/h^2}{-2^{\frac{1+h}{h}} \log 2 \left(\frac{-h+1+h}{h^2}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1/h^2}{-2^{\frac{1+h}{h}} \log 2 \left(\frac{1}{h^2}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{2^{\frac{1+h}{h}} \log 2} = \frac{1}{2^{+\infty} \log 2} = \frac{1}{+\infty} = 0, \\ f'^+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1-2^{\frac{1+h}{h}}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h(1-2^{\frac{1+h}{h}})} \\ &= \frac{1}{1-2^{\frac{1+0}{0^+}}} = \frac{1}{1-2^{-\infty}} = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{0^+} = +\infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, existe derivada por la izquierda pero no por la derecha.  $\square$

**Ejemplo 280.** Analizar la continuidad y la derivabilidad (véase [1] o [5] o [6]) de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x^2}{|x|} & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

¿Qué sucede si cambiamos en el enunciado  $e^{-x}$  por  $e^x$ ?

*Demostración.* Antes de estudiar la continuidad nos interesa eliminar el valor absoluto que aparece en la primera rama de definición de la función. Si observamos la definición de la función, la primera rama de definición es para los negativos ( $x < 0$ ); en consecuencia, como el argumento del valor absoluto es precisamente  $x$ , lo que hará el valor absoluto será cambiar de signo el valor de  $x$ . Por lo tanto, podemos sustituir  $|x|$  por  $-x$  en la primera rama de definición y de esta forma la función quedaría definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{x^2}{x} & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Por otro lado, el cociente  $\frac{x^2}{x}$  de la primera rama también puede simplificarse ya que en dicha rama no está incluido el 0 que sería el único valor que anularía el cociente. Es decir, tras simplificar, la función con la que tenemos que trabajar es

$$f(x) = \begin{cases} -1 + x & \text{si } x < 0, \\ -2 + e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad, comprobamos que la primera rama contiene un polinomio que es continuo en todo su dominio, mientras que la segunda rama contiene una función exponencial compuesta con una suma, y también es continua en todo su dominio. En consecuencia, el único punto en el que queda por estudiar la continuidad es en el cambio de la definición de la función, es decir, en el 0.

Para estudiar la continuidad en el 0, calculamos los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 + x = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 + e^{-x} = -2 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Como ambos límites coinciden y además  $f(0) = -2 + e^{-0} = -2 + 1 = -1$ , también coincide con el valor del límite, concluimos que la función es continua en el 0 y por consiguiente en todo  $\mathbb{R}$ .

Para estudiar la derivabilidad, comprobamos que el polinomio de la primera rama es derivable en todo su dominio y su derivada vale 1. Del mismo modo la función de la segunda rama también es derivable en todo su dominio y su derivada vale  $-e^{-x}$ . De nuevo, el único punto que queda por estudiar es el 0.

Para estudiar la derivabilidad en el 0 tomamos la función derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

y calculamos los límites laterales en el 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-x} = -1. \end{aligned}$$

Como ambos límites son distintos, no existe derivada en el 0 y la función es derivable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Por último, si cambiamos  $e^{-x}$  por  $e^x$  en la definición de la función, entonces la continuidad seguiría igual pues el límite por la derecha en el 0 no cambiaría

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 + e^x = -2 + 1 = -1.$$

Sin embargo, la función derivada sí cambiaría:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ e^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Y ahora, al calcular el límite por la derecha en el 0 tendríamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1.$$

que coincide con el límite por la izquierda. Así pues, la función sería derivable en el 0 y, por lo tanto, en todo  $\mathbb{R}$ . Además, la función derivada sería

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ e^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

□

Podemos explorar ejemplos más avanzados que involucran series, sucesiones, vectores y métodos numéricos, aplicados a situaciones de la vida cotidiana y campos de estudio específicos. Aquí te doy algunos ejemplos detallados, mostrando cómo estas herramientas matemáticas se aplican en diversas situaciones:

**Ejemplo 281** (Ingeniería civil). Al diseñar estructuras, se utilizan vectores para representar fuerzas y momentos. Los métodos numéricos permiten resolver sistemas de ecuaciones lineales para encontrar la distribución de fuerzas en la estructura.

**Ejemplo 282** (Medicina). Los modelos de crecimiento de tumores usan sucesiones y series para predecir el crecimiento tumoral. Los vectores pueden representar la concentración de diferentes fármacos en el organismo, y los métodos numéricos ayudan a optimizar los tratamientos.

**Ejemplo 283** (Música y acústica). La producción musical digital utiliza vectores para representar señales de audio. Las series de Fourier transforman estas señales en frecuencias, permitiendo a los ingenieros de sonido manipular y mejorar la calidad del audio.

**Ejemplo 284** (Astronomía). Para calcular la trayectoria de planetas y cometas, se utilizan vectores que representan posiciones y velocidades. Las series permiten calcular posiciones futuras con gran precisión mediante métodos numéricos.

**Ejemplo 285** (Deportes). En el análisis de movimiento deportivo, vectores representan la velocidad y dirección de un atleta o balón. Las sucesiones se utilizan para analizar el rendimiento a lo largo del tiempo, y los métodos numéricos permiten optimizar técnicas y estrategias.

**Ejemplo 286** (Transporte y logística). Los sistemas de navegación GPS utilizan vectores para calcular rutas óptimas. Los métodos numéricos se aplican para resolver problemas complejos de optimización y encontrar la mejor ruta entre múltiples puntos.

**Ejemplo 287** (Ciencias ambientales). En estudios sobre cambio climático, series temporales de datos climáticos se analizan con métodos numéricos para identificar tendencias y predecir cambios futuros. Los vectores representan datos multidimensionales como temperaturas, precipitaciones y concentraciones de CO<sub>2</sub>.

**Ejemplo 288** (Arquitectura y diseño). Los arquitectos usan vectores para crear modelos 3D de edificios. Las sucesiones pueden representar secuencias de diseño, y los métodos numéricos ayudan a calcular estructuras y materiales óptimos.

**Ejemplo 289** (Energías renovables). Para modelar la producción de energía de paneles solares o turbinas eólicas, se usan vectores que representan la dirección e intensidad del sol o viento. Las series temporales de producción energética permiten predecir la generación de energía a lo largo del tiempo.

### 3.2.1. Aplicando la teoría matemática

**Series y Sucesiones:** Se utilizan para modelar y predecir comportamientos a lo largo del tiempo, calculando el total acumulado o la evolución de un fenómeno.

**Vectores:** Representan magnitudes físicas que tienen dirección y magnitud, fundamentales para modelar desde fuerzas hasta movimientos en el espacio.

**Métodos Numéricos:** Incluyen técnicas como el método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales, o el método de Newton-Raphson para encontrar raíces de funciones.

Estos métodos permiten resolver problemas complejos que serían imposibles de manejar analíticamente.

Cada uno de estos ejemplos muestra cómo la matemática se aplica en el análisis, diseño y optimización en una amplia gama de campos, convirtiendo teorías abstractas en herramientas prácticas para resolver problemas del mundo real.

Vamos a detallar dos ejemplos que aplican series, sucesiones, vectores y métodos numéricos, uno relacionado con la predicción del clima (meteorología) y el otro con el diseño de videojuegos (movimiento de personajes). Estos ejemplos mostrarán cómo estas áreas de las matemáticas se utilizan para resolver problemas específicos.

**Ejemplo 290** (Predicción del Clima). Los meteorólogos usan series y métodos numéricos para predecir el clima. Los datos de temperatura, presión, y humedad se recogen en vectores, y luego se aplican métodos numéricos para analizar tendencias y hacer predicciones.

**Ejemplo 291** (Predicción del Clima utilizando Series Temporales y Vectores). **Contexto:** La predicción del clima implica analizar patrones a partir de datos históricos y actuales para prever condiciones futuras. Las series temporales, que son sucesiones de datos ordenados cronológicamente, juegan un papel crucial aquí. Los vectores se utilizan para representar magnitudes como la velocidad y dirección del viento.

**Datos y método:**

Supongamos que queremos predecir la temperatura para los próximos días basándonos en datos pasados.

Tenemos registros de temperatura de los últimos 30 días:

$$[T_1, T_2, \dots, T_{30}],$$

donde cada  $T_i$  representa la temperatura máxima del día  $i$ .

**Aplicando Series y Sucesiones:**

Calculamos el promedio móvil de 7 días para suavizar las fluctuaciones diarias y ver la tendencia. El promedio móvil para el día  $i$  se calcula como  $MA_i = \frac{T_i + T_{i-1} + \dots + T_{i-6}}{7}$ .

**Uso de vectores:**

Para modelar la velocidad y dirección del viento, usamos vectores. Supongamos que la velocidad del viento se registra junto con la temperatura. Tenemos vectores de viento  $V_i = (v_i, \theta_i)$  para cada día, donde  $v_i$  es la velocidad y  $\theta_i$  la dirección en grados.

**Métodos Numéricos:**

Para predecir la temperatura futura, aplicamos un modelo de regresión lineal a las temperaturas pasadas, una técnica de método numérico. Utilizamos los promedios móviles  $MA_i$  como nuestros datos de entrada para el modelo.

**Cálculo y Predicción:**

Ajustamos el modelo de regresión lineal a los datos  $(i, MA_i)$ , encontrando los parámetros  $a$  y  $b$  que minimizan el error cuadrático entre las temperaturas observadas y las predicciones del modelo.

La fórmula de predicción resultante sería  $T_{pred} = a \cdot i + b$ , donde  $i$  es el número de días en el futuro para el cual queremos hacer la predicción.

**Ejemplo 292** (Diseño de Videojuegos). En el desarrollo de videojuegos, las sucesiones y vectores se usan para modelar movimientos y trayectorias de objetos. Por ejemplo, la posición de un personaje puede representarse con vectores, y su movimiento, con sucesiones que actualizan su posición.

**Ejemplo 293** (Diseño de Videojuegos: Movimiento de Personajes con Vectores y Sucesiones). **Contexto:** En el diseño de videojuegos, el movimiento y la trayectoria de los personajes se pueden modelar utilizando vectores para las posiciones, velocidades y aceleraciones. Las sucesiones se utilizan para actualizar estos vectores en cada frame del juego.

**Implementación:**

Supongamos que un personaje se mueve en el plano 2D del juego. Su posición inicial es  $P_0 = (x_0, y_0)$ .

**Uso de Vectores:**

La velocidad inicial del personaje es  $V_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ , donde  $v_{x0}$ , y  $v_{y0}$  son las componentes de la velocidad en los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

**Aplicando Sucesiones y Métodos Numéricos:**

Para simular el movimiento, actualizamos la posición del personaje en cada frame basándonos en su velocidad. Si el juego se actualiza 60 veces por segundo (60 FPS), el cambio de posición después de 1 segundo sería:

$$P_{n+1} = P_n + V_n \cdot \Delta t$$

donde  $\Delta t = \frac{1}{60}$  segundos es el tiempo entre frames.

Si el personaje acelera (por ejemplo, al correr), actualizamos su velocidad en cada frame usando una sucesión para la velocidad:

$$V_{n+1} = V_n + A \cdot \Delta t$$

donde  $A$  es el vector de aceleración constante.

**Cálculo y Actualización:**

Por ejemplo, si  $A = (a_x, a_y)$  y el personaje empieza a correr, aumentando su velocidad en el eje  $x$ , la nueva posición y velocidad se calculan en cada frame utilizando las fórmulas anteriores.

La trayectoria del personaje se puede visualizar como una serie de puntos actualizados  $P_n$  en el plano del juego, mostrando cómo las sucesiones y vectores modelan el movimiento dinámico.

Estos dos ejemplos detallan cómo se aplican conceptos matemáticos avanzados en campos específicos, permitiendo ver la relevancia y la aplicación práctica de la teoría matemática en ciencia y tecnología.

### 3.3. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$ .

Entender los límites en más de una variable puede ser un poco más complejo que en el caso de una sola variable, pero aquí te doy una explicación simplificada: Cuando trabajamos con límites en una variable, como en el ejemplo del carrito acercándose a una

caja en una línea recta, estamos viendo cómo se comporta una función a medida que un solo número (la variable) se acerca a un valor específico. Pero en el caso de dos o más variables, los límites en varias variables utilizando el movimiento de un mosquito ilustra cómo funciona este concepto en un contexto más complejo que el de una sola variable. En este caso, puedes pensar en el movimiento del mosquito en tres dimensiones  $(x, y, z)$ , lo que implica considerar su posición en el espacio en lugar de a lo largo de una sola línea.

1. **Movimiento en Tres Dimensiones:** Imagina un mosquito volando en una habitación. No solo se mueve hacia adelante y hacia atrás (como en el ejemplo de una variable), sino que también puede moverse hacia arriba y hacia abajo, y de lado a lado. Entonces, su posición en cualquier momento se puede describir con tres coordenadas:  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , donde cada una depende del tiempo  $t$ .
2. **Posición en Función del Tiempo en Tres Dimensiones:** La posición del mosquito en cualquier momento se describe ahora con una función de tres variables:  $f(x(t), y(t), z(t))$ .
3. **Acercándose a un Punto en el Espacio:** Supongamos que queremos saber cómo se acerca el mosquito a un punto específico en la habitación, por ejemplo, una esquina cerca del techo. Este punto tiene coordenadas específicas (digamos  $x_0, y_0, z_0$ ).
4. **Uso de Límites en Tres Variables:** El límite en este caso nos ayuda a entender qué sucede con la posición del mosquito (en términos de sus tres coordenadas) conforme se acerca al punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . En matemáticas, nos preguntaríamos: “¿Qué sucede con  $f(x, y, z)$  cuando  $x$ ,  $y$  y  $z$  se acercan respectivamente a  $x_0, y_0, z_0$ ?”
5. **Interpretación Física del Límite:** Aquí, el límite nos dice cómo se comporta el mosquito en el espacio tridimensional a medida que se acerca al punto deseado. Es posible que el mosquito se acerque al punto desde diferentes direcciones, y el límite en varias variables nos ayuda a comprender este comportamiento desde todas estas perspectivas.
6. **Importancia en la Práctica:** Esta forma de entender los límites es muy útil en situaciones reales, como en la navegación aérea o en la robótica, donde necesitamos comprender cómo un objeto (o un insecto, en este caso) se mueve y se comporta en un espacio tridimensional.

Este ejemplo muestra cómo los límites en varias variables nos proporcionan una herramienta poderosa para analizar y predecir comportamientos en situaciones que involucran múltiples factores o dimensiones, algo común en el mundo real. Por ejemplo, si tienes dos variables,  $x$  e  $y$ , podrías imaginar un carrito moviéndose en una superficie plana en diferentes direcciones. En matemáticas, los límites en varias variables se usan para ver cómo se comporta una función (que ahora depende de más de un número) cuando esas variables se acercan a ciertos valores. Por ejemplo, podríamos querer saber qué sucede con el valor de una función  $f(x, y)$  cuando  $x$  e  $y$  se acercan a ciertos números. Una de las

principales diferencias y desafíos con los límites en varias variables es que hay muchas más maneras de acercarse a un punto. En una línea, solo puedes acercarte desde la izquierda o la derecha, pero en un plano, puedes acercarte desde infinitas direcciones. Esto significa que para que el límite exista en varias variables, la función debe acercarse al mismo valor sin importar por qué camino nos acerquemos al punto. Estos conceptos son muy importantes en campos como la física, la ingeniería y la economía, donde a menudo necesitamos entender cómo cambian las cosas en relación con dos o más factores al mismo tiempo. Por ejemplo, podríamos estudiar cómo cambia la temperatura en diferentes puntos de una habitación (dependiendo de la distancia a las paredes y al suelo), o cómo cambian los costos de producción en una fábrica en función de la cantidad de materiales y mano de obra utilizados. Daremos una breve introducción de los espacios métricos para conocer algunas definiciones, pero pueden consultar sobre este tema en [7].

**Definición 3.3.1** (Espacio métrico). Sea un conjunto  $X$  cualquiera, y una aplicación  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  para toda  $x, y \in X$ .
2.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$  para toda  $x, y \in X$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para toda  $x, y \in X$ .
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para toda  $x, y, z \in X$ . desigualdad triangular.

Entonces, se dice que el par  $(X, d)$  es un *espacio métrico*.

*Nota 3.3.1.* En adelante, entenderemos  $\mathbb{R}^N$  como el espacio métrico  $(\mathbb{R}^N, d)$ , siendo  $d$  la distancia usual (**distancia euclídea**) dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \quad \text{para toda } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en  $\mathbb{R}^N$ . Las más destacadas son las siguientes:

1.  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i - y_i$  para toda  $x, y \in \mathbb{R}^N$ .
2.  $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, N\}$  para toda  $x, y \in \mathbb{R}^N$ .
3.  $d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N x_i - y_i^p \right)^{1/p}$  para toda  $x, y \in \mathbb{R}^N$ .

**Definición 3.3.2.** Sean  $(X, d)$  y  $(X, d')$  dos espacios métricos sobre un mismo conjunto  $X$ . Se dice que las distancias  $d$  y  $d'$  son **equivalentes** si, y solo si,

$$\text{Existe } k_1, k_2 > 0 \text{ tal que } k_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq k_2 d(x, y) \text{ para toda } x, y \in X.$$

**Proposición 3.6.** En  $\mathbb{R}^N$ , todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia Euclídea es equivalente a todas ellas.

*Demostración.* véase [7]. □

### 3.4. Conceptos topológicos

El conjunto de Cantor es un ejemplo fascinante de cómo los conceptos de límites se aplican en matemáticas, particularmente en la teoría de conjuntos y la topología.

El conjunto de Cantor se forma mediante un proceso de eliminación infinita. Aquí hay una manera simple de describirlo:

1. **Comienzo:** Empiezas con un segmento de línea, digamos el intervalo entre 0 y 1.
2. **Primer Paso:** Eliminas la tercera parte central del segmento, dejando dos segmentos más cortos (de 0 a  $\frac{1}{3}$  y de  $\frac{2}{3}$  a 1).
3. **Pasos Siguietes:** Repites este proceso para cada segmento restante: divides cada uno en tres partes iguales y eliminas la parte central.
4. **Repetición Infinita:** Continúas haciendo esto infinitamente.

A medida que repites este proceso, los segmentos que quedan se hacen más y más pequeños. Lo interesante del conjunto de Cantor es que, incluso después de un número infinito de pasos, todavía quedan puntos en el segmento original. El “límite” de este proceso, después de infinitas eliminaciones, es el conjunto de Cantor. Este conjunto tiene propiedades fascinantes y algo contra intuitivas:

**Tamaño:** Aunque has eliminado una cantidad infinita de puntos, todavía quedan infinitos puntos en el conjunto.

**No hay segmentos:** Aunque hay infinitos puntos, no hay un segmento continuo de longitud positiva.

**Autosemejanza:** Cada parte del conjunto de Cantor es una versión a menor escala del conjunto completo.

El conjunto de Cantor es un claro ejemplo de cómo los límites en matemáticas no siempre conducen a resultados simples o intuitivos. Es más que una secuencia de números acercándose a un valor; es un proceso que crea una estructura compleja y única en el límite de infinitas iteraciones.

**Definición 3.4.1** (Bola abierta). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y fijemos un  $x \in X$  y un  $\varepsilon > 0$ . Se llama *bola abierta de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$*  al conjunto  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ .

**Definición 3.4.2** (Bola cerrada). De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$*  como el conjunto  $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ .

**Definición 3.4.3** (Conjunto abierto). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $A \subseteq X$ . Decimos que  $A$  es abierto si y sólo si para toda  $a \in A$  existe  $\varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq A$ .

**Proposición 3.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, para toda  $x \in X$  para toda  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $B(x, \varepsilon)$  es un conjunto abierto.

*Demostración.* Sea  $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$  arbitrario. Para demostrar que  $B(x_0, \varepsilon_0)$  es un abierto, tenemos que encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0)$ , y por lo tanto comprobar que se verifica que para toda  $y \in B(x, \varepsilon)$  implica  $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$ .

Sea  $y \in B(x, \varepsilon)$  cualquiera. Consideremos  $r = d(x, x_0)$ , y tomemos  $\varepsilon = \varepsilon_0 - r$ . Queremos demostrar que  $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$ . Para ello, veamos que  $d(x_0, y) < \varepsilon_0$ . En efecto, por la desigualdad triangular se cumple que:

$$d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + d(x, y) < r + \varepsilon = r + \varepsilon_0 - r = \varepsilon_0$$

Luego queda demostrado que  $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$ , y por tanto podemos afirmar que para todo punto  $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$  se puede encontrar una bola abierta centrada en él, tal que todos sus puntos están en el conjunto de origen.  $\square$

**Proposición 3.8.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1. Si  $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una familia de subconjuntos abiertos de  $X$ , entonces  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  es abierto.
2. Si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es una familia finita de abiertos de  $X$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  es abierto.
3.  $X, \emptyset$  son abiertos.

*Demostración.* véase [7].  $\square$

**Definición 3.4.4** (Punto interior). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y consideremos  $A \subseteq X$ ,  $a \in A$ . Se dice que  $a$  es un punto interior de  $A$  si, y solo si, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon_0) \subseteq A$ . Definimos  $\text{int}(A) = \overset{\circ}{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$ .

**Proposición 3.9.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1.  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ .
2.  $\overset{\circ}{A}$  es abierto.
3. Si  $B \subseteq A$  es un subconjunto abierto de  $A$ , entonces  $B \subseteq \overset{\circ}{A}$ . Es decir,  $\overset{\circ}{A}$  es el abierto más grande contenido en  $A$ .
4.  $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$ .
5.  $A$  es abierto si y sólo si  $\overset{\circ}{A} = A$ .
6.  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ .
7. Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ .

*Demostración.* véase [7].  $\square$

**Definición 3.4.5** (Conjunto cerrado). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $F \subseteq X$ . Se dice que el conjunto  $F$  es cerrado si y sólo si  $X - F$  es abierto.

**Proposición 3.10.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, para toda  $x \in X$  para toda  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $\bar{B}(x, \varepsilon)$  es un conjunto cerrado.

*Demostración.* véase [7]. □

**Proposición 3.11.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si  $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una familia de cerrados de  $X$ , entonces  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  es cerrado.
2. Si  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es una familia finita de cerrados de  $X$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  es cerrado.
3.  $X, \emptyset$  son cerrados.

*Demostración.* véase [7]. □

**Definición 3.4.6** (Clausura). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre* de  $A$  al conjunto  $\bar{A} = X - \text{int}(X - A)$ .

**Proposición 3.12.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

1.  $A \subseteq \bar{A}$ .
2.  $\bar{A}$  es cerrado.
3. Si  $B \subseteq X$  es un subconjunto cerrado de  $X$  tal que  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq B$ . Es decir,  $\bar{A}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $A$ .
4.  $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$ .
5.  $A$  es cerrado si y sólo si  $\bar{A} = A$ .
6.  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ .
7. Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ .

*Demostración.* véase [7]. □

**Definición 3.4.7** (Frontera). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Llamamos *frontera* de  $A$  al conjunto  $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ .

**Proposición 3.13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifica lo siguiente:  $x \in \partial A$  si y sólo si para toda  $\varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* véase [7]. □

**Definición 3.4.8** (Punto de acumulación). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Dado  $x \in X$ , decimos que  $x$  es punto de acumulación de  $A$  si y sólo si para toda  $\varepsilon > 0$   $B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ . Definimos  $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$ .

**Proposición 3.14.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

1.  $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$
2.  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .
3.  $\bar{A} = A \cup A'$
4.  $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X - A)$ . Además, la unión es disjunta dos a dos.

*Demostración.* véase [7]. □

### 3.5. Límites y continuidad en más variables

Explicar la continuidad en varias variables usando el movimiento de un mosquito y la aplicación de límites para este concepto matemático complejo. Aquí tienes una manera de hacerlo:

1. **Movimiento del Mosquito en Tres Dimensiones:** Primero, imagina un mosquito volando libremente en una habitación. El mosquito puede moverse en cualquier dirección: hacia arriba o hacia abajo, izquierda o derecha, adelante o atrás. Podemos describir su posición en cualquier momento con tres coordenadas:  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , donde  $t$  representa el tiempo.
2. **Función que Describe el Movimiento:** Supongamos que el movimiento del mosquito se describe con una función  $f(x, y, z)$ . Esta función podría representar algo relacionado con el mosquito, como la velocidad a la que vuela o su energía en diferentes puntos del espacio.
3. **Continuidad y Límites:** Decimos que la función  $f$  es continua en un punto si el mosquito puede moverse a ese punto sin hacer saltos abruptos o cambios bruscos. En términos de límites, esto significa que a medida que el mosquito se acerca a un punto (digamos  $(x_0, y_0, z_0)$ ), el valor de  $f(x, y, z)$  se acerca al valor de  $f$  en ese punto específico. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$$

4. **Intuición Física de la Continuidad:** En términos más sencillos, si el mosquito se mueve suavemente y sin interrupciones a través del espacio, entonces su trayectoria es continua. No hay saltos imprevistos o movimientos imposibles en su vuelo.

5. **Aplicación de Límites para Verificar la Continuidad:** Para verificar si la función  $f$  es continua en un punto, observamos cómo se comporta el valor de  $f$  cuando el mosquito se acerca a ese punto desde cualquier dirección. Si el valor al que se acerca  $f$  es el mismo que el valor de  $f$  en el punto, entonces la función es continua allí.
6. **Importancia en Contextos Reales:** Este concepto es importante en la física y la ingeniería, por ejemplo, al analizar el flujo de aire alrededor de un objeto. Si el flujo es continuo, significa que no hay turbulencias o discontinuidades imprevistas.

En resumen, usando el movimiento de un mosquito en tres dimensiones y cómo se acerca a diferentes puntos en el espacio, podemos ilustrar el concepto de continuidad en varias variables y cómo se aplica en situaciones reales. Esto ayuda a entender cómo los comportamientos suaves y predecibles se pueden modelar matemáticamente en términos de continuidad y límites.

Veamos otro ejemplo de límites en varias variables con el movimiento de una mosca y un matamoscas para que nos quede más claro este concepto.

1. **Movimiento en Tres Dimensiones:** Imagina una mosca volando en una habitación. Su posición en cualquier momento se puede describir con tres coordenadas:  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , donde  $t$  es el tiempo. Ahora, imagina también un matamoscas que se mueve hacia la mosca.
2. **Objetivo del Matamoscas:** El matamoscas intenta alcanzar a la mosca. Su objetivo es coincidir su posición con la de la mosca en el espacio tridimensional. La posición del matamoscas también se puede describir con coordenadas, digamos  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$ .
3. **Acercamiento del Matamoscas a la Mosca:** A medida que el tiempo pasa, el matamoscas se acerca más y más a la posición de la mosca. Queremos saber si, en algún momento, el matamoscas puede coincidir exactamente con la posición de la mosca.
4. **Uso de Límites en Varias Variables:** Aquí es donde entran los límites en varias variables. Matemáticamente, queremos saber si el límite de las diferencias de las coordenadas de la mosca y el matamoscas se acerca a cero. Es decir, si:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - a(t)) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - b(t)) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (z(t) - c(t)) = 0,$$

donde  $t_0$  es un momento en el tiempo.

5. **Interpretación de los Límites:** Si estos límites se cumplen, significa que en el tiempo  $t_0$ , el matamoscas ha alcanzado exactamente la misma posición que la mosca. En otras palabras, los límites nos dicen si el matamoscas puede “atrapar” a la mosca.

6. **Importancia del Acercamiento desde Todas Direcciones:** En el caso de varias variables, es crucial que el matamoscas se acerque a la mosca desde cualquier dirección en el espacio tridimensional. Si esto sucede y los límites son cero, entonces podemos decir que el matamoscas ha atrapado a la mosca en el momento  $t_0$ .

Este ejemplo ilustra cómo los límites en varias variables nos permiten analizar situaciones en las que múltiples factores (en este caso, las coordenadas tridimensionales de dos objetos en movimiento) interactúan y convergen en un punto en el espacio y el tiempo. Es una forma de visualizar cómo los límites funcionan en un contexto más complejo que el de una sola variable. Veamos ahora la continuidad en varias variables con el movimiento de una mosca y un matamoscas para que nos quede más claro este concepto.

1. **Movimiento en Tres Dimensiones:** Imagina un mosquito volando alrededor en una habitación, moviéndose en todas las direcciones posibles (arriba/abajo, izquierda/derecha, adelante/atrás). Su posición en cualquier momento se puede describir con tres coordenadas:  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , donde  $t$  es el tiempo. Ahora,
2. **El Matamoscas en Acción:** Ahora, imagina que alguien está tratando de atrapar al mosquito con un matamoscas. El matamoscas también se mueve en tres dimensiones y su posición en cualquier momento es  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$ .
3. **Continuidad del Movimiento:** En términos matemáticos, decimos que el movimiento del mosquito y el matamoscas es continuo si se pueden mover a cualquier punto en su trayectoria de una manera suave y sin saltos abruptos.
4. **Aplicación de Límites para la Continuidad:** Para que el movimiento sea continuo, la posición del mosquito y del matamoscas deben cambiar de manera suave y predecible a medida que el tiempo avanza. Esto significa que, para cualquier momento  $t_0$ , los límites de las posiciones cuando  $t$  se acerca a  $t_0$  deben ser iguales a las posiciones en  $t_0$ . Es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= x(t_0), & \lim_{t \rightarrow t_0} a(t) &= a(t_0), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) &= y(t_0), & \lim_{t \rightarrow t_0} b(t) &= b(t_0), \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) &= z(t_0) & \text{y} & \lim_{t \rightarrow t_0} c(t) = c(t_0). \end{aligned}$$

donde  $t_0$  es un momento en el tiempo.

5. **Intento de Atrapar al Mosquito:** Si el matamoscas intenta atrapar al mosquito, necesitamos que sus trayectorias se intersecten en un punto en el espacio. La continuidad en sus movimientos nos permite predecir si pueden encontrarse en el mismo punto en el mismo momento.
6. **Importancia de la Continuidad en Varias Variables:** En la práctica, la continuidad en varias variables es crucial para modelar y predecir el comportamiento en sistemas complejos, como el movimiento en el espacio tridimensional. Si el movimiento del matamoscas y del mosquito no es continuo, sería impredecible y

abrupto, lo que haría casi imposible saber si el matamoscas puede atrapar al mosquito.

Este ejemplo demuestra cómo el concepto de continuidad, aplicado a varias variables, ayuda a entender y predecir interacciones complejas en el mundo real, como el movimiento coordinado o el encuentro entre dos objetos en movimiento en un espacio tridimensional. Todos los conceptos los podemos generalizar a más variables, mostramos algunos casos muy específicos. El límite de una función vectorial  $\vec{r}$  se define obteniendo los límites de sus funciones componentes como se señala a continuación. Iniciaremos con un breve recordatorio de algunos conceptos esenciales, los cuales se usan para comprender dichos conceptos se refieren a límites funciones. Iniciamos con los límites de las funciones vectoriales.

**Definición 3.5.1.** sea  $\vec{r}$  una función vectorial cuyos valores están dados por

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$$

entonces el límite de  $\vec{r}$  cuando  $t$  se aproxima a  $t_1$  está definida por

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} f(t)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow t_1} g(t)\hat{j}$$

si estos límites existen.

**Definición 3.5.2.** Si

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} f_1(t)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow t_1} f_2(t)\hat{j} + \lim_{t \rightarrow t_1} f_3(t)\hat{k}$$

**Definición 3.5.3.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, La función  $f$  tiene como límite a  $L \in \mathbb{R}^m$  cuando  $\vec{a} \rightarrow \vec{u}$ , si para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |\vec{a} - \vec{u}| < \delta$  implica  $|f(\vec{a}) - \vec{L}| < \varepsilon$ . A lo que escribimos:

$$\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) = \vec{L}$$

**Ejemplo 294.** Demuestre que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 - 1) = 0$  usando la definición.

*Demostración.* En primer lugar vemos que a partir de

$$\|(x, y) - (1, 1)\| \leq \delta$$

se puede deducir directamente que

$$|x - 1| \leq \delta \quad \text{e} \quad |y - 1| \leq \delta \quad \text{y entonces} \quad |x - 1| \leq \delta \quad \text{y} \quad |x| \leq \delta + 1. \quad (3.5)$$

Por otro lado

$$|f(x) - L| = |x^2 - 1 - 0| = |x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| \quad (3.6)$$

Así, dado  $\varepsilon > 0$  podemos elegir  $\delta > 0$  de modo que

$$\delta(\delta + 2) \leq \varepsilon.$$

Entonces, si  $\|(x, y) - (1, 1)\| \leq \delta$ , tenemos (3.5), y entonces obtenemos de (3.5) que  $|f(x) - L| \leq \delta(\delta + 2) \leq \varepsilon$ .  $\square$

**Ejemplo 295.** Demuestre usando la definición que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2}{x-y} = 4$ .

*Demostración.* Partimos como en el ejemplo anterior viendo que si

$$\|(x,y) - (2,1)\| \leq \delta$$

entonces se tiene directamente que

$$|x-2| \leq \delta \quad \text{e} \quad |y-1| \leq \delta. \quad (3.7)$$

Por otro lado, un desarrollo algebraico simple nos lleva a lo siguiente

$$|f(x) - L| = \left| \frac{x^2}{x-y} - 4 \right| = \frac{|x^2 - 4x + 4y|}{|x-y|} = \frac{|(x-2)^2 - 4(y-1)|}{|x-y|}. \quad (3.8)$$

Observamos aquí dos hechos relevantes. Primero, en el numerador tenemos una expresión que depende esencialmente de  $|x-2|$  y  $|y-1|$ , cantidades controladas por  $\delta$ , según (3.7). Segundo, en el denominador tenemos  $|x-y|$ , que es una cantidad que podría anularse si uno no es cuidadoso.

Para tratar este último término procedemos en una primera etapa encontrando un valor  $\delta_1$ , medio, que si bien no nos permitirá acotar por  $\varepsilon$  nos permitirá controlar  $|x-y|$ . El denominador no se anula en  $(2,1)$ , de aquí vemos que si elegimos  $\delta_1 = \frac{1}{4}$ , por ejemplo, entonces de (3.7) podemos concluir que

$$|x-y| > \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

Suponiendo entonces que (3.9) se tiene, obtenemos de (3.7) y (3.8) que

$$|f(x) - L| = \frac{|(x-2)^2 - 4(y-1)|}{|x-y|} \leq 2|(x-2)^2 - 4(y-1)|$$

De aquí, usando nuevamente (3.7) podemos acotar mejor

$$|f(x) - L| \leq \frac{1}{2}|x-2| + 8|y-1| \leq (8|x-2| + |y-1|)$$

Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos elegir  $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{16}$ . Pero debemos asegurarnos que los argumentos anteriores sean siempre válidos y eso lo logramos si elegimos  $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{16} \right\}$  y se tendrá que

$$\|(x,y) - (2,1)\| \leq \delta \quad \text{implica} \quad \left| \frac{x^2}{x-y} - 4 \right| \leq \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 296.** Demuestre usando la definición que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

*Demostración.* Del curso de Cálculo sabemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1.$$

se puede deducir directamente que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|\alpha| \leq \delta_1 \quad \text{implica} \quad \left| \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Elijamos ahora  $\delta = \sqrt{\delta_1}$ . Entonces  $\|(x,y) - (0,0)\| \leq \delta$ , y entonces

$$\left| \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

□

**Ejemplo 297.** Determinar si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} (x^2 + 2xy)$ .

*Demostración.* Analicemos primero, si  $(x,y) \rightarrow (3,-1)$  significa que  $x$  está cercano a 3 e  $y$  está cercano a  $-1$  por lo tanto el valor de  $x^2 + 2xy$  debe estar próximo a 3 se espera entonces que si este límite existe debe ocurrir que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} (x^2 + 2xy) = 3.$$

Observe que

$$|x - 3| \leq \sqrt{(x-3)^2} \leq \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = \|(x,y) - (3,-1)\|$$

y

$$|y + 1| \leq \sqrt{(x-3)^2} \leq \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = \|(x,y) - (3,-1)\|$$

por lo cuál:  $\|(x,y) - (3,-1)\| < \delta$  implica  $|x - 3| < \delta$  y  $|y + 1| < \delta$ . Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} |x^2 + 2xy - 3| &= |(x-3)^2 + 2(x-3)(y+1) + 4(x-3) + 6(y+1)| \\ &\leq |x-3|^2 + 2|x-3||y+1| + 4|x-3| + 6|y+1| \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad se puede poner la condición  $\delta < 1$  entonces mayorando término a término, produce

$$\begin{aligned} |x^2 + 2xy - 3| &\leq |x-3|^2 + 2|x-3||y+1| + 4|x-3| + 6|y+1| \\ &\leq \delta + 2\delta + 4\delta + 6\delta = 13\delta \end{aligned}$$

Definiendo  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{13} \right\}$ ,  $\|(x, y) - (3, -1)\| < \delta$  implica

$$|x^2 + 2xy - 3| < 13|x^2 + 2xy - 3| < 13\delta = 13 \frac{\varepsilon}{13} = \varepsilon.$$

Lo cuál prueba que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} (x^2 + 2xy) = 3$ . □

**Ejemplo 298.** Probar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  y

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \quad y \quad y^2 \leq x^2 + y^2,$$

implica

$$x^2 y^2 \leq (x^2 + y^2)^2$$

implica

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2, \quad \text{donde } (x, y) \neq (0, 0)$$

Sea  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ,  $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Por lo que tenemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

implica  $\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\varepsilon}$ , implica  $x^2 + y^2 < \varepsilon$ . Por lo tanto

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Lo cuál prueba que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$ . □

**Ejemplo 299.** Calculemos el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

*Demostración.* Primero tomamos límites a lo largo de rectas  $y = kx$ . El límite se convierte entonces en un límite de una sola variable:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + (kx)^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{x^2(1+k^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{|x| \sqrt{1+k^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{\sqrt{1+k^2}} \\ &= 0 \text{ para toda } k. \end{aligned}$$

Con esto logramos una conjetura del límite, que podemos probar o bien con la definición de límite o bien con el criterio de comparación. Como podemos acotar la expresión

$$0 \leq \frac{x^2 x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

y es obvio que  $x^2 \sqrt{x^2 + y^2}$  tiende a 0 cuando  $x \rightarrow 0$ , entonces por criterio de comparación (lema del sándwich), nos queda que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Sin embargo, que el límite de cualquier recta sea 0 no implica que el límite sea ese número. Por ejemplo, sea  $f$  la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x^2 \\ 0 & \text{si } y \neq x^2 \end{cases}$$

El límite a lo largo de cualquier recta en el origen es 0. Sin embargo, si me acerco al origen a través de la parábola  $y = x^2$  el límite es 1. Por lo tanto, el límite no existe.  $\square$

**Proposición 3.15.** Sean  $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que si  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  es un punto de acumulación de  $D_1$  y  $D_2$  y  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) = M$  y  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} g(\vec{a}) = N$  tenemos que las propiedades de los límites son las siguientes:

1. El límite es único.
2. Sea  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  y  $\vec{M} = (M_1, \dots, M_m)$ . Entonces,  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) = \vec{M}$  implica  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f_j(\vec{a}) = M_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ .
3.  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} (f \pm g)(\vec{a}) = \lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) \pm \lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} g(\vec{a})$ .
4.  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} \lambda f(\vec{a}) = \lambda \lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a})$ .
5.  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} (f \cdot g)(\vec{a}) = (\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a})) (\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} g(\vec{a}))$ .
6.  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} \left( \frac{f}{g} \right) (\vec{a}) = \frac{\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a})}{\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} g(\vec{a})}$  si  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} g(\vec{a}) \neq 0$ .
7. Si en un entorno de  $\vec{u}$ ,  $f \leq g$  entonces  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) \leq \lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} g(\vec{a})$ .

*Demostración.* véase [7].  $\square$

**Teorema 3.16.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) = M$  y  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es una función continua en  $I$ . Entonces  $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y

$$\lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} (g \circ f)(\vec{a}) = g \left( \lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}) \right) = g(M)$$

*Demostración.* véase [7]. □

**Ejemplo 300.** Evaluar  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} e^{x+y^2}$ .

*Demostración.* Sea  $g(z) = e^z$  continua en todo  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} x + y^2 = 7$ , entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} e^{x+y^2} = e^7.$$

### 1. Trayectorias

Sea  $(x, y)$  un punto de  $\mathbb{R}^2$ . Una trayectoria por  $(x, y)$  es cualquier recta o curva que contenga a  $(x, y)$ .

### 2. Regla de las trayectorias

Una condición necesaria (no suficiente) para que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  exista y sea  $M$ , es que si los límites  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, \varphi(x))$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, \phi(x))$  existen, para cualquier trayectoria  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \phi(x)$ , que pase por  $(x_0, y_0)$ , deben valer  $M$ . □

**Ejemplo 301.** Sea  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  ¿Existirá  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ?

*Demostración.* El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y tenemos que  $(0, 0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Sea  $T_1 = \{(x, y) | y = \alpha x\}$  familia de rectas que pasan por el origen si el límite existe debería ocurrir que:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\alpha x)}{x^4 + (\alpha x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha x)}{x^2 + \alpha^2} = 0. \end{aligned}$$

Esto señala que si el límite existe este debe ser cero, seguimos averiguando: Sea  $T_2 = \{(x, y) | y = x^2\}$  la familia de parábolas que pasan por el origen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

No puede ser, el límite si existe no puede tener dos valores diferentes. Luego, **no existe**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

□

**Observación 25** (Límites Iterados). *Se llaman límites iterados a los siguientes.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right).$$

**Ejemplo 302.** Sea  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Determine los límites iterados de  $f$ .

*Demostración.* Tenemos que  $(0, 0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Evaluemos, los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Los conceptos de límites y límites iterados se relacionan según los siguientes □

**Teorema 3.17.** Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existe, y si para cada  $x$  en una vecindad reducida de  $x_0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  existe. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

*Demostración.* véase [7]. □

Este teorema nos lleva a formular otro equivalente.

**Teorema 3.18.** Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existe, y si para cada  $y$  en una vecindad reducida de  $y_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  existe. Entonces

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

*Demostración.* véase [7]. □

Ahora, se puede combinar ambos teoremas, lo que produce:

**Teorema 3.19.** Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existe, y si para cada  $x$  en una vecindad reducida de  $x_0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  existe, y si para cada  $y$  en una vecindad reducida de  $y_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  existe. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

*Demostración.* véase [7]. □

*Nota 3.5.1.* En el ejemplo 302 podemos concluir que no existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

pues de existir su límites iterados deben ser iguales.

**Ejemplo 303.** Determine  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$ , donde  $\vec{r}(t) = (1 + t^3)\hat{i} + te^{-t}\hat{j} + \frac{\text{sent}}{t}\hat{k}$ .

*Demostración.* El  $\lim \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t^3)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow 0} te^{-t}\hat{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sent}}{t}\hat{k} = \hat{i} + \hat{k}.$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( (1 + t^3)\hat{i} + te^{-t}\hat{j} + \frac{\text{sent}}{t}\hat{k} \right) = \hat{i} + \hat{k}$ . □

**Ejemplo 304.** Determine  $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t)$ , si existe, donde  $\vec{r}(t) = (3t - 2)\hat{i} + t^2\hat{j}$ .

*Demostración.* El  $\lim \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (3t - 2)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow 2} t^2\hat{j} = (3(2) - 2)\hat{i} + (2)^2\hat{j} = 4\hat{i} + 4\hat{j}.$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow 2} ((3t - 2)\hat{i} + t^2\hat{j}) = 4\hat{i} + 4\hat{j}$ . □

**Ejemplo 305.** Determine  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$ , si existe, donde  $\vec{r}(t) = \cos t\hat{i} + 8e^t\hat{j}$ .

*Demostración.* El  $\lim \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)\hat{i} + \lim_{t \rightarrow 0} 8e^t\hat{j} = (\cos(0))\hat{i} + 8e^{(0)}\hat{j} \\ &= (1)\hat{i} + 8(1)\hat{j} = \hat{i} + 8\hat{j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow 0} (\cos t\hat{i} + 8e^t\hat{j}) = \hat{i} + 8\hat{j}$ . □

**Ejemplo 306.** Determine  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \vec{r}(t)$ , si existe, donde  $\vec{r}(t) = 5 \text{sent}\hat{i} + \text{cost}\hat{j}$ .

*Demostración.* El  $\lim \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (5 \text{sent})\hat{i} + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{cost})\hat{j} = 5 \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right)\hat{i} + \cos \left( \frac{\pi}{2} \right)\hat{j} \\ &= 5(1)\hat{i} + (0)\hat{j} = 5\hat{i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (5 \text{sent}\hat{i} + \text{cost}\hat{j}) = 5\hat{i}$ . □

**Ejemplo 307.** Determine  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$ , donde  $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + 3t\hat{j} + \frac{1 - \text{cost}}{t}\hat{k}$ .

*Demostración.* El  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^2) \hat{i} + \lim_{t \rightarrow 0} (3t) \hat{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos t}{t} \right) \hat{k} \\ &= (0)^2 \hat{i} + (0) \hat{j} + (0) \hat{k} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( t^2 \hat{i} + 3t \hat{j} + \frac{1 - \cos t}{t} \hat{k} \right) = 0.$  □

**Ejemplo 308.** Determine  $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t)$ , donde  $\vec{r}(t) = (t^2 - 3) \hat{i} + e^t \hat{j} + \sin t \pi \hat{k}$ .

*Demostración.* El  $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow 2} (t^2 - 3) \hat{i} + \lim_{t \rightarrow 2} (e^t) \hat{j} + \lim_{t \rightarrow 2} (\sin t \pi) \hat{k} \\ &= ((2)^2 - 3) \hat{i} + e^{(2)} \hat{j} + (0) \hat{k} = \hat{i} + e^2 \hat{j}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow 2} ((t^2 - 3) \hat{i} + e^t \hat{j} + \sin t \pi \hat{k}) = \hat{i} + e^2 \hat{j}.$  □

**Ejemplo 309.** Determine  $\lim_{t \rightarrow -1} \vec{r}(t)$ , si existe, donde  $\vec{r}(t) = e^{t+1} \hat{i} + |t + 1| \hat{j}$ .

*Demostración.* El  $\lim_{t \rightarrow -1} \vec{r}(t)$  es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones componentes de  $\vec{r}(t)$ , luego,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -1} \vec{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow -1} (e^{t+1}) \hat{i} + \lim_{t \rightarrow -1} |t + 1| \hat{j} = e^{(-1)+1} \hat{i} + |(-1) + 1| \hat{j} \\ &= 1 \hat{i} + |0| \hat{j} = \hat{i}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow -1} (e^{t+1} \hat{i} + |t + 1| \hat{j}) = \hat{i}.$  □

**Ejemplo 310.** Calculando  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a.$

**Ejemplo 311.** Calculando  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b.$

**Ejemplo 312.** Calculando

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (5,1)} x^2 + y^2 = (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26.$$

**Ejemplo 313.** Calculamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} \frac{x + 2y}{x^2 + y} = \frac{(1) + 2(4)}{(1)^2 + 4} = \frac{1 + 8}{1 + 4} = \frac{9}{5}.$$

**Ejemplo 314.** Calculamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x + xy + 8}{x^2y + 6xy + y^3} = \frac{(0) + (0)(1) + 8}{(0)^2(1) + 6(0)(1) + (1)^3} = \frac{0 + 0 + 8}{0 + 0 + 1} = 8.$$

**Ejemplo 315.** Calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{x-y}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (x+y) = (2) + (2) = 4. \end{aligned}$$

**Ejemplo 316.** Calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\cancel{(x-y)}(x^2 + xy + y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} = \frac{(1)^2 + (1)(1) + (1)^2}{(1) + (1)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 317.** Calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(\sqrt{x+y} - \sqrt{y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})}{x(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(x+y) - y}{x(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0+1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 318.** Calculamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \operatorname{sen} y} = \frac{1+1}{1+0} = 2.$$

**Ejemplo 319.** Calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2y + y^2x - y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy(x-y) - y^3}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2) - xy(x-y)}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)(x^2 + \cancel{xy} + y^2 - \cancel{xy})}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)\cancel{(x^2 + y^2)}}{\cancel{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x-y) \\ &= (0) - (0) = 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 320.** Sea  $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6 + y^2}$ , calculamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}.$$

*Demostración.* Primero, el dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  y tenemos que  $(0,0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Sea  $T_1 = \{(x,y) | y = \alpha x\}$  familia de rectas que pasan por el origen si el límite existe debería ocurrir que:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(\alpha x)}{x^6 + (\alpha x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(\alpha)}{x^6 + (\alpha x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \alpha}{x^4 + \alpha^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(0)^2 \alpha}{(0)^4 + \alpha^2} = 0. \end{aligned}$$

Esto señala que si el límite existe este debe ser cero, seguimos averiguando: Sea  $T_2 = \{(x,y) | y = x^3\}$  la familia de trayectorias que pasan por el origen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}$$

No puede ser, el límite si existe no puede tener dos valores diferentes. Luego, **no existe**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}.$$

□

**Ejemplo 321.** Calculamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 5y^2}{x^2 + 3y^2}$$

*Demostración.* Primero, el dominio de  $f(x,y) = \frac{x^2 - 5y^2}{x^2 + 3y^2}$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Tenemos que  $(0,0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Evaluemos, los límites iterados

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5y^2}{x^2 + 3y^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5y^2}{x^2 + 3y^2} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-5y^2}{3y^2} = \frac{-5}{3}. \end{aligned}$$

Puesto que estos límites son diferentes, el límite no existe.

□

**Ejemplo 322.** Calculamos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

*Demostración.* Primero, el dominio de  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Tenemos que  $(0,0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Evaluemos, los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

En este ejemplo, los límites iterados son iguales. Sin embargo, esto no significa que exista el límite, puesto que hemos verificado cada trayectoria hacia  $(0, 0)$ .

Si  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  a lo largo de cualquier recta no horizontal  $y = mx$  que pasa por el origen, entonces como  $m \neq 0$ , Sea  $T = \{(x, y) | y = mx\}$  familia de rectas que pasan por el origen si el límite existe debería ocurrir que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1+m^2}$$

Puesto que el límite depende de la pendiente de la recta sobre la cual se tiende al origen concluimos, que el límite no existe. Por ejemplo sobre la recta  $y = x$ , el

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

Para la recta  $y = 3x$ , el

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{3}{10}.$$

Podemos emplear una gran cantidad de trayectorias que pasen por el origen, tales como  $y = kx^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = \sqrt{x}$ , así sucesivamente.  $\square$

**Ejemplo 323.** Sea  $f(x, y) = \frac{4x^2y}{x^3 + y^3}$  ¿Existirá  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ?

*Demostración.* El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y tenemos que  $(0, 0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Sea  $y = x$  la recta que pasan por el origen si el límite existe debería ocurrir que:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y}{x^3 + y^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2(x)}{x^3 + (x)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2. \end{aligned}$$

Esto señala que si el límite existe este debe ser cero, seguimos averiguando: Sea  $y = 2x$  la recta que pasan por el origen.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y}{x^3 + y^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2(2x)}{x^3 + (2x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{x^3 + 8(x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{9x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{9} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

No puede ser, el límite si existe no puede tener dos valores diferentes. Luego, **no existe**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y}{x^3 + y^3}.$$

$\square$

**Ejemplo 324.** Sea  $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$  ¿Existirá  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ?

*Demostración.* El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  y tenemos que  $(0,0)$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ . Sea  $y = x$  la recta que pasan por el origen si el límite existe debería ocurrir que:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 (x)^4}{(x^2 + (x)^4)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{(x^2(1 + (x)^2))^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^6(1 + (x)^2)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 + (x)^2)^3} = \frac{(0)^2}{(1 + (0)^2)^3} = \frac{0}{(1 + 0)^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto señala que si el límite existe este debe ser cero, seguimos averiguando: Sea  $y = \sqrt{x}$  la recta que pasan por el origen.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 (\sqrt{x})^4}{(x^2 + (\sqrt{x})^4)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{(2x^2)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{8x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Según la demostración, no toda trayectoria, que pasa por el  $(0,0)$  lleva al mismo valor límite y por lo tanto el siguiente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

no existe. □

**Ejemplo 325.** Calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen } xy}{xy}$ .

*Demostración.* Sea  $t = xy$  tenemos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen } xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 0$ . □

**Ejemplo 326** (Finanzas y Economía). Para calcular el interés compuesto, se usa una serie geométrica. El futuro valor de una inversión se calcula utilizando la fórmula de la suma de una serie geométrica, donde cada término representa el valor de la inversión en un periodo.

Vamos a explorar un ejemplo más complejo que involucra series, sucesiones y análisis matemático. Este ejemplo no solo aplicará teoría matemática de manera detallada sino también conceptos de análisis matemático para entender la convergencia y el comportamiento a largo plazo de la inversión.

**Ejemplo 327** (La Modelización del Crecimiento de una Inversión Financiera Mediante el Interés Compuesto). **Contexto del Problema**

Supongamos que realizas una inversión inicial  $P$  en una cuenta que ofrece una tasa de interés anual  $r$ , compuesta mensualmente. Quieres saber cuánto dinero tendrás en la cuenta después de  $n$  años.

**Fórmula del Interés Compuesto**

La fórmula para calcular el valor futuro  $A$  de una inversión mediante interés compuesto es:

$$A = P \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^{mn}$$

donde:

1.  $A$  es el monto final de la inversión después de  $n$  años.
2.  $P$  es el monto principal de la inversión (inversión inicial).
3.  $r$  es la tasa de interés anual (en forma decimal).
4.  $m$  es el número de veces que el interés se compone por año.
5.  $n$  es el número de años.

**Aplicando Series y Sucesiones**

**Sucesión de Valores Futuros:**

Consideremos la sucesión  $\{A_k\}$  donde  $A_k$  representa el valor de la inversión después de  $k$  meses. Según la fórmula de interés compuesto, cada término de la sucesión se calcula como  $A_k = P \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^k$ , donde  $k = mn$ .

**Series en Interés Compuesto:**

Si quisieras entender cómo se acumula el interés mes a mes, podrías descomponer el crecimiento total en una serie donde cada término representa el interés añadido en ese mes.

**Análisis Matemático**

**Convergencia:**

Interés en el límite cuando  $n$  tiende a infinito: A medida que  $n$  se hace muy grande, la inversión crece sin límites bajo una tasa de interés positiva, demostrando la convergencia de la inversión hacia un valor infinitamente grande en teoría. Sin embargo, en la práctica, este análisis ayuda a entender el efecto potente del interés compuesto a largo plazo.

**Tasa Efectiva de Interés Anual:**

Utilizando análisis matemático, podemos derivar la tasa efectiva de interés anual  $r_{ef}$  que es equivalente a compuestar (se refiere al proceso de aplicar el interés compuesto en una inversión o préstamo) el interés continuamente. Esto se obtiene evaluando el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^m,$$

que es  $e^r$ , donde  $e$  es la base de los logaritmos naturales.

**Ejemplo 328** (Ejemplo Numérico). Supongamos que inviertes  $1000(P)$  a una tasa de interés anual del  $5\%$  ( $r = 0.05$ ), compuesta mensualmente ( $m = 12$ ), durante 10 años ( $n = 10$ ).

Aplicando la fórmula del interés compuesto, calculamos el valor futuro de la inversión:

$$A = 1000 \left( 1 + \frac{0.05}{12} \right)^{12 \times 10}.$$

Se deja comprobar al lector este valor utilizando Python para ilustrar cómo se aplica esta teoría matemática en un caso práctico.

Aplicando la fórmula del interés compuesto, el valor futuro de tu inversión de 1000 a una tasa de interés anual del  $5\%$ , compuesta mensualmente durante 10 años, sería aproximadamente 1647.01.

Este cálculo muestra cómo, mediante el uso de series y sucesiones junto con el análisis matemático, podemos prever el crecimiento de una inversión bajo el principio del interés compuesto. La capacidad de la matemática para modelar y predecir tales crecimientos es una herramienta poderosa en el campo de las finanzas, permitiéndote hacer planes financieros informados y entender el impacto del tiempo y la tasa de interés en tus inversiones. Para completar el análisis, vamos a calcular la tasa efectiva de interés anual ( $r_{ef}$ ) utilizando el límite cuando el número de periodos de composición  $m$  tiende a infinito. Este cálculo nos dará una idea de cuán poderoso puede ser el interés compuesto cuando se aplica de manera continua.

La fórmula para calcular la tasa efectiva de interés anual cuando el interés se compone continuamente es:  $r_{ef} = e^r - 1$  donde:

1.  $e$  es la base de los logaritmos naturales, aproximadamente igual a 2.71828.
2.  $r$  es la tasa de interés anual en forma decimal.

Usaremos esta fórmula para calcular  $r_{ef}$  dado que  $r = 0.05$ .

La tasa efectiva de interés anual, cuando el interés se compone de manera continua, es aproximadamente  $5.13\%$ . Esto significa que, aunque la tasa nominal es del  $5\%$ , el efecto de compuesto continuo eleva ligeramente la tasa efectiva, mostrando el poder del interés compuesto incluso en un margen relativamente pequeño para este ejemplo.

Este análisis demuestra cómo el análisis matemático y los conceptos de series y sucesiones se aplican en el contexto financiero para proporcionar una comprensión más profunda de cómo crece el dinero a lo largo del tiempo bajo diferentes esquemas de interés.

## 3.6. Continuidad

**Teorema 3.20** (Caracterización en términos de sucesiones).  *$f$  es continua en  $\vec{a}$  si y sólo si para toda sucesión  $\{\vec{a}_n\}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{a}_n) = f(\vec{a})$ .*

*Demostración.* véase [7].

□

**Definición 3.6.1** (Función continua). Una función  $f$  es continua en  $\vec{u}$  si y sólo si

$$f(\vec{u}) = \lim_{\vec{a} \rightarrow \vec{u}} f(\vec{a}).$$

Es decir, para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|\vec{a} - \vec{u}| < \delta$  implica  $|f(\vec{a}) - f(\vec{u})| < \varepsilon$ .

**Definición 3.6.2** (Continuidad). Una función vectorial  $\vec{r}$  es **continua en  $a$**  si

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$$

$\vec{r}$  es continua en  $a$  si y sólo si sus funciones componentes  $f, g, h$  son continuas en  $a$ .

**Definición 3.6.3** (Plano). La función vectorial  $\vec{r}(t)$  es continua en  $a$  si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1.  $\vec{r}(a)$  existe.
2.  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$  existe.
3.  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$ .

Recuerde que evaluar límites de funciones continuas de una variable es fácil. Eso puede hacerse mediante sustitución directa, porque la propiedad definitoria de una función continua es  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Las funciones continuas de dos variables también se definen mediante la propiedad de sustitución directa.

**Definición 3.6.4.** Una función  $f$  de dos variables se llama **continua en  $(a, b)$**  si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Se dice que  $f$  es continua en  $D$  si  $f$  es continua en cada punto  $(a, b)$  en  $D$ .

**Definición 3.6.5.** Se dice que una función  $f(x, y)$  es continua en  $(a, b)$  si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1.  $f(a, b)$  existe.
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$  existe.
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ .

Si una de estas tres condiciones no se satisface en el punto  $(a, b)$  entonces se dice que  $f$  es discontinua en  $(a, b)$ .

El significado intuitivo de la continuidad es que si el punto  $(x, y)$  cambia un poco, el valor de  $f(x, y)$  cambia también solo un poco. Esto significa que una superficie con la gráfica de una función continua no tiene agujeros ni quiebres.

Usando las propiedades de los límites se puede observar que las sumas, diferencias, productos y cocientes de las funciones continuas son continuos en sus dominios.

**Proposición 3.21.** Sean  $f$  y  $g$ , dos funciones continuas en  $(a, b)$  entonces:

1.  $f + g$  es continua en  $(a, b)$ .
2.  $f - g$  es continua en  $(a, b)$ .
3.  $f \cdot g$  es continua en  $(a, b)$ .
4.  $\frac{f}{g}$  es continua en  $(a, b)$ . Excepto en los puntos en donde el denominador es cero.

*Demostración.* véase [7]. □

Use este hecho para ejemplificar funciones continuas. Una **función polinomial de dos variables** (o polinomio para abreviar) es una suma de términos de la forma  $cx^m y^n$ , donde  $c$  es una constante y  $m$  y  $n$  son enteros no negativos. Una **función racional** es una razón de polinomios. Por ejemplo,  $f(x, y) = x^4 + 5x^3 y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$  es un polinomio, mientras que  $g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$  es una función racional.

Los límites en (2) indican que las funciones  $f(x, y) = x$ ,  $g(x, y) = y$ , y  $h(x, y) = c$  son continuas. Como cualquier polinomio puede basarse en funciones simples  $f$ ,  $g$  y  $h$  por multiplicación y adición, se sabe que **todos los polinomios son continuos** en  $\mathbb{R}^2$ . De igual manera, toda función racional es continua en su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

**Ejemplo 329.** Evalúe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y)$ .

*Demostración.* Como  $f(x, y) = x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y$  es un polinomio, es continuo en todas partes, así que se puede determinar el límite por sustitución directa:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y) \\ = (1)^2 (2)^3 - (1)^3 (2)^2 + 3(1) + 2(2) = 11. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 330.** ¿Dónde es continua la función  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ?

*Demostración.* La función  $f$  es discontinua en  $(0, 0)$  porque no está definida ahí. Como  $f$  es una función racional, es continua en su dominio, el cual es el conjunto  $D = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ . □

**Ejemplo 331.** Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Demostración.* Aquí  $g$  se define en  $(0,0)$ , pero  $g$  sigue siendo discontinua ahí porque  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$  no existe (Ver Nota 3.5.1)  $\square$

**Ejemplo 332.** Sea

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se sabe que  $g$  es continua para  $(x,y) \neq (0,0)$ , ya que ahí es igual a una función racional. Asimismo, del ejemplo 298 se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right) = (0,0).$$

Por tanto,  $g$  es continua en  $(0,0)$ , y en consecuencia es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

Al igual que en las funciones de una variable, la composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. De hecho, puede demostrarse que si  $f$  es una función continua de dos variables y  $g$  es una función continua de una variable definida en el rango de  $f$ , la función compuesta  $h = g \circ f$  definida por  $h(x,y) = g(f(x,y))$  es también una función continua.

**Teorema 3.22** (Continuidad de una función compuesta). *Si  $h$  es continua en  $(x_0, y_0)$  y  $g$  es continua en  $h(x_0, y_0)$ , entonces la función compuesta por  $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$  es continua en  $(x_0, y_0)$ . Es decir,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$ .*

*Demostración.* véase [7].  $\square$

**Ejemplo 333.** ¿Dónde es continua la función  $h(x,y) = \arctan(y/x)$ ?

*Demostración.* La función  $f(x,y) = \frac{y}{x}$  es una función racional, y por tanto continua excepto en la recta  $x = 0$ . La función  $g(t) = \arctan t$  es continua en todas partes. Así, la función compuesta  $g(f(x,y)) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = h(x,y)$  es continua excepto en  $x = 0$ . La gráfica (hacerlo con GEOGEBRA) muestra la interrupción en la gráfica de  $h$  arriba del eje  $y$ .  $\square$

**Definición 3.6.6** (Espacio). La función vectorial  $\vec{r}(t)$  es continua en  $a$  si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1.  $\vec{r}(a)$  existe.
2.  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t)$  existe.
3.  $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$ .

Las funciones continuas cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites. Además, la función de cada una de las coordenadas de una función continua también es continua.

**Teorema 3.23** (Continuidad de la composición). *Si  $f$  es continua en  $\vec{a}$  y  $g$  es continua en  $f(\vec{a})$ , entonces  $g \circ f$  es continua en  $\vec{a}$ .*

*Demostración.* véase [7]. □

**Definición 3.6.7** (Función inversa). Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , y  $A \subset \mathbb{R}^m$ , definimos la función inversa:

$$f^{-1}(A) = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{a}) \in A\}.$$

**Teorema 3.24.**  *$f$  es continua si y sólo si para todo conjunto abierto  $A$ ,  $f^{-1}(A)$  es abierto.*

**Teorema 3.25.**  *$f$  es continua si y sólo si para todo conjunto cerrado  $B$ ,  $f^{-1}(B)$  es cerrado.*

**Ejemplo 334.** Determine dónde es continua la función dada. Sea

$$g(x, y) = 5x^4y^3 - x^3y - xy.$$

*Demostración.* La función  $g$  es continua en todo el plano ya que se trata de una función polinomial. □

**Ejemplo 335.** Analice la continuidad de  $h(x, y) = \frac{8xy}{x-y}$ .

*Demostración.* Se trata de una función racional. La función  $h$  es continua, excepto en los puntos en los que el denominador es igual a 0, que están dados por la ecuación

$$x - y = 0.$$

Por lo que  $h$  es continua en cualquier punto del espacio, excepto en los puntos de la recta  $x = y$ . □

**Ejemplo 336.** Analice la continuidad de  $h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$ .

*Demostración.* La función  $h$  es continua, excepto en los puntos en los que el denominador es igual a 0, que están dados por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

Por lo que  $h$  es continua en cualquier punto del espacio, excepto en los puntos del paraboloides  $x^2 + y^2 = z$ . □

**Ejemplo 337.** Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} (x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

*Demostración.* Está claro que en los puntos que no pertenecen a los ejes, la función es continua por ser composición de funciones continuas. Cuando nos preocupamos por la continuidad de  $g$  en un punto del eje  $x$ , del tipo  $(a, 0)$  para  $a$  no nulo, comprobamos que el límite

$$(x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y}$$

no existirá, pues el factor  $\operatorname{sen} \frac{1}{y}$  oscila de manera persistente cuando nos acercamos a cero, a no ser que la amplitud  $(x+y)$  converja a cero y en tal caso anule tales oscilaciones (lo que no puede ocurrir pues hemos tomado inicialmente  $a \neq 0$ ), o bien cuando el factor  $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$  sea nulo, lo que sí sucede para los valores  $x = \frac{1}{k\pi}$ . Así pues hay continuidad en los puntos  $(a, 0)$  con  $a = \frac{1}{k\pi}$ . Lo mismo sucede en los puntos  $(0, a)$  con  $a = \frac{1}{k\pi}$ . En el resto de puntos de los ejes, la función no es continua.

Finalmente, estudiamos qué sucede en el origen. En este caso, tenemos oscilaciones bruscas de los dos factores senoidales. Sin embargo como estas oscilaciones están acotadas por la unidad, y el factor amplitud  $(x+y)$  sí converge a cero, resulta que el límite es nulo, y por tanto la función es continua en el origen. De manera más precisa diríamos

$$0 \leq \left| (x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right| \leq |x+y| \rightarrow 0$$

si  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$ . □

**Ejemplo 338.** Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 y}{x^2 + |y|}, \operatorname{sen}(x+y) \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Demostración.* Fuera del origen ninguna de las funciones componentes presenta problemas de continuidad por lo que se trata de estudiar el límite cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  de las dos componentes de la función vectorial. La segunda componente es evidentemente continua. Con respecto a la primera debemos estudiar si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + |y|}$$

existe y es nulo. Planteando el límite en coordenadas polares es directo comprobar que esto es, efectivamente, así. □

Vamos a explorar un ejemplo más complejo y robusto que involucra series, sucesiones, y análisis matemático, considerando factores como recursos limitados, tasas de natalidad y mortalidad, y competencia entre individuos.

**Ejemplo 339** (El modelo de crecimiento de población de una especie en un ecosistema cerrado). **Contexto del Problema**

Queremos modelar el crecimiento de una población de conejos en una isla aislada. Inicialmente, la isla tiene suficientes recursos para sostener una población máxima (capacidad de carga) de 1000 conejos. La tasa de crecimiento de la población depende de los recursos disponibles, la tasa de natalidad, y la tasa de mortalidad, ajustándose por la competencia entre los conejos a medida que la población se acerca a la capacidad de carga.

### Teoría Matemática Aplicada

#### Sucesiones para Modelar la Población

Definimos  $P_n$  como el número de conejos en la isla en el año  $n$ . La población inicial  $P_0$  es de 100 conejos.

#### Modelo de Crecimiento Logístico

El modelo de crecimiento logístico se usa para prever cómo cambia la población año tras año, teniendo en cuenta la limitación de recursos.

La solución a la ecuación diferencial del modelo de crecimiento logístico es:

$$P(t) = \frac{K \cdot e^{C_1 K + rt}}{e^{C_1 K + rt} - 1}$$

donde:

1.  $P(t)$  es la población en el tiempo  $t$ ,
2.  $K$  es la capacidad de carga de la isla,
3.  $r$  es la tasa de crecimiento intrínseco de la población,
4.  $C_1$  es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales.

#### Análisis Matemático y Aplicación de Series

Para modelar el crecimiento año tras año, utilizamos la solución encontrada y aplicamos condiciones específicas de nuestro problema, como la población inicial  $P_0$  y la capacidad de carga  $K$ .

Supongamos que la tasa de crecimiento intrínseco  $r$  es de 0.1 (10% por año) y la capacidad de carga  $K$  es de 1000 conejos. La población inicial  $P_0$  de 100 conejos define nuestra constante  $C_1$  cuando resolvemos  $P(0) = 100$ .

#### Determinando la Constante $C_1$

Para encontrar  $C_1$ , aplicamos la condición inicial  $P(0) = 100$ :

$$100 = \frac{1000 \cdot e^{C_1 \cdot 1000}}{e^{C_1 \cdot 1000} - 1}$$

Resolvamos esta ecuación con Payton y obtendremos el resultado, lo dejamos como ejercicio para el lector.

### 3.6.1. Problema: Optimización Aerodinámica de un Carro de Carreras

Diseñar un sistema como una turbina, un avión, o un carro de carreras requiere una integración profunda de varios conceptos matemáticos, incluyendo continuidad, series y

sucesiones, cálculo vectorial, análisis matemático, probabilidad, y métodos numéricos. Abordemos un ejemplo enfocado en el diseño aerodinámico de un carro de carreras, donde estos conceptos juegan un papel crucial en optimizar su rendimiento y estabilidad.

**Objetivo:** Diseñar la forma aerodinámica óptima para un carro de carreras para minimizar la resistencia al aire y maximizar la fuerza descendente (downforce), mejorando así la velocidad y la estabilidad del carro.

### Aplicación de conceptos matemáticos

#### 1. Continuidad y análisis matemático:

- a) **Continuidad** es crucial para asegurar que la forma del carro sea suave, sin discontinuidades que puedan incrementar la resistencia al aire. Utilizamos funciones continuas para modelar la superficie del carro.
- b) **Análisis Matemático** se aplica para estudiar las propiedades de estas funciones, asegurando que sean diferenciables, lo que es necesario para aplicar cálculo vectorial.

#### 2. Series y Sucesiones:

Para modelar el flujo de aire alrededor del carro, utilizamos **series de Fourier**, descomponiendo el flujo de aire en componentes sinusoidales. Esto ayuda a analizar cómo diferentes formas afectan la resistencia y la fuerza descendente.

#### 3. Cálculo vectorial:

Se emplea para calcular el gradiente de presión y las fuerzas que actúan sobre el carro. Integrales de superficie y de línea se utilizan para determinar el efecto total del flujo de aire sobre el carro.

#### 4. Probabilidad:

En el diseño se consideran incertidumbres, como variaciones en la velocidad del aire y condiciones de la pista. La probabilidad ayuda a modelar estos factores y a diseñar un carro que sea eficiente bajo un rango de condiciones.

#### 5. Métodos Numéricos:

Se utilizan para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan el flujo de aire alrededor del carro, que son demasiado complejas para resolver analíticamente. Métodos como los de elementos finitos permiten simular el flujo de aire y optimizar la forma del carro.

### 3.6.2. Ejemplo Detallado: Simulación de Flujo de Aire

Supongamos que queremos minimizar la resistencia al aire  $C_d$  y maximizar la fuerza descendente  $C_l$ , donde  $C_d$  y  $C_l$  son los coeficientes de resistencia y de fuerza descendente, respectivamente. La forma del carro se modifica iterativamente, y en cada iteración, se calcula el flujo de aire utilizando métodos numéricos.

#### 1. Modelización del problema:

- a) La superficie del carro se divide en una malla de elementos finitos. Cada elemento se modela como un vector que representa una porción de la superficie.
- b) Las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el movimiento de los fluidos, se aplican a cada elemento de la malla para modelar el flujo de aire.

## 2. Cálculo de $C_d$ y $C_l$

$C_d$  y  $C_l$  se calculan integrando la presión y la fuerza de fricción sobre la superficie del carro. Estas integrales se aproximan utilizando métodos numéricos.

## 3. Optimización:

Se utiliza un algoritmo de optimización, como el método del gradiente descendente, para ajustar la forma del carro basándose en los cálculos de  $C_d$  y  $C_l$ .

El objetivo es encontrar la forma que minimice  $C_d$  mientras maximiza y  $C_l$ .

## 4. Simulación y Análisis:

Con cada iteración, se realiza una simulación computacional para evaluar el rendimiento. Las series y sucesiones se utilizan para analizar la convergencia del algoritmo de optimización.

### Conclusión

Este ejemplo ilustra cómo la integración de continuidad, series y sucesiones, cálculo vectorial, análisis matemático, probabilidad y métodos numéricos permite a ingenieros y diseñadores enfrentar el desafío complejo de optimizar el diseño aerodinámico de un carro de carreras. La matemática no solo proporciona las herramientas para modelar y simular el problema sino también para encontrar soluciones óptimas que mejoren significativamente el rendimiento del carro.

### 3.6.3. Modelo Matemático para el Problema de la Extracción de Petróleo

Por último, para crear un modelo matemático para el problema de la extracción de petróleo implica varios aspectos complejos, incluyendo el flujo del petróleo a través de medios porosos, la variabilidad de las reservas y la eficiencia de extracción. Vamos a desarrollar un modelo simplificado que aborde algunos de estos aspectos, utilizando series, sucesiones, cálculo vectorial, análisis matemático, probabilidad y métodos numéricos.

#### Descripción del Problema

El objetivo es modelar la extracción de petróleo de un yacimiento, maximizando la eficiencia de extracción mientras se minimizan los costos y se mantienen las reservas sostenibles a largo plazo.

#### Variables del Modelo

1.  $Q(t)$  : Cantidad de petróleo extraído en el tiempo  $t$ .
2.  $R(t)$  : Reservas de petróleo disponibles en el tiempo  $t$ .

3.  $P(t)$  : Presión en el yacimiento en el tiempo  $t$ .
4.  $C(t)$  : Costo de extracción por unidad de petróleo en el tiempo  $t$ .

### Supuestos del Modelo

1. **Flujo de Petróleo:** Se asume que el flujo de petróleo hacia el pozo de extracción sigue la ley de Darcy, que es proporcional al gradiente de presión y a la permeabilidad del medio.
2. **Declinación de la Reserva:** La tasa de declinación de la reserva se modela como una función de la cantidad de petróleo extraído y la presión restante en el yacimiento.
3. **Costos Variables:** El costo de extracción aumenta a medida que la presión del yacimiento disminuye y es necesario aplicar más tecnología para extraer el petróleo restante.

### Modelo Matemático

1. **Series y Sucesiones:**

$R(t+1) = R(t) - Q(t)$ , donde  $R(t)$  representa las reservas en el tiempo  $t$  y  $Q(t)$  es la cantidad extraída en el periodo  $t$ .

2. **Cálculo Vectorial:**

La ley de Darcy para el flujo de petróleo se puede representar como  $q = -k\nabla P$ , donde  $q$  es el flujo volumétrico por área,  $k$  es la permeabilidad del medio y  $\nabla P$  es el gradiente de presión. Esto nos permite calcular el flujo de petróleo basado en la geometría del yacimiento y la distribución de presión.

3. **Análisis Matemático:**

La continuidad y las propiedades de las funciones utilizadas para modelar  $R(t)$ ,  $P(t)$ , y  $C(t)$  son esenciales para garantizar soluciones realistas y para aplicar técnicas de optimización.

4. **Probabilidad:**

Modelamos la incertidumbre en las estimaciones de las reservas y en la variabilidad de la permeabilidad del yacimiento utilizando distribuciones de probabilidad. Esto permite calcular probabilidades de diferentes escenarios de extracción y reservas.

5. **Métodos numéricos:**

Utilizamos métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan el cambio en la presión  $P(t)$  y para optimizar la extracción  $Q(t)$  considerando las restricciones de costos y la declinación de la reserva. Por ejemplo, se pueden aplicar métodos de elementos finitos para calcular el flujo de petróleo y algoritmos de optimización como el gradiente descendente para encontrar la estrategia óptima de extracción.

### Implementación del modelo

1. Se define una función objetivo que puede ser maximizar la cantidad total de petróleo extraído  $Q(t)$  durante un período, minimizando al mismo tiempo  $C(t)$  y asegurando que  $R(t)$  no caiga por debajo de un umbral crítico.
2. Se aplican restricciones basadas en la física del flujo de fluidos y en las limitaciones económicas y ambientales.
3. Se utiliza simulación Monte Carlo para evaluar el impacto de la incertidumbre en las variables del modelo.

Este modelo es un punto de partida para comprender cómo se pueden aplicar conceptos matemáticos avanzados al problema de la extracción de petróleo. La implementación práctica requeriría un análisis detallado de datos específicos del yacimiento, software especializado para simulación y optimización, y una comprensión profunda de la ingeniería de petróleos y las ciencias de la tierra.

### 3.7. Ejercicios

1. Compruébe cada uno de los siguientes límites

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  (Adapte la demostración de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  a este caso).

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} = 0$  con  $n \geq 2$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2-1}} = 0$ .

c) Más generalmente, si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales que converge a cero, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|a_n|} = 0$ . (Recuerde que si  $c, d \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $c^2 < d^2$  implica  $c < d$ .)

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ , (Multiplique y divida  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  por  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ .)

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}) = 0$ , (Observe que  $\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$  es menor o igual a  $[\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2}] + [\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}]$ , haga un proceso análogo a d).)

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  donde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ . (¿Por qué  $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ ?)

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ .

h) ¿ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{7n-2} = ?$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3+4} = 0$ .

j) ¿ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+5}{3n^3-1} = ?$

2. Demuestre que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  y si la sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .
3. Demuestre que si las sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen al mismo límite, entonces la sucesión  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  convergen también al mismo límite.
4. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ . Pruebe que entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = l.$$

5. Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos sucesiones tales que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son convergentes. Muestre que entonces  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

6. Considere la sucesión  $\left\{ \frac{2}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Demuestre que ésta sucesión.

- a) No converge a 2.  
 b) No converge a  $-\frac{1}{2}$ .  
 c) No converge a  $\frac{1}{10^6}$ .  
 d) Converge a 0.

7. Considere la sucesión  $\left\{ \frac{43}{\sqrt{n+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Demuestre que ésta sucesión.

- a) No converge a 1.  
 b) No converge a  $-1$ .  
 c) No converge a  $\frac{1}{10}$ .  
 d) Converge a 0.

8. De ejemplos de sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que no sean convergentes, pero que

- a)  $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , sea sucesión  
 1) Convergente.  
 2) Divergente.

- b)  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ , sea sucesión  
 1) Convergente.  
 2) Divergente.

9. De un ejemplo de tres sucesiones  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n}$  y que

- a)  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sea convergente.  
 b)  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sea divergente.

10. Encuentre todos los puntos de acumulación de la sucesión

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

11. Demuestre que hay una infinidad de puntos de acumulación de la sucesión

$$1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

12. a) Demuestre que si  $0 < a < 2$ , entonces  $0 < \sqrt{2a} < 2$ . **Indicación:** use el Corolario del Capítulo 2.

b) Demuestre que la sucesión  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$  converge. **Indicación:** pruebe que ésta sucesión es creciente y acotada superiormente.

c) Pruebe que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  (con  $a_n \geq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ), entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$ .

d) Halle el límite de la sucesión b). **Indicación:** de c) se deduce que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2l}$ .

13. Considere la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cuyo término general se da más abajo. Primero diga cuál es el límite de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Después demuestre que es efectivamente el límite mediante la definición de límite.

a)  $a_n = \frac{1}{n+1}$ .

b)  $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$ .

c)  $a_n = \frac{2}{n^2 - n + 1}$ .

d)  $a_n = \frac{1}{2^n}$ .

e)  $a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$ .

f)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .

14. a) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números no negativos que converge a cero.

Si  $k \in \mathbb{N}$ , demuestre, por medio de la definición, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{1}{k}} = 0$ , donde el

símbolo  $x_n^{\frac{1}{k}}$  significa la raíz  $k$ -ésima de  $x_n$ . Usando las operaciones de las sucesiones deduzca que si  $p \in \mathbb{Q}^+$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^p = 0$ .

- b) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números no negativos que converge a un número  $x_0 > 0$ . Pruebe que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{x_0}{2} < x_n$  para toda  $n > n_0$ . Recuerde que

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1}b + ak - 2b^2 + \dots + ab^{k-1}) \text{ para toda } k \in \mathbb{N}$$

Al tomar  $a =: x_n^{\frac{1}{k}}$  y  $b = x_0^{\frac{1}{k}}$  resulta

$$x_n - x_0 = (x_n^{\frac{1}{k}} - x_0^{\frac{1}{k}})(x_n^{\frac{k-1}{k}} x_0^{\frac{1}{k}} + x_n^{\frac{k-2}{k}} x_0^{\frac{2}{k}} + \dots + x_n^{\frac{1}{k}} x_0^{\frac{k-1}{k}})$$

de donde, si  $n > n_1$ , entonces

$$|x_n - x_0| > \left| x_n^{\frac{1}{k}} - x_0^{\frac{1}{k}} \right| \left( \frac{x_n^{\frac{k-1}{k}} x_0^{\frac{1}{k}}}{2^{\frac{k-1}{k}}} + \frac{x_n^{\frac{k-2}{k}} x_0^{\frac{2}{k}}}{2^{\frac{k-2}{k}}} + \dots + \frac{x_n^{\frac{1}{k}} x_0^{\frac{k-1}{k}}}{2^{\frac{1}{k}}} \right),$$

o sea

$$|x_n - x_0| > rx_0 \left| x_n^{\frac{1}{k}} - x_0^{\frac{1}{k}} \right| \text{ para toda } n > n_1,$$

donde  $r = \frac{1}{2^{\frac{1}{k}}} + \dots + \frac{1}{2^{\frac{k-1}{k}}} > 0$ . De esto deduzca que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\frac{1}{k}} = x_0^{\frac{1}{k}}$ . Usando las operaciones de las sucesiones pruebe que si  $p \in \mathbb{Q}^+$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^p = x_0^p$ .

15. Sea  $a, b > 0$ . Pruebe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \max(a, b)$ . **Indicaciones:** Suponga por ejemplo que  $a \geq b$ . Entonces lo que se pide demostrar es que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = a$ . Ponga  $x_n =: (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} - a$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $x_n > 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . (¡justifíquelo!). Use la fórmula del binomio de Newton para deducir:  $a^n + na^{n-1}x_n \leq (a + x_n)^n = a^n + b^n \leq 2a^n$ . De lo anterior concluya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

16. Use operaciones entre sucesiones encuentre el límite de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,

a)  $a_n = \frac{5 - n}{n + 2}$ .

b)  $a_n = \frac{n - 1}{2n + 3n^3}$ .

c)  $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$ .

d)  $a_n = \frac{2n^2 - n}{3n^2 + 2n + 5}$ .

e)  $a_n = \frac{2n}{\sqrt{n-2}}$ .

17. Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{5^n}.$$

$$e) \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n.$$

$$f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-3)^n}{n}.$$

$$g) \sum_{n=0}^{+\infty} n(x-2)^n.$$

$$h) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n n^2}.$$

## Bibliografía

- [1] Borden, R.S. *A course in advanced calculus*. North Holand, Amsterdam, 1983.
- [2] Erwin Kreyszing, *Matemáticas Avanzadas para ingeniería* Vol. 1, ,Tercera Edición,
- [3] Glyn James, *Matemáticas Avanzadas para ingeniería*, Pearson, Segunda Edición.
- [4] Hughes-Hallett, Gleason et al., *Cálculo aplicado*, CECSA, 2003, 1a ed.
- [5] Larson, Hostetler, Edwards, *Cálculo I*, Pirámide, 2002, 7a. ed.
- [6] Leithold, *El cálculo*, Oxford, 2003, 7a. Ed.
- [7] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba *Cálculo Vectorial* Pearson, 2004, 5a. ed.
- [8] Richard Courant & Fritz John, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Volumen 1, Limusa, 1999.
- [9] Rivera Figueroa Antonio, *Series y sucesiones*, 1999 2<sup>nd</sup> ed..
- [10] Swokowski, *Cálculo con Geometría Analítica*, Iberoamérica, 1989, 2a.
- [11] Stewart, *Cálculo*. Trascendentes tempranas, Thomson, 2002, 4a.
- [12] T. M. Apostol. *Calculus*. Volume 1, Second Edition. John Willey & Sons, 1967.
- [13] Thomas, Finney, *Cálculo*. Una variable, Adison Wesley Longman, 1999, 9a.
- [14] Yu Takeuchi, *Series y sucesiones*, Tomo I , Limusa Noriega.





*¿Cuáles son tus límites en matemáticas?*  
se terminó de imprimir en septiembre de 2024,  
en los talleres de la Universidad Autónoma de la  
Ciudad de México, San Lorenzo, 290, col. Del Valle,  
Alcaldía Benito Juárez, c.p. 03100, Ciudad de México.  
El tiraje fue de 500 ejemplares.  
Cuidado de la edición: Ángeles Godínez Guevara  
Diseño editorial: Sergio Cortés Becerril

Este libro trata sobre el concepto de límites, para entender este concepto nos apoyaremos en las series y sucesiones (en los números reales y complejos). Nos resulta confuso al principio entender que una serie sea una suma, al reflexionar por qué, nos daremos cuenta de que “serie” es una palabra que se usa en el español no-matemático para cosas que no son sumas; en México decimos que vemos una serie de televisión, que necesitamos el número de serie de un vehículo para asegurarlo, que una serie de contratiempos me impidió publicar esta entrada más temprano el día de hoy (verídico), entre otras cosas.

Por tanto, para poder trabajar con “series” en matemáticas, debemos estar conscientes de esta diferencia de significado.



**JULIO CÉSAR SALAS TORRES.** Estudió física y matemáticas, Maestría y Doctorado en Ciencias (matemáticas) por el IPN y la UAM Iztapalapa, respectivamente. Ha completado una estancia posdoctoral en el CINVESTAV. Es miembro de la Sociedad Matemática Mexicana e Investigador Nacional I. Desde 2006, trabaja como profesor-investigador en la UACM San Lorenzo Tezonco, donde ha liderado proyectos académicos y dirigido tesis de licenciatura. Especializado en Teoría de Números, Ecuaciones Diferenciales aplicadas a la computación y Sistemas Dinámicos, su labor académica y de investigación refleja un compromiso profundo con el avance de las matemáticas.

**UACM**

Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México

NADA HUMANO ME ES AJENO

Biblioteca  
**BE**  
del  
Estudiante



9 786072 615021