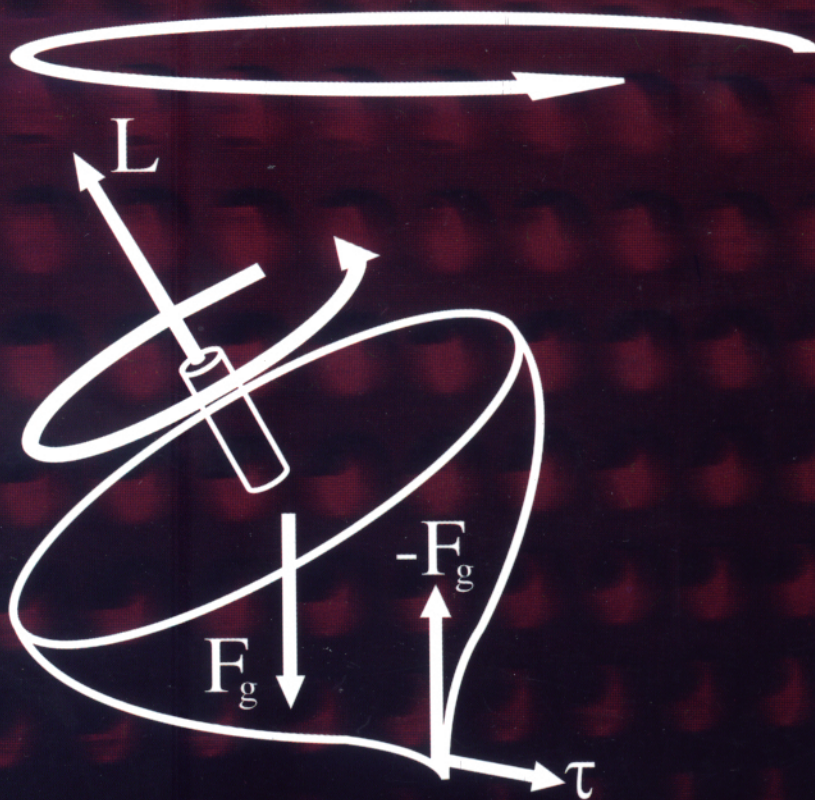


Problemas resueltos de Mecánica

Huitzilin Yépez Martínez



UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Problemas Resueltos de Mecánica.

Huitzilin Yépez Martínez

UACM
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

Biblioteca
BE
del
Estudiante

© *Problemas Resueltos de Mecánica*, primera edición, 2009.

© Huitzilin Yépez Martínez

D.R. © Universidad Autónoma de la Ciudad de México
Fray Servando Teresa de Mier 99, Col. Centro,
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06080, México, D.F.

Academia de Física, UACM

Diseño de portada: Domingo Vite

ISBN: 978-607-7798-00-2

Hecho e impreso en México /Printed in Mexico

Para Alma con todo mi amor

A mis padres y mis hermanos

A la memoria de todos mis seres queridos

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) por darme todas las facilidades para la realización de este libro. También quiero agradecer a mis compañeros de la academia de física: Ernesto Colavita, Marco Noguez y Hugo Villegas, por sus invaluable comentarios y correcciones realizadas al presente trabajo.

También quiero agradecer a la Biblioteca del Estudiante de la UACM, por todo el apoyo para la terminación de esta obra. Especialmente a Hector Castañeda por todo el apoyo dado para la terminación de esta obra.

Agradezco a mis compañeros y amigos del Colegio de Ciencia y Tecnología por todos sus comentarios y sugerencias, que dieron una motivación adicional para la realización de este libro.

A mis amigos del Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM-UNAM), por todo su apoyo y amistad. A Alejandro Durán por ser un gran amigo, maestro y compañero. A Sigfredo, Roberto y al señor Ángel.

Además quiero expresar mi agradecimiento a todos los estudiantes de la UACM con los que he tenido la oportunidad de aprender día a día a mejorar la práctica docente, aunque sea sólo un poco.

Índice

| | |
|--|-----|
| Introducción | III |
| Parte I. Unidades de medida y vectores | 1 |
| 1. Unidades de medida y análisis dimensional | 3 |
| 2. Vectores | 7 |
| Parte II. Cinemática de una partícula en una y dos dimensiones | 19 |
| 3. Cinemática en una dimensión | 21 |
| 4. Cinemática en dos dimensiones | 33 |
| 5. Cinemática en una y dos dimensiones | 45 |
| Parte III. Leyes de Newton y teorema trabajo-energía | 69 |
| 6. Leyes de Newton | 71 |
| 7. Trabajo y energía cinética | 129 |
| Parte IV. Teoremas de conservación | 147 |
| 8. Energía potencial y principio de conservación de la energía | 149 |
| 9. Colisiones y conservación del momento lineal | 175 |
| 10. Dinámica de sistemas de partículas | 191 |
| Parte V. Movimiento Rotacional | 203 |
| 11. Cinemática rotacional | 205 |

| | |
|--|---------------|
| II | <i>Índice</i> |
| 12. Dinámica rotacional | 213 |
| 13. Conservación del momento angular | 255 |
| Parte VI. Oscilaciones y ondas mecánicas | 273 |
| 14. Oscilaciones y ondas mecánicas | 275 |
| Bibliografía | 295 |

Introducción

Una de las más grandes dificultades con la que se enfrentan los estudiantes que por primera vez tienen contacto con la física a nivel universitario es la de plasmar en un problema sencillo, pero específico, las ideas generales discutidas en clase. Esta dificultad para plantear y resolver problemas resulta ser un gran obstáculo para que los universitarios avancen en el estudio de esta área del conocimiento.

Actualmente, existe una gran cantidad de libros introductorios a la física [1, 2, 3]¹ y de texto a nivel universitario excelentes [4, 5, 6, 7], que tratan, la gran mayoría, de los contenidos de un primer curso a nivel superior de cualquier carrera de ciencias o ingeniería. Algunas de estas obras han sido revisadas y editadas en numerosas ocasiones a lo largo de más de tres décadas [4, 5], por lo que han mejorado notablemente, tanto en sus contenidos como en su enfoque pedagógico. Sin embargo, la dificultad, que para los estudiantes representa el planteamiento y la solución de los problemas en el campo de la física, persiste.

Esta obra presenta, a los estudiantes universitarios del primer curso de física, un conjunto de problemas y sus soluciones en el área de: la cinemática y dinámica de una partícula, la cinemática y dinámica rotacional, los sistemas de partículas y las oscilaciones y ondas mecánicas; en los cuales se enfatizan las consideraciones físicas necesarias para resolver los problemas.

Esta obra debe verse por los estudiantes como un apoyo adicional a los libros de texto, como un libro que los acompaña en el estudio de la mecánica y no como una fuente en donde pueden encontrar la solución de las tareas o de los trabajos escolares.

La idea de proporcionar a los estudiantes este conjunto de problemas y sus soluciones es darles más elementos con los que pueden contrastar sus aprendizajes, proponiéndoles el siguiente método de trabajo:

- Intentar resolver los problemas hasta llegar a una solución de los mismos.
- Consultar la solución del problema para tratar de comprender los diferentes procedimientos realizados para ello y no efectuar una tarea de memorización de la solución.

¹ Los números entre corchetes corresponden a libros que se encuentran en la biografía de esta obra

- Resolver el problema sin consultar la solución poniendo especialmente énfasis en la aplicación de las ideas físicas, en la forma de plantear éstas en el lenguaje algebraico, así como en los detalles presentes en las manipulaciones algebraicas que conducen a la solución del problema.

Esta dinámica de trabajo permitirá que los estudiantes enfrenten los problemas aplicando las ideas físicas involucradas, y no solamente traten de recordar la forma en que resolvieron con anterioridad un problema similar.

Posteriormente, siguiendo con la dinámica antes descrita, los estudiantes podrán consultar otras obras de problemas resueltos mucho más extensas en el área de la mecánica [8, 9], en donde se presentan una gran cantidad y variedad de muy interesantes problemas, pero cuyas explicaciones y desarrollos requieren que los estudiantes hayan desarrollado cierta habilidad en la correcta aplicación de las ideas físicas involucradas y de un planteamiento matemático muy concreto.

En este libro se han considerado problemas en los que su solución requiere la utilización de algunas ideas físicas sencillas, pero generales, sobre mecánica. Rara vez se han considerado problemas que requieran desarrollos matemáticos más allá del álgebra básica. Sin embargo, en algunos ejercicios se hace referencia a ideas muy elementales del cálculo diferencial e integral, como es el caso de la velocidad y aceleración instantáneas, así como en la discusión general del trabajo mecánico realizado por una fuerza.

La gran mayoría de los problemas que aquí se presentan se han tomado de libros de texto clásicos [3, 4, 5, 6, 7], no obstante, algunos se modificaron para buscar que las ideas físicas que se necesitan aplicar para su solución se puedan identificar más claramente.

Otra motivación importante, para la elaboración de este libro, es que los estudiantes de ciencias y carreras tecnológicas aumenten su interés en el estudio de la física y se interesen en temas más elaborados de mecánica [10, 11, 12] y de ondas [13].

El libro se divide en seis partes:

- En la parte I, se analizan cuestiones previas al estudio de la cinemática, como son: el manejo de las unidades de medida de cantidades físicas relevantes para el estudio de la mecánica, y algunos aspectos básicos relacionados con el manejo de las cantidades vectoriales.
- En la parte II, se presentan una serie de problemas relacionados con la cinemática de una partícula, como son: el movimiento uniforme acelerado, la caída libre, el movimiento circular y el tiro parabólico.

- En la parte III, se consideran una serie de problemas típicos sobre las leyes de Newton y sobre las aplicaciones del teorema trabajo-energía. Este tipo de problemas permitirán que el estudiante entre en contacto con el concepto de fuerza, y reconozcan su importancia para la descripción del movimiento de una partícula. Así como las aplicaciones del centro de masa de un sistema de partículas.
- En la parte VI, se analizan ejercicios relacionados con los principios de conservación de la energía y el teorema de conservación de la cantidad de movimiento lineal². También se analizan algunos ejemplos en los que la energía mecánica total no se conserva debido a la presencia de fuerzas disipativas.
- En la parte V, se analizan ejercicios relacionados con la cinemática y la dinámica rotación de los cuerpos sólidos así como la conservación de la energía mecánica para estos sistemas físicos. Las leyes de Newton se aplican a la descripción del movimiento traslacional del sólido alrededor de un eje instantáneo de rotación. También se presentan ejercicios relacionados con la conservación del momento angular.
- Finalmente en la parte VI, se presentan algunos ejercicios relacionados con las oscilaciones y ondas mecánicas, en los cuales se aplican los principios generales de la mecánica a estos fenómenos físicos periódicos. También se hace énfasis en la representación gráfica de estos movimientos y la obtención de algunas cantidades físicas de éstos a través de las gráficas.

² Algunos textos llaman a la cantidad de movimiento lineal “momento lineal” y otros “ímpetu lineal”

Parte I. Unidades de medida y vectores

En los capítulos 1 y 2, comprendidos en esta primera parte, se presentan algunos problemas sencillos relacionados con el manejo y la conversión de ciertas unidades de medida utilizadas comúnmente en distintos sistemas de unidades. También se consideran algunos ejercicios de análisis dimensional, una herramienta física muy poderosa que permite rápidamente, basándose en las unidades involucradas, saber si la solución de un problema es dimensionalmente consistente.

Finalmente, se presentan algunos problemas elementales que permitirán a los estudiantes familiarizarse con los vectores, mismos que juegan un papel muy importante en la descripción del movimiento de una partícula. En estos problemas se aborda la imagen geométrica de las operaciones entre vectores como son: la suma vectorial, el producto de un escalar por un vector y el producto escalar entre vectores.

Capítulo 1

Unidades de medida y análisis dimensional

1-1.- Exprese las siguientes mediciones en unidades del Sistema Internacional de Unidades (S.I.), mediante los prefijos apropiados. El símbolo de la unidad base esta entre paréntesis:

- a) 298000 metros (m)
- b) 7600 volts (V)
- c) 0.000067 amperes (A)
- d) 0.0645 newtons (N)
- e) 43000000 gramos (g)
- f) 0.00000065 farads (F)

Sol:

a) $298000 m = 2.98 \times 10^5 m = 2.98 \times 100 km = 298 km.$

b) $7600 V = 7.6 \times 10^3 V = 7.6 kV.$

c) $0.000067 A = 67 \times 10^{-6} A = 67 \mu A.$

d) $0.0645 N = 6.45 \times 10^{-2} N = 64.5 \times 10^{-3} N = 64.5 mN.$

e)

$$\begin{aligned}
 1 \text{ g} &= \frac{1}{1000} \text{ kg}^1 \\
 &\implies \\
 43000000 \text{ g} &= 43000000 \text{ g} \left(\frac{1}{1000} \right) \left(\frac{\text{kg}}{\text{g}} \right) \\
 &= 43000 \text{ kg} = 43 \times 10^3 \text{ kg} = 43 \text{ Ton} \\
 &\implies \\
 43000000 \text{ g} &= 43 \text{ Ton}.
 \end{aligned}$$

$$f) 0.00000065 F = 6.5 \times 10^{-7} F = 0.65 \times 10^{-6} F = 0.65 \mu F.$$

1-2.- ¿Cuáles son las tres cantidades físicas fundamentales que aparecen en la descripción de la mayor parte de los fenómenos mecánicos? Nombrar las tres unidades fundamentales asociadas con estas cantidades físicas en el S.I.

Sol:

En la descripción física de una gran cantidad de fenómenos mecánicos, se habla de **longitudes** recorridas, del **tiempo** necesario para que un objeto llegue a un determinado lugar y de la cantidad de **masa** que tiene un cuerpo. De lo anterior se desprende que las tres cantidades físicas fundamentales utilizadas en la descripción de la mayor parte de los fenómenos mecánicos son: **longitud**, **tiempo** y **masa**. Las unidades de medida asociadas a estas cantidades físicas establecidas en el S.I. son:

- a) El metro (m) unidad de medida de longitud.
- b) El segundo (s) unidad de medida de tiempo.
- c) El kilogramo (kg) unidad de medida de masa.

1-3.- Admitiendo que las unidades de las cantidades físicas: de l sean metros (m), de v metros sobre segundo ($\frac{m}{s}$), de α metros sobre segundo cuadrado ($\frac{m}{s^2}$) y de t segundos (s). Determine si las siguientes relaciones son correctas o incorrectas con base en el análisis dimensional:

- a) $l = vt + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- b) $2\alpha l = v_f^2 - v_i^2$
- c) $v_f = v_i + \alpha t^2$
- d) $l = vt + 4\alpha t^2$

¹En esta conversión la cantidad de masa debe expresarse en kilogramos (kg), porque esta es la unidad de medida para la masa en el S.I.

Sol:

Con base en el análisis dimensional para el inciso a) se tiene que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 [l] &= [vt] + \left[\frac{1}{2}\alpha t^2\right] \\
 &\implies \\
 [m] &= \left[\frac{m}{s} s\right] + \left[\frac{m}{s^2} s^2\right] \\
 &\implies \\
 [m] &= [m] + [m] \\
 &\implies \\
 [m] &= [m].
 \end{aligned}$$

Por lo que la expresión $l = vt + \frac{1}{2}\alpha t^2$, es dimensionalmente correcta.

Para el inciso b) se tiene que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 [2\alpha l] &= [v_f^2] - [v_i^2] \\
 &\implies \\
 \left[\frac{m}{s^2} m\right] &= \left[\left(\frac{m}{s}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{m}{s}\right)^2\right] \\
 &\implies \\
 \left[\frac{m^2}{s^2}\right] &= \left[\left(\frac{m}{s}\right)^2\right] \\
 &\implies \\
 \left[\left(\frac{m}{s}\right)^2\right] &= \left[\left(\frac{m}{s}\right)^2\right].
 \end{aligned}$$

Por lo que la expresión $2\alpha l = v_f^2 - v_i^2$, es dimensionalmente correcta.

Para el inciso c) se tiene que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 [v_f] &= [v_i] + [\alpha t^2] \\
 &\implies \\
 \left[\frac{m}{s}\right] &= \left[\frac{m}{s}\right] + \left[\frac{m}{s^2} s^2\right] \\
 &\implies \\
 \left[\frac{m}{s}\right] &= \left[\frac{m}{s}\right] + [m] \\
 &\implies \\
 \left[\frac{m}{s}\right] &= \left[\frac{m}{s}\right] + [m].
 \end{aligned}$$

Por lo que la expresión $v_f = v_i^2 + \alpha t^2$, es dimensionalmente incorrecta.

Finalmente para el inciso *d*) se tiene que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} [l] &= [vt] + [4\alpha t^2] \\ &\implies \\ [m] &= \left[\frac{m}{s} s \right] + \left[\frac{m}{s^2} s^2 \right] \\ &\implies \\ [m] &= [m] + [m] \\ &\implies \\ [m] &= [m]. \end{aligned}$$

Por lo que la expresión $l = vt + 4\alpha t^2$, es dimensionalmente correcta.

1-4.- En la segunda década del siglo pasado estuvieron en uso dos tipos de unidades de barril en Estados Unidos. El barril de manzanas tenía un volumen legalmente fijado de 7056 pulgadas cúbicas (in^3); mientras que el barril de bayas tenía un volumen de 5826 in^3 . Si un comerciante vende 20 barriles de bayas a un cliente que quiere comprar 20 barriles de manzanas ¿cuál es la discrepancia en el volumen del embarque en litros?

Sol:

Con base en el contenido de un barril de manzanas, que es de 7056 pulgadas cúbicas, y del contenido de un barril de bayas, que es de 5826 in^3 , la diferencia en el volumen de mercancía (ΔV) está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 20(7056 - 5826) in^3 \\ &= 24600 in^3. \end{aligned}$$

Ahora es necesario transformar la unidad de volumen in^3 a unidades de volumen del S.I. como son los litros (L). Para esto se tiene que $1 in = 2.54 cm$ de manera que:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 24600 (2.54)^3 cm^3 \\ &= 4.03 \times 10^5 cm^3. \end{aligned}$$

También se tiene que un cm^3 es igual a $\frac{1}{1000} L$ por lo tanto, la diferencia en el volumen de mercancía (ΔV) dada en litros es de:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 4.03 \times 10^5 \left(\frac{1}{1000} \right) L \\ &= 4.03 \times 10^2 L. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Vectores

2-1.- Dados dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ que satisfacen que:

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = 11\hat{e}_x - \hat{e}_y \quad y \quad \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = -5\hat{e}_x + 11\hat{e}_y,$$

en donde \hat{e}_x y \hat{e}_y son vectores unitarios y ortogonales.

a) Determinar $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$.

b) Determinar el ángulo formado por $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, respecto al eje x , utilizando métodos vectoriales.

Sol:

a) Realizando la suma de los vectores $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) &= 2\vec{\mathbf{a}} = \\ 11\hat{e}_x - \hat{e}_y + (-5\hat{e}_x + 11\hat{e}_y) &= 6\hat{e}_x + 10\hat{e}_y, \end{aligned}$$

por lo que ahora puede despejarse el valor de $\vec{\mathbf{a}}$, para el que se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\vec{\mathbf{a}} &= 6\hat{e}_x + 10\hat{e}_y \\ \implies \\ \vec{\mathbf{a}} &= 3\hat{e}_x + 5\hat{e}_y = (3, 5). \end{aligned}$$

Una vez que se conoce el valor de $\vec{\mathbf{a}}$ puede obtenerse el valor de $\vec{\mathbf{b}}$ despejando este vector de cualquiera de las dos relaciones originales, i.e.,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{b}} &= 11\hat{e}_x - \hat{e}_y - \vec{\mathbf{a}} = \\ 11\hat{e}_x - \hat{e}_y - (3\hat{e}_x + 5\hat{e}_y) &= 8\hat{e}_x - 6\hat{e}_y = (8, -6). \end{aligned}$$

b) Para determinar el ángulo formado por $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, respecto al eje x , utilizando métodos vectoriales, es necesario calcular los productos internos de cada uno de los vectores anteriores con el vector unitario \hat{e}_x , porque el ángulo $\theta_{\angle \vec{\mathbf{v}} x}$ formado por un vector $\vec{\mathbf{v}}$ cualquiera con el eje x esta dado por:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{v}} x} &= \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{e}_x}{|\vec{\mathbf{v}}| |\hat{e}_x|} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{e}_x}{|\vec{\mathbf{v}}|}, \end{aligned}$$

donde se toma en cuenta que \hat{e}_x es un vector unitario, $|\hat{e}_x| = 1$. Aplicando este resultado a los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ se obtienen los ángulos buscados.

Utilizando la definición del producto escalar en términos de sus componentes cartesianas:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_x w_x + v_y w_y,$$

recordando que \hat{e}_x sólo tiene componente x y de tamaño la unidad ($\hat{e}_x = (1, 0)$) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{a}}, x} &= \frac{(3, 5) \cdot (1, 0)}{|(3, 5)|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{34}}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{a}}, x} = 0.515,$$

y por lo tanto:

$$\theta_{\angle \vec{\mathbf{a}}, x} = 59.04^\circ.$$

De igual forma para el vector $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}, x} &= \frac{(11, -1) \cdot (1, 0)}{|(11, -1)|} \\ &= \frac{11}{\sqrt{11^2 + 1^2}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{122}}, \end{aligned}$$

por lo que:

$$\cos \theta_{\vec{a}+\vec{b}, x} = 0.996,$$

y finalmente:

$$\theta_{\angle \vec{a}+\vec{b}, x} = -5.194^\circ .$$

2-2.- Sea $\vec{A} = 2 \text{ cm}$ a 70° al este del norte y $\vec{B} = 3.5 \text{ cm}$ a 130° al este del norte. Dibujar en el plano cartesiano:

- Los vectores \vec{A} y \vec{B} y otros dos vectores paralelos a \vec{A} y \vec{B} pero 2.5 veces más grandes.
- Multiplicar \vec{A} por -2.5 y \vec{B} por 3 y encontrar el vector suma de los nuevos vectores.
- Colocar un punto a 10 cm al norte del origen. Encontrar múltiplos de \vec{A} y \vec{B} de tal forma que la suma de los vectores resultantes sea igual al vector que une el origen con el punto en cuestión.
- Resolver analíticamente los incisos *b)* y *c)*.

Sol:

a) Sea $\vec{A} = 2 \text{ cm}$ a 70° al este del norte (lo que significa que el vector tiene una desviación de 70° hacia el este respecto de la dirección norte), que es equivalente a un vector de 2 cm de tamaño a 20° al norte de la dirección este, tal como se muestra en la figura 2.1.

Sea el vector $\vec{B} = 3.5 \text{ cm}$ a 130° al este del norte (lo que significa que el vector tiene una desviación de 130° hacia el este respecto de la dirección norte), que es equivalente a un vector de 3.5 cm de tamaño a 40° al sur de la dirección este, i.e. (-40°) respecto a la dirección este, tal como se muestra en la figura 2.2.

Ahora, encontrar dos vectores paralelos a \vec{A} y a \vec{B} , 2.5 veces más grandes, quiere decir: obtener dos nuevos vectores \vec{A}' y \vec{B}' en las direcciones de \vec{A} y de \vec{B} respectivamente, pero 2.5 veces más grandes (Fig. 2.3).

b) Multiplicar el vector \vec{A} por -2.5 corresponde a un vector 2.5 veces más grande que \vec{A} y en una dirección a 180° respecto a la dirección original, i.e. $-2.5\vec{A} = (5 \text{ cm}, 200^\circ)$, como se muestra en la figura 2.4.

De igual forma multiplicar \vec{B} por 3 corresponde a un vector 3 veces más grande y en la misma dirección que \vec{B} , $3\vec{B} = (10.5 \text{ cm}, -40^\circ)$, como se muestra en la figura 2.5.

El vector suma $-2.5\vec{A} + 3\vec{B}$ puede obtenerse mediante la regla del paralelogramo como se muestra en la figura 2.6.

c) Encontrar los múltiplos $\lambda\vec{A}$ y $\gamma\vec{B}$ de \vec{A} y de \vec{B} , respectivamente, de manera que sumados den un vector de 10 cm de tamaño al norte del origen, equivale a trazar todos

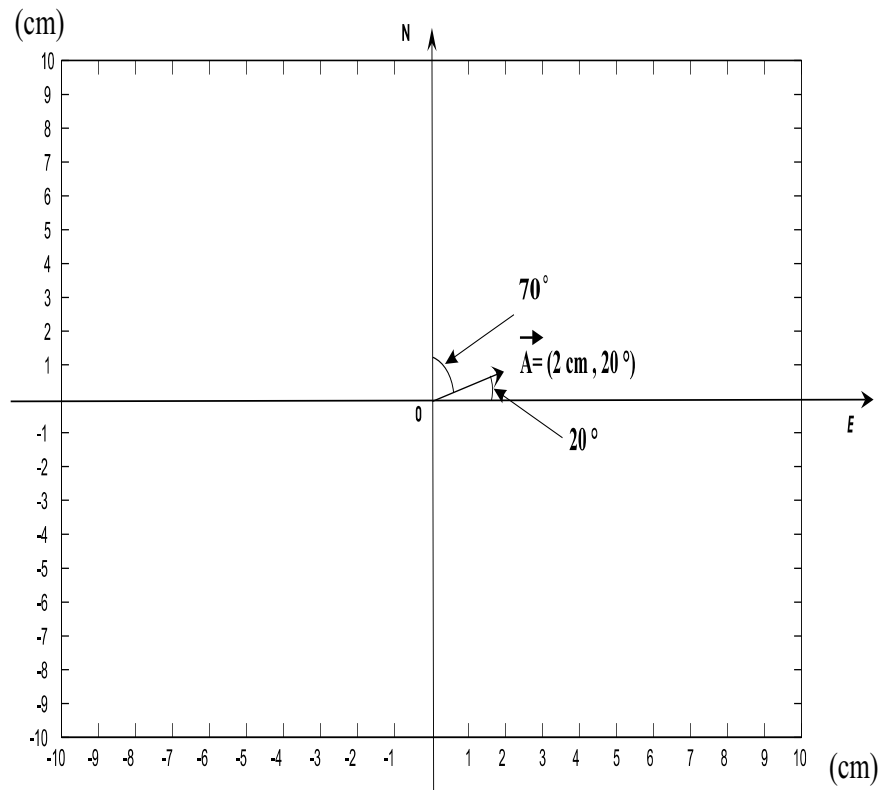


Figura 2.1: Localización en el plano cartesiano del vector \vec{A} .

los vectores paralelos a \vec{A} y a \vec{B} y buscar el vector suma que resulte a 10 cm al norte del origen utilizando la regla del paralelogramo, tal y como se muestra en la figura 2.7, y de esta figura al medir los tamaños de $\lambda\vec{A}$ y $\gamma\vec{B}$ y dividirlos entre los tamaños $|\vec{A}|$ y $|\vec{B}|$, respectivamente, se encuentran los valores de λ y de γ :

$$\lambda = 4.4$$

$$\gamma = -3.1.$$

d) Para resolver analíticamente los incisos b) y c) de este ejercicio se tienen que obtener las componentes cartesianas de los vectores \vec{A} y \vec{B} , es decir:

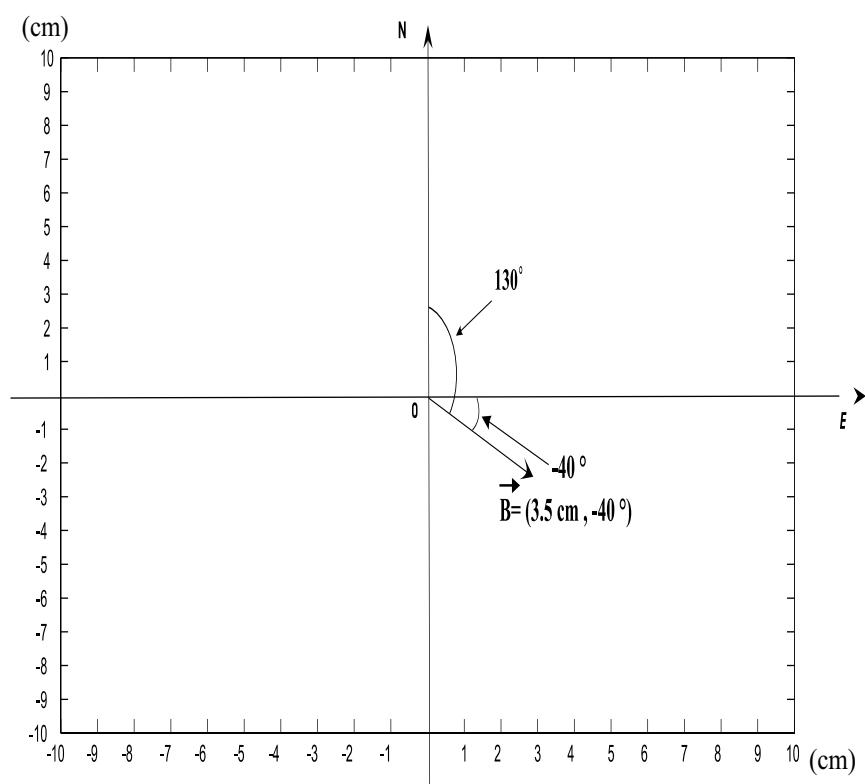


Figura 2.2: Localización en el plano cartesiano del vector \vec{B} .

$$\begin{aligned}
 A_x &= |\vec{A}| \cos \theta_{\vec{A}} = |2 \text{ cm}| \cos 20 = 1.879 \text{ cm} \\
 A_y &= |\vec{A}| \sin \theta_{\vec{A}} = |2 \text{ cm}| \sin 20 = 0.684 \text{ cm} \\
 B_x &= |\vec{B}| \cos \theta_{\vec{B}} = |3.5 \text{ cm}| \cos 40 = 2.681 \text{ cm} \\
 B_y &= -|\vec{B}| \sin \theta_{\vec{B}} = -|3.5 \text{ cm}| \sin 40 = -2.25 \text{ cm},
 \end{aligned}$$

(2.1)

por lo que:

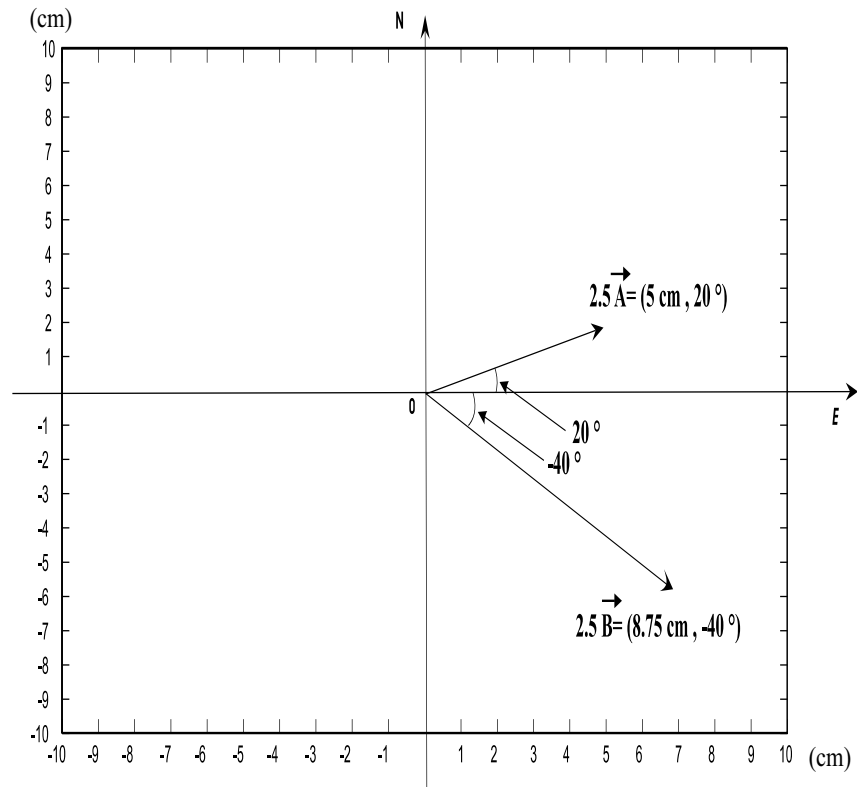


Figura 2.3: Localización en el plano cartesiano de los vectores paralelos a \vec{A} y \vec{B} pero 2.5 veces más grandes.

$$-2.5 \vec{A} = (-2.5 A_x, -2.5 A_y) = (-4.6975, -1.71) \text{ cm}$$

y

$$3 \vec{B} = (3 B_x, 3 B_y) = (8.043, -6.75) \text{ cm}.$$

Ahora puede efectuarse la suma $-2.5 \vec{A} + 3 \vec{B}$, para la que se obtiene:

$$\begin{aligned} -2.5 \vec{A} + 3 \vec{B} &= (-4.6984, -1.71) \text{ cm} + (8.043, -6.75) \text{ cm} \\ &= (-4.6984 + 8.043, -1.71 - 6.75) \text{ cm} = (3.3446, -8.46) \text{ cm}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $-2.5 \vec{A} + 3 \vec{B} = (3.3446, -8.46) \text{ cm}$.

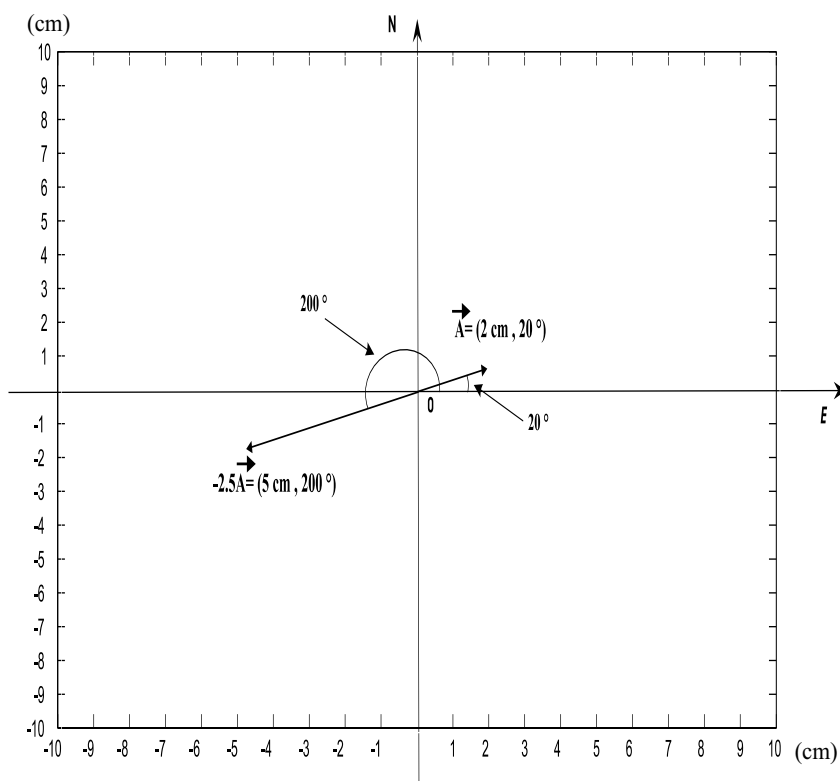


Figura 2.4: Localización en el plano cartesiano de los vectores \vec{A} y $-2.5\vec{A}$.

Para encontrar los múltiplos de \vec{A} y de \vec{B} que sumados den como resultado un vector de 10 *cm* en dirección norte se escribe:

$$\begin{aligned} (0, 10) \text{ cm} &= \lambda \vec{A} + \gamma \vec{B} = \\ &= (\lambda A_x + \gamma B_x, \lambda A_y + \gamma B_y), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 \text{ cm} &= \lambda A_x + \gamma B_x \\ 10 \text{ cm} &= \lambda A_y + \gamma B_y \\ \implies \\ 0 \text{ cm} &= (1.879 \lambda + 2.681 \gamma) \text{ cm} \\ 10 \text{ cm} &= (0.684 \lambda + (-2.25) \gamma) \text{ cm}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

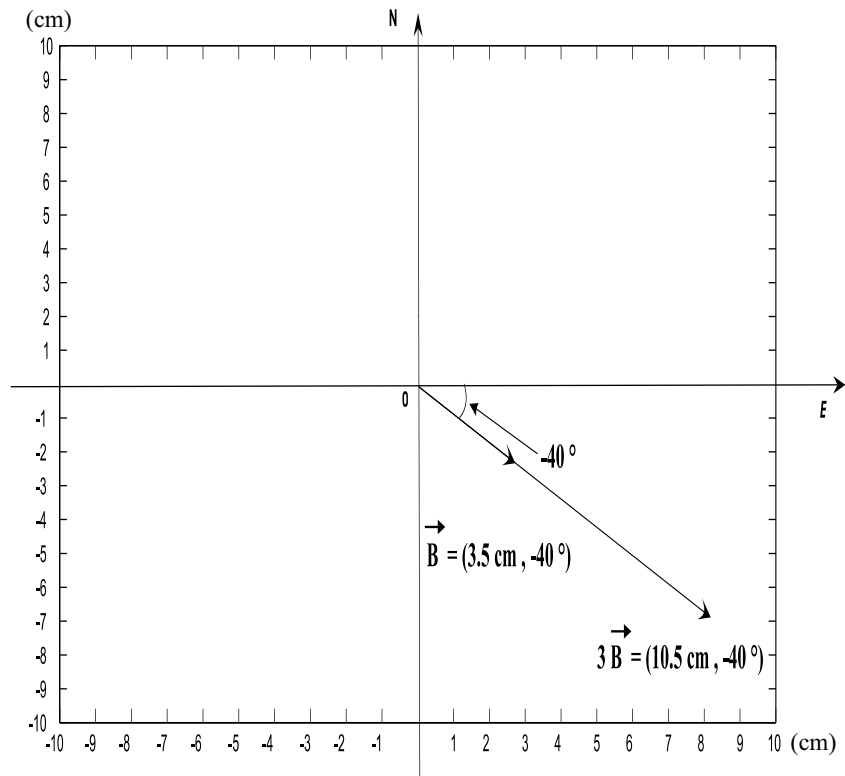


Figura 2.5: Localización en el plano cartesiano de los vectores \vec{B} y $3\vec{B}$.

cuya solución está dada por:

$$\lambda = 4.42$$

$$\gamma = -3.1.$$

2-3.- Dados los vectores $\vec{a} = 3\hat{e}_x + 4\hat{e}_y$ y $\vec{b} = -\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$, calcular:

- La magnitud de cada vector.
- El producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- El ángulo formado entre ambos vectores.
- El vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ y el vector diferencia $\vec{a} - \vec{b}$.
- El producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

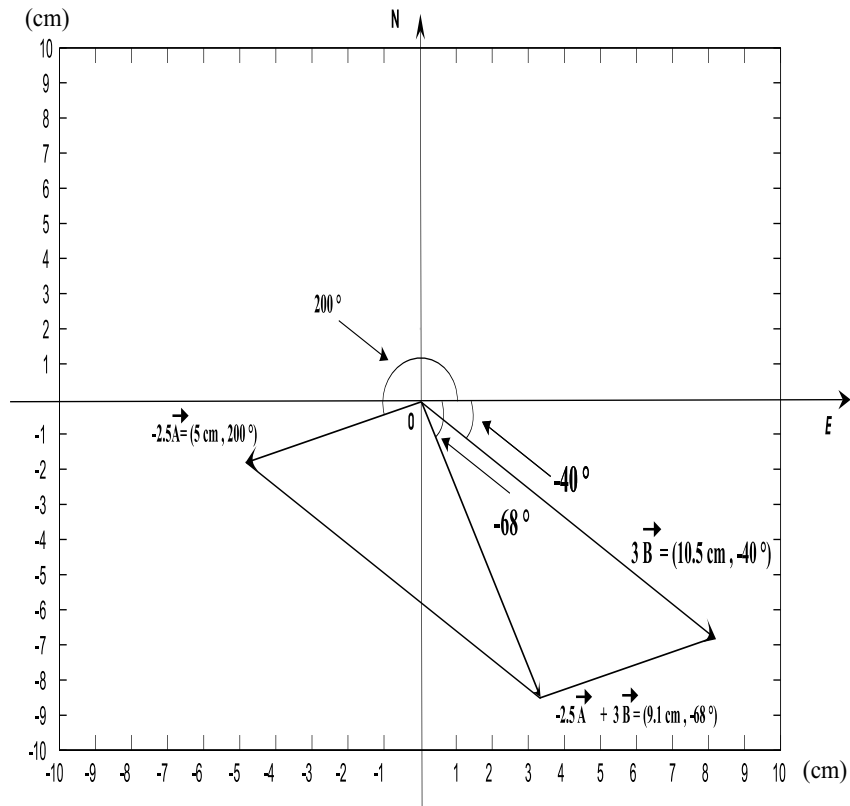


Figura 2.6: Localización en el plano cartesiano del vector suma $-2.5\vec{A} + 3\vec{B}$.

Sol:

a) La magnitud de un vector $\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y$ se encuentra dada por:

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad (2.3)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2.24. \end{aligned}$$

b) El producto escalar de $\vec{a} \cdot \vec{b}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y = \\ (3)(-1) + (4)(2) &= -3 + 8 = 5. \end{aligned}$$

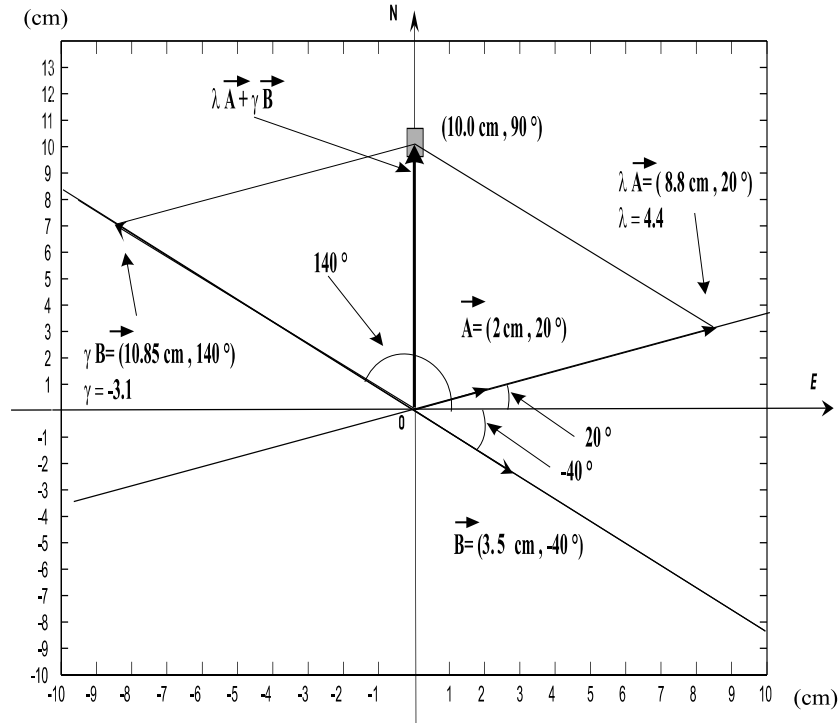


Figura 2.7: Localización en el plano cartesiano del vector suma $\lambda \vec{A} + \gamma \vec{B} = 10 \text{ cm}$ al norte del origen.

c) El ángulo formado entre ambos vectores se puede obtener aplicando la definición del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta$, donde θ es el ángulo formado entre ambos vectores; aplicando la definición anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \\ \implies \cos \theta &= \frac{5}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \\ &= \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

esto es:

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = 63.44^\circ.$$

d) La suma vectorial $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= (a_x + b_x)\hat{e}_x + (a_y + b_y)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= (3 - 1)\hat{e}_x + (4 + 2)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= 2\hat{e}_x + 6\hat{e}_y,\end{aligned}$$

y la diferencia $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} &= (a_x - b_x)\hat{e}_x + (a_y - b_y)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} &= (3 - (-1))\hat{e}_x + (4 - 2)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} &= 4\hat{e}_x + 2\hat{e}_y.\end{aligned}$$

e) El producto vectorial de $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ está dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \\ (a_x b_y - a_y b_x)\hat{e}_z &= (3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1))\hat{e}_z = \\ (6 + 4)\hat{e}_z &= 10\hat{e}_z.\end{aligned}$$

Parte II. Cinemática de una partícula en una y dos dimensiones

En la primera parte del libro se abordaron algunas generalidades sobre el manejo de las unidades de medida (capítulo 1) y sobre las operaciones básicas entre vectores, para familiarizarnos, al menos un poco, con la notación vectorial (capítulo 2). En esta segunda parte se presentan varios problemas relacionados con una de las ideas centrales de la mecánica: describir el cambio de posición de un objeto conforme transcurre el tiempo. Para lograr este propósito, primero se analizan ciertas situaciones físicas para el movimiento en una línea recta, y posteriormente, para el movimiento en dos dimensiones.

Asimismo, se presentan problemas resueltos en los que se utilizan los conceptos físicos de desplazamiento, velocidad promedio y de aceleración promedio, que anteceden a los conceptos de velocidad instantánea y de aceleración instantánea, también se hace uso de la diferencia entre la rapidez y la velocidad de una partícula y de la interpretación geométrica de esta última en una gráfica de posición como función del tiempo.

En esta parte del libro se utilizan por primera vez, algunas ideas sobre vectores para el estudio del movimiento de proyectiles lanzados con una cierta inclinación inicial de ascenso (tiro parabólico). Se utilizan nociones vectoriales para la descripción del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria circular con rapidez constante, en donde la dirección de la velocidad de la partícula cambia debido a la aceleración centrípeta a la que se encuentra sujeta cualquier partícula en un movimiento circular.

También se plantean problemas sencillos en los que partiendo de una tabla o una gráfica de la posición de una partícula como función del tiempo, se puede obtener información general sobre su velocidad y su aceleración instantánea.

Adicionalmente, se han utilizado algunas ideas básicas de cálculo diferencial e integral con la finalidad de que los estudiantes empiecen a familiarizarse con el cálculo, indispensable para estudios posteriores en el área de la física.

En el capítulo 5 se abordan problemas adicionales de la cinemática en una y dos dimensiones que son un poco más elaborados y que requieren que los estudiantes posean cierta práctica en el planteamiento y solución de problemas mecánicos. Sin embargo, los estudiantes que todavía no han adquirido estas habilidades pueden, sin ninguna dificultad, abordar los ejercicios planteados a lo largo de la obra y dejar los problemas del capítulo 5 para una segunda etapa en el estudio de la mecánica, ya que estén provistos de una mayor experiencia en el manejo de la cinemática y del cálculo diferencial e integral.

Capítulo 3

Cinemática en una dimensión

- 3-1.- Un gato camina en línea recta, en el eje x , con dirección positiva a la derecha. Se efectúan mediciones del movimiento del felino y se construye una gráfica de la velocidad en función del tiempo, como se muestra en la figura 3.1.

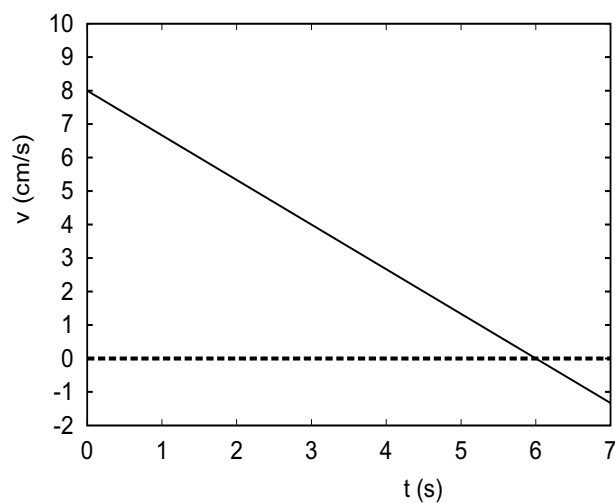


Figura 3.1: Gráfica de velocidad vs tiempo del gato.

- Determine la velocidad del felino en función de t ; ¿cuál es la velocidad en $t=4s$ y en $t=7s$?
- ¿Qué aceleración tiene el gato en $t = 3 s$, en $t = 6 s$ y en $t = 7 s$?
- ¿Qué distancia recorre el gato durante los primeros $4.5 s$? y ¿qué distancia recorre entre $t = 0 s$ y $t = 7.5 s$?

d) Dibuje gráficas claras de la aceleración y la posición del gato en función del tiempo suponiendo que el gato partió del origen.

Sol:

a) De la gráfica de la velocidad como función del tiempo se observa que la relación existente entre las cantidades físicas es lineal, por lo que la velocidad como función del tiempo está dada por:

$$v(t) = 8 \left(\frac{cm}{s} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{cm}{s^2} \right) t(s) , \quad (3.1)$$

que es precisamente la ecuación de la recta de la gráfica anterior (Fig. 3.1), de manera que la velocidad del gato cuando $t = 4$ s es:

$$v(4) = \left[8 - \frac{4}{3}(4) \right] \frac{cm}{s} = \frac{8}{3} \frac{cm}{s}$$

y en $t = 7$ s:

$$v(7) = \left[8 - \frac{4}{3}(7) \right] \frac{cm}{s} = -\frac{4}{3} \frac{cm}{s}.$$

b) Para obtener la aceleración del gato, una vez que se conoce su velocidad se deriva la ecuación (3.1) respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(8 - \frac{4}{3}t \right) = -\frac{4}{3} \frac{cm}{s^2}. \quad (3.2)$$

De esta expresión se desprende que el gato realiza un movimiento uniformemente acelerado (desacelerado en este caso particular) con una aceleración constante de $-\frac{4}{3} \frac{cm}{s^2}$, por lo tanto, este es el valor de la aceleración del gato en cualquier instante de tiempo.

c) La distancia recorrida por el gato entre $t = 0$ s y $t = 4.5$ s es igual al área comprendida entre la curva $v(t)$ en este intervalo y el eje del tiempo. Con base en la gráfica de la figura 3.1 se tiene que:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 4.5) = \left[(2)(4.5) + \frac{1}{2}(6)(4.5) \right] \frac{cm}{s} = 22.5 \text{ cm}.$$

La distancia recorrida por el gato en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ s y $t = 7.5$ s es igual al área comprendida entre la curva $v(t)$ y el eje del tiempo en el intervalo entre $t = 0$ s y $t = 6$ s, más el área comprendida entre la curva $v(t)$ y el eje del tiempo en el intervalo entre $t = 6$ s y $t = 7.5$ s.

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 7.5) = \Delta x(t = 0 \rightarrow t = 6) + \Delta x(t = 6 \rightarrow t = 7.5)$$

$$\Delta x (t = 0 \rightarrow t = 6) = \frac{1}{2}(8)(6) \frac{cm}{s} s = 24 \text{ cm},$$

para determinar el área bajo la curva de la velocidad del gato entre $t = 6 \text{ s}$ y $t = 7.5 \text{ s}$, se debe conocer la altura del triángulo formado por el eje del tiempo en este intervalo y la velocidad del gato dada por la ecuación (3.1). La altura del triángulo está dada por el valor absoluto de la velocidad en el tiempo $t = 7.5 \text{ s}$, que a su vez está determinada por:

$$\begin{aligned} |v(t = 7.5)| &= \left| \left(8 - \frac{4}{3}(7.5) \right) \right| \frac{cm}{s} \\ &= |-2| \frac{cm}{s} = 2 \frac{cm}{s}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y el área del triángulo formado por el eje del tiempo en el intervalo comprendido entre $t = 6 \text{ s}$ y $t = 7.5 \text{ s}$ y la velocidad del gato dada por la ecuación (3.1) es:

$$\Delta x (t = 6 \rightarrow t = 7.5) = \frac{1}{2}(2)(1.5) \frac{cm}{s} s = 1.5 \text{ cm}, \quad (3.4)$$

en la ecuación (3.4) se ha tomado $|v(t = 7.5 \text{ s})| = 2 \frac{cm}{s}$ para la altura del triángulo formado por el eje del tiempo y la curva $v(t)$ en el intervalo comprendido entre $t = 6 \text{ s}$ y $t = 7.5 \text{ s}$ y no $v(t = 7.5) = -2 \frac{cm}{s}$, porque lo que nos interesa es la distancia recorrida por el gato y no su posición en $t = 7.5 \text{ s}$.

Por lo tanto, la distancia cubierta en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 7.5 \text{ s}$ es igual a:

$$\Delta x (t = 0 \rightarrow t = 7.5) = 24 \text{ cm} + 1.5 \text{ cm} = 25.5 \text{ cm}.$$

d) La gráfica de la aceleración como función del tiempo (que en este caso es constante) se muestra a continuación:

La posición del gato como función del tiempo está dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (3.5)$$

en donde $x_0 = 0 \text{ m}$ es la posición inicial, $v_0 = 8 \frac{cm}{s}$ es la velocidad inicial y $a = -\frac{4}{3} \frac{cm}{s^2}$ es la aceleración; por lo que la posición está dada por:

$$x(t) = 8t - \frac{2}{3} t^2. \quad (3.6)$$

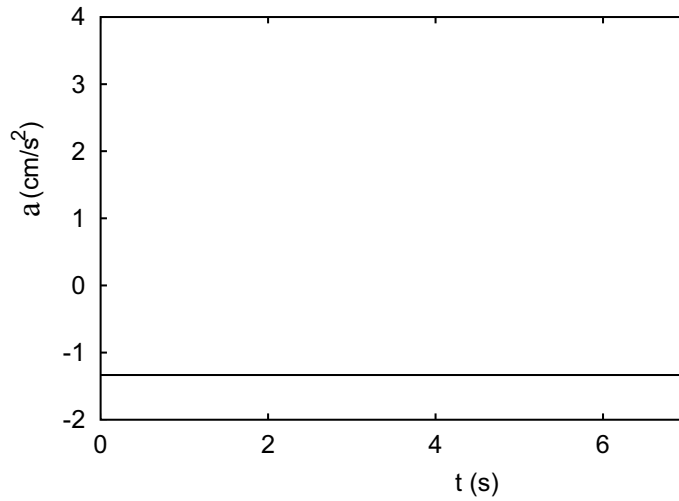


Figura 3.2: Gráfica de la aceleración vs tiempo de un gato.

Alternativamente, la gráfica de la posición del gato como función del tiempo puede obtenerse integrando la ecuación (3.1) respecto al tiempo, suponiendo que en $t = 0$ s el gato se encuentra en el origen de nuestro sistema de referencia ($x_0 = 0$ m):

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t \left(8 - \frac{4}{3}t'\right) dt' = 8t - \frac{2}{3}t^2 \text{ cm}.$$

Este resultado coincide desde el punto de vista físico con el obtenido aplicando las relaciones de la cinemática del movimiento uniformemente acelerado (ecuación (3.6)).

La gráfica de la función posición $x(t) = 8t - \frac{2}{3}t^2$ cm corresponde a una parábola decreciente con un máximo en $t = 6$ s, tal y como puede observarse en la gráfica de la figura 3.3.

3-2.- Un coche de 3.5 m de longitud que viaja con una rapidez constante de $20 \frac{m}{s}$ se acerca a un cruce que tiene 20 m de largo (Fig. 3.4). Cuando el frente del coche está a 50 m del cruce, el semáforo se pone en amarillo. Tomando en cuenta que el semáforo está en amarillo durante 3 s, que si el conductor pisa el freno el auto disminuirá su velocidad a $-4 \frac{m}{s^2}$, y que si pisa el acelerador el auto aumentará su velocidad a $1.5 \frac{m}{s^2}$; ¿el conductor debe frenar o acelerar para no estar en el cruce con el semáforo en rojo? Ignore el tiempo de reacción del conductor.

Sol:

Se tiene un coche que para no encontrarse en medio del cruce vehicular dentro de 3 s, a partir del tiempo inicial, debe acelerar a $1.5 \frac{m}{s^2}$ o desacelerar a $-4 \frac{m}{s^2}$. La decisión

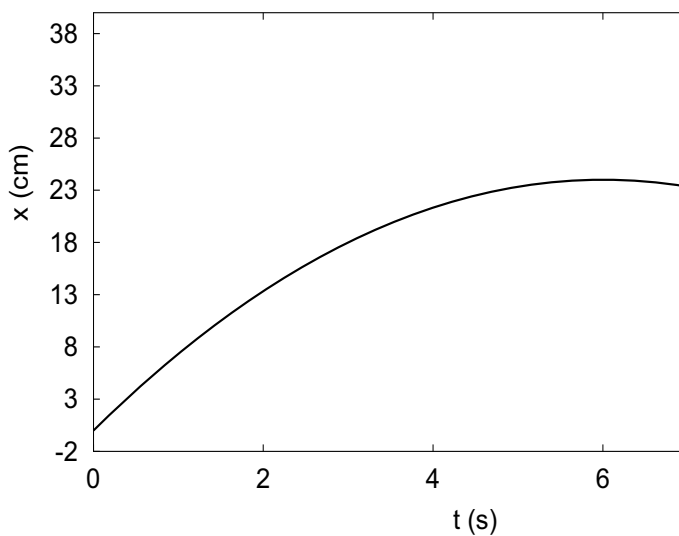


Figura 3.3: Gráfica de la posición vs tiempo de un gato.

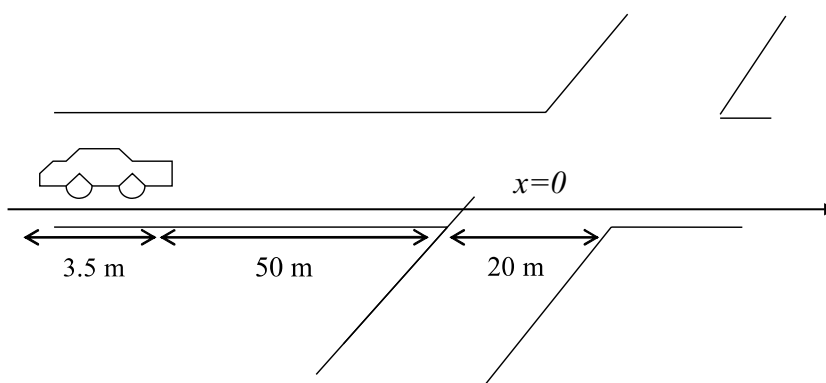


Figura 3.4: Diagrama de un automóvil aproximándose a un cruce con semáforo.

que tome el conductor debe ser tal que, si desacelera, la parte delantera del coche se encuentre en el extremo izquierdo del cruce vehicular (Fig. 3.4). Si por el contrario, el conductor decide acelerar, el extremo trasero del coche debe encontrarse en el extremo derecho de la intersección.

Considerando primero el caso de la aceleración positiva; tomando la posición en el tiempo inicial ($t = 0 \text{ s}$) x_0 la del extremo trasero del coche está dado por:

$$x_0 = (-50 - 3.5) \text{ m} = -53.5 \text{ m},$$

tomando como origen de referencia el extremo izquierdo del cruce vehicular, la posición

en cualquier momento posterior del extremo trasero del coche está dada por:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2,$$

en donde $a_1 = 1.5 \frac{m}{s^2}$ y $v_0 = 20 \frac{m}{s}$. Por lo tanto, acelerando la posición del extremo trasero del coche después de que transcurran 3 s, está dada por:

$$x(3) = \left[-53.5 + 20(3) + \frac{1}{2}(1.5)(3)^2 \right] m = 13.25 m,$$

y se necesita que $x(3)$ sea, por lo menos, igual a 20 m.

Considerando ahora el caso de la desaceleración: tomando la posición en el tiempo inicial ($t = 0$ s) x'_0 la del extremo frontal del coche:

$$x'_0 = -50 m,$$

tomando nuevamente como origen de referencia el extremo izquierdo del cruce vehicular, la posición en cualquier momento posterior, del extremo frontal del coche, está dada por:

$$x(t) = x'_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad m,$$

en donde $a_2 = -4.0 \frac{m}{s^2}$ y $v_0 = 20 \frac{m}{s}$. Por lo tanto, la posición del extremo frontal del coche después de que transcurran 3 s, está dada por:

$$x(3) = \left[-50 + 20(3) + \frac{1}{2}(-4)(3)^2 \right] m = -8 m,$$

y se necesita que $x(3)$ sea, como máximo, igual a 0 m.

Por lo tanto, el conductor debe **FRENAR**.

3-3.- La posición de un auto que viaja en línea recta, después de estar parado ante un semáforo, está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, en donde $b = 2.4 \frac{cm}{s^2}$ y $c = 0.12 \frac{cm}{s^3}$.

- Calcule la velocidad media entre $t = 0$ s y $t = 10$ s.
- Calcule la velocidad instantánea cuando $t = 0$ s, $t = 5$ s y $t = 10$ s.
- ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado?

Sol:

a) Tomando al semáforo como el origen de nuestro sistema de referencia, la posición del auto está dada por:

$$x(t) = 2.4 t^2 - 0.12 t^3 \text{ cm}, \quad (3.7)$$

y la velocidad media en el intervalo entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 10 \text{ s}$ es:

$$v_{\text{media}}(t = 0 \rightarrow t = 10) = \frac{x(10) - x(0)}{(10 - 0) \text{ s}},$$

de acuerdo con la ecuación (3.7), $x(10)$ es igual a:

$$x(10) = 2.40 (10)^2 - 0.120 (10)^3 = 120 \text{ cm},$$

y se tiene que $x(0) = 0 \text{ cm}$, por lo tanto:

$$v_{\text{media}}(t = 0 \rightarrow t = 10) = \left(\frac{120 - 0}{10 - 0} \right) \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

b) La velocidad instantánea del automóvil está dada por:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (2.40t^2 - 0.120t^3) \frac{\text{cm}}{\text{s}} = (4.80t - 0.360t^2) \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad (3.8)$$

por lo tanto, la velocidad instantánea del automóvil en $t = 0 \text{ s}$ es igual a:

$$v(t = 0) = [4.80 (0) - 0.360 (0)^2] \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

en $t = 5 \text{ s}$ es de:

$$v(t = 5) = [4.80 (5) - 0.360 (5)^2] \frac{\text{cm}}{\text{s}} = (24 - 9) \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 15 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

y para $t = 10 \text{ s}$ es igual a:

$$v(t = 10) = [4.80 (10) - 0.360 (10)^2] \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

c) Para que el automóvil vuelva a detenerse (observe que en $t = 0 \text{ s}$ la velocidad del automóvil es cero), se tiene que encontrar un valor del tiempo para el que la velocidad del automóvil sea igual a cero, esto es:

$$v(t_0) = [4.80 (t_0) - 0.360 (t_0)^2] = 0,$$

de donde se obtiene que:

$$t_0 = \frac{4.80}{0.360} = 13.33 \text{ s},$$

por lo tanto, 13.33 s después de que parte del reposo en el semáforo, el automóvil volverá a detenerse.

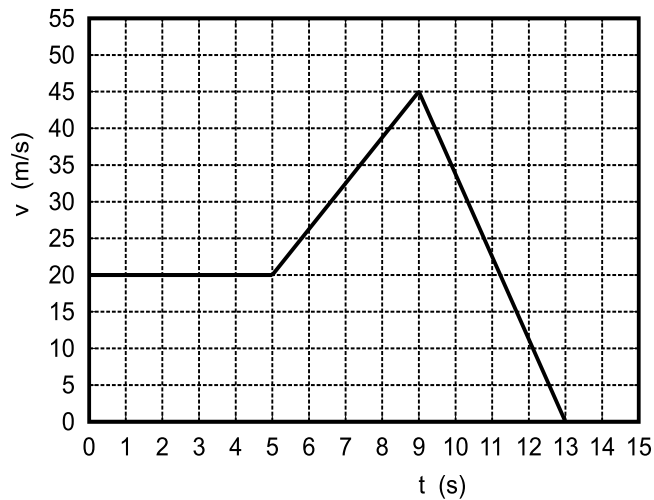


Figura 3.5: Gráfica de velocidad vs tiempo de un policía.

3-4.- La siguiente gráfica muestra la velocidad de un policía en motocicleta en función del tiempo.

- Calcule la aceleración instantánea en $t = 3$ s, $t = 7$ s y $t = 11$ s.
- Calcule la distancia recorrida por el policía durante los primeros 5 s, 9 s y 13 s.

Sol:

a) De acuerdo con la definición de la aceleración instantánea:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt},$$

la aceleración en $t = 3$ s está dada por el valor de la pendiente de la curva $v(t)$ vs t en este punto de la gráfica (Fig. 3.5), sin embargo, la pendiente de esta gráfica en el intervalo comprendido entre $t = 0$ s y $t = 5$ s es cero, por lo tanto, la aceleración instantánea en $t = 3$ s es igual a cero:

$$a(3) = 0.$$

En $t = 7$ s la aceleración está dada por el valor de la pendiente de la curva $v(t)$ vs t en este punto de la gráfica, la pendiente en el intervalo comprendido entre $t = 5$ s y $t = 9$ s está dada por:

$$a(t = 5 \rightarrow t = 9) = \left(\frac{45 - 20}{9 - 5} \right) \frac{m}{s^2} = \left(\frac{25}{4} \right) \frac{m}{s^2} = 6.25 \frac{m}{s^2},$$

por lo tanto, la aceleración instantánea en $t = 7 \text{ s}$ es igual a $6.25 \frac{m}{s^2}$.

De igual forma en $t = 11 \text{ s}$ la aceleración está dada por el valor de la pendiente de la curva $v(t)$ vs t en este punto de la gráfica, la pendiente en el intervalo comprendido entre $t = 9 \text{ s}$ y $t = 13 \text{ s}$ está dada por:

$$a(t = 9 \rightarrow t = 13) = \left(\frac{0 - 45}{13 - 9} \right) \frac{m}{s^2} = \left(-\frac{45}{4} \right) \frac{m}{s^2} = -11.25 \frac{m}{s^2} .$$

por lo tanto, la aceleración instantánea en $t = 11 \text{ s}$ es igual a $-11.25 \frac{m}{s^2}$.

b) La distancia recorrida por el policía entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$ es igual al área comprendida entre la curva $v(t)$ y el eje del tiempo en este intervalo. De la gráfica anterior (Fig. 3.5) se tiene que:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 5) = (20)(5) \frac{m}{s} s = 100 \text{ m} .$$

Ahora bien, la distancia cubierta por el policía en el intervalo $t = 0 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$ es igual al área comprendida entre la curva $v(t)$ y el eje del tiempo en el intervalo entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$, más el área comprendida entre la curva $v(t)$ y el eje del tiempo en el intervalo $t = 5 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$.

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) = \Delta x(t = 0 \rightarrow t = 5) + \Delta x(t = 5 \rightarrow t = 9)$$

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 5) = (20)(5) \frac{m}{s} s = 100 \text{ m}$$

$$\Delta x(t = 5 \rightarrow t = 9) = \left[(20)(4) + \frac{1}{2}(25)(4) \right] \frac{m}{s} s = 130 \text{ m} ,$$

por lo tanto, la distancia cubierta por el policía en el intervalo comprendido entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$ está dada por:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) = 100 \text{ m} + 130 \text{ m} = 230 \text{ m} .$$

Finalmente, la distancia recorrida por el policía en el intervalo $t = 0 \text{ s}$ y $t = 13 \text{ s}$ es igual al área comprendida entre la curva $v(t)$ y el eje del tiempo en el intervalo $t = 0 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$, más el área comprendida entre $t = 9 \text{ s}$ y $t = 13 \text{ s}$.

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 13) = \Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) + \Delta x(t = 9 \rightarrow t = 13)$$

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) = 230 \text{ m}$$

$$\Delta x(t = 9 \rightarrow t = 13) = \frac{1}{2}(45)(4) \frac{m}{s} s = 90 \text{ m} ,$$

por lo tanto, la distancia cubierta por el policía en el intervalo comprendido entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 13 \text{ s}$ está dada por:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 13) = 230 \text{ m} + 90 \text{ m} = 320 \text{ m} .$$

3-5.- El maquinista de un tren de pasajeros que viaja a $25 \frac{m}{s}$ avista a un tren de carga $200 m$ más adelante sobre la misma vía. El tren de carga viaja en la misma dirección pero a una velocidad de $15 \frac{m}{s}$. El maquinista del tren de pasajeros aplica de inmediato los frenos, lo que ocasiona una aceleración constante de $-0.100 \frac{m}{s^2}$, mientras que el tren de carga mantiene una velocidad constante. Siendo $x = 0$ el punto en donde está el frente del tren de pasajeros cuando el maquinista aplica los frenos:

- ¿Los trenes colisionarán?
- De ser así, ¿a qué distancia del primer avistamiento ocurrirá?
- Dibuje en una sola gráfica las posiciones del frente del tren de pasajeros y del tren de carga en función del tiempo.

Sol:

a) De acuerdo con la información inicial y la fórmula general del movimiento uniformemente acelerado:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

tomando $x_0 = 0 m$, $v_0 = 25 \frac{m}{s}$, $a = -0.1 \frac{m}{s^2}$ y el tiempo (t) en segundos (s), la posición del tren de pasajeros está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x_{pasajeros}(t) &= \left(25 \frac{m}{s}\right)t(s) + \left[\frac{1}{2}\left(-0.1 \frac{m}{s^2}\right)\right]t^2(s^2) \\ &= 25t - \frac{0.1}{2}t^2 \text{ m,} \end{aligned} \quad (3.9)$$

y tomando $x_0 = 200 m$, $v_0 = 15 \frac{m}{s}$, $a = 0 \frac{m}{s^2}$ y el tiempo (t) en segundos (s), la posición del tren de carga está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x_{carga}(t) &= (200 m) + \left(15 \frac{m}{s}\right)t(s) \\ &= 200 + 15t \text{ m.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para saber si el tren de pasajeros choca con el tren de carga, se debe conocer el instante de tiempo (t_0) en el que el extremo frontal del tren de pasajeros y el extremo final del

tren de carga se encuentran en la misma posición, es decir:

$$\begin{aligned}
 x_{carga}(t_0) &= x_{pasajeros}(t_0) \\
 \Rightarrow \\
 (25 \frac{m}{s})t_0 + - \left[\frac{1}{2}(-0.1 \frac{m}{s^2}) \right] t_0^2 &= (200 m) + \left(15 \frac{m}{s} \right) t_0 \\
 \Rightarrow 0 &= 10t_0 - 0.05t_0^2 - 200 \\
 \Rightarrow t_0 &= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-0.05)(-200)}}{-0.10} \\
 \Rightarrow t_0 &= 22.54 s \\
 \Rightarrow t_0 &= 177.46 s.
 \end{aligned}$$

El momento en que los trenes se encuentran corresponde a $t_0 = 22.54 s$ y la velocidad del tren de pasajeros es:

$$v_{pasajeros}(t) = 25 \frac{m}{s} - \left(0.1 \frac{m}{s^2} \right) t_0 = 22.75 \frac{m}{s},$$

y la velocidad constante del tren de carga durante el movimiento es:

$$v_{carga}(t) = 15 \frac{m}{s}.$$

Esto significa que los trenes, al encontrarse en $t = t_0$ a diferentes velocidades, colisionarán.

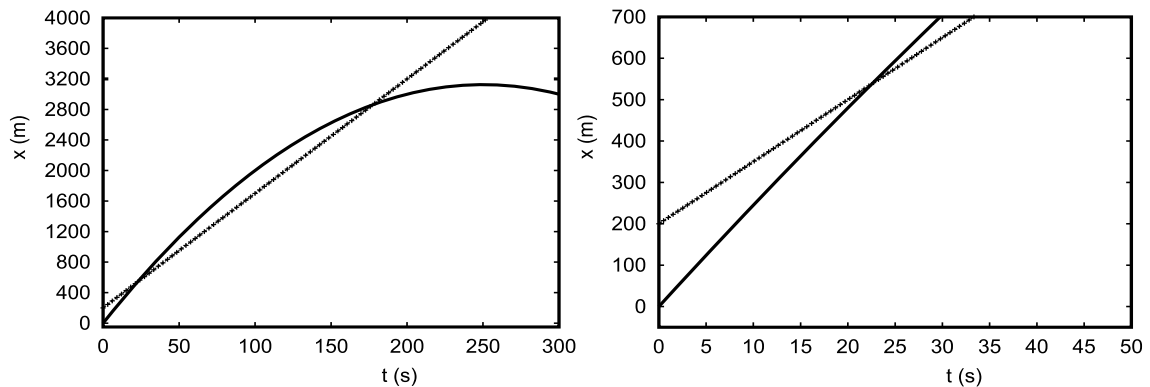


Figura 3.6: Gráfica de posición vs tiempo de ambos trenes que colisionan en un tiempo $t_0 = 22.54 s$, después del primer avistamiento, la línea recta representa la posición como función del tiempo del tren de carga, mientras que el trazo curvado representa la posición como función del tiempo del tren de pasajeros.

b) La colisión tendrá lugar en:

$$x_{pasajeros}(t_0) = x_{carga}(t_0) = 25t_0 - \frac{0.1}{2}t_0^2 = 538.1 \text{ m},$$

es decir, a 538.1 m pasando el punto del primer avistamiento hecho por el maquinista del tren de pasajeros.

c) En las gráficas de la figura 3.6 se muestran las posiciones de ambos trenes dadas por las ecuaciones (3.9) y (3.10), el trazo curvado representa la posición del tren de pasajeros y la línea recta la del tren de carga. En la primera gráfica puede observarse un intervalo más amplio que nos permite identificar las características del movimiento de cada uno de los trenes, mientras que en la gráfica de la derecha se muestra un intervalo de tiempo pequeño alrededor del punto de la colisión.

También debe mencionarse que después de que $t = t_0 = 22.54 \text{ s}$ estas gráficas de posición en función del tiempo no tienen sentido físico porque los movimientos de los trenes después de la colisión no se encuentran descritos por las ecuaciones (3.9) y (3.10).

Capítulo 4

Cinemática en dos dimensiones

4-1.- La figura 4.1 muestra la trayectoria de un automóvil formada por segmentos rectilíneos y cuadrantes de circunferencia. El automóvil parte del reposo en el punto **A**, después de que alcanza el punto **B** mantiene rapidez constante hasta que llega al punto **E** y finalmente termina en reposo su recorrido en el punto **F**.

- a) En un punto intermedio de la trayectoria **AB**, **BC**, **CD**, **DE** y **EF**, ¿cuál es la dirección de la velocidad?
- b) ¿En cuál de estos puntos el automóvil posee aceleración y en que dirección?
- c) ¿En qué cuadrante es mayor la aceleración: en **BC** o **DE**?

Sol:

a) De acuerdo a la figura 4.2 el vector velocidad en los intervalos **AB**, **CD** y **EF** es paralelo a la trayectoria del automóvil. Como en los puntos **A** y **F** el automóvil se encuentra en reposo, la velocidad primero aumentará y posteriormente disminuirá. En los intervalos **BC** y **DE** la trayectoria es circular y el vehículo mantiene una rapidez constante y la velocidad será tangente a la trayectoria en cualquier punto de estos intervalos.

b) De acuerdo a la figura 4.2 el vector velocidad en el intervalo **AB** aumenta, por lo tanto, al ser una trayectoria recta, el vector aceleración tendrá una dirección paralela a la velocidad del automóvil, por otra parte, en el intervalo **EF** la rapidez del automóvil disminuye, por lo tanto, la aceleración es paralela a la trayectoria del automóvil, pero en dirección contraria al vector velocidad.

Para el intervalo **CD**, al ser la velocidad constante y a lo largo de una línea recta, la aceleración es cero (en **CD** $\vec{a} = 0$).

Para los intervalos **BC** y **DE**, como la trayectoria es circular con rapidez constante, el vector aceleración en cualquier punto tiene una dirección hacia el centro de la circun-

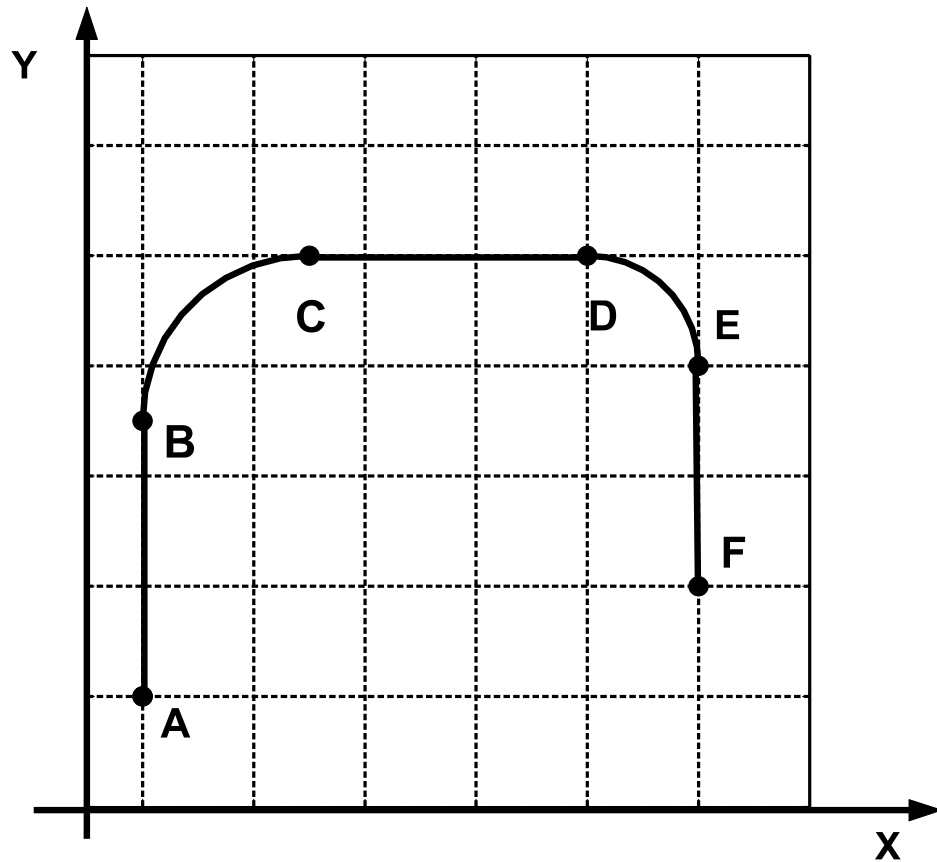


Figura 4.1: Gráfica de la trayectoria de un automóvil.

ferencia, por lo que la magnitud de la aceleración está dada por: $a = \frac{v^2}{R}$, en donde v es la rapidez de la partícula y R es el radio de la circunferencia.

c) Ya que la aceleración en los intervalos **BC** y **DE** es centrípeta y su magnitud está dada por $\frac{v^2}{R}$, la aceleración en el intervalo **DE** es mayor porque el radio de su circunferencia es menor que el radio de la circunferencia del intervalo **BC**.

4-2.- En los diagramas de la figura 4.3, las partículas se mueven en trayectorias circulares y con velocidades variables. En cada diagrama se han dibujado los vectores velocidad para dos tiempos distintos. Determinar el vector aceleración media entre las dos posiciones que se indican en cada caso.

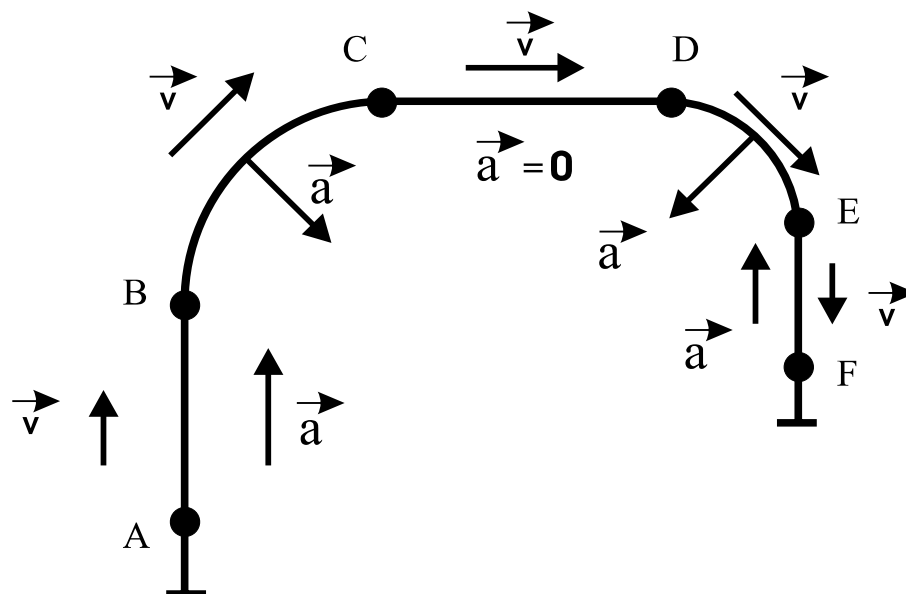


Figura 4.2: Gráfica de las velocidades y aceleraciones de una partícula en una trayectoria bidimensional.

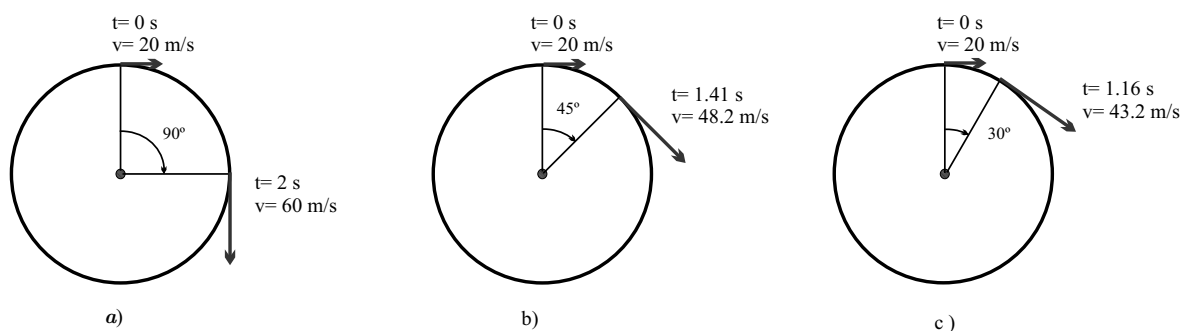


Figura 4.3: Velocidades para tres tiempos distintos de una partícula en un movimiento circular no uniforme.

Sol:

Para calcular la aceleración promedio en cada uno de los diagramas (Fig. 4.3), se deben descomponer los vectores velocidad inicial \vec{v}_1 y final \vec{v}_2 en sus componentes cartesianas, por ejemplo: para el inciso a) se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (v_{x1}, v_{y1}) = \left(20 \frac{m}{s}, 0 \frac{m}{s}\right) = (20, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{v}_2 &= (0, -60) \frac{m}{s},\end{aligned}$$

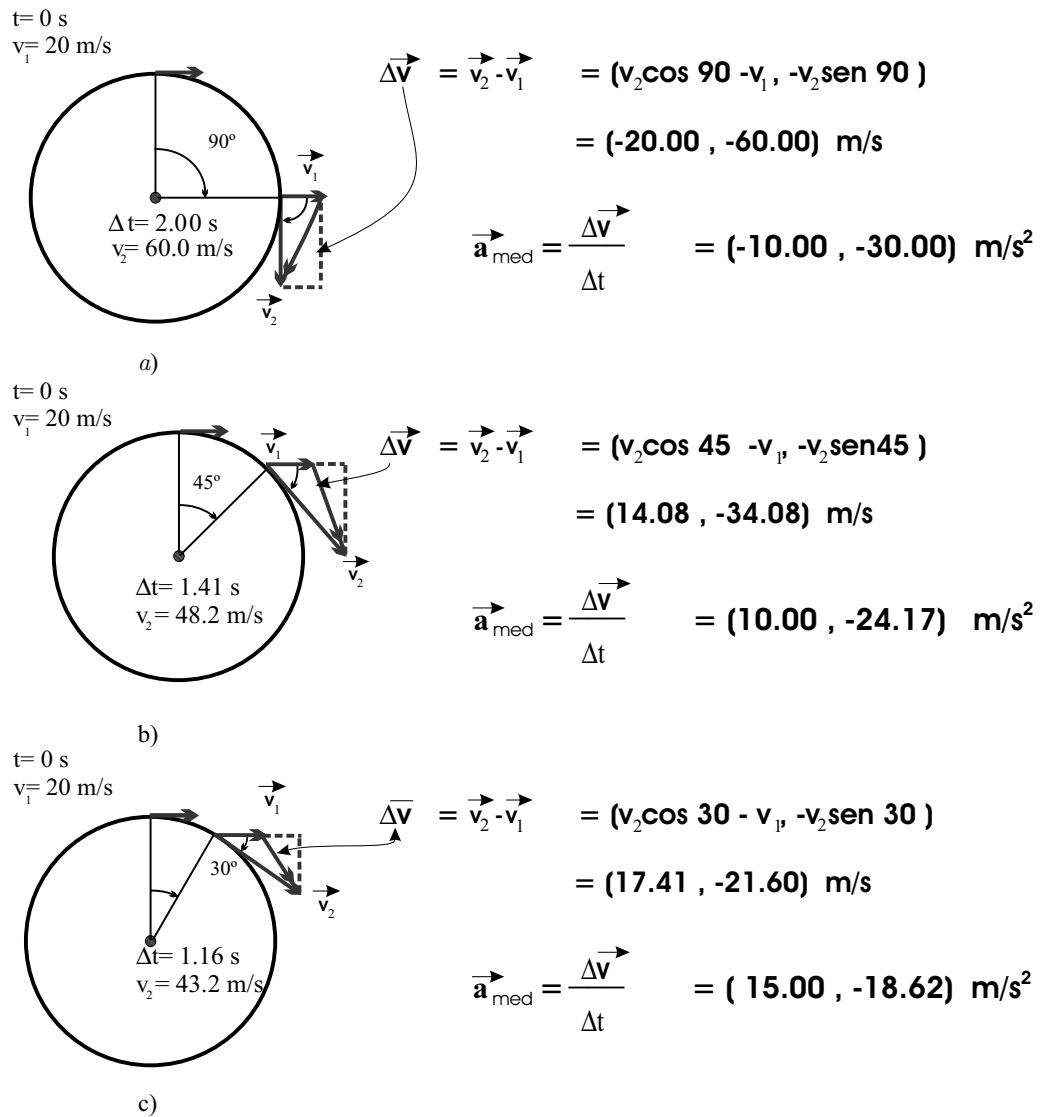


Figura 4.4: Aceleraciones promedio para tres intervalos de tiempo distintos de una partícula en un movimiento circular no uniforme.

de donde se puede calcular el vector diferencia $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, el cual está dado por:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-20, -60) \frac{m}{s}$$

y si $\Delta t = 2 \text{ s}$, finalmente, la aceleración promedio está dada por:

$$\vec{a}_{med} = (a_{x_{med}}, a_{y_{med}}) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = (-10, -30) \frac{m}{s^2}$$

Para el inciso b) se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (20, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{v}_2 &= (48.2 \cos 45, -48.2 \sin 45) \frac{m}{s} = (34.08, -34.08) \frac{m}{s},\end{aligned}$$

de donde se puede calcular el vector diferencia $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, el cual está dado por:

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (14.08, -34.08) \frac{m}{s}$$

y si $\Delta t = 1.41$ s, finalmente, la aceleración promedio está dada por:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = (10, -24.17) \frac{m}{s^2}.$$

Para el inciso c) se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (20, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{v}_2 &= (43.2 \cos 30, -43.2 \sin 30) \frac{m}{s} = (37.41, -21.6) \frac{m}{s},\end{aligned}$$

de esta manera $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ está dado por:

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (17.41, -21.6) \frac{m}{s}$$

y si $\Delta t = 1.16$ s, finalmente, la aceleración promedio está dada por:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = (15, -18.62) \frac{m}{s^2},$$

estos resultados pueden observarse en los diagramas anteriores (Fig. 4.4).

4-3.- Una partícula sigue un camino tal y como se muestra en la figura 4.5. Entre los puntos **B** y **D** sigue una trayectoria recta. Dibuje los vectores de aceleración en **A**, **C** y **E** si:

- La partícula se mueve con rapidez constante.
- La rapidez de la partícula aumenta continuamente.
- La rapidez de la partícula disminuye continuamente.

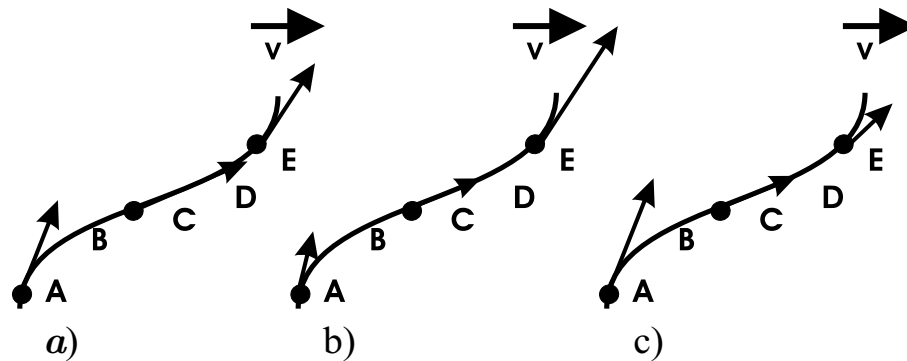


Figura 4.5: Diferentes relaciones existentes entre el vector velocidad y el vector aceleración.

Sol:

En una trayectoria arbitraria, como la de la figura 4.6, el vector aceleración tiene dos componentes: una componente a_{\perp} perpendicular a la trayectoria de la partícula y una componente a_{\parallel} paralela a la trayectoria; ambas dadas por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_{\perp} &= \frac{v^2}{R} \\ a_{\parallel} &= \frac{d|\vec{v}|}{dt}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

en la figura 4.6 se pueden observar las representaciones gráficas de las dos componentes, para dos diferentes situaciones, la de la parte inferior de esta figura a_{\parallel} es paralela y en la misma dirección que la velocidad y en consecuencia la rapidez de la partícula aumenta. En la parte superior a_{\parallel} también es paralela pero en dirección contraria a la velocidad y en consecuencia la rapidez de la partícula disminuye, en ambos casos el vector aceleración \vec{a} resulta ser la suma vectorial de las componentes dadas por la ecuación (4.1).

De manera que para el inciso a) de la figura 4.5, en el que la rapidez es constante en toda la trayectoria, la aceleración sólo tendrá componente a_{\perp} en los intervalos **AB** y **DE** (dirigidas al centro de curvatura de la trayectoria en dichos intervalos), porque entre los puntos **B** y **D** el camino es recto y la partícula se mueve con velocidad constante, por lo que la aceleración en esta trayectoria es igual a cero, estos resultados se muestran en el inciso a) de la figura 4.7.

Para el inciso b) de la figura 4.5, en el que la velocidad de la partícula aumenta a lo largo de la trayectoria, la dirección de la aceleración \vec{a} apunta siempre adelantando a la componente perpendicular a_{\perp} , porque $a_{\parallel} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ es positiva la rapidez de la partícula

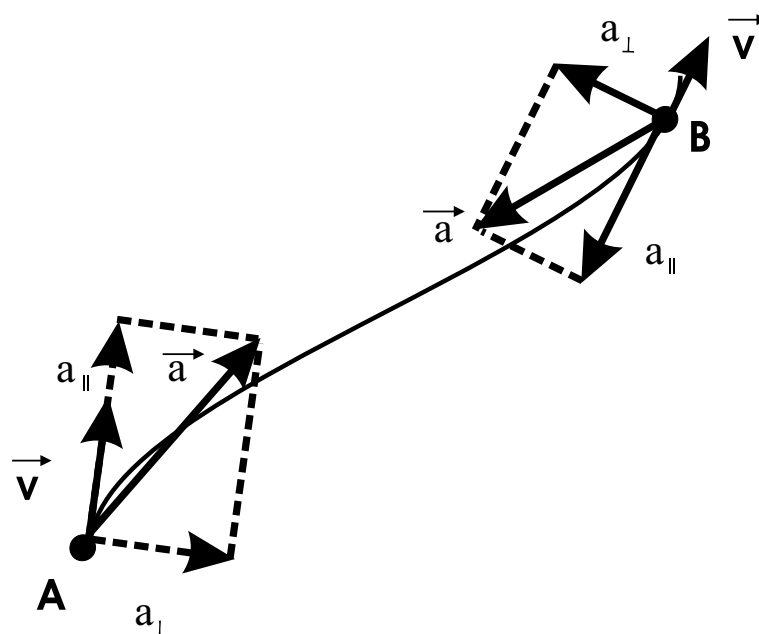


Figura 4.6: Diferentes relaciones existentes entre el vector velocidad y el vector aceleración.

aumenta, mientras que entre los puntos **B** y **D** el camino es recto y, por lo tanto, la aceleración sólo tiene componente tangencial a la trayectoria con la misma dirección que la velocidad, al ir ésta última aumentando, estos resultados se muestran en el inciso *b*) de la figura 4.7.

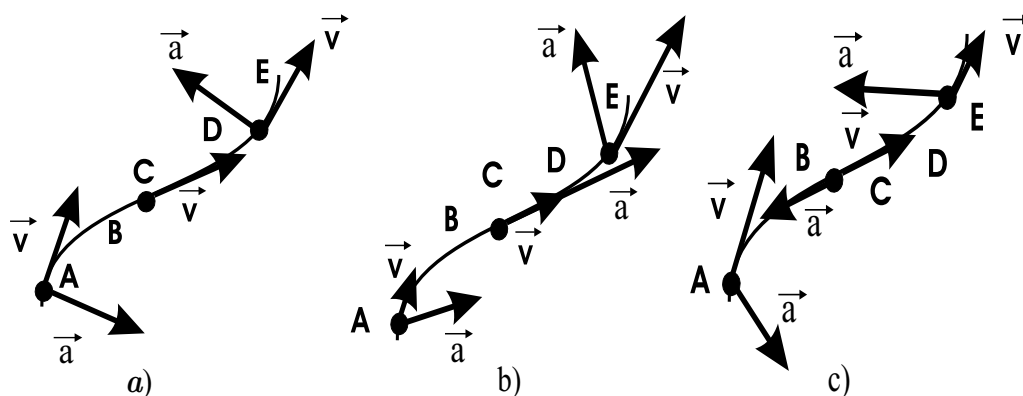


Figura 4.7: Diferentes relaciones existentes entre el vector velocidad y el vector aceleración para los incisos a), b) y c).

Finalmente para el caso del inciso *c*) de la figura 4.5, en el que la velocidad de la partícula disminuye a lo largo de la trayectoria, la dirección de la aceleración \vec{a} apunta siempre atrasándose respecto a la componente perpendicular a_{\perp} , porque $a_{\parallel} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ es negativa, la rapidez de la partícula disminuye, mientras que entre los puntos **B** y **D** el camino es recto y la aceleración sólo tiene componente tangencial a la trayectoria con la dirección opuesta a la velocidad, al ir esta última disminuyendo, estos resultados se muestran en el inciso *c*) de la figura 4.7.

4-4.- Un profesor de física realiza audaces acrobacias en su tiempo libre. En la última intentó saltar un río en motocicleta (Fig. 4.8). Tomando en cuenta que la rampa de despegue tiene una inclinación de 53° , que el río tiene 40 m de ancho y que la ribera lejana y el río se encuentran a 15 m y 100 m, respectivamente, por debajo del punto más alto de la rampa:

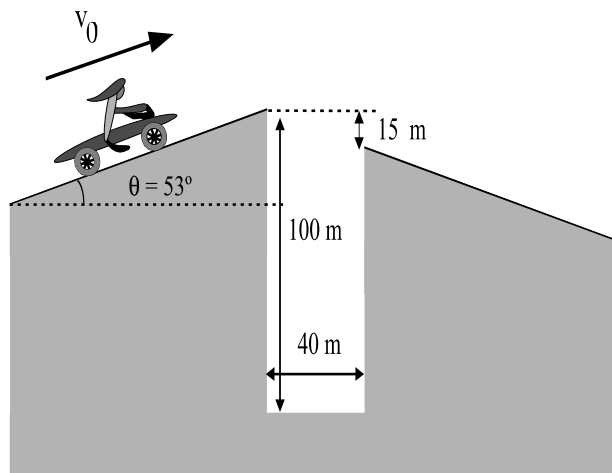


Figura 4.8: Rapidez mínima para un motociclista saltando una zanja.

- ¿Qué rapidez necesita alcanzar la motocicleta en el punto más alto de la rampa para llegar al borde de la otra orilla?
- Si la rapidez fuera sólo la mitad del valor obtenido en el inciso *a*): ¿en dónde caería el motociclista?

Sol:

a) Las ecuaciones generales del movimiento parabólico están dadas por:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\v_x(t) &= v_0 \cos \theta,\end{aligned}\tag{4.2}$$

despejando el tiempo t en $x(t)$ de la ecuación (4.2) y sustituyendo en $y(t)$, se obtiene (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el borde superior de la rampa, en donde $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$):

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},\tag{4.3}$$

de esta ecuación se despeja v_0 para obtener finalmente:

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2 \cos^2 \theta (x \operatorname{tg} \theta - y)}.\tag{4.4}$$

Si en esta última ecuación se impone la condición de que el motociclista llegue durante su movimiento parabólico por lo menos al borde de la otra orilla ($x = 40 \text{ m}$, $y = -15 \text{ m}$ y $\theta = 53^\circ$), la velocidad con la que el motociclista debe despegar de la rampa es:

$$v_0^2 = \frac{9.8(40)^2}{2 \cos^2 53(40 \operatorname{tg} 53 - (-15))} = 318 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2},$$

de donde:

$$v_0 = 17.84 \frac{\text{m}}{\text{s}}.\tag{4.5}$$

b) Si el motociclista parte con una velocidad inicial de $v_0 = 8.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, que es igual a la mitad de la velocidad mínima para llegar a la otra orilla, éste caerá hasta llegar al nivel del río en donde la altura es $y = -100 \text{ m}$ y a una distancia de la rivera cercana dada por la ecuación (4.3), si de esta ecuación se resuelve para x se obtiene:

$$x = \frac{\operatorname{tg} \theta \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta - \frac{2gy}{(v_0)^2 \cos^2 \theta}}}{\frac{g}{(v_0)^2 \cos^2 \theta}} = 28.40 \text{ m}.\tag{4.6}$$

Por lo tanto, el motociclista caerá en el río a 28.40 m de la rivera cercana.

4-5.- Para ganar un muñeco de peluche en una feria se tiene que lanzar una moneda a un plato, el cual está colocado en una repisa más arriba del punto en que la moneda abandona la mano y a una distancia horizontal de 2.1 m de ese punto (Fig. 4.9). Si usted lanza la moneda con una velocidad de $6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a 60° sobre la horizontal, se logra el objetivo de colocarla en el plato. En este problema no es necesario considerar la resistencia del aire.

- a) ¿A qué altura está la repisa sobre el punto de partida de la moneda?
 b) ¿Con qué velocidad en la dirección vertical incide la moneda sobre el plato?

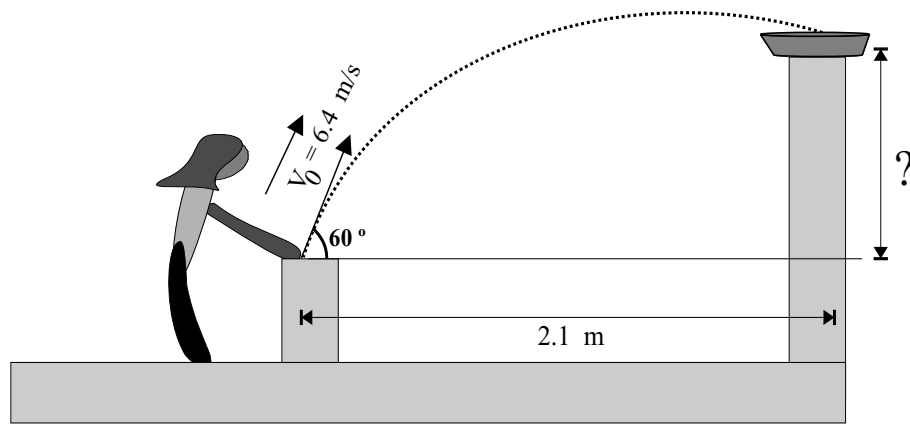


Figura 4.9: Trayectoria de una moneda.

Sol:

a) Nuevamente partiendo las ecuaciones generales del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\ x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\ v_x(t) &= v_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

despejando el tiempo t en $x(t)$ de la ecuación (4.7) y sustituyendo en $y(t)$, se encuentra (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el borde de donde se lanza la moneda, en donde $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$):

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.8)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.8) $x = 2.1 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$, $v_0 = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se obtiene la altura a la que se encuentra la repisa sobre el punto de partida de la moneda:

$$y = 2.1 \operatorname{tg} 60 - \frac{9.8(2.1)^2}{2(6.4)^2 \cos^2 60} = 1.53 \text{ m} . \quad (4.9)$$

b) Despejando el tiempo t en $x(t)$ de la ecuación (4.7) y sustituyendo en la ecuación para $v_y(t)$ se encuentra (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el borde de donde se lanza la moneda, en donde $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$):

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta} . \quad (4.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.10) $x = 2.1 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$, $v_0 = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se obtiene para la velocidad en la dirección vertical con la que la moneda incide sobre el plato:

$$v_y = 6.4 \operatorname{sen} 60 - \frac{(9.8)(2.1)}{6.4 \cos 60} = -0.89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4.11)$$

y

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta = 6.4 \cos 60 = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (4.12)$$

Capítulo 5

Cinemática en una y dos dimensiones

5-1.- La posición de una partícula en función del tiempo viene dada por:

| | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| t (s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| x (m) | 0 | 5 | 15 | 45 | 65 | 70 | 60 | -30 | -50 | -50 | -55 | -55 |

Representar x en función de t y dibujar una curva continua $x(t)$. Señalar los instantes o intervalos de tiempo en los que:

- La velocidad es máxima.
- La velocidad es mínima.
- La velocidad es cero.
- La velocidad es constante.
- La aceleración es positiva.
- La aceleración es negativa.

Sol:

Para este problema es necesario realizar un análisis cualitativo de la gráfica de la posición vs el tiempo para poder obtener información de la velocidad de la partícula como función del tiempo. La gráfica de la posición en función del tiempo se muestra en la figura 5.1.

De esta gráfica puede determinarse la velocidad en cada instante de tiempo porque la velocidad instantánea $v(t)$ está dada por la derivada de la posición respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \quad (5.1)$$

Para obtener los puntos en que la velocidad es máxima, mínima o cero, es necesario utilizar la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: la

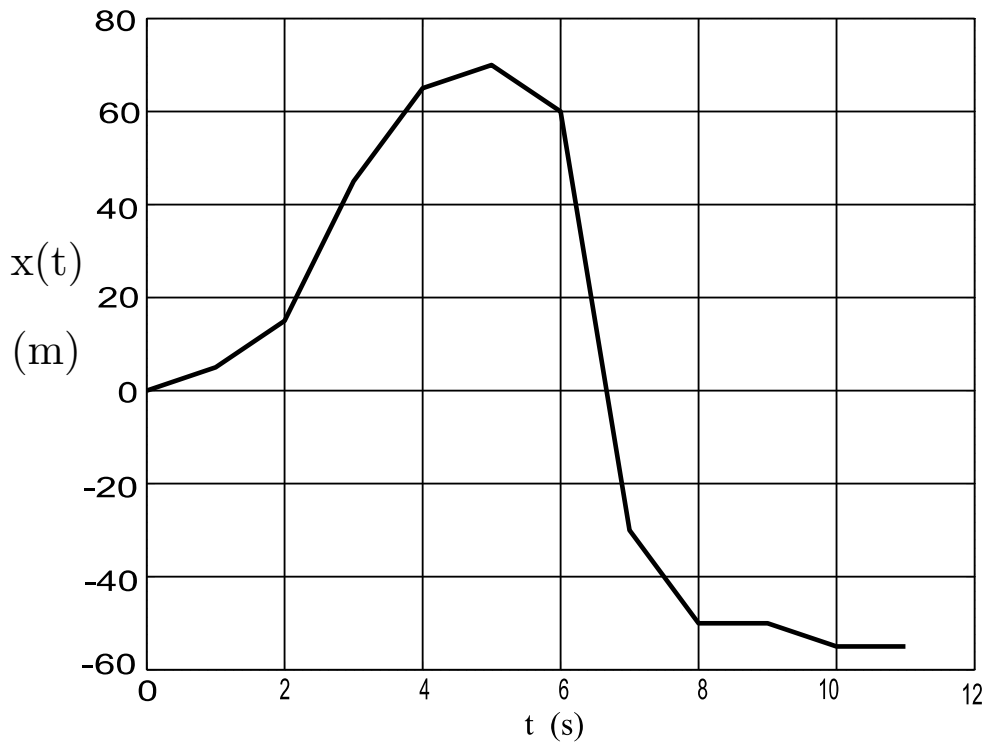


Figura 5.1: Gráfica de la posición vs tiempo de una partícula.

derivada en el punto en cuestión es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Así, aunque el número de datos de nuestra función $x(t)$ es reducido, puede aproximarse la función $v(t)$ por su valor medio v_m en cada intervalo de tiempo, la cual puede calcularse de la siguiente manera:

$$v_m(t_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (5.2)$$

en donde las coordenadas (t_i, x_i) corresponden a la i -ésima pareja ordenada de la gráfica anterior.

De esta manera se puede calcular de forma aproximada los puntos de la gráfica $v(t)$ vs t . El resultado de estos cálculos de velocidades como función del tiempo se muestra en la gráfica de la figura 5.2.

De ambas gráficas se puede extraer una gran cantidad de información cualitativa sobre el movimiento de la partícula, en esta gráfica (Fig.5.2) se observa que:

a) La velocidad máxima alcanzada por la partícula es de $30 \frac{m}{s}$ y ocurre, aproximada-

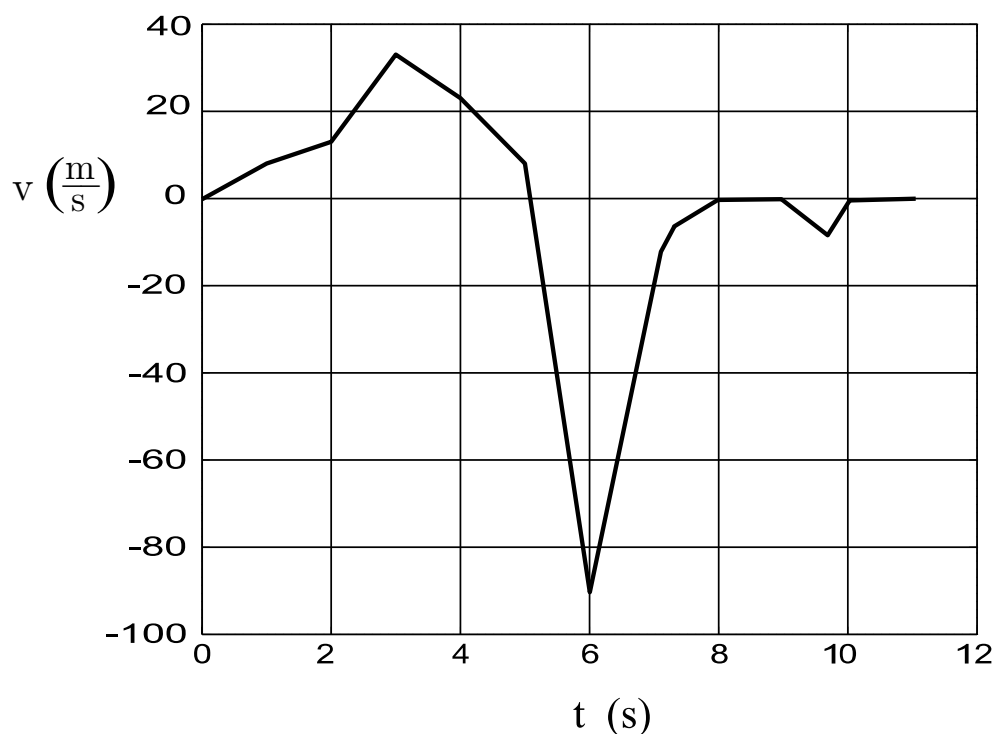


Figura 5.2: Gráfica de la velocidad media vs tiempo de una partícula.

mente, cuando $t = 3 \text{ s}$.

b) La velocidad mínima alcanzada por la partícula es de $-90 \frac{m}{s}$ y ocurre, aproximadamente, cuando $t = 6 \text{ s}$.

c) La velocidad de la partícula es igual a cero: cuando $t = 5 \text{ s}$, al igual que en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 8 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$ y en el intervalo entre $t = 10 \text{ s}$ y $t = 11 \text{ s}$, estos dos últimos resultados se pueden ver más claramente en la primera gráfica (Fig. 5.1), ya que en ambos intervalos la posición de la partícula permanece constante.

d) La velocidad de la partícula entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 11 \text{ s}$ presenta cambios significativos, por lo que no puede considerarse que la velocidad permanezca constante en algún intervalo de tiempo distinto a los ya mencionados en el inciso anterior; es decir: entre $t = 8 \text{ s}$ y $t = 9 \text{ s}$ y entre $t = 10 \text{ s}$ y $t = 11 \text{ s}$ en donde la velocidad permanece constante y es igual a cero.

Para poder obtener información sobre la aceleración de la partícula como función del tiempo, nuevamente se tiene que calcular la derivada respecto al tiempo pero ahora de

la velocidad. La aceleración de la partícula en un tiempo t^* está dada por la pendiente de la recta tangente a la curva de velocidad en t^* y la cual puede obtenerse, al menos cualitativamente, de la figura 5.2. En ésta la aceleración es positiva para pendientes positivas y negativa para pendientes negativas. De esta forma se tiene que:

e) La aceleración de la partícula es positiva en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ s y $t = 3$ s, también es positiva entre $t = 6$ s y $t = 8$ s y aproximadamente entre $t = 9.5$ s y $t = 10$ s.

Recordando que entre $t = 8$ s y $t = 9$ s y entre $t = 10$ s y $t = 11$ s la velocidad permanece constante y es igual a cero, por lo que en estos intervalos de tiempo la aceleración es igual cero (Fig. 5.1).

f) La aceleración de la partícula es negativa en los intervalos de tiempo comprendidos entre $t = 3$ s y $t = 6$ s y entre $t = 9$ s y aproximadamente $t = 9.5$ s.

5-2.- Para cada uno de los cuatro gráficos de x en función de t de la figura 5.3 indicar:

- i) Si la velocidad en el instante t_2 es mayor, menor o igual que la velocidad en el instante t_1 .
- ii) Si la rapidez en el tiempo t_2 es mayor, menor o igual que la rapidez en el instante t_1 .

Sol:

Para este problema es necesario realizar un análisis cualitativo de la gráficas de la posición en función del tiempo (Fig. 5.3), y así obtener información de la velocidad de la partícula como función del tiempo.

De estas gráficas puede determinarse la velocidad en cada instante de tiempo porque se tiene que la velocidad instantánea $v(t)$ está dada por la derivada de la posición respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

ahora, para obtener información de los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o cero, debe utilizarse la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: la derivada en el punto en cuestión es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, por lo que:

En el inciso *a)* se observa un objeto en movimiento que recorre distancias iguales en tiempos iguales, este comportamiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, positiva en este caso por ser la pendiente de la curva positiva, por lo tanto en t_1 y en t_2 las velocidades son iguales.

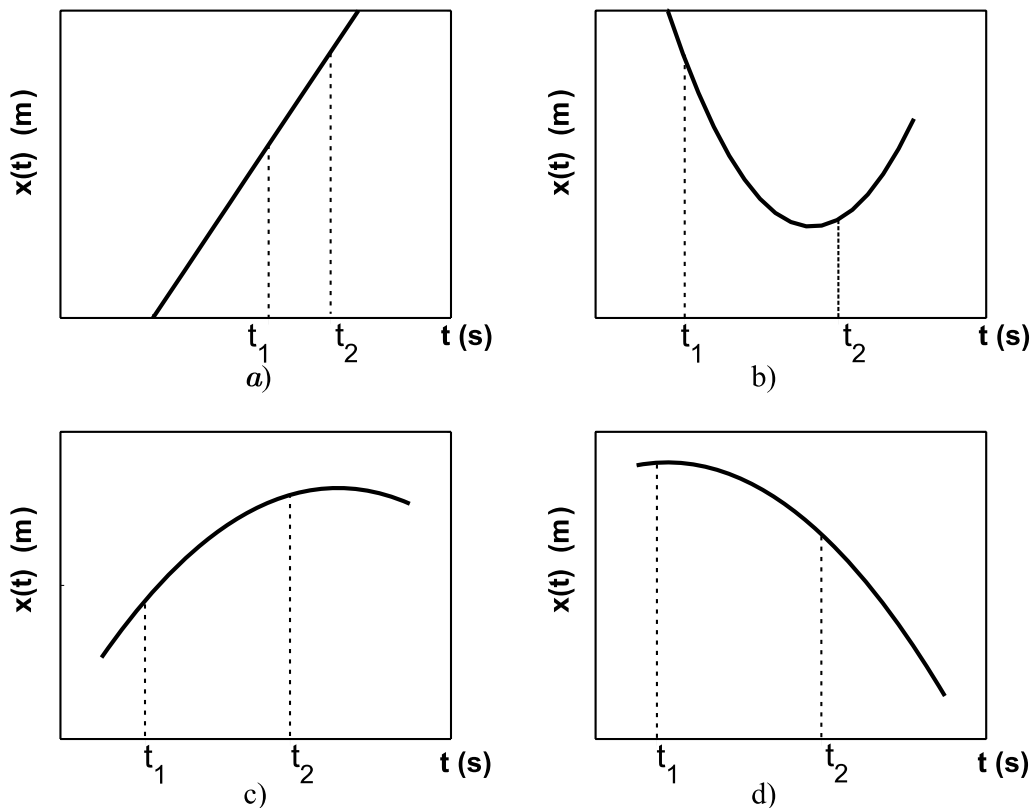


Figura 5.3: Gráficas de la posición vs tiempo de una partícula en cuatro situaciones físicas distintas.

Como la rapidez es igual al valor absoluto ($|\vec{v}|$) de la velocidad, la rapidez del objeto en t_1 y en t_2 es la misma.

En el inciso *b*) se tiene un objeto en movimiento pero que no tiene una velocidad constante porque la pendiente de la gráfica de posición en función del tiempo varía con el tiempo. Además se observa que para t_1 la pendiente es negativa, por lo tanto, también la velocidad es negativa.

Por otra parte, en el instante t_2 la pendiente es positiva y en consecuencia, también la velocidad es positiva. Por lo tanto en t_2 la velocidad del objeto es mayor que en t_1 .

Al ser la velocidad en t_2 positiva pero no muy grande y en t_1 bastante negativa, al considerar sus valores absolutos ($v = |\vec{v}|$), se tiene que la rapidez del objeto en t_1 es mayor que en t_2 .

En el inciso *c*) se observa en el instante t_1 un objeto en movimiento que tiene una velocidad positiva porque la pendiente de la gráfica de posición en función del tiempo

es positiva y grande.

Por otra parte, en el instante t_2 la pendiente es positiva pero no muy grande y en consecuencia, también la velocidad es positiva pero no muy grande. Por lo tanto, en t_1 la velocidad del objeto es mayor que en t_2 .

Al ser la velocidad en t_2 positiva pero no muy grande, en t_1 positiva y grande, al considerar sus valores absolutos ($v = |\vec{v}|$), se tiene que la rapidez en t_1 es mayor que en t_2 .

En el inciso d) se tiene un objeto moviéndose de tal manera que la pendiente en t_1 es igual a cero, por lo tanto, también la velocidad es cero.

Por otra parte, en el instante t_2 la pendiente es negativa, en consecuencia, también la velocidad es negativa. Por lo tanto, en t_1 la velocidad del objeto es mayor que en t_2 .

Al ser la velocidad en t_1 igual cero, en t_2 negativa, al considerar sus valores absolutos ($v = |\vec{v}|$), se tiene que la rapidez del objeto en t_1 es menor que en t_2 .

5-3.- Las coordenadas en un plano de la posición de una partícula están dadas por (x, y) y son iguales a $(x = 2 \text{ m}, y = 3 \text{ m})$ cuando $t = 0 \text{ s}$; a $(x = 6 \text{ m}, y = 7 \text{ m})$ cuando $t = 2 \text{ s}$ y a $(x = 13 \text{ m}, y = 14 \text{ m})$ cuando $t = 5 \text{ s}$.

a) Hallar \vec{v}_m para el intervalo comprendido entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 2 \text{ s}$.

b) Hallar \vec{v}_m para el intervalo comprendido entre $t = 2 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$.

Sol:

En general la velocidad media de una partícula en un intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$ puede obtenerse a partir de su definición:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad (5.3)$$

en donde $\vec{r}(t_i)$ es el vector posición de la partícula en el tiempo t_i .

a) Aplicando la definición (5.3) al caso en que (x_1, y_1) es igual a $(2 \text{ m}, 3 \text{ m})$ cuando $t_1 = 0 \text{ s}$ y $(x_2, y_2) = (6 \text{ m}, 7 \text{ m})$ cuando $t_2 = 2 \text{ s}$, se obtiene:

$$v_{m_x} = \left(\frac{6 - 2}{2 - 0} \right) \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s}$$

$$v_{m_y} = \left(\frac{7 - 3}{2 - 0} \right) \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s},$$

por lo tanto, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[0, 2] \text{ s}$ resulta ser:

$$\vec{v}_m = (2, 2) \frac{m}{s}.$$

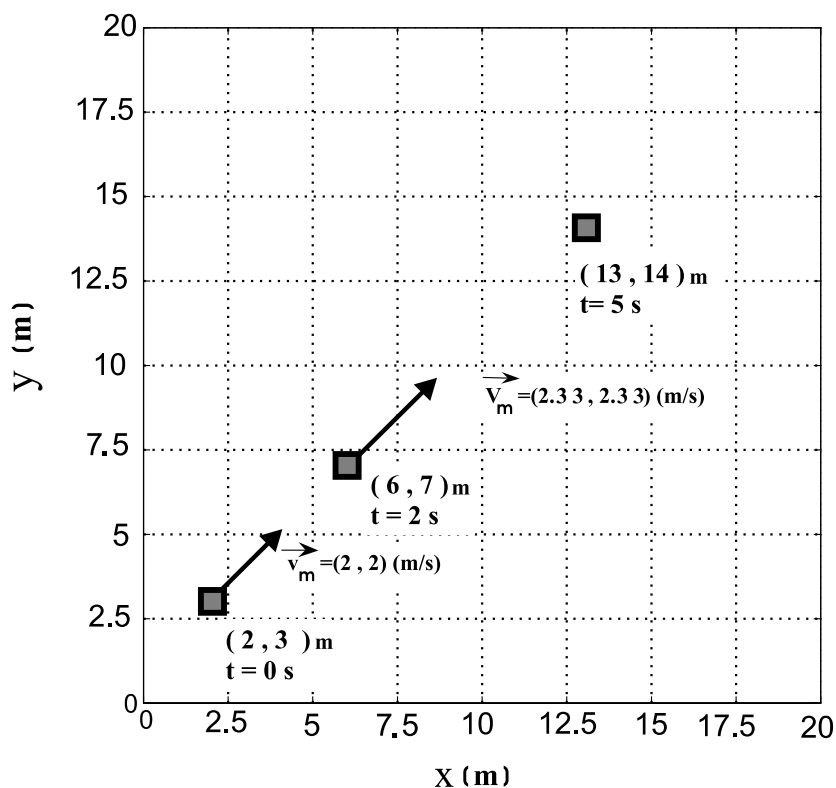


Figura 5.4: Representación gráfica de la posición de una partícula en el plano cartesiano y de su velocidad promedio (\vec{v}_m) para dos intervalos de tiempo dados.

b) Aplicando la definición (5.3) al caso en que (x_1, y_1) es igual a $(6\text{ m}, 7\text{ m})$ cuando $t_1 = 2\text{ s}$ y $(x_2, y_2) = (13\text{ m}, 14\text{ m})$ cuando $t_2 = 5\text{ s}$, se obtiene:

$$v_{m_x} = \left(\frac{13 - 6}{5 - 2} \right) \frac{m}{s} = 2.33 \frac{m}{s}$$

$$v_{m_y} = \left(\frac{14 - 7}{5 - 2} \right) \frac{m}{s} = 2.33 \frac{m}{s},$$

por lo tanto, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[2, 5]\text{ s}$ resulta ser:

$$\vec{v}_m = (2.33, 2.33) \frac{m}{s}.$$

Estos resultados se muestran en la gráfica anterior (Fig. 5.4) en donde se muestran los vectores \vec{v}_m para los intervalos de tiempo señalados y las posiciones de la partícula en los tres instantes de tiempo considerados.

5-4.- Considerando la trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio:

- ¿Qué relación geométrica existe entre el vector velocidad y la trayectoria de la partícula?
- Representar una trayectoria curva y dibujar el vector velocidad de la partícula en diversas posiciones de la trayectoria

Sol:

a) La relación existente entre el gráfico de la trayectoria de una partícula y su velocidad se puede expresar como una generalización del caso unidimensional, recordando que la velocidad es una cantidad física vectorial \vec{v} , por lo tanto, la velocidad en un punto dado \mathbf{R} define el sentido instantáneo del movimiento de la partícula.

De esta manera se puede encontrar la relación presente entre la velocidad y la trayectoria de un móvil para el caso de más de una dimensión de la siguiente forma, el vector velocidad está definido por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} . \quad (5.4)$$

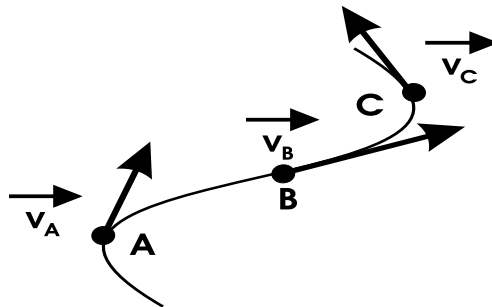


Figura 5.5: Vectores velocidad de una partícula en diversas posiciones (A, B y C) a lo largo de una trayectoria curva en dos dimensiones.

Entonces, en general para los casos de dos y tres dimensiones la velocidad siempre es tangente a la trayectoria de una partícula, definiendo el sentido instantáneo del movimiento de la partícula.

b) En el diagrama de la figura 5.5 se observan los vectores velocidad de una partícula en diversas posiciones de una trayectoria curva para los cuales la velocidad siempre es tangente a su trayectoria.

5-5.- Las partículas 1 y 2 se mueven a lo largo de los ejes x y y con velocidades constantes $\vec{v}_1 = 2 \hat{e}_x \frac{cm}{s}$ y $\vec{v}_2 = 3 \hat{e}_y \frac{cm}{s}$, respectivamente. Para $t = 0$ s las posiciones de las partículas están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \text{ cm} & y_1 &= 0 \text{ cm} \\ x_2 &= 0 \text{ cm} & y_2 &= -3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

a) Encontrar el vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ que representa la posición de la partícula 2 respecto a la partícula 1 en función del tiempo t .

b) ¿Cuándo y en dónde las dos partículas están más cerca entre sí?

Sol:

a) Para encontrar el vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ como función del tiempo hay que tomar en cuenta los vectores posición de las partículas 1 y 2 en forma de sus componentes cartesianas y que el vector velocidad para cada partícula es constante; aplicando las formulas generales del movimiento rectilíneo uniforme en dos dimensiones se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1_0} + v_{1_x} t \\ y_1 &= y_{1_0} + v_{1_y} t \\ x_2 &= x_{2_0} + v_{2_x} t \\ y_2 &= y_{2_0} + v_{2_y} t, \end{aligned} \tag{5.5}$$

en donde $x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}$, corresponden a las posiciones iniciales de las partículas y que para este problema están dadas por:

$$\begin{aligned} x_{1_0} &= -3 \text{ cm} \\ y_{1_0} &= 0 \text{ cm} \\ x_{2_0} &= 0 \text{ cm} \\ y_{2_0} &= -3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

por otra parte, $v_{1_x}, v_{1_y}, v_{2_x}, v_{2_y}$, se obtienen de los vectores velocidad para cada una de las partículas:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (2, 0) \frac{cm}{s} \\ \vec{v}_2 &= (0, 3) \frac{cm}{s}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} v_{1x} &= 2 \frac{cm}{s} \\ v_{1y} &= 0 \frac{cm}{s} \\ v_{2x} &= 0 \frac{cm}{s} \\ v_{2y} &= 3 \frac{cm}{s}, \end{aligned}$$

sustituyendo toda la información anterior en la ecuación (5.5) finalmente se encuentra que:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + 2t \text{ cm} \\ y_1 &= 0 \text{ cm} \\ x_2 &= 0 \text{ cm} \\ y_2 &= -3 + 3t \text{ cm}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

y en su forma vectorial se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_1 &= (-3 + 2t, 0) \text{ cm} \\ \vec{\mathbf{r}}_2 &= (0, -3 + 3t) \text{ cm}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por lo tanto, el vector $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$ como función del tiempo está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 &= (0, -3 + 3t) - (-3 + 2t, 0) \text{ cm} \\ &= (3 - 2t, -3 + 3t) \text{ cm}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

b) Ahora se quiere determinar el instante de tiempo t en que la distancia entre 1 y 2 es mínima. La distancia r entre 1 y 2 como función del tiempo está dada por:

$$\begin{aligned} r &= |\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1| = \\ &= \sqrt{(3 - 2t)^2 + (-3 + 3t)^2}, \end{aligned}$$

y para encontrar el tiempo t donde r es mínima, debe derivarse r respecto al tiempo e igualar el resultado a cero, es decir:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(2)(-2)(3-2t) + (2)(3)(3t-3)}{\sqrt{(3-2t)^2 + (-3+3t)^2}} = 0, \quad (5.9)$$

la condición anterior implica que el numerador de esta fracción debe ser igual a cero, es decir:

$$0 = (-2)(3-2t) + (3)(3t-3) = -6 + 4t + 9t - 9 = 13t - 15,$$

de donde se obtiene que:

$$t = \frac{15}{13} \text{ s} = 1.15 \text{ s}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, cuando $t = 1.15 \text{ s}$ la distancia r entre las partículas 1 y 2 es mínima. En este momento la distancia entre las partículas es:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(3 - 2 \cdot 1.15)^2 + (-3 + 3 \cdot 1.15)^2} \\ &= \sqrt{(0.6923)^2 + (0.4615)^2} = 0.832 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

5-6.- Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una cornisa a 200 m por encima de un valle con una velocidad inicial de $60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a 60° respecto de la horizontal, tal y como se muestra en la figura 5.6. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, ¿en dónde caerá el proyectil?

Sol:

En este problema la cantidad física que se desea determinar es el alcance horizontal del proyectil cuando éste se encuentra a 200 m por debajo del punto de lanzamiento ($y = -200 \text{ m}$). Eligiendo el punto de lanzamiento como el origen del sistema de referencia, entonces la solución física que se tiene que determinar corresponde a un punto (x, y) de la parábola:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (5.12)$$

si en la ecuación (5.12) se sustituyen los valores $y = -200 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $g = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ para $x > 0$, se obtiene que:

$$-200 = 1.732x - 0.00545x^2,$$

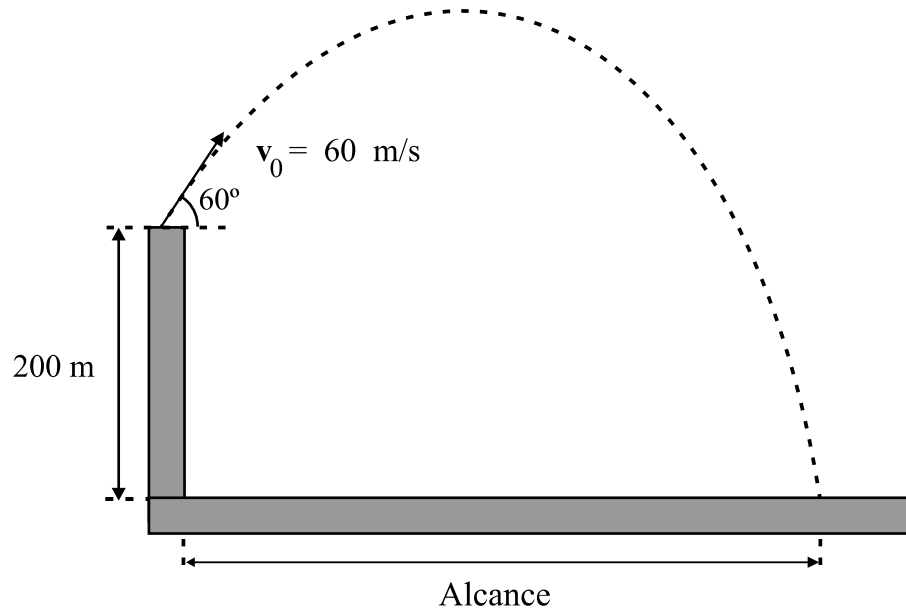


Figura 5.6: Determinación del alcance de un tiro parabólico.

cuya solución está dada por:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1.732 \pm \sqrt{2.9998 + 4.36}}{0.109} \\
 \Rightarrow \\
 x &= 407.8 \text{ m}, \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

es decir, el proyectil lanzado caerá en $x = 407.8 \text{ m}$, $y = -200 \text{ m}$.

5-7.- Una moto salta una zanja de anchura x gracias a la ayuda de una rampa que tiene una inclinación θ ; de esta forma alcanza el otro extremo cuya altura difiere en un valor H respecto al lado inicial de la zanja.

a) ¿Cuál es el máximo valor de H para un ángulo θ dado y una distancia x para que el motociclista pueda saltar la zanja?

b) Para un valor dado de H inferior al valor máximo calculado en el inciso anterior, ¿cuál es la velocidad mínima v_0 con la que puede abandonar la rampa para lograr el salto?

Sol:

a) En este problema la cantidad física que se desea conocer es la altura máxima que la moto puede alcanzar al saltar sobre la rampa para evitar la zanja, en función de la

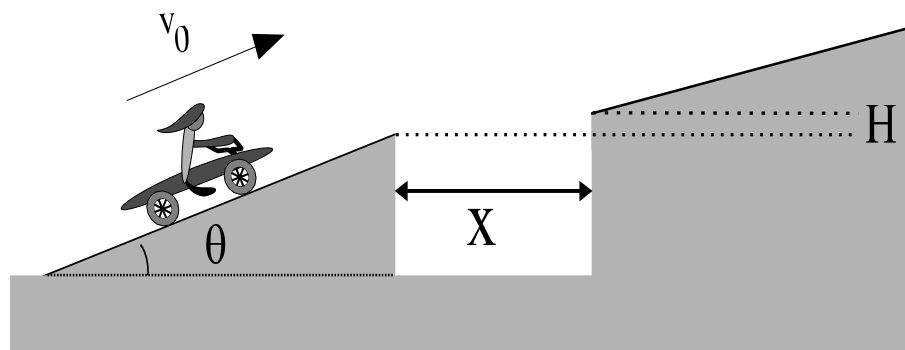


Figura 5.7: Cálculo de la altura máxima para un motociclista saltando una zanja.

velocidad que lleve antes de abandonar la rampa v_0 y del ángulo de inclinación θ que ésta tiene.

Tomando las ecuaciones de la cinemática del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\ x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\ v_x(t) &= v_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.14)$$

la condición física que se tiene que satisfacer es la de determinar el valor máximo de H para que al saltar por la rampa el vehículo llegue justo al otro extremo, esto significa que la moto llegue al otro extremo con velocidad cero en la dirección y . De la ecuación:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t, \quad (5.15)$$

se tiene que (tomando como origen del sistema de referencia el extremo superior de la rampa i.e, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta},$$

que es el tiempo que le toma al vehículo recorrer una distancia x en la dirección horizontal. Sustituyendo este valor del tiempo t en la ecuación:

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen} \theta - gt, \quad (5.16)$$

resulta:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta},$$

ahora bien, una de las condiciones físicas que se tiene que cumplir para obtener la altura máxima es que $v_y = 0$, lo que implica que:

$$v_0^2 = \frac{gx}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}, \quad (5.17)$$

al sustituir el valor encontrado para el tiempo $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ en la ecuación para la posición vertical del vehículo se encuentra que:

$$H_{max} = v_0 \operatorname{sen} \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2}{2},$$

tomando $y_0 = 0$ y $y(t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}) = H_{max}$, si en esta última ecuación se sustituye el valor encontrado para v_0 en la ecuación (5.17), es decir: $v_0^2 = \frac{gx}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}$, finalmente se obtiene el valor de H_{max} buscando:

$$\begin{aligned} H_{max} &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \\ &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2 \left(\frac{gx}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \right) \cos^2 \theta} \\ &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{x \operatorname{tg} \theta}{2} \\ &= \frac{x \operatorname{tg} \theta}{2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

por lo tanto, $H_{max} = \frac{x \operatorname{tg} \theta}{2}$.

b) Ahora hay que encontrar el valor de v_0 de la ecuación:

$$H = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},$$

de donde se obtiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2 \cos^2 \theta (x \operatorname{tg} \theta - H)}},$$

que es la velocidad mínima v_0 con la que se puede abandonar la rampa para lograr el salto.

5-8.- Establecer si la aceleración es negativa, positiva o igual a cero en cada una de las funciones de posición $x(t)$ de la siguiente figura.

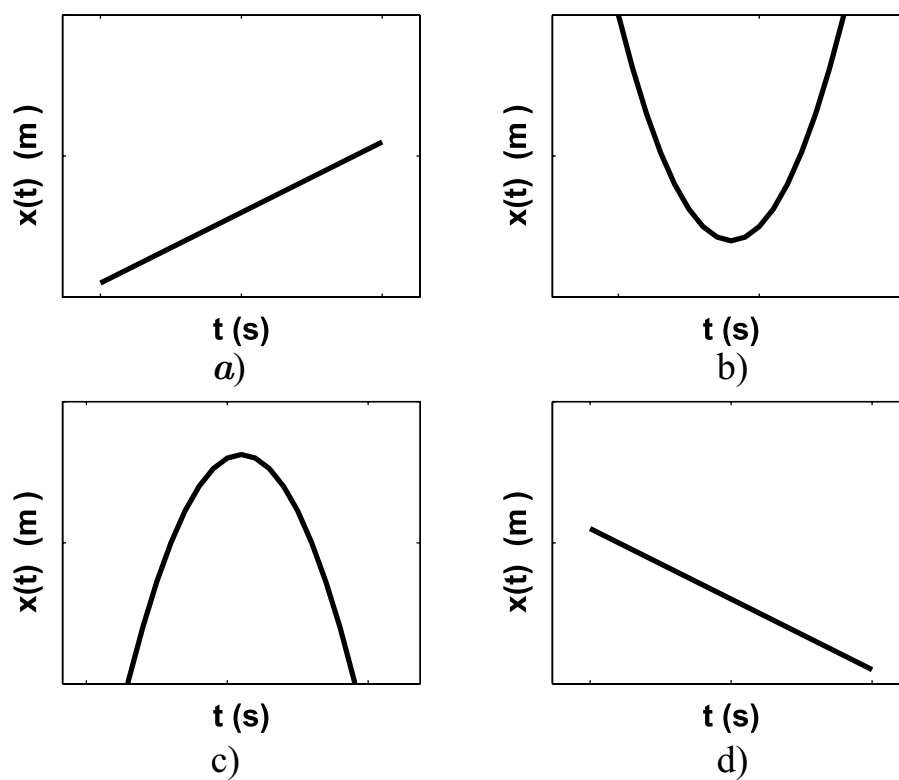


Figura 5.8: Gráficas de la posición vs tiempo.

Sol:

En el inciso *a)* se observa un objeto en movimiento que, de acuerdo a la gráfica, recorre distancias iguales en tiempos iguales, este comportamiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, velocidad que es positiva debido a que la pendiente de la curva también lo es. Como la velocidad es constante la aceleración es igual a cero.

En el inciso *b)* se observa un objeto que se mueve con una velocidad variable porque la pendiente de la gráfica varía, es decir; la velocidad cambia con el tiempo. La pendiente de esta curva siempre se incrementa al aumentar el tiempo, esto significa que la velocidad aumenta conforme pasa el tiempo. Por lo tanto, $\frac{dv}{dt}$ es siempre positiva, y por consiguiente, también la aceleración.

En el inciso *c)* se observa un objeto que se mueve con una velocidad variable porque la pendiente de la gráfica varía. La pendiente de esta curva siempre disminuye al aumentar el tiempo esto significa que la velocidad decrece conforme pasa el tiempo. Por lo tanto, $\frac{dv}{dt}$ es siempre negativa y en consecuencia, también la aceleración.

En el inciso *d)* se observa un objeto en movimiento que, de acuerdo a la gráfica, recorre distancias iguales en tiempos iguales, este comportamiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, velocidad que es negativa debido a que la pendiente de la curva también lo es. Como la velocidad es constante la aceleración es igual a cero.

5-9.- ¿Qué distancia cubrirá un corredor en 16 s tomando en cuenta la siguiente gráfica de velocidad contra tiempo (Fig. 5.9)?

Sol:

Para determinar la distancia recorrida Δx por el corredor tiene que evaluarse el área debajo de la curva de velocidad como función del tiempo de acuerdo a la siguiente relación:

$$\Delta x(t_i \rightarrow t_f) = \text{Área}[v(t_i \rightarrow t_f)]. \quad (5.19)$$

De acuerdo con la siguiente gráfica (Fig. 5.10) el área de la región I es igual a:

$$\text{Área}_I = \frac{1}{2} \left(8 \frac{m}{s} \right) (2 s) = 8 m,$$

el área de la región II es igual a:

$$\text{Área}_{II} = \left(8 \frac{m}{s} \right) (8 s) = 64 m,$$

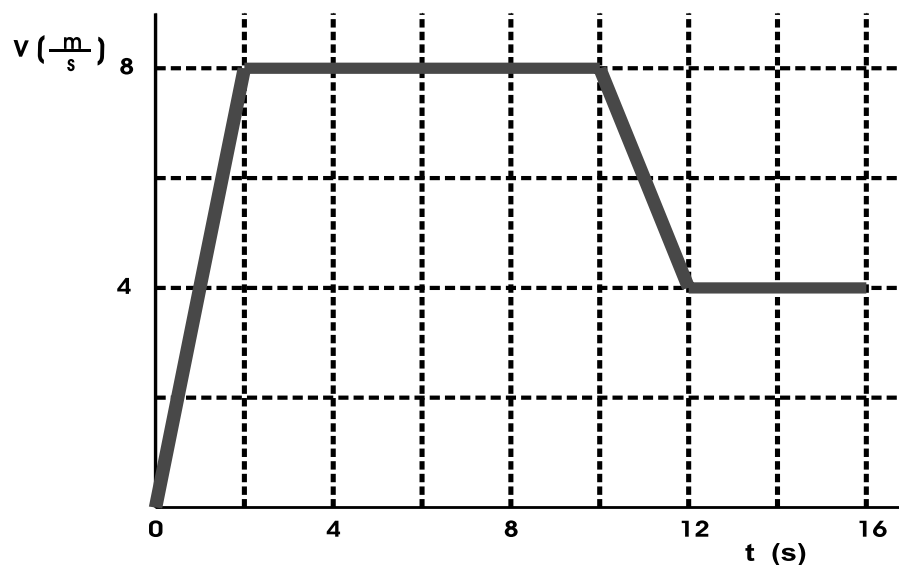


Figura 5.9: Gráfica de velocidad vs tiempo de un corredor.

el área de la región III es igual a:

$$\text{Área}_{III} = \left(4 \frac{m}{s}\right) (2 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(8 \frac{m}{s} - 4 \frac{m}{s}\right) (2 \text{ s}) = 12 \text{ m},$$

y el área de la región IV es igual a:

$$\text{Área}_{IV} = \left(4 \frac{m}{s}\right) (4 \text{ s}) = 16 \text{ m},$$

por lo tanto, la distancia recorrida por el atleta es:

$$\Delta x = \sum_{i=I}^{IV} \text{Área}_i = (8 + 64 + 12 + 16) \text{ m} = 100 \text{ m}.$$

También se puede resolver este problema de forma analítica, en la gráfica de la figura 5.9 se puede identificar que el movimiento realizado por el corredor tiene una aceleración constante en cada uno de los intervalos de tiempo, hay que recordar que, en una gráfica de velocidad contra tiempo, en cualquier punto de la curva la aceleración está dada por la pendiente de la recta tangente a ese punto. Se sabe que la distancia recorrida Δx por un cuerpo que tiene aceleración constante en un intervalo de tiempo $t_i \rightarrow t_f$, viene dada por:

$$\Delta x(t_i \rightarrow t_f) = v_0(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2, \quad (5.20)$$

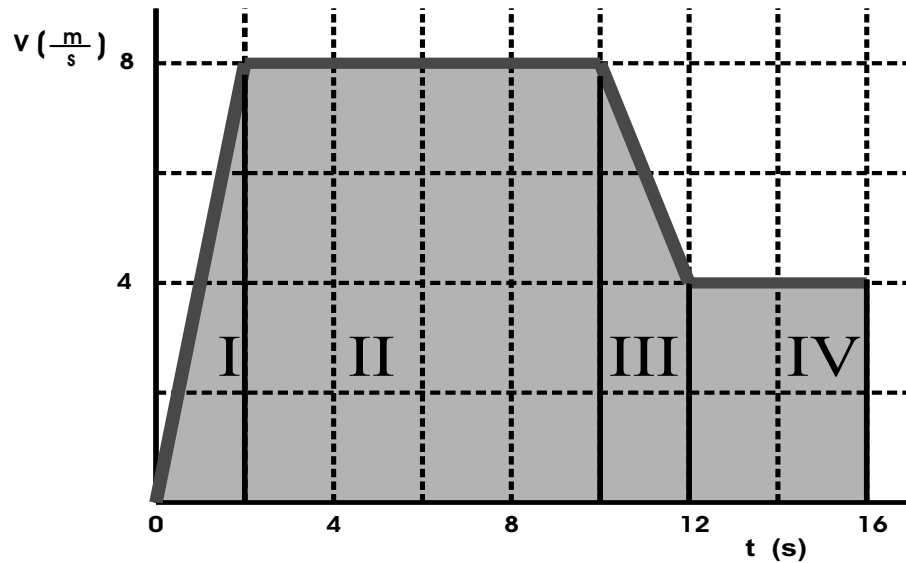


Figura 5.10: Gráfica de la distancia recorrida por un corredor.

en donde v_0 es la velocidad inicial del cuerpo, t_i y t_f son los tiempos inicial y final del recorrido, respectivamente. De esta forma la distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región I de la gráfica anterior (Fig. 5.10) es:

$$\begin{aligned}\Delta x_I(t_i = 0 \rightarrow t_f = 2) &= \left(0 \frac{m}{s}\right) (2 s - 0 s) + \frac{1}{2} \left(4 \frac{m}{s^2}\right) (2 s - 0 s)^2 = 0 + \frac{16}{2} m = \\ &= 8 m,\end{aligned}$$

porque en esta región la velocidad inicial del corredor es $0 \frac{m}{s}$ y la aceleración es de $4 \frac{m}{s^2}$.

La distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región II de la gráfica (Fig. 5.10) es:

$$\begin{aligned}\Delta x_{II}(t_i = 2s \rightarrow t_f = 10s) &= \left(8 \frac{m}{s}\right) (10 s - 2 s) + \frac{1}{2} \left(0 \frac{m}{s^2}\right) (10 s - 2 s)^2 = \\ &= 64 m + 0 = 64 m,\end{aligned}$$

porque en esta región la aceleración del corredor es $0 \frac{m}{s^2}$ y la velocidad constante es de $8 \frac{m}{s}$.

La distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región III de la gráfica (Fig. 5.10) es:

$$\begin{aligned}\Delta x_{III}(t_i = 10s \rightarrow t_f = 12s) &= \left(8 \frac{m}{s}\right) (12 s - 10 s) + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{m}{s^2}\right) (12 s - 10 s)^2 = \\ &= 16 m - 4 m = 12 m,\end{aligned}$$

porque en esta región la aceleración del corredor es $-2 \frac{m}{s^2}$ y la velocidad inicial es de $8 \frac{m}{s}$.

Finalmente la distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región IV de la gráfica (Fig. 5.10) es:

$$\begin{aligned}\Delta x_{IV}(t_i = 12s \rightarrow t_f = 16s) &= \left(4 \frac{m}{s}\right) (16s - 12s) + \frac{1}{2} \left(0 \frac{m}{s^2}\right) (16s - 12s)^2 \\ &= 16m,\end{aligned}$$

porque en esta región la aceleración del corredor es $0 \frac{m}{s^2}$ y la velocidad constante es de $4 \frac{m}{s}$, por lo que, la distancia recorrida por el atleta es:

$$\Delta x = \sum_{i=I}^{IV} \Delta x_i = (8 + 64 + 12 + 16) m = 100 m.$$

5-10.- Se deja caer una pelota A desde la parte superior de un edificio que tiene una altura h , en el mismo instante desde el suelo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_{B_0} una segunda pelota B . En el momento en que las pelotas chocan, se encuentran desplazándose en sentidos opuestos y la rapidez que lleva la pelota A es el doble de la rapidez de la pelota B (Fig. 5.11).

¿A qué altura se encuentran las pelotas? Exprese esta altura en términos de la altura total del edificio.

Sol:

Primero hay que analizar cuidadosamente la situación física: se tienen dos pelotas A y B , inicialmente, escogiendo como origen de referencia la base del edificio, la pelota A se encuentra en una posición $y_{A_0} = h$ y la pelota B se encuentra en una posición $y_{B_0} = 0$.

El movimiento que ambas pelotas realizarán hasta que se encuentren es un movimiento con aceleración constante ($a = -g = -9.8 \frac{m}{s^2}$), la pelota A describirá una caída libre, mientras que la pelota B realizará un ascenso con aceleración negativa (Fig. 5.12).

De esta manera la posición vertical de las pelotas A y B en función del tiempo está dada por:

$$\begin{aligned}y_A(t) &= y_{A_0} + v_{A_0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_B(t) &= y_{B_0} + v_{B_0}t - \frac{1}{2}gt^2,\end{aligned}$$

sustituyendo en estas ecuaciones $y_{A_0} = h$, $y_{B_0} = 0$, $v_{A_0} = 0$ (ya que la velocidad inicial de la pelota A es cero), y v_{B_0} un cierto valor fijo de la velocidad de la pelota B en el

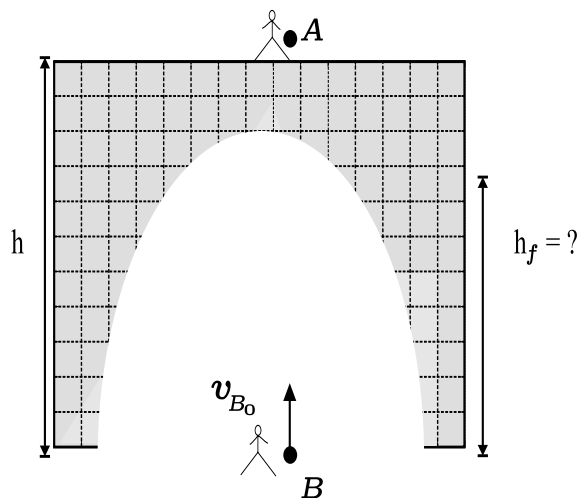


Figura 5.11: Diagrama de dos pelotas desplazándose verticalmente en sentidos opuestos.

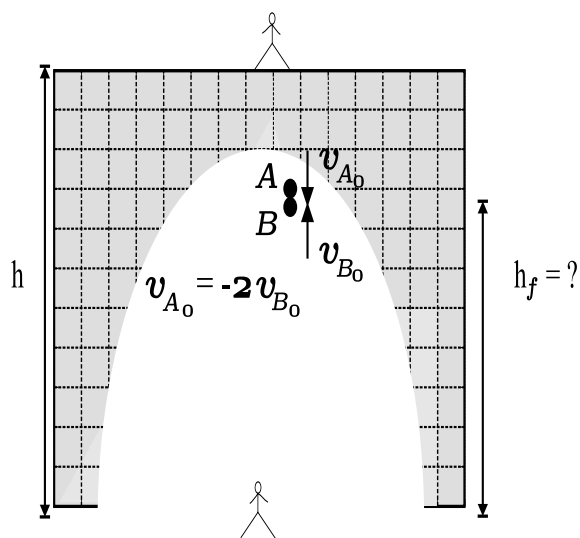


Figura 5.12: Velocidades de las pelotas A y B en direcciones opuestas y con una aceleración negativa.

tiempo $t = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} y_A(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_B(t) &= v_{B_0}t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \quad (5.21)$$

de igual forma la velocidad de las pelotas A y B está dada por:

$$\begin{aligned}v_A(t) &= v_{A_0} - gt \\v_B(t) &= v_{B_0} - gt,\end{aligned}$$

y al sustituir la información inicial se obtiene:

$$\begin{aligned}v_A(t) &= -gt \\v_B(t) &= v_{B_0} - gt.\end{aligned}\tag{5.22}$$

En el momento en que las pelotas chocan (en $t = t^*$), éstas se desplazan en sentidos opuestos y la rapidez de la pelota A es el doble de la rapidez que lleva la pelota B , se tiene que:

$$|v_A(t^*)| = 2 |v_B(t^*)|,$$

y como el signo de $v_B(t^*)$ es opuesto al signo de $v_A(t^*)$, finalmente se obtiene que:

$$v_A(t^*) = -2 v_B(t^*),\tag{5.23}$$

y sustituyendo en esta última ecuación las relaciones (5.22) para las velocidades de las pelotas A y B se obtiene:

$$\begin{aligned}v_A(t^*) &= -2 v_B(t^*) \\&\implies \\-gt^* &= -2(v_{B_0} - gt^*) \\&\implies \\t^* &= \frac{2 v_{B_0}}{3 g}.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Con el valor anterior correspondiente al tiempo de vuelo de las pelotas hasta que se encuentran ($t = t^*$), se puede conocer la altura a la que sucede la colisión, sustituyendo t^* en las relaciones (5.21), obteniendo para la altura a la que sucede el choque h_f , las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}h_f = y_A(t^*) &= h - \frac{1}{2}g(t^*)^2 = \\&= h - \frac{1}{2}g\left(\frac{2 v_{B_0}}{3 g}\right)^2 = h - \frac{2 v_{B_0}^2}{9 g} \\&\implies \\h_f &= h - \frac{2 v_{B_0}^2}{9 g}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_f = y_B(t^*) &= v_{B_0}t^* - \frac{1}{2}g(t^*)^2 = \\
&= v_{B_0}\left(\frac{2v_{B_0}}{3g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{2v_{B_0}}{3g}\right)^2 = \\
&= \frac{2v_{B_0}^2}{3g} - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} = \frac{4v_{B_0}^2}{9g} \\
\implies \\
h_f &= \frac{4v_{B_0}^2}{9g}. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Igualando las relaciones obtenidas para h_f se tiene que:

$$\begin{aligned}
h_f &= h - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} = \frac{4v_{B_0}^2}{9g} = h_f \\
\implies \\
h - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} &= \frac{4v_{B_0}^2}{9g} \\
\implies \\
h &= \frac{2v_{B_0}^2}{3g} \\
\implies \\
\frac{v_{B_0}^2}{g} &= \frac{3}{2}h. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Conociendo el valor de $\frac{v_{B_0}^2}{g}$ puede expresarse la altura del choque h_f en términos de la altura h desde la cual se deja caer la pelota A , así:

$$h_f = \frac{4}{9}\left(\frac{v_{B_0}^2}{g}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}h\right) = \frac{2}{3}h, \tag{5.27}$$

por lo tanto, la altura a la que sucede el choque entre las pelotas A y B ($h_f = \frac{2}{3}h$), es igual a las dos terceras partes de la altura total del edificio h .

5-11.- Un deportista lanza una pelota hacia una pared con una rapidez de $20 \frac{m}{s}$ y con un ángulo de 35° sobre la horizontal (Fig. 5.13).

- ¿A qué distancia por arriba del punto de lanzamiento se impacta la pelota en la pared?
- ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad cuando la pelota se impacta contra la pared?
- ¿Ha pasado la pelota el punto más alto de su trayectoria cuando golpea la pared?

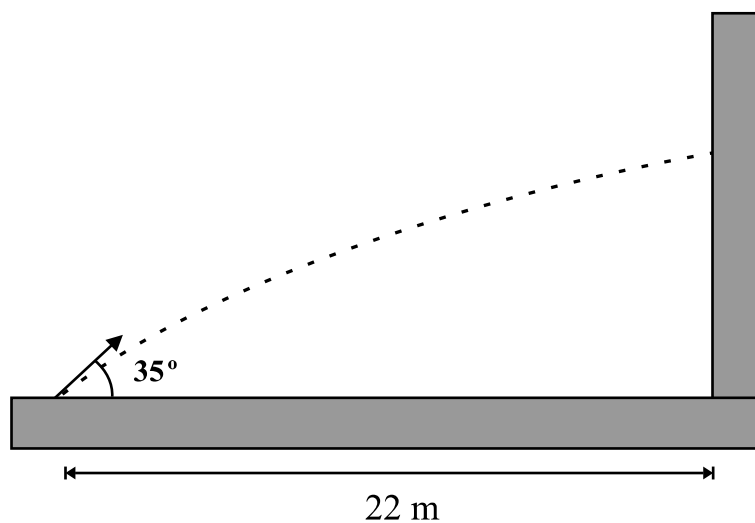


Figura 5.13: Movimiento parabólico de una pelota.

Sol:

a) Recordando las ecuaciones generales del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\
 x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\
 v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\
 v_x(t) &= v_0 \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

y despejando el tiempo t en $x(t)$ de la ecuación anterior y sustituyendo en la ecuación para $y(t)$, se obtiene (suponiendo que el sistema de referencia se encuentra en el punto de lanzamiento de la pelota; en donde $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$):

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},
 \tag{5.29}$$

y al sustituir en la ecuación (5.29) $x = 22 \text{ m}$, $\theta = 35^\circ$, $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se encuentra:

$$y = 22 \operatorname{tg} 35 - \frac{9.8(22)^2}{2(20)^2 \cos^2 35} = 6.57 \text{ m}.
 \tag{5.30}$$

b) Despejando el tiempo t en $x(t)$ de la ecuación (5.28) y sustituyendo el resultado en

la ecuación para $v_y(t)$ se obtiene:

$$v_y = v_0 \sin \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta}, \quad (5.31)$$

y al sustituir en la ecuación (5.31) $x = 22 \text{ m}$, $\theta = 35^\circ$, $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se encuentra que:

$$v_y = 20 \sin 35 - \frac{(9.8)(22)}{20 \cos 35} = -1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (5.32)$$

y

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta = 20 \cos 35 = 16.38 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (5.33)$$

por lo tanto, la componente horizontal de la velocidad es igual a $16.38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, mientras que la componente vertical es igual a $-1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c) En el momento en que la pelota golpea la pared si la velocidad vertical es negativa ($v_y = -1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ cuando $x = 22.0 \text{ m}$) significa que la pelota ya ha pasado el punto más alto de su trayectoria, ya que en este momento la velocidad vertical de la pelota es igual a cero ($v_y = 0$).

5-12.- En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante a lo largo de una circunferencia que tiene 5 m de radio. Si el tiempo que les toma dar una vuelta completa es de 4 s , ¿qué aceleración sufren los pasajeros y en qué dirección?

Sol:

En este problema el tipo de movimiento que se observa corresponde a un movimiento circular uniforme que tiene un periodo $T = 4 \text{ s}$ y un radio $R = 5 \text{ m}$, de manera que la rapidez con la que viajan los pasajeros a lo largo de la trayectoria circular es:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5)}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7.854 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

por lo tanto, la aceleración que sufren los pasajeros es radial dirigida al centro de la circunferencia, esta es una característica general del movimiento circular uniforme, en donde sólo está presente la aceleración centrípeta y cuya magnitud es:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.854)^2}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 12.337 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Parte III. Leyes de Newton y teorema trabajo-energía

La descripción del movimiento de una partícula puede efectuarse con la ayuda de la cinemática considerada en los capítulos anteriores. Esta manera de describir el movimiento de un objeto funciona muy bien una vez que se conoce la aceleración instantánea a la que se encuentra sujeta una partícula en todo instante de tiempo. Sin embargo, si no se conoce la aceleración instantánea poco se puede decir del movimiento que realizará un objeto, por lo que es necesario obtener una descripción basada en principios físicos más generales que nos permitan determinar el movimiento de un cuerpo.

En los dos siguientes capítulos se analizarán algunos problemas relacionados con las leyes fundamentales de toda la mecánica: las leyes de Newton. La descripción dinámica no sólo nos permitirá obtener la aceleración instantánea de un objeto, sino también nos permitirá identificar a los agentes externos (las fuerzas externas) que originan y determinan el tipo de movimiento que realizará un objeto.

Se ha buscado que estos problemas permitan a los estudiantes entender y aplicar correctamente el contenido físico de las leyes de Newton y que puedan profundizar más en el manejo algebraico de las relaciones matemáticas que resultan de las leyes de la dinámica. Siempre que ha sido posible, en los problemas se ha utilizado la formulación vectorial de las leyes de la dinámica.

Se abordan uno o dos problemas sobre los sistemas de referencia no inerciales en donde el planteamiento de las leyes de movimiento debe realizarse cuidadosamente para poder tomar en cuenta los efectos de la aceleración del sistema de referencia.

El libro no pretende dar el mensaje erróneo de que la resolución de un problema mecánico se reduce a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas o una ecuación cuadrática. Por el contrario, se busca que al resolver los problemas, el estudiante entienda que la aplicación correcta de las leyes de la dinámica constituye la parte fundamental de la solución de un problema mecánico.

También se plantean algunos problemas sobre el teorema trabajo-energía, en los cuales es necesario determinar el trabajo mecánico realizado por las fuerzas externas para posteriormente encontrar el desplazamiento o el cambio en la rapidez de un objeto debido a la acción de estas fuerzas. Además se han considerado problemas en donde interviene la fuerza de fricción, esta fuerza siempre realiza trabajo mecánico negativo

sobre un cuerpo, disminuyendo su rapidez.

Como en los capítulos anteriores, en esta parte se utilizan conceptos básicos del cálculo diferencial e integral, herramientas fundamentales para profundizar en algunas ideas sobre el trabajo mecánico y para escribir en su forma más general la segunda ley de Newton.

Capítulo 6

Leyes de Newton

6-1.- ¿En qué dirección se acelerará un objeto si varias fuerzas con diferentes magnitudes y direcciones actúan sobre el?

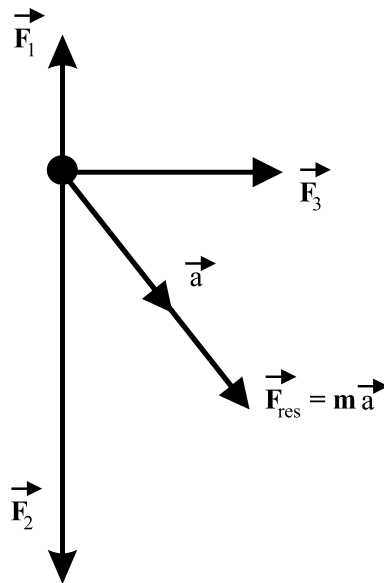


Figura 6.1: Diagrama de cuerpo libre para un objeto sometido a tres fuerzas \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 , la fuerza resultante \vec{F}_{res} corresponde a la suma vectorial de estas fuerzas, en el diagrama también se muestra el vector aceleración \vec{a} .

Sol:

De la segunda ley de Newton se tiene que:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{res}, \quad (6.1)$$

en donde $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$ está dado por:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = \sum_i^N \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (6.2)$$

en donde $\sum_i^N \vec{\mathbf{F}}_i$ es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto, como se muestra en el diagrama anterior (Fig. 6.1), para el caso de $N = 3$.

De acuerdo con la ecuación (6.1) el vector aceleración está dado por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}}{m}. \quad (6.3)$$

Por lo tanto, la dirección del vector aceleración ($\vec{\mathbf{a}}$) es siempre la dirección de la fuerza resultante ($\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$), y tiene una magnitud $|\vec{\mathbf{a}}| = \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}|}{m}$.

6-2.- Un coche primero acelera en una proporción de $3 \frac{m}{s^2}$. Si este coche después remolca a otro coche de las mismas características, ¿cuál es la aceleración de ambos coches, si la fuerza es la misma antes y después?

Sol:

De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$m_{\text{original}} \vec{\mathbf{a}}_{\text{original}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}, \quad (6.4)$$

en donde la magnitud de la aceleración está dada por:

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{a}}_{\text{original}}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}|}{m_{\text{original}}} \\ &= 3 \frac{m}{s^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Si la masa del cuerpo se duplica $m_{\text{nueva}} = 2 m_{\text{original}}$, la segunda ley de Newton queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m_{\text{nueva}} \vec{\mathbf{a}}_{\text{nueva}} &= 2m_{\text{original}} \vec{\mathbf{a}}_{\text{nueva}} \\ &= \vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

porque la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$ que actúa sobre los dos coches no ha cambiado, pero si ha cambiado la masa del objeto, por lo tanto, la magnitud de la nueva aceleración está dada por:

$$\begin{aligned}
 |\vec{\mathbf{a}}_{nueva}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{res}|}{m_{nueva}} \\
 \frac{1}{2} \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{res}|}{m_{original}} &= \frac{1}{2} |\vec{\mathbf{a}}_{original}| \\
 &= \frac{3m}{2s^2},
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

esto significa que cuando los dos coches están unidos la aceleración resultante ($\vec{\mathbf{a}}_{nueva}$) es la mitad de la aceleración original ($\vec{\mathbf{a}}_{original}$).

6-3.- Una fuerza dada $\vec{\mathbf{F}}_0$ actúa sobre dos objetos por separado; el primero experimenta una aceleración de $4 \frac{m}{s^2}$, mientras el segundo experimenta una aceleración de $8 \frac{m}{s^2}$.

- ¿Cuál es la aceleración del primer objeto si se duplica la fuerza?
- ¿Cuál es el cociente de las masas de los dos objetos?
- Si ambos objetos se unen entre sí ¿qué aceleración producirá la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_0$?

Sol:

a) De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$m \vec{\mathbf{a}}_{original} = \vec{\mathbf{F}}_0, \tag{6.8}$$

en donde la magnitud de la aceleración está dada por:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{original}| = \frac{|\vec{\mathbf{F}}_0|}{m} = 4 \frac{m}{s^2}. \tag{6.9}$$

Si se duplica la fuerza resultante ($\vec{\mathbf{F}}_{res} = 2\vec{\mathbf{F}}_0$), la segunda ley de Newton queda de la siguiente manera:

$$m \vec{\mathbf{a}}_{nueva} = \vec{\mathbf{F}}_{res} = 2\vec{\mathbf{F}}_0, \tag{6.10}$$

y la magnitud de la aceleración resultante es:

$$\begin{aligned}
 |\vec{\mathbf{a}}_{nueva}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{res}|}{m} \\
 &= \frac{2|\vec{\mathbf{F}}_0|}{m} = 2 \frac{|\vec{\mathbf{F}}_0|}{m} \\
 &= 2|\vec{\mathbf{a}}_{original}| = 8 \frac{m}{s^2},
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

esto significa que la magnitud de la aceleración resultante es el doble respecto a la magnitud de la aceleración original.

b) De acuerdo con la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= 2\vec{\mathbf{a}}_{original} \\ &= 2\frac{\vec{\mathbf{F}}_0}{m} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_0}{\frac{m}{2}} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_0}{M},\end{aligned}\tag{6.12}$$

en donde M es la masa del segundo objeto sobre el que actúa la misma fuerza de magnitud F_0 , con $M = \frac{m}{2}$. De esta manera el cociente de la masa del segundo objeto cuya aceleración es de $8\frac{m}{s^2}$ entre la masa del primer objeto cuya aceleración es de $4\frac{m}{s^2}$ es:

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{1}{2}.\tag{6.13}$$

c) Si los dos objetos se unen entre sí, la segunda ley de Newton nos dice:

$$\begin{aligned}(m + M)\vec{\mathbf{a}}_{resultante} &= \vec{\mathbf{F}}_0 \Rightarrow \\ \left(m + \frac{m}{2}\right)\vec{\mathbf{a}}_{resultante} &= \vec{\mathbf{F}}_0 \\ \left(\frac{3m}{2}\right)\vec{\mathbf{a}}_{resultante} &= \vec{\mathbf{F}}_0 \Rightarrow \\ |\vec{\mathbf{a}}_{resultante}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_0|}{\frac{3m}{2}} \\ |\vec{\mathbf{a}}_{resultante}| &= \frac{2|\vec{\mathbf{F}}_0|}{3m} = \frac{2}{3}\left(4\frac{m}{s^2}\right) = \frac{8}{3}\frac{m}{s^2}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Por lo tanto, la magnitud de la aceleración del sistema unido es: $|\vec{\mathbf{a}}_{resultante}| = \frac{8}{3}\frac{m}{s^2}$.

6-4.- Su auto deportivo se descompone y usted comienza a empujarlo hacia el taller más cercano. ¿Cómo es la fuerza que usted ejerce sobre el auto en comparación con la que éste ejerce sobre usted cuando el vehículo empieza a moverse y cuando ya tiene una velocidad constante? Explique sus respuestas.

Sol:

Para responder esta pregunta debe recordarse la forma correcta en que debe aplicarse la tercera ley de Newton.

- La fuerza que una persona ejerce sobre un objeto es exactamente igual en magnitud pero con dirección contraria a la que el objeto ejerce sobre la persona, ya sea que el objeto se mueva con velocidad constante o se encuentre en reposo, o inclusive si el objeto se mueve con una aceleración diferente de cero.

Por lo tanto, y de acuerdo con esta ley, en todas las situaciones descritas en el problema, la fuerza que la persona ejerce sobre el automóvil es de igual magnitud que la fuerza que el automóvil ejerce sobre la persona, pero en direcciones opuestas.

De acuerdo con la primera ley de Newton si el automóvil se encuentra en reposo o se mueve con una velocidad constante, la fuerza resultante que actúa sobre el vehículo es igual a cero y por lo tanto también su aceleración, esto no significa que no haya fuerzas actuando sobre el automóvil, sino que la suma vectorial de las mismas es igual a cero.

No debe perderse de vista, que la pregunta del problema se refiere a la relación que existe entre la fuerza ejercida por la persona sobre el automóvil y la fuerza ejercida por el automóvil sobre la persona y que de acuerdo con la tercera ley de Newton las magnitudes de las dos fuerzas serán iguales en ambas situaciones, pero en direcciones opuestas.

6-5.- Un objeto de 10 kg está sometido a las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ como se indica gráficamente (Fig. 6.2).

a) Determinar la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ del objeto.

b) Una tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ se aplica de modo que el objeto está en equilibrio estático. Determinar $\vec{\mathbf{F}}_3$.

Sol:

a) Para determinar la aceleración del objeto se utiliza la segunda ley de Newton:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2, \quad (6.15)$$

que en su forma de componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{\text{res}_x} = F_{1_x} + F_{2_x} \\ ma_y &= F_{\text{res}_y} = F_{1_y} + F_{2_y}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Para aplicar la ecuación anterior (6.16) a nuestro problema, es necesario obtener el diagrama de cuerpo libre del bloque de masa $m = 10\text{ kg}$ (Fig. 6.3), de donde se obtiene:

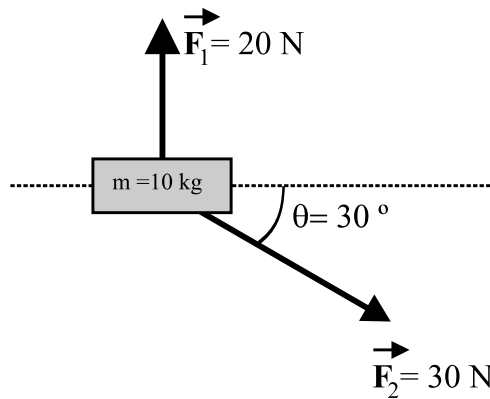


Figura 6.2: Diagrama de un objeto sometido a las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

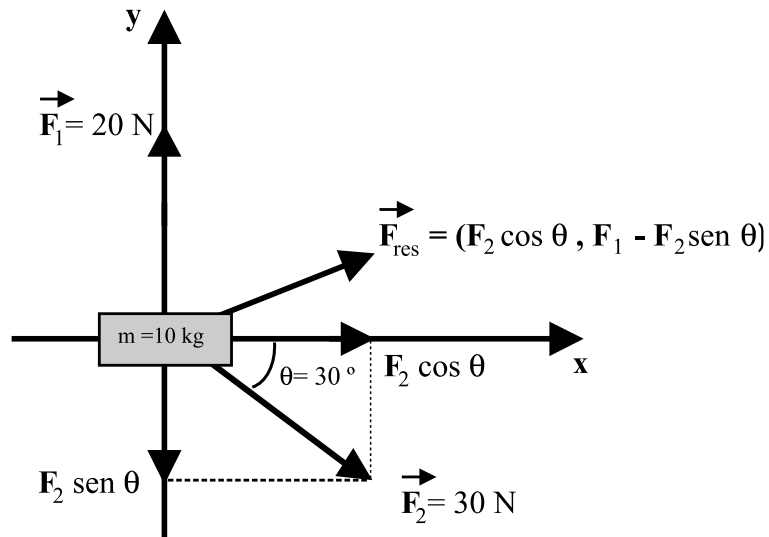


Figura 6.3: Diagrama de cuerpo libre de un objeto sometido a las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 donde se muestra también la fuerza resultante.

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{\text{res}x} = F_2 \cos \theta \\ ma_y &= F_{\text{res}y} = F_1 - F_2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.17)$$

de esta ecuación se obtiene para la fuerza resultante \vec{F}_{res} :

$$\vec{F}_{\text{res}} = (F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta), \quad (6.18)$$

sustituyendo los valores numéricos del problema se obtiene para $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} &= (F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta) = \\ &= (26, 5) N.\end{aligned}\quad (6.19)$$

La aceleración del cuerpo está dada entonces por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}}{m} = \\ &= \left(\frac{F_2 \cos(\theta)}{m}, \frac{F_1 - F_2 \sin(\theta)}{m} \right).\end{aligned}\quad (6.20)$$

Finalmente, sustituyendo los valores numéricos del problema se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}}{10} \frac{m}{s^2} = \\ &= (2.6, 0.5) \frac{m}{s^2}.\end{aligned}\quad (6.21)$$

b) Si se requiere que la fuerza resultante sea cero ($\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = 0$), con la adición de una tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$, se encuentra que:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = (F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta) + \vec{\mathbf{F}}_3 = 0.\quad (6.22)$$

Entonces despejando $\vec{\mathbf{F}}_3$ de la ecuación (6.22) se tiene que:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = -(F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta),\quad (6.23)$$

finalmente, al sustituir los valores numéricos del problema se tiene que:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = (-26, -5) N.\quad (6.24)$$

6-6.- Un cuerpo que tiene una masa m se mantiene en equilibrio mediante un cable a lo largo de un plano inclinado sin fricción (Fig. 6.4).

a) Si $\theta = 60^\circ$ y $m = 50 \text{ kg}$, determinar la tensión del cable y la fuerza normal ejercida por el plano inclinado.

b) Determinar la tensión en función de θ y m y comprobar el resultado para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$.

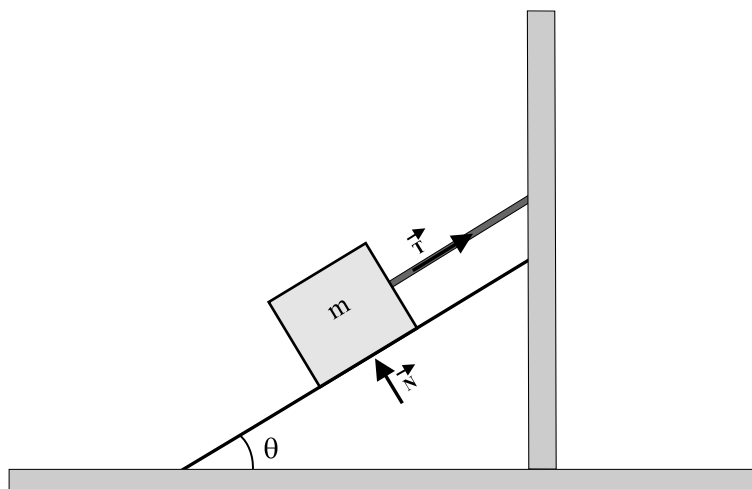


Figura 6.4: Tensión de un cable en función del ángulo de inclinación θ .

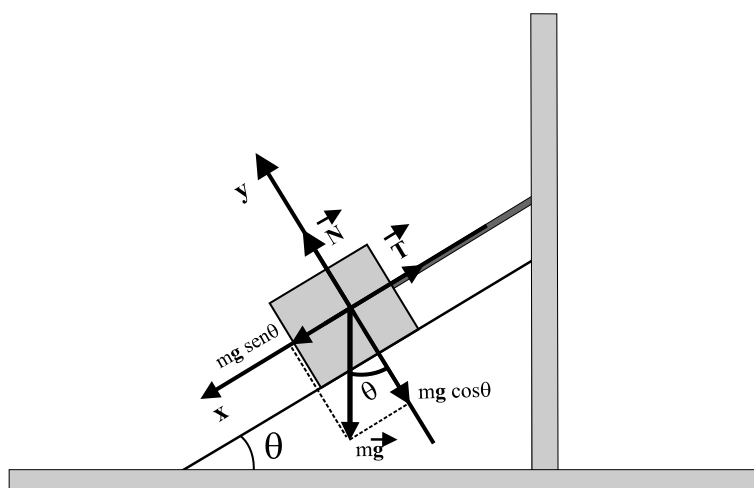


Figura 6.5: Diagrama de cuerpo libre de un bloque que se mantiene en equilibrio.

Sol:

a) Si uno se sitúa en un sistema de referencia inercial como el que se muestra en el diagrama de la figura 6.5, la ecuación de movimiento está dada por:

$$m \vec{\ddot{r}} = \vec{F}_{tot.} = \vec{N} + \vec{T} + m \vec{g} = 0, \quad (6.25)$$

que en términos de sus componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 = T - mg \operatorname{sen} \theta \\ m\ddot{y} &= 0 = N - mg \operatorname{cos} \theta, \end{aligned}$$

de la primera ecuación resulta que:

$$T = mg \operatorname{sen} \theta,$$

sustituyendo los valores de g ($g = 9.8 \frac{m}{s^2}$), m y θ se obtiene que:

$$T = (50 \text{ kg})(9.8 \frac{m}{s^2}) \operatorname{sen} 60 = 424.35 \text{ N} \quad (6.26)$$

b) Se ha encontrado que en general la tensión como función de m y θ está dada por:

$$T(m, \theta) = mg \operatorname{sen} \theta,$$

y en particular para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$ se obtiene:

$$\begin{aligned} T(m = 50 \text{ kg}, \theta = 0^\circ) &= (50)(9.8) \operatorname{sen} 0 \text{ kg} \frac{m}{s^2} = 0 \text{ N} \\ T(m = 50 \text{ kg}, \theta = 90^\circ) &= mg \operatorname{sen} 90 = \\ &= (50)(9.8)(1) \text{ kg} \frac{m}{s^2} = 490 \text{ N}, \end{aligned}$$

este resultado era de esperarse, porque cuando $\theta = 0$ la tensión de la cuerda debe ser igual a cero, mientras que cuando $\theta = 90^\circ$, la tensión debe ser igual al peso del bloque ($T = mg = 490 \text{ N}$).

6-7.- Los bloques A , B y C se colocan como se muestra en la figura 6.6 y se conectan con unos cables que tienen una masa despreciable. Los bloques A y B pesan 25 N cada uno y el coeficiente de fricción cinética entre las superficies de contacto es $\mu_C = 0.35$. Suponiendo que el bloque C desciende con una velocidad constante:

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre para A y otro para B .
- Calcule la tensión que se genera en el cable que une a los bloques A y B .
- Calcule el peso del bloque C .
- Si se cortara el cable que une A y B , ¿qué aceleración tendría C ?

Sol:

a) Los diagramas de cuerpo libre de los bloques A , B y C se muestran en la figura 6.7.

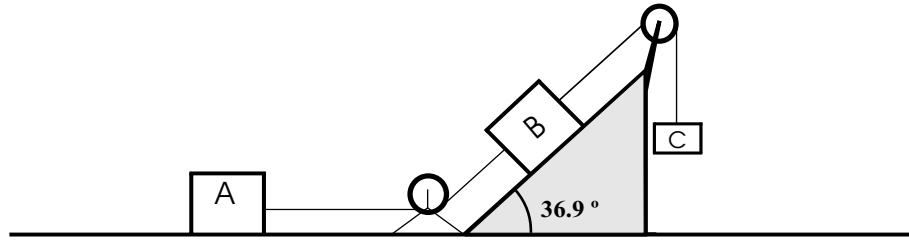


Figura 6.6: Peso del bloque C en función de las tensiones de los cables que unen los cuerpos A, B y C para el caso del equilibrio de fuerzas.

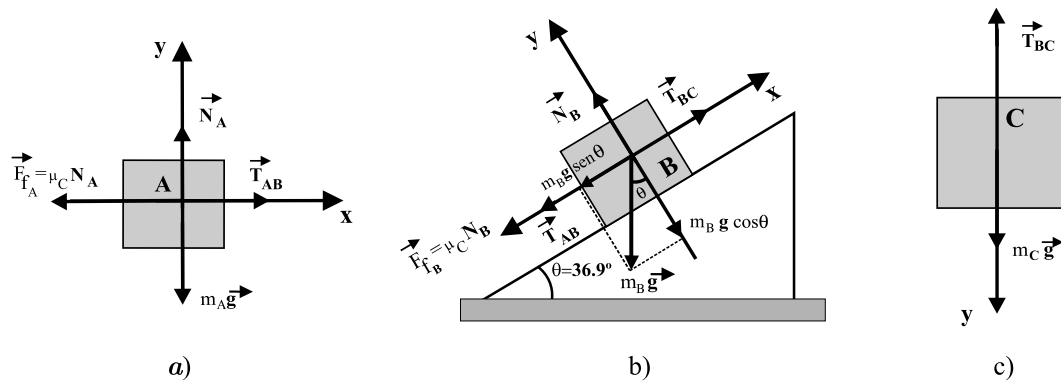


Figura 6.7: Diagrama de cuerpo libre de los bloques A, B y C.

b) Como el sistema de los bloques A y B está sujeto mediante un cable inextensible al bloque C y tomando en cuenta que este bloque desciende con una velocidad constante, todo el sistema se desplazará también con una velocidad constante, es decir:

$$\begin{aligned}\vec{a}_A &= 0 \\ \vec{a}_B &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando la segunda ley de Newton al bloque A se tiene que:

$$m_A \vec{a}_A = 0 = \vec{F}_{res_A} = \vec{N}_A + m_A \vec{g} + \vec{T}_{AB} + \vec{F}_{f_A},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned}m_A a_{A_x} &= 0 = T_{AB} - F_f = T_{AB} - \mu_C N_A \\ m_A a_{A_y} &= 0 = N_A - m_A g,\end{aligned}$$

y de donde se encuentra que:

$$\begin{aligned} N_A &= m_A g \\ T_{AB} = \mu_C N_A &= \mu_C m_A g = 0.35 \cdot 25 N = 8.75 N. \end{aligned} \quad (6.27)$$

De igual forma, aplicando la segunda ley de Newton al bloque B se tiene que:

$$m_B \vec{a}_B = 0 = \vec{F}_{res_B} = \vec{N}_B + m_B \vec{g} + \vec{T}_{BC} + \vec{T}_{AB} + \vec{F}_{f_B},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m_B a_{B_x} &= 0 = -m_B g \sin \theta - T_{AB} - \mu_C N_B + T_{BC} \\ m_B a_{B_y} &= 0 = N_B - m_B g \cos \theta, \end{aligned}$$

de donde resulta que:

$$\begin{aligned} N_B &= m_B g \cos \theta \\ T_{BC} &= \mu_C N_B + T_{AB} + m_B g \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.28)$$

combinando las ecuaciones (6.27) y (6.28) se obtiene la tensión de la cuerda que une los bloques B y C:

$$\begin{aligned} T_{BC} &= \mu_C m_A g + \mu_C m_B g \cos \theta + m_B g \sin \theta \\ &= m_A g (\mu_C + \mu_C \cos \theta + \sin \theta) = \\ &= 25 (0.35 + 0.35 \cdot \cos 36.9 + \sin 36.9) N = 30.76 N, \end{aligned} \quad (6.29)$$

en donde se considera que los bloques A y B tienen el mismo peso ($m_A g = m_B g = 25 N$).

c) Aplicando la segunda ley de Newton al bloque C ($\vec{a}_C = 0$) se obtiene:

$$m_C \vec{a}_C = 0 = \vec{F}_{res_C} = \vec{T}_{BC} + m_C \vec{g},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$m_C a_{C_y} = 0 = T_{BC} - m_C g,$$

de donde se puede despejar el peso del bloque C en términos de la tensión T_{BC} dada por la ecuación (6.29), obteniendo finalmente:

$$m_C g = W_C = T_{BC} = 30.76 N. \quad (6.30)$$

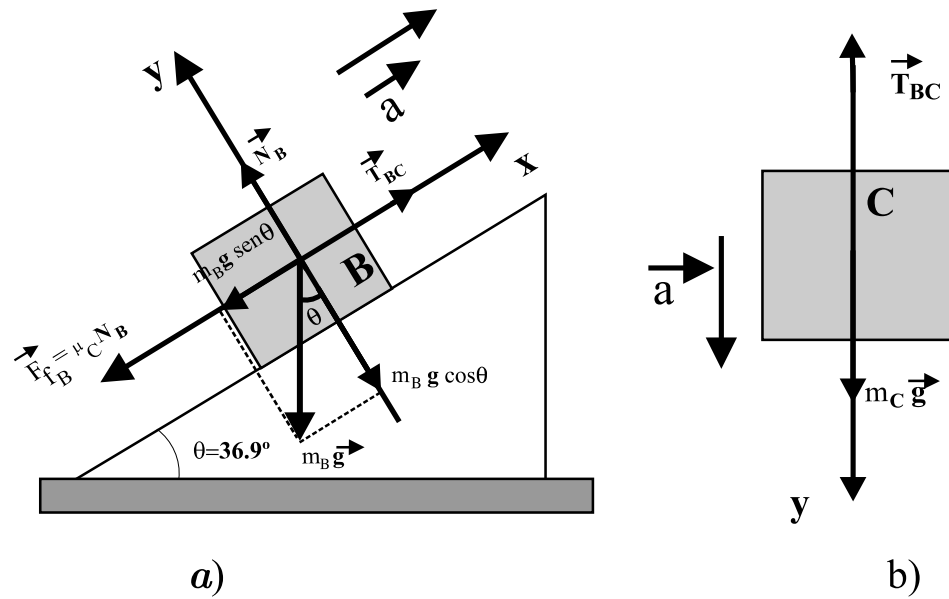


Figura 6.8: Diagrama de cuerpo libre de los bloques B y C.

d) En la figura 6.8 se observan los diagramas de cuerpo libre de los bloques B y C una vez que se elimina el bloque A del sistema físico.

Debido a que los bloques B y C se encuentran unidos mediante un cable inextensible, la aceleración con la que el bloque C desciende verticalmente es la misma con la que el bloque B asciende a lo largo del plano inclinado, i.e:

$$|\vec{a}_B| = |\vec{a}_C| = a,$$

aplicando la segunda ley de Newton al bloque B se tiene que:

$$m_B \vec{a}_B = \vec{F}_{res_B} = \vec{N}_B + m_B \vec{g} + \vec{T}_{BC} + \vec{F}_{f_B},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} 0 &= N_B - m_B g \cos \theta \implies N_B = m_B g \cos \theta \\ m_B a &= T_{BC} - \mu_C N_B - m_B g \sin \theta = T_{BC} - \mu_C m_B g \cos \theta - m_B g \sin \theta \\ \implies \\ m_B a &= T_{BC} - \mu_C m_B g \cos \theta - m_B g \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.31)$$

de igual forma, aplicando la segunda ley de Newton al bloque C se obtiene:

$$\begin{aligned} m_C \vec{a}_C &= \vec{F}_{res_C} = m_C \vec{g} + \vec{T}_{BC} \\ \implies \\ m_C a &= m_C g - T_{BC}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Combinando las ecuaciones (6.31) y (6.32) se encuentra que:

$$\begin{aligned} (m_B + m_C)a &= m_C g - m_B g (\mu_C \cos \theta + \operatorname{sen} \theta) \\ \implies \\ a &= \frac{g(m_C - m_B(\mu_C \cos \theta + \operatorname{sen} \theta))}{m_B + m_C} = 1.54 \frac{m}{s^2}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Para llegar a este resultado se tomó el valor obtenido para $m_C g$ dado por la ecuación (6.30).

6-8.- Dos cajas están conectadas por una cuerda y se encuentran sobre una superficie horizontal (Fig. 6.9). La caja A tiene una masa m_A , la caja B tiene una masa m_B , el coeficiente de fricción cinética entre las cajas y la superficie es μ_C y una fuerza horizontal \vec{F} tira de las cajas hacia la derecha con velocidad constante.

a) Calcule la magnitud de \vec{F} en términos de m_A , m_B y μ_C .

b) Calcule la tensión en la cuerda que une los bloques en términos de m_A , m_B y μ_C .

Incluya el o los diagramas de cuerpo libre necesarios para plantear la solución del problema.

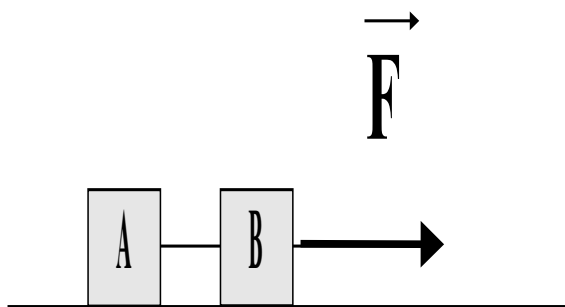


Figura 6.9: Dos cajas conectadas por una cuerda bajo la acción de una fuerza \vec{F} sobre una superficie con fricción.

Sol:

a) Los diagramas de cuerpo libre de los bloques A y B se muestran en la figura 6.10, aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo A y tomando en cuenta que la aceleración de ambos bloques es igual a cero, se obtiene:

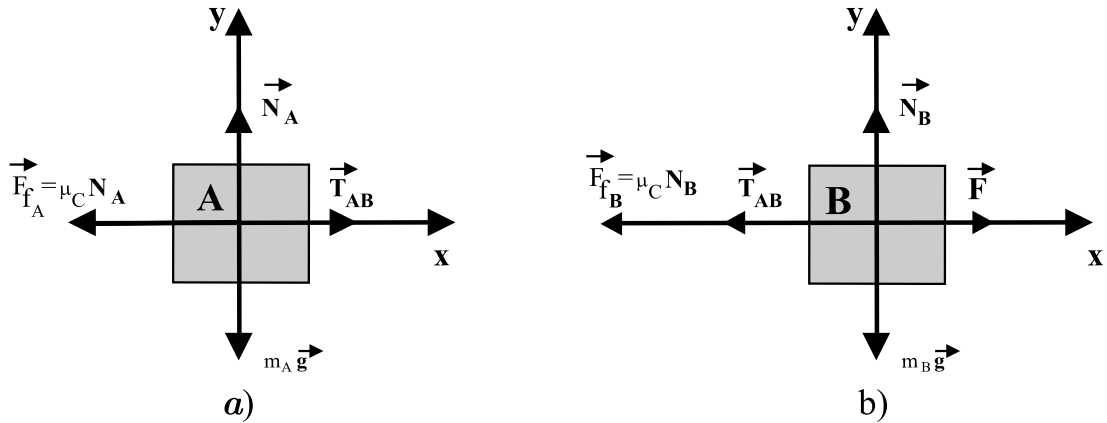


Figura 6.10: Diagrama de cuerpo libre para los bloques A y B.

$$\begin{aligned}
 m_A a_{Ax} &= 0 = F_{res_A} = T_{AB} - \mu_C N_A \\
 m_A a_{Ay} &= 0 = N_A - m_A g \\
 &\implies \\
 N_A &= m_A g \\
 T_{AB} &= \mu_C m_A g,
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

mientras que para el bloque B la segunda ley de Newton se escribe como:

$$\begin{aligned}
 m_B a_{Bx} &= 0 = F_{res_B} = F - T_{AB} - \mu_C N_B \\
 m_B a_{By} &= 0 = N_B - m_B g \\
 &\implies \\
 N_B &= m_B g \\
 F &= T_{AB} + \mu_C m_B g = \mu_C m_A g + \mu_C m_B g = \mu_C (m_A + m_B) g,
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

en donde F es la magnitud de la fuerza externa \vec{F} que se ejerce sobre los bloques A y B .

b) De la ecuación (6.34) puede expresarse la tensión que existe en la cuerda que une a los bloques A y B (T_{AB}) en términos de m_A , m_B y μ_C , obteniendo finalmente que:

$$T_{AB} = \mu_C m_A g.$$

6-9.- Una caja de 3 kg que descansa sobre una mesa horizontal está conectada a otra caja de 2 kg por medio de una cuerda, como se muestra en el siguiente diagrama (Fig. 6.11).

a) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática μ_S que permite que las dos cajas permanezcan en reposo?

b) Si el coeficiente de fricción estática es menor que el determinado en el inciso a) y el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la mesa es $\mu_C = 0.3$, calcule el tiempo que tardará la masa de 2 kg en recorrer los 2 m que le separan del suelo, suponiendo que el sistema parte del reposo.

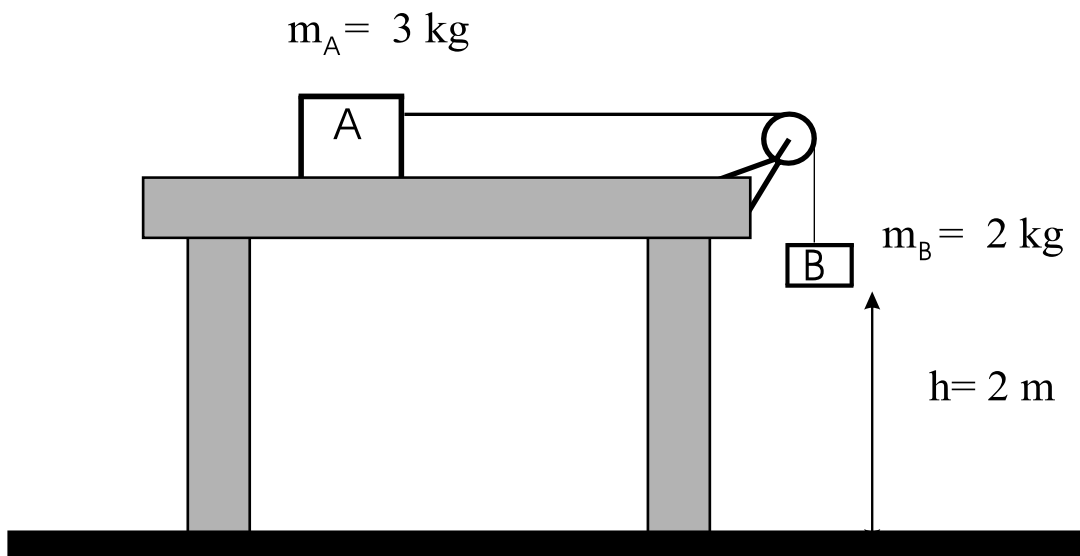


Figura 6.11: Diagrama de dos cajas conectadas por una cuerda que pasa por una polea.

Sol:

a) El primer paso para la solución del problema es plantear correctamente el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos que constituyen el sistema físico. En este caso está formado por dos bloques de masas m_A y m_B considerando que no es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre para la cuerda porque además de ser inextensible posee una masa despreciable.

Los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa m_A y m_B se muestran en la figura 6.12. De acuerdo con estos diagramas y recordando que ambos bloques se mueven con una velocidad constante, la segunda ley de Newton para el cuerpo A toma la siguiente forma:

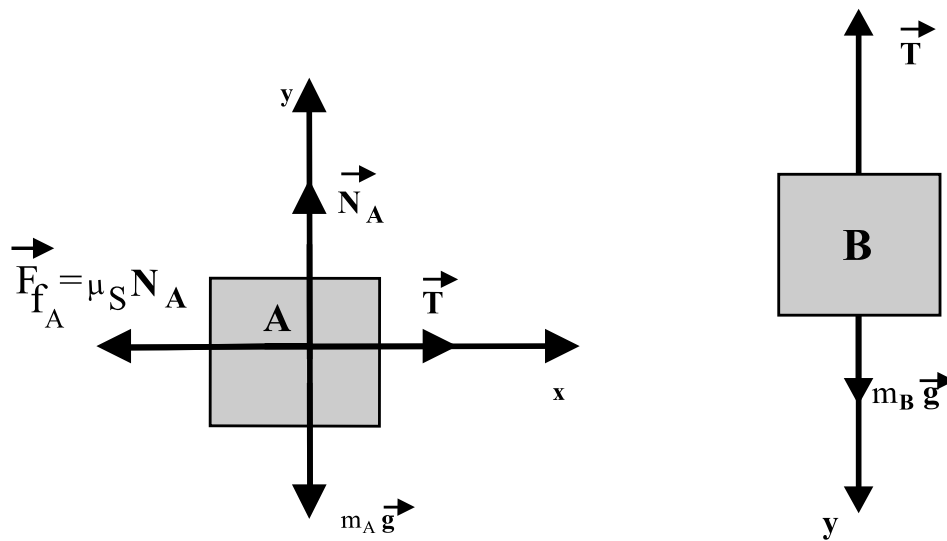


Figura 6.12: Diagrama de cuerpo libre de los bloques de masas m_A y m_B del inciso a).

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_S N_A = 0 \\ \Sigma F_{y_A} &= N - m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.36}$$

mientras que para el bloque B toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T = 0,\end{aligned}\tag{6.37}$$

de donde resulta que:

$$\begin{aligned} N_A &= m_A g \\ T &= \mu_S m_A g \\ T &= m_B g, \end{aligned} \quad (6.38)$$

igualando las dos últimas ecuaciones que expresan el valor de T y eliminando el factor común g , se obtiene que la relación entre las masas y el coeficiente de fricción μ_S es:

$$\begin{aligned} m_B &= \mu_S m_A \\ \mu_S &= \frac{m_B}{m_A} = \frac{2}{3} = 0.66. \end{aligned} \quad (6.39)$$

b) En este caso el sistema se acelerará en dirección del suelo y el coeficiente de fricción cinética está dado por $\mu_C = 0.3$. Los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa m_A y m_B se muestran en la figura 6.13, en los que, adicionalmente a las fuerzas que actúan sobre cada bloque, se ha señalado la dirección de la aceleración de cada uno de ellos, recordando que, al ser la cuerda inextensible, la aceleración de los dos bloques es la misma $a_{Ax} = a_{By} = a$.

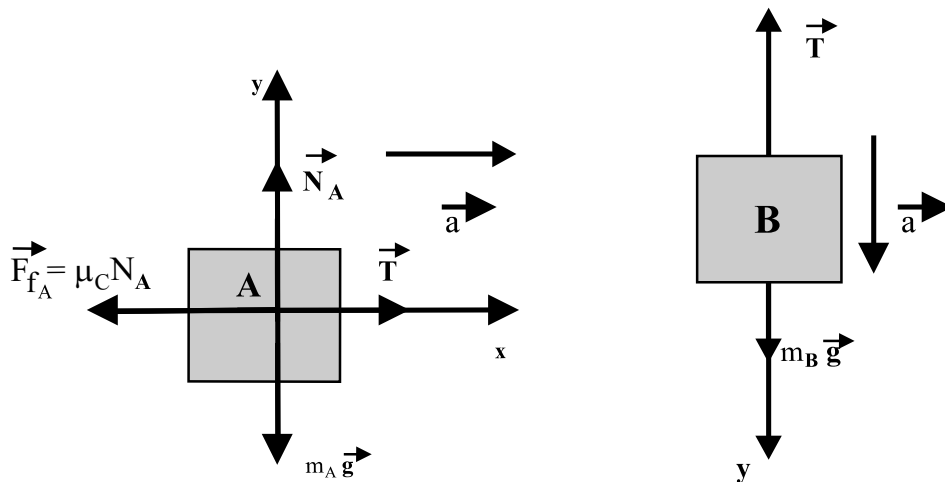


Figura 6.13: Diagrama de cuerpo libre de los cuerpos de masas m_A y m_B del inciso b).

Por lo tanto, la segunda ley de Newton para el cuerpo A toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{x_A} &= T - \mu_C N_A = m_A a_{Ax} = m_A a \\ \Sigma F_{y_A} &= N - m_A g = 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

mientras que para el bloque B toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T \\ &= m_B a_{B_y} = m_B a,\end{aligned}\tag{6.41}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}m_A a &= T - \mu_C N_A \\ m_B a &= m_B g - T, \quad \text{con} \\ N_A &= m_A g,\end{aligned}\tag{6.42}$$

de donde resulta que:

$$\begin{aligned}m_A a &= T - \mu_C m_A g \\ m_B a &= m_B g - T,\end{aligned}\tag{6.43}$$

por lo tanto, al sumar las dos últimas ecuaciones se obtiene para la aceleración:

$$(m_A + m_B) a = m_B g - \mu_C m_A g,\tag{6.44}$$

en donde:

$$\mu_C = 0.3,$$

y finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}(m_A + m_B) a &= (m_B - 0.3m_A) g \\ \Rightarrow \\ a &= \left(\frac{m_B - 0.3m_A}{m_A + m_B} \right) g = 2.156 \frac{m}{s^2}.\end{aligned}\tag{6.45}$$

Por lo tanto, la aceleración de los bloques es:

$$a = 2.156 \frac{m}{s^2}.$$

Una vez que se ha determinado el valor de la aceleración con la que se mueven los bloques, para calcular ahora el tiempo t que el bloque B tarda en descender una distancia de 2 m , se aplican las fórmulas de la cinemática en una dimensión:

$$h = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

en donde la aceleración está dada por la ecuación (6.45), $y_0 = 0$, $h = 2\text{ m}$, $v_0 = 0$, por consiguiente, el tiempo t está determinado por:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1.362\text{ s}.$$

6-10.- Un sistema compuesto por dos bloques se encuentra en equilibrio como se muestra en la figura 6.14. El bloque A tiene un peso de 60 N y se encuentra sobre una superficie en donde el coeficiente de fricción estática entre ambos es de 0.25 ; mientras que el bloque B tiene un peso de 12 N .

- Calcule la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque A .
- Determine el peso máximo de B con el cual el sistema permanecerá en equilibrio.

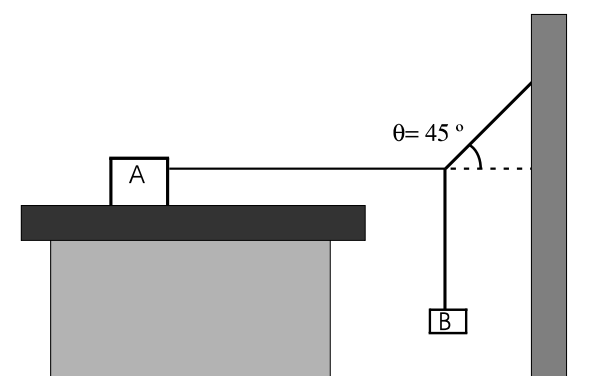


Figura 6.14: Sistema de dos bloques y tres cuerdas en equilibrio.

Sol:

a) Para resolver este problema se tiene que determinar la magnitud de la tensión ejercida por la cuerda sujeta al bloque A (T_A) en términos del peso del bloque B , para esto hay que considerar las implicaciones que trae consigo la presencia de la cuerda que tiene una inclinación de 45° y que une la cuerda sujeta al bloque A con la cuerda sujeta al bloque B .

De acuerdo al diagrama de fuerzas en equilibrio para el punto de unión de las tres cuerdas (Fig. 6.15), se tiene que:

$$\vec{T}_P + \vec{T}_A + \vec{T}_B = 0, \quad (6.46)$$

en donde \vec{T}_P representa la tensión de la cuerda que está sujeta a la pared. La condición dada por la ecuación (6.46) corresponde al hecho de que el punto de unión de las cuerdas permanece en reposo en tanto el sistema físico también lo esté.

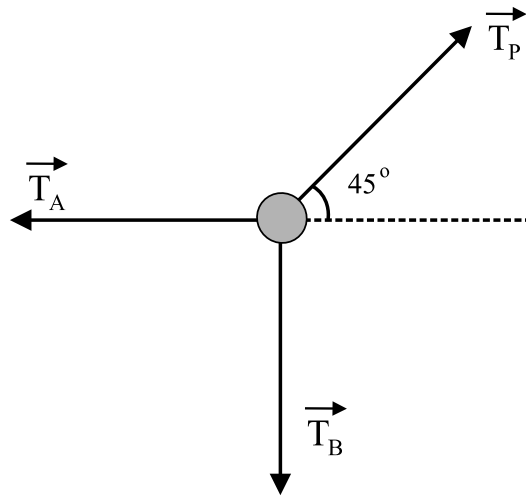


Figura 6.15: Diagrama de fuerzas para el punto de unión de tres cuerdas en equilibrio.

De esta manera la ecuación (6.46) en sus componentes cartesianas toma la forma:

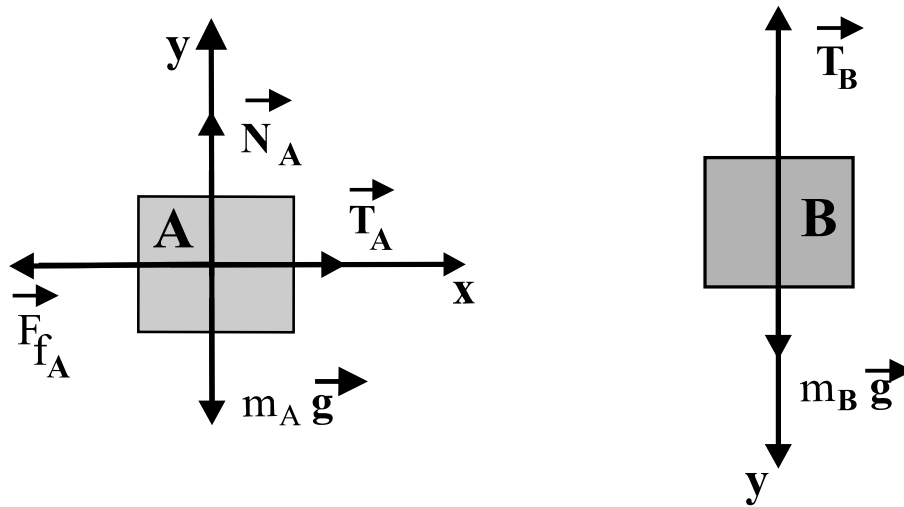
$$\begin{aligned} 0 &= T_P \cos 45 - T_A \\ 0 &= T_P \sen 45 - T_B, \end{aligned}$$

y como $\cos 45 = \sen 45$, resulta que:

$$\begin{aligned} T_A &= T_P \cos 45 = T_P \sen 45 = T_B \\ \implies \\ T_A &= T_B, \end{aligned} \tag{6.47}$$

es decir, dado que las proyecciones horizontal y vertical de la tensión de la cuerda que está sujeta a la pared son iguales, la tensión de la cuerda que sujeta al bloque B (T_B) es igual a la tensión en la cuerda que sujeta al bloque A .

Ahora bien, considerando los diagramas de cuerpo libre de los bloques A y B que se muestran a continuación (Fig. 6.16), puede escribirse la segunda ley de Newton para cada bloque de la siguiente forma:

Figura 6.16: Diagrama de cuerpo libre de los cuerpos de masas m_A y m_B .

$$\begin{aligned}
 m_A a_A &= 0 = T_A - F_f \\
 0 &= N_A - m_A g \\
 &\implies \\
 N_A &= m_A g \\
 F_f &= T_A = T_B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_B a_B &= 0 = T_B - m_B g \\
 &\implies \\
 T_B &= m_B g \\
 &\implies \\
 F_f &= T_B = m_B g = 12 \text{ N}. \tag{6.48}
 \end{aligned}$$

El resultado anterior muestra que, aún cuando el sistema se encuentra en equilibrio, la fuerza de fricción F_f que actúa sobre el bloque A es menor que $\mu_S N_A = \mu_S m_A g = 15 \text{ N}$.

b) El peso máximo que el bloque B puede tener está determinado por la condición de que la tensión en la cuerda que sujeta al bloque A iguale el máximo valor de la fuerza de fricción estática $F_{f_{max}} = \mu_S m_A g = 15 \text{ N}$. El valor de esta tensión (T_A), según la relación (6.47), es igual a la tensión en la cuerda que sujeta al bloque B (T_B), y al utilizar la relación (6.48) se obtiene que T_B es igual al peso máximo ($W_{B_{max}}$) que puede tener el

bloque B , es decir:

$$W_{B_{max}} = F_{f_{max}} = \mu_S m_A g = 15 \text{ N}. \quad (6.49)$$

6-11.- Un resorte de constante elástica k y longitud natural cero se fija de un extremo al techo del vagón de un tren y en el otro extremo del resorte se sujeta un balón de masa m (Fig. 6.17). El tren se desplaza con una aceleración \vec{a} en la dirección positiva del eje de las x . Un pasajero que viaja en el vagón observa que el resorte se estira una longitud l y se desvía un ángulo θ_0 respecto a la vertical.

a) Determine la aceleración del tren en términos de θ_0 , la aceleración de la gravedad g , y si es necesario, la longitud l .

b) ¿Por qué no es válido escribir la segunda ley de Newton en un sistema de referencia como el que se encuentra colocado en el vagón del tren? Explique lo más claramente posible su respuesta.

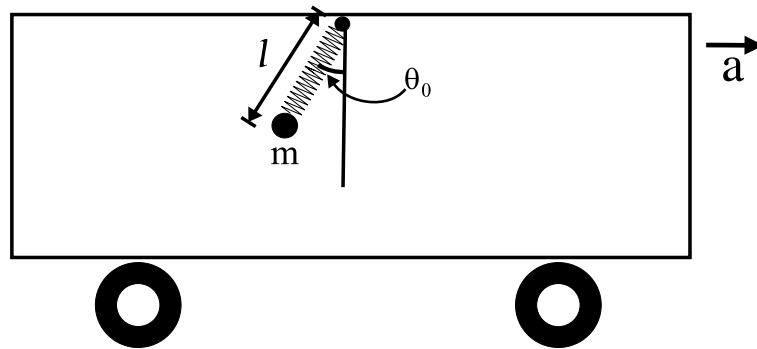


Figura 6.17: Diagrama de un resorte sujeto al techo del vagón de un tren en movimiento con aceleración \vec{a} .

Sol:

a) Para resolver este problema nos conviene montar el sistema de referencia de tal forma que el eje horizontal sea paralelo a la dirección de la aceleración y que el eje vertical tenga la misma dirección que el peso del balón pero con el sentido positivo de este eje apuntando hacia arriba.

Un observador en reposo que esté situado fuera del vagón verá un diagrama de cuerpo libre como el que se muestra en la figura 6.18, partiendo de este diagrama puede escribirse la segunda ley de Newton para el balón de masa m , obteniendo:

$$m \vec{a} = k \vec{l} + m \vec{g}, \quad (6.50)$$

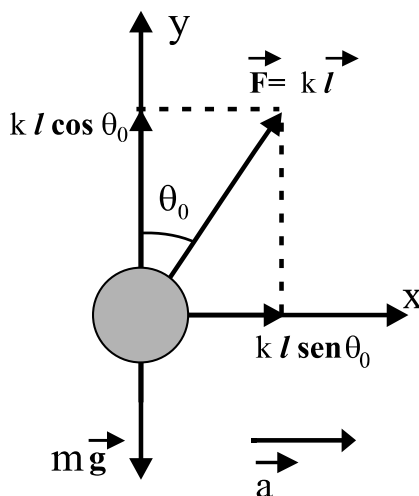


Figura 6.18: Diagrama de cuerpo libre de un balón sujeto al techo del vagón de un tren que avanza con aceleración \vec{a} .

en donde el vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = (a, 0), \quad (6.51)$$

así, la ecuación (6.50) en sus componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} ma &= kl \operatorname{sen} \theta_0 \\ 0 &= kl \operatorname{cos} \theta_0 - mg, \end{aligned} \quad (6.52)$$

de donde se obtiene:

$$kl = \frac{mg}{\operatorname{cos} \theta_0}, \quad (6.53)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} ma &= \left(\frac{mg}{\operatorname{cos} \theta_0} \right) \operatorname{sen} \theta_0 = mg \operatorname{tg} \theta_0 \\ \implies \\ a &= g \operatorname{tg} \theta_0. \end{aligned} \quad (6.54)$$

b) No es posible escribir la segunda ley de Newton en un sistema de referencia fijo al vagón, ya que este sistema tendrá una aceleración constante y por lo tanto, es un sistema

de referencia no inercial en donde las leyes de Newton deben corregirse tomando en cuenta la aceleración del vagón.

6-12.- Una auto avanza por un camino húmedo peraltado cuyo radio de curvatura es $R = 50\text{ m}$ (Fig. 6.19). Entre los neumáticos y el pavimento existe un coeficiente de fricción estática $\mu_S = 0.30$ y un coeficiente de fricción cinética $\mu_C = 0.25$.

a) Si el ángulo de peralte es $\alpha = 25^\circ$, ¿cuál es rapidez máxima que puede tener el coche antes de resbalar peralte arriba?

b) ¿Cuál es la rapidez mínima que debe tener para no resbalar peralte abajo?

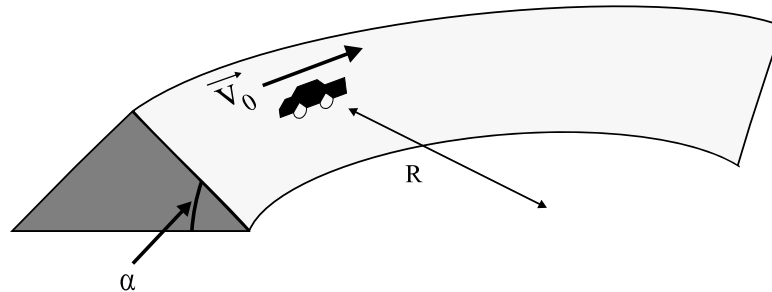


Figura 6.19: Un automóvil se desplaza a lo largo de una curva peraltada.

Sol:

a) Para resolver este problema nos conviene montar el sistema de referencia de tal forma que el eje horizontal apunte al centro de la circunferencia de la curva peraltada y que el eje vertical tenga la misma dirección que el peso del automóvil pero con el sentido positivo de este eje apuntando hacia arriba, tal como se muestra en la figura 6.20.

En el instante en que el automóvil alcance la velocidad máxima, antes de que se deslice peralte arriba, la fuerza de fricción estática apuntará hacia abajo de la curva peraltada, como se observa en el diagrama de cuerpo libre (Fig.6.21). Partiendo de este diagrama puede escribirse la segunda ley de Newton para el automóvil de masa m , y así obtener:

$$m\vec{a} = \vec{F}_f + m\vec{g} + \vec{N}, \quad (6.55)$$

en donde el vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = \left(\frac{v^2}{R}, 0 \right), \quad (6.56)$$

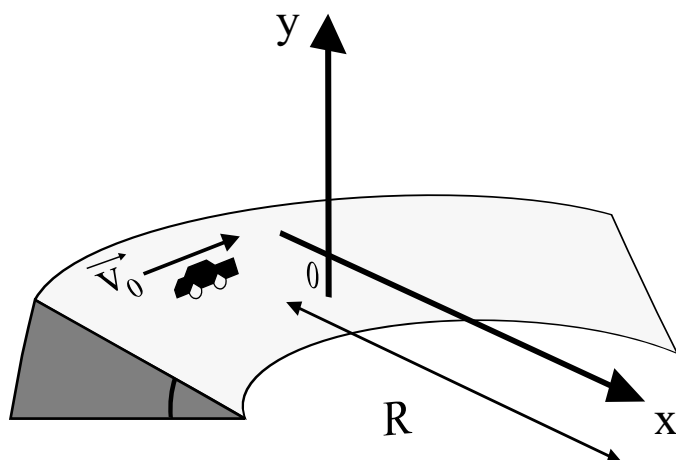


Figura 6.20: Sistema de referencia elegido para el planteamiento del diagrama de cuerpo libre.

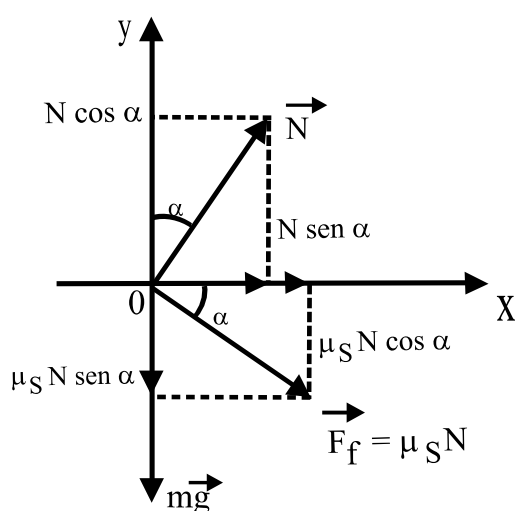


Figura 6.21: Diagrama de cuerpo libre de un automóvil sobre una curva peraltada para el caso de su rapidez máxima antes de que se deslice peralte arriba.

que corresponde a la aceleración centrípeta, de manera que la ecuación (6.55) en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= N \operatorname{sen} \alpha + \mu_S N \cos \alpha \\ 0 &= N \cos \alpha - \mu_S N \operatorname{sen} \alpha - mg, \end{aligned} \quad (6.57)$$

de donde se obtiene:

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha}, \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= [\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha] N = \\ &= [\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha] \frac{mg}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} = \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg, \end{aligned} \quad (6.59)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg \\ &\implies \\ \frac{v^2}{R} &= \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] g \\ &\implies \\ v &= \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

esto significa que la rapidez máxima que puede alcanzar el automóvil antes de que se deslice peralte arriba, si $\mu_S = 0.30$, $R = 50 \text{ m}$, $\alpha = 25^\circ$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, está dada por:

$$v = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR} = 20.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.61)$$

b) En el instante en que el automóvil alcance la velocidad mínima antes de que se deslice peralte abajo, la fuerza de fricción estática apuntará hacia arriba de la curva peraltada, como se observa en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.22.

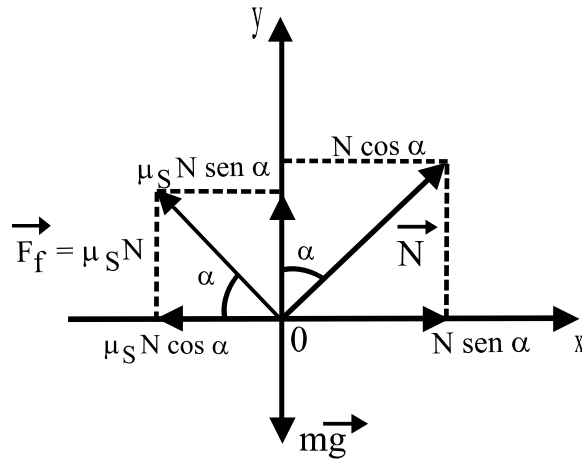


Figura 6.22: Diagrama de cuerpo libre de un automóvil sobre una curva peraltada para el caso de su rapidez mínima antes de que se deslice peralte abajo.

Partiendo de este diagrama puede escribirse la segunda ley de Newton para el automóvil de masa m , obteniendo:

$$m \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_f + m \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}}, \quad (6.62)$$

en donde el vector aceleración está dado por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{v^2}{R}, 0 \right), \quad (6.63)$$

que corresponde a la aceleración centrípeta, de manera que la ecuación (6.62) en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= N \sen \alpha - \mu_S N \cos \alpha \\ 0 &= N \cos \alpha + \mu_S N \sen \alpha - mg, \end{aligned} \quad (6.64)$$

de donde se obtiene:

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha + \mu_S \sen \alpha}, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned}
 m \frac{v^2}{R} &= [\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha] N = \\
 &= [\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha] \frac{mg}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} = \\
 &= \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg,
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 m \frac{v^2}{R} &= \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg \\
 &\implies \\
 \frac{v^2}{R} &= \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] g \\
 &\implies \\
 v &= \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR},
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

esto significa que la rapidez mínima que puede alcanzar el automóvil antes de que se deslice peralte abajo, si $\mu_S = 0.30$, $R = 50 \text{ m}$, $\alpha = 25^\circ$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, está dada por:

$$v = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR} = 8.45 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{6.68}$$

6-13.- Un cuerpo de 2 kg descansa sobre un plano inclinado que tiene una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ hacia la derecha y un ángulo de inclinación de 60° , tal y como se muestra en la figura 6.23. El cuerpo de 2 kg permanece en reposo con relación al plano inclinado.

a) Determinar $\vec{\mathbf{a}}$.

b) ¿Qué ocurriría si la aceleración del plano fuera mayor?

Sol:

a) Para escribir la ecuación de movimiento del bloque de masa m respecto a la plataforma que se mueve con aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ en la dirección horizontal, es necesario recordar la forma que toma la segunda ley de Newton para los sistemas de referencia acelerados:

$$m \vec{\mathbf{r}} = -m \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{reales}}, \tag{6.69}$$

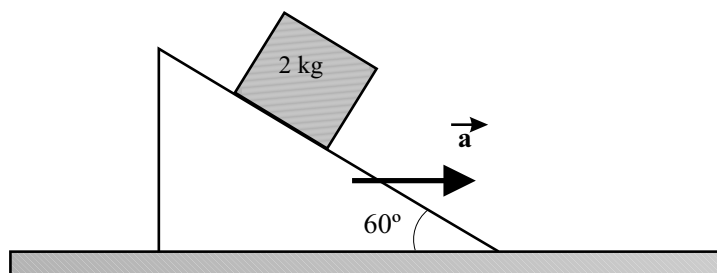


Figura 6.23: Un bloque de 2 kg permanece en reposo sobre un plano inclinado que se mueve con aceleración \vec{a} .

en donde \vec{a} corresponde a la aceleración que posee el sistema de referencia acelerado, en este caso el plano inclinado, \vec{r} es la aceleración de la partícula respecto al sistema de referencia acelerado situado sobre el plano inclinado y \vec{F}_{reales} representa la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el bloque de masa m .

Para resolver este problema se toman las direcciones de los ejes del sistema de referencia acelerado de manera que:

$$-\vec{a} = a(-\cos\theta, -\sin\theta) = -a\cos\theta\hat{e}_x - a\sin\theta\hat{e}_y, \quad (6.70)$$

como se muestra en el siguiente diagrama de cuerpo libre (Fig.6.24). Además, si $\vec{F}_{reales} =$

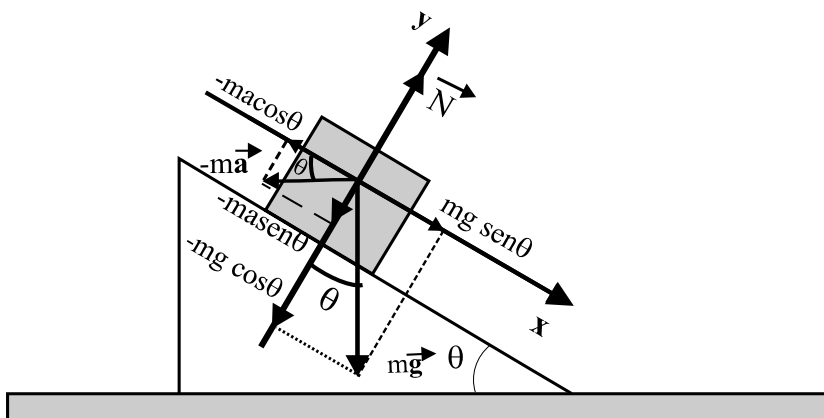


Figura 6.24: Sistema de referencia seleccionado para el diagrama de cuerpo libre de un bloque en reposo sobre un plano inclinado.

$\vec{N} + m\vec{g}$, en donde \vec{N} es la fuerza normal que la plataforma ejerce sobre el bloque y $m\vec{g}$ es el peso del bloque; en términos de sus componentes cartesianas, estas fuerzas en

el sistema de referencia acelerado están dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= N(0, 1) = N\hat{e}_y \\ m\vec{g} &= mg(\sin \theta, -\cos \theta) = mg \sin \theta \hat{e}_x - mg \cos \theta \hat{e}_y,\end{aligned}\quad (6.71)$$

de esta forma la ecuación de movimiento (6.69), en sus componentes cartesianas toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= mg \sin \theta - ma \cos \theta = 0 \\ m\ddot{y} &= -ma \sin \theta - mg \cos \theta + N = 0.\end{aligned}\quad (6.72)$$

La condición que debe cumplirse para evitar el deslizamiento del cuerpo es que la aceleración \vec{a} del bloque respecto a la plataforma debe ser igual a cero ($\ddot{x} = 0$ y $\ddot{y} = 0$). De esta forma, para que el cuerpo permanezca en reposo con relación al plano inclinado, puede despejarse la magnitud de la aceleración \vec{a} de la ecuación (6.72) y así poder encontrar el valor de la normal N :

$$\begin{aligned}a &= g \operatorname{tg} \theta \\ N &= ma \sin \theta + mg \cos \theta = mg \operatorname{tg} \theta \sin \theta + mg \cos \theta \\ &= mg \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \right) = mg \left(\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{mg}{\cos \theta},\end{aligned}\quad (6.73)$$

por lo tanto, el bloque tendrá una aceleración paralela a la horizontal en la que descansa el plano inclinado dada por:

$$\vec{a} = (a, 0),$$

en donde:

$$a = g \operatorname{tg} \theta,$$

y como $\theta = 60^\circ$ y $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$, finalmente se obtiene que:

$$a = g \operatorname{tg} \theta = 16.97 \frac{m}{s^2}.$$

b) Si la aceleración del plano inclinado fuera mayor: $a' = a + \epsilon = g \operatorname{tg} \theta + \epsilon$, con $\epsilon > 0$,

entonces la ecuación de movimiento (6.72) se escribe como:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= mg \operatorname{sen} \theta - ma' \cos \theta \\
 m\ddot{y} &= -ma' \operatorname{sen} \theta - mg \cos \theta + N = 0 \\
 &\implies \\
 m\ddot{x} &= mg \operatorname{sen} \theta - m(g \operatorname{tg} \theta + \epsilon) \cos \theta = \\
 &= mg \operatorname{sen} \theta - mg \operatorname{sen} \theta - m\epsilon \cos \theta = -m\epsilon \cos \theta \\
 m\ddot{y} &= -m(g \operatorname{tg} \theta + \epsilon) \operatorname{sen} \theta - mg \cos \theta + N = \\
 &= -\frac{mg}{\cos \theta} + N - m\epsilon \operatorname{sen} \theta = 0,
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

en donde $\ddot{y} = 0$ es la condición para que el bloque permanezca en contacto con el plano inclinado, de esta condición se encuentra para la normal:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta} + m\epsilon \operatorname{sen} \theta,$$

de acuerdo con la ecuación (6.74), la aceleración que tendrá el bloque respecto al plano inclinado, está dada por:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -m\epsilon \cos \theta \\
 &\implies \\
 \ddot{x} &= -\epsilon \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{6.75}$$

esto significa que el bloque se desplazará ascendiendo sobre el plano inclinado con una aceleración de magnitud $\epsilon \cos \theta$.

6-14.- Un cuerpo está en reposo apoyado sobre un plano inclinado como se muestra en la figura 6.25. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es μ_0 .

a) Aislar e indicar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y encontrar el valor del coeficiente de rozamiento μ_0 si el ángulo de inclinación es θ .

b) ¿A partir de qué valor de θ' el cuerpo empezará a deslizarse hacia abajo del plano?

Sol:

a) Seleccionando un sistema de referencia cartesiano paralelo al plano inclinado como el que se muestra a continuación (Fig. 6.26).

El diagrama de cuerpo libre que resulta se muestra en la figura 6.27. Para encontrar la condición en la que el cuerpo empezará a deslizarse hacia abajo del plano inclinado, se utiliza la segunda ley de Newton:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_{tot.} = 0, \tag{6.76}$$

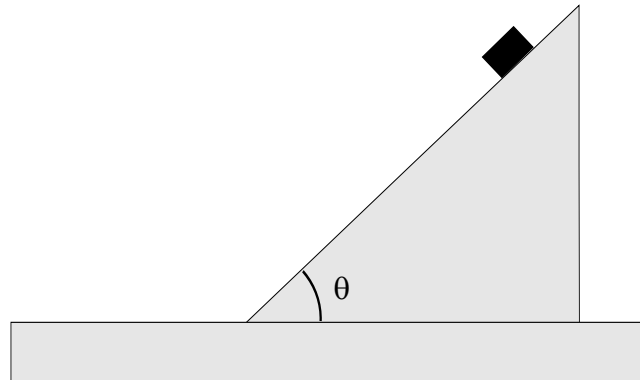


Figura 6.25: Diagrama de un cuerpo en reposo apoyado sobre un plano inclinado.

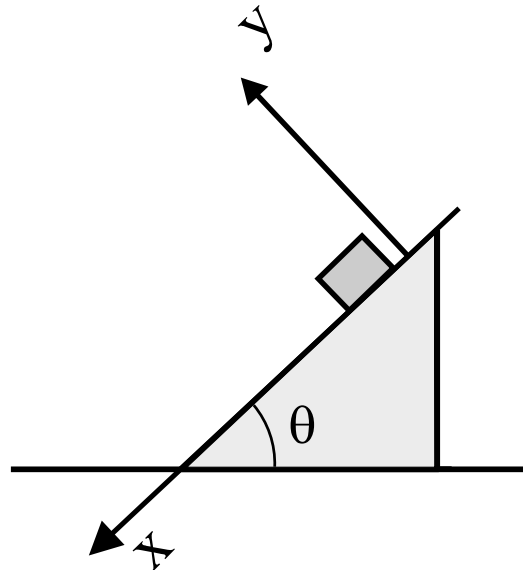


Figura 6.26: Sistema de referencia escogido para un cuerpo en reposo apoyado sobre un plano inclinado.

que de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre (Fig. 6.27) resulta en las siguientes ecuaciones para sus componentes x y y :

$$\begin{aligned} ma_x &= mg \operatorname{sen} \theta - \mu_0 N = 0 \\ ma_y &= N - mg \cos \theta = 0, \end{aligned} \tag{6.77}$$

de donde se obtiene:

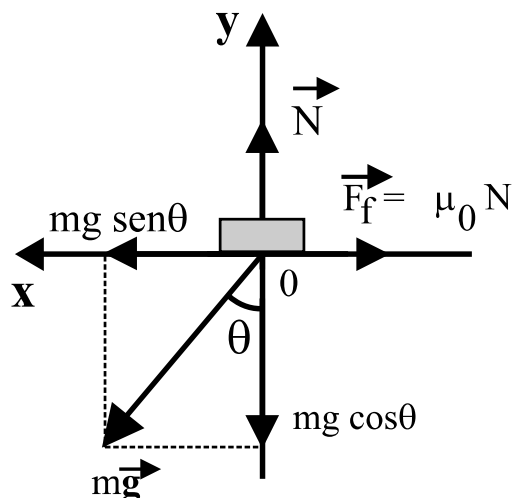


Figura 6.27: Diagrama de cuerpo libre para un bloque en reposo apoyado sobre un plano inclinado.

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \theta \\ \mu_0 N &= mg \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mu_0 mg \cos \theta &= mg \operatorname{sen} \theta \\ \implies \\ \mu_0 &= \operatorname{tg} \theta, \end{aligned}$$

esto significa que el coeficiente de fricción μ_0 está dado por $\mu_0 = \operatorname{tg} \theta$.

b) El bloque deslizará para ángulos $\theta' > \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu_0$.

6-15.- Una pintora que tiene una masa de 60 kg se encuentra de pie sobre un montacargas de aluminio de 15 kg para pintar la fachada de una casa. El montacargas está sujetado por una cuerda que pasa a través de una polea colocada en el techo de la casa y que permite que la pintora se desplace verticalmente (Fig. 6.28).

a) Después de que comienza a jalar la cuerda el montacargas y la pintora ascienden con una aceleración de $0.8 \frac{m}{s^2}$. Determine la magnitud de fuerza \vec{F} que la pintora utilizó para jalar la cuerda

- b) Determine la fuerza que ejerce la pintora sobre la cuerda cuando el montacargas asciende con una velocidad constante de $1 \frac{m}{s}$. Ignorar la masa de la cuerda.

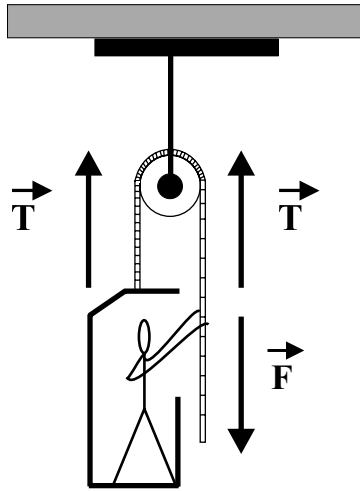


Figura 6.28: Diagrama de un montacargas que es elevado por una polea mediante una cuerda jalada por una pintora.

Sol:

a) Para poder encontrar la fuerza \vec{F} es necesario identificar que en todo momento del movimiento del sistema, formado por la pintora y el montacargas, se cumple que la tensión en la cuerda es igual a la fuerza con la que la pintora levanta el montacargas y a ella misma, es decir:

$$\vec{T} = \vec{F}.$$

Partiendo de los diagramas de cuerpo libre del montacargas (Fig. 6.29) y de la pintora (Fig. 6.30), puede escribirse la segunda ley de Newton para cada uno de los componentes del sistema. Para el caso del montacargas que tiene una masa m_M se obtiene:

$$m_M \vec{a} = \vec{T} + m_M \vec{g} - \vec{N}, \quad (6.78)$$

en donde \vec{N} es la fuerza normal dirigida hacia abajo y ejercida por la pintora sobre el montacargas, de manera que, en forma de componentes cartesianas, la ecuación vectorial (6.78) se escribe en la siguiente forma:

$$m_M a_x = 0 \quad (6.79)$$

$$m_M a_y = m_M a = T - m_M g - N, \quad (6.80)$$

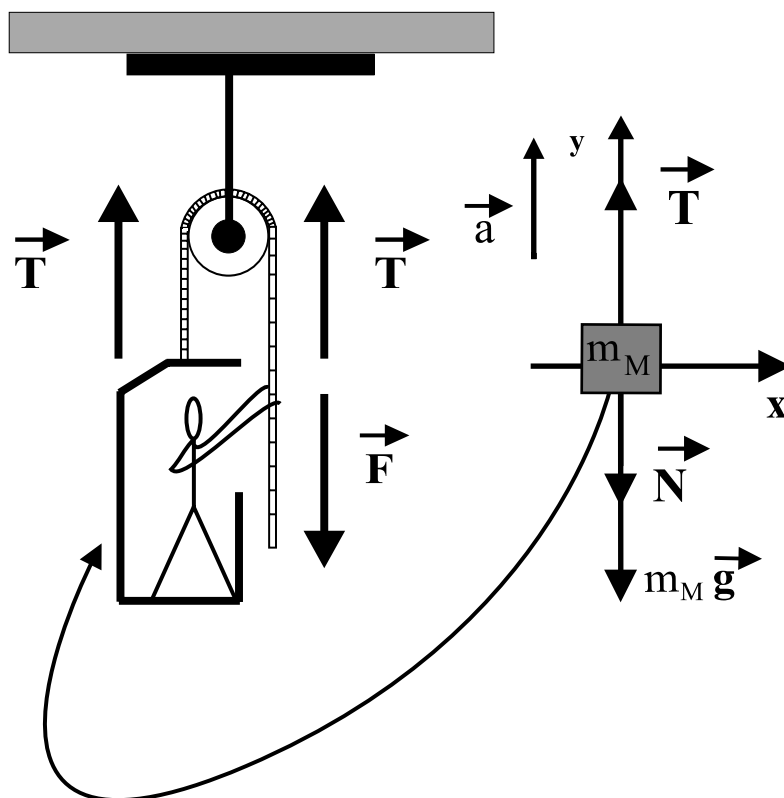


Figura 6.29: Diagrama de cuerpo libre de un montacargas.

de la misma manera, para la pintora de masa m_P de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.30 se obtiene:

$$m_P \vec{a} = \vec{T} + m_P \vec{g} + \vec{N}, \quad (6.81)$$

en donde \vec{N} ahora es la fuerza normal dirigida hacia arriba y ejercida por el montacargas sobre la pintora (formando un par de fuerzas que actúan sobre diferentes cuerpos), de manera que, en forma de componentes cartesianas, la ecuación vectorial (6.81) se escribe en la siguiente forma:

$$m_P a_x = 0 \quad (6.82)$$

$$m_P a_y = m_P a = T - m_P g + N, \quad (6.83)$$

sumando las ecuaciones (6.80) y (6.83) se obtiene:

$$(m_P + m_M) a = 2T - (m_P + m_M) g, \quad (6.84)$$

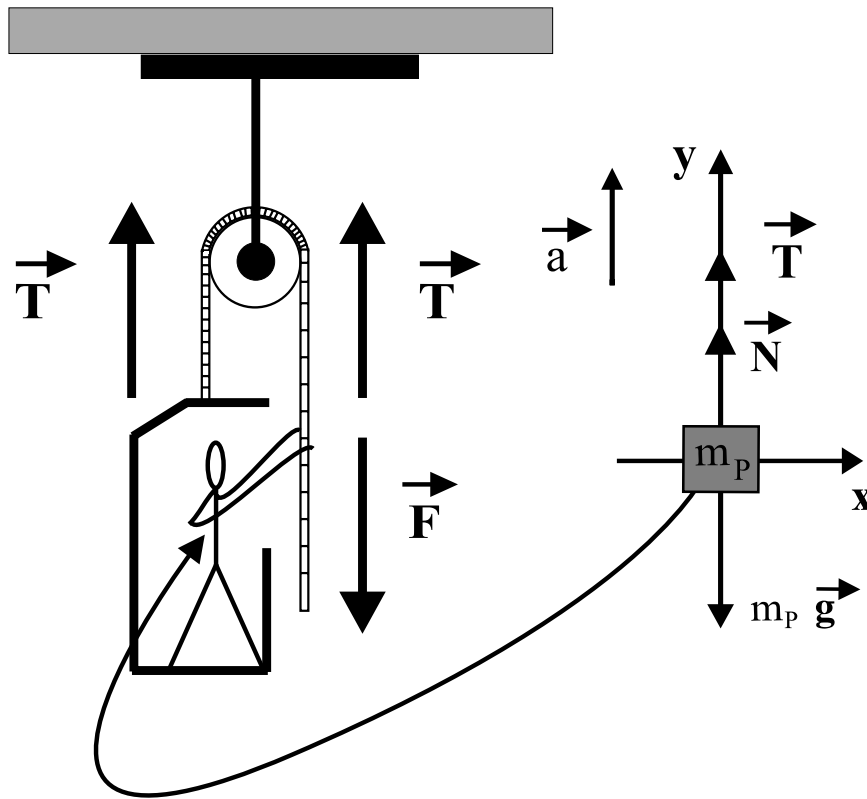


Figura 6.30: Diagrama de cuerpo libre de una pintora.

de donde fácilmente puede despejarse la tensión T :

$$T = \frac{(m_P + m_M)(a + g)}{2}, \quad (6.85)$$

y sustituyendo los valores numéricos dados para este problema se encuentra que:

$$T = 397.5 \text{ N}, \quad (6.86)$$

esto significa que la fuerza con la que la pintora tira de la cuerda es de:

$$F = T = 397.5 \text{ N}.$$

b) Cuando el sistema alcanza una velocidad de $1.0 \frac{m}{s}$, la pintora ejerce una fuerza tal que ella y el montacargas suben a una velocidad constante, por lo tanto, la aceleración

del sistema es igual a cero ($\vec{a} = 0$); de esta manera la fuerza que la pintora ejerce está dada por:

$$F = T = \frac{(m_P + m_M)(g)}{2}, \quad (6.87)$$

sustituyendo los valores numéricos dados para este problema se encuentra que la fuerza con que la pintora tira de la cuerda es:

$$F = 367.5 \text{ N}. \quad (6.88)$$

- 6-16.-** Una pequeña tuerca que tiene una masa de 100 g se desliza a lo largo de un alambre semicircular cuyo radio es de 10 cm y que gira alrededor de un eje vertical a razón de 2 vueltas por segundo (Fig. 6.31). Determinar los valores de θ para los cuales la tuerca permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

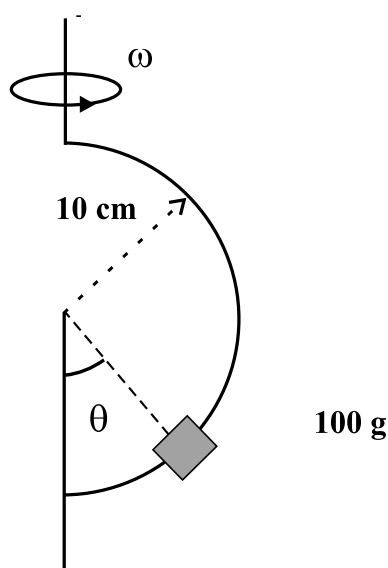


Figura 6.31: Diagrama de una tuerca que se desliza por un alambre semicircular giratorio.

Sol:

Para resolver este problema nos conviene montar el sistema de referencia de tal forma que: el eje horizontal apunte hacia el eje de giro del anillo circular en el cual se desliza la tuerca describiendo una trayectoria circular respecto a este eje y que el eje vertical

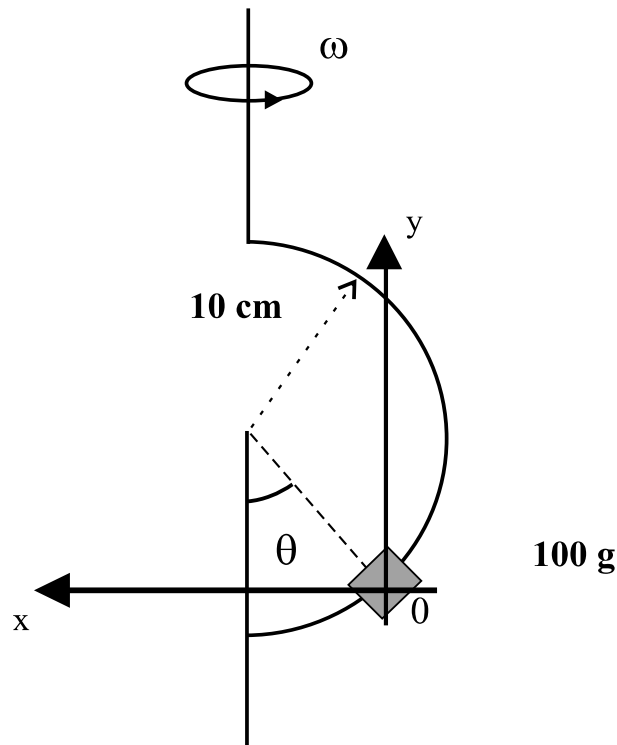


Figura 6.32: Sistema de referencia elegido para la descripción del movimiento de una tuerca en un alambre semicircular giratorio.

apunte en la misma dirección que el peso de la tuerca, pero con el sentido positivo dirigido hacia arriba (Fig. 6.32).

En la figura 6.33 se observa el diagrama de cuerpo libre para el caso del ángulo θ en el cual la tuerca permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

Partiendo del anterior diagrama de cuerpo libre (Fig. 6.33), puede escribirse la segunda ley de Newton para la tuerca de masa m , obteniendo:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}, \quad (6.89)$$

en donde \vec{N} es la fuerza normal que el anillo ejerce sobre la tuerca y el vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = \left(\frac{v^2}{R \sin \theta}, 0 \right) = (\omega^2 R \sin \theta, 0), \quad (6.90)$$

que corresponde a la aceleración centrípeta de un objeto que gira alrededor de un eje con una rapidez angular ω , a una distancia del centro de giro $R \sin \theta$; en donde R es el

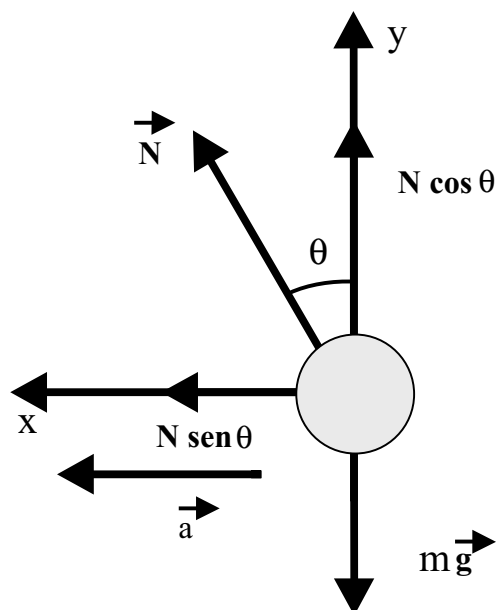


Figura 6.33: Diagrama de cuerpo libre para la tuerca que gira sujeta a un alambre semicircular.

radio del anillo, de esta manera la ecuación (6.89) en componentes cartesianas se escribe en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m\omega^2 R \operatorname{sen} \theta &= N \operatorname{sen} \theta \\ 0 &= N \cos \theta - mg, \end{aligned} \quad (6.91)$$

de donde:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}, \quad (6.92)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} m\omega^2 R \operatorname{sen} \theta &= \left(\frac{mg}{\cos \theta} \right) \operatorname{sen} \theta = mg \operatorname{tg} \theta \\ \implies \\ \omega^2 R &= \frac{g}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned} \implies \\ \cos \theta &= \frac{g}{\omega^2 R}, \end{aligned} \quad (6.94)$$

esto significa que el valor de θ en el cual la tuerca permanece estacionaria respecto al alambre giratorio está dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right), \quad (6.95)$$

si $\omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $R = 0.1 \text{ m}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

$$\theta = \arccos\left[\frac{9.8}{0.1(4\pi)^2}\right] = 51.64^\circ. \quad (6.96)$$

- 6-17.-** Un bloque se encuentra apoyado sobre una plataforma que se mueve con una aceleración constante igual a $\frac{g}{4}$ y en la dirección que se indica en la figura 6.34. ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto para evitar que el cuerpo se deslice sobre la plataforma?

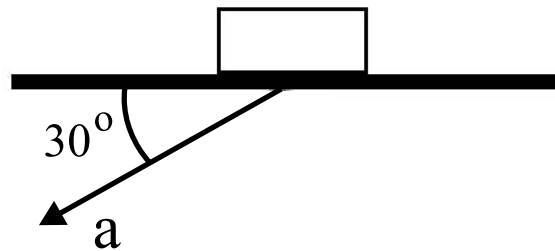


Figura 6.34: Movimiento relativo de un bloque respecto a una plataforma acelerada.

Sol:

Para escribir la ecuación de movimiento del bloque de masa m respecto a la plataforma que se mueve con aceleración \vec{a} y en una dirección de 30° por debajo de la horizontal, es necesario recordar la forma que toma la segunda ley de Newton para los sistemas de referencia acelerados:

$$m \vec{\ddot{r}} = -m \vec{a} + \vec{F}_{reales}, \quad (6.97)$$

en donde \vec{a} corresponde a la aceleración que tiene el sistema de referencia acelerado, $\vec{\ddot{r}}$ es la aceleración de la partícula respecto a este sistema y \vec{F}_{reales} corresponde a la fuerza total "real" que actúa sobre la partícula de masa m .

Para este problema se escogen las direcciones de los ejes del sistema de referencia acelerado, de manera que:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{g}{4}(\cos 30, -\sin 30) = \frac{g}{4} \cos 30 \hat{e}_x - \frac{g}{4} \sin 30 \hat{e}_y, \quad (6.98)$$

además, $\vec{\mathbf{F}}_{reales} = \vec{\mathbf{N}} + m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{F}}_f$, en donde $\vec{\mathbf{N}}$ es la fuerza normal que la plataforma ejerce sobre el bloque, $\vec{\mathbf{F}}_f$ es la fuerza de rozamiento entre el bloque y la plataforma con un coeficiente de rozamiento estático μ_S y $m\vec{\mathbf{g}}$ es el peso del bloque, en términos de sus componentes cartesianas estas fuerzas en el sistema de referencia acelerado están dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}} &= (0, N) = N\hat{e}_y \\ m\vec{\mathbf{g}} &= (0, -mg) = -mg\hat{e}_y \\ \vec{\mathbf{F}}_f &= (\mu_S N, 0) = \mu_S N\hat{e}_x, \end{aligned} \quad (6.99)$$

en donde para la fuerza de rozamiento, que siempre se opone al movimiento, se escribe como $\vec{\mathbf{F}}_f = \mu_S N\hat{e}_x$, porque el movimiento del bloque en la dirección x es hacia la derecha en ausencia de esta fuerza, dirección considerada como la dirección negativa de las x (Fig. 6.35). Por lo tanto, la ecuación de movimiento (6.97) en sus componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{4} \cos 30 + \mu_S N \\ m\ddot{y} &= \frac{mg}{4} \sin 30 + N - mg. \end{aligned} \quad (6.100)$$

La condición necesaria para evitar que el cuerpo se deslice sobre la plataforma es que las aceleraciones \ddot{x} y \ddot{y} del bloque respecto a la plataforma deben ser iguales a cero ($\ddot{x} = 0$ y $\ddot{y} = 0$). De esta forma, sustituyendo estos valores en la ecuación anterior puede determinarse el valor del coeficiente de rozamiento resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{mg}{4} \cos 30 + \mu_S N \\ 0 &= \frac{mg}{4} \sin 30 + N - mg, \end{aligned} \quad (6.101)$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{mg}{4} \sin 30 + mg = \frac{7}{8}mg \\ \mu_S &= \frac{\frac{mg}{4} \cos 30}{\frac{7}{8}mg} = \frac{\sqrt{3}}{7}, \end{aligned} \quad (6.102)$$

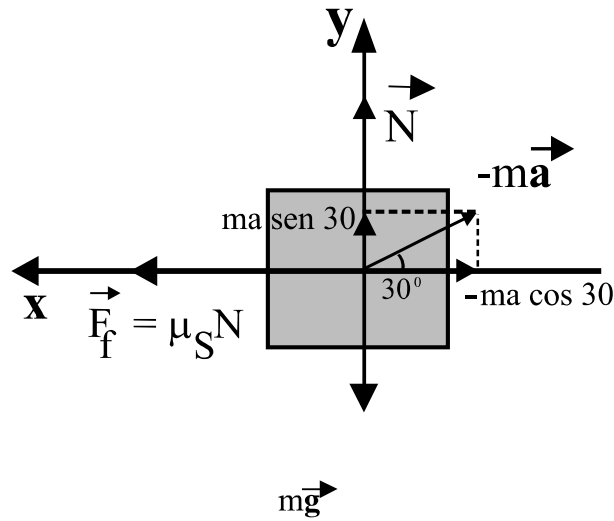


Figura 6.35: Diagrama de cuerpo libre considerado para el planteamiento de la segunda ley de Newton.

es decir, para evitar que el cuerpo se deslice sobre la plataforma, el coeficiente de rozamiento entre ambos debe ser de $\mu_S = \frac{\sqrt{3}}{7}$.

- 6-18.- Una fuerza \vec{F} que tiene una magnitud de 15 N y una orientación de 15° por debajo de la horizontal, actúa sobre un bloque de 3.5 kg a través del piso, tal y como se muestra en la figura 6.36. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el piso es de 0.25 . Calcule las magnitudes de la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre el bloque y de la aceleración del bloque.

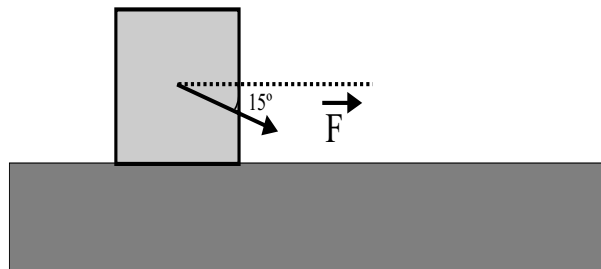


Figura 6.36: Movimiento de un bloque sobre una superficie con fricción bajo la acción de una fuerza \vec{F} dirigida a 15° por debajo de la horizontal.

Sol:

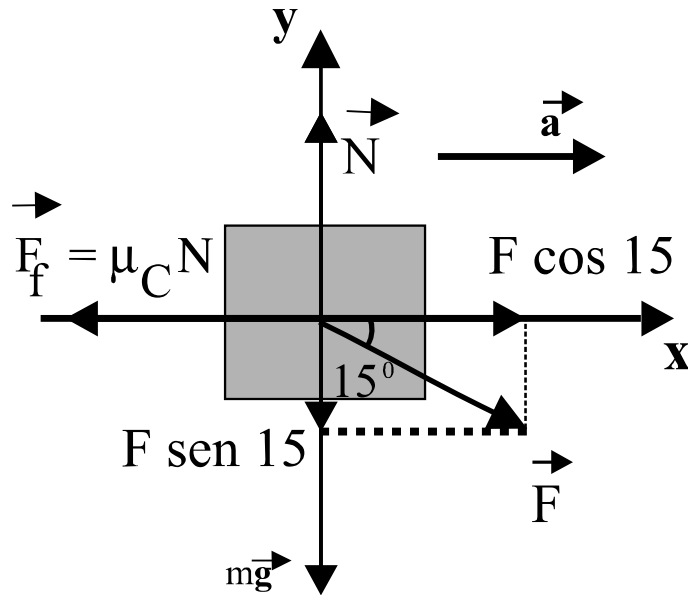


Figura 6.37: Diagrama de cuerpo libre para un bloque que se desplaza sobre una superficie con fricción bajo la acción de una fuerza \vec{F} dirigida a 15° por debajo de la horizontal.

Para resolver este problema es necesario que en el sistema de referencia que se elija el eje horizontal apunte en dirección paralela a la superficie horizontal con el sentido positivo hacia la derecha del bloque y que el eje vertical apunte con el sentido positivo dirigido hacia arriba, tal como se muestra en la figura 6.37.

Partiendo del diagrama de cuerpo libre de la figura 6.37, puede escribirse la segunda ley de Newton para el bloque de masa m , obteniendo:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f, \quad (6.103)$$

en donde \vec{N} es la fuerza normal que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque, \vec{F}_f es la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie horizontal, $m\vec{g}$ es el peso del bloque y \vec{F} es la fuerza externa que actúa sobre el bloque. El vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = (a, 0), \quad (6.104)$$

de manera que, en componentes cartesianas la ecuación (6.103) se escribe como:

$$\begin{aligned} ma &= F \cos 15 - \mu_C N \\ 0 &= N - F \sin 15 - mg, \end{aligned} \quad (6.105)$$

de donde resulta que:

$$N = mg + F \operatorname{sen} 15, \quad (6.106)$$

por lo tanto:

$$ma = F [\cos 15 - \mu_C \operatorname{sen} 15] - \mu_C mg, \quad (6.107)$$

finalmente se encuentra que:

$$a = \frac{F}{m} [\cos 15 - \mu_C \operatorname{sen} 15] - \mu_C g, \quad (6.108)$$

y como $\mu_C = 0.25$, $F = 15 \text{ N}$, $m = 3.5 \text{ kg}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ se obtiene que:

$$a = \frac{F}{m} [\cos 15 - \mu_C \operatorname{sen} 15] - \mu_C g = 1.41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (6.109)$$

y la fuerza de fricción está dada por:

$$F_f = \mu_C N = \mu_C [mg + F \operatorname{sen} 15] = 9.55 \text{ N}. \quad (6.110)$$

6-19.- Un bloque de masa m_1 se coloca sobre un plano inclinado que tiene un ángulo α y que está conectado a otro bloque de masa m_2 que cuelga de un cordel que pasa por una polea sin fricción (Fig. 6.38). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_1 y el plano inclinado es μ_c . Determine el valor de la masa m_2 cuando el bloque de masa m_1 :

- a) Sube por el plano inclinado con una aceleración \vec{a} .
- b) Baja por el plano inclinado con una aceleración \vec{a} .

Sol:

a) Si el bloque de masa m_1 sube por el plano inclinado, de acuerdo al siguiente diagrama de cuerpo libre (Fig. 6.39), la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m_1 a_{1x} &= F_{res_{1x}} = T - \mu_c N - m_1 g \operatorname{sen} \alpha \\ m_1 a_{1y} &= F_{res_{1y}} = N - m_1 g \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.111)$$

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre para el bloque de masa m_2 (Fig. 6.40), la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas toma la forma:

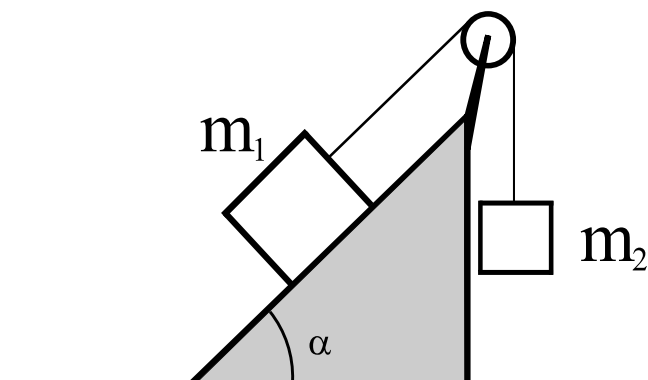


Figura 6.38: Sistema de dos bloques conectados a través de un cordel que pasa por una polea sin fricción.

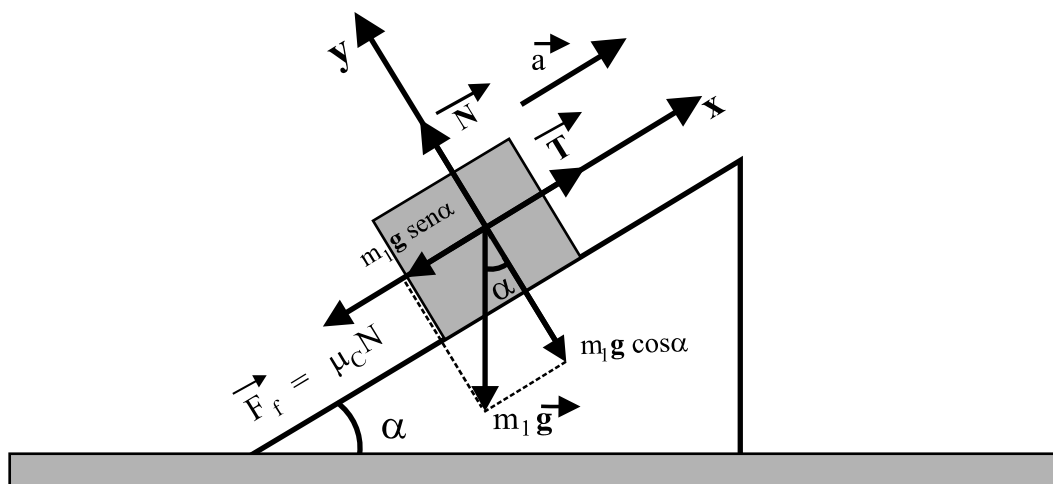


Figura 6.39: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa m_1 .

$$\begin{aligned} m_2 a_{2x} &= F_{res_{2x}} = 0 \\ m_2 a_{2y} &= F_{res_{2y}} = m_2 g - T. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Ahora, combinando las relaciones para las coordenadas x y y de la ecuación (6.111) con la de la coordenada y de la ecuación (6.112), se obtiene, considerando adicionalmente que $a_{1x} = a_{2y} = a$, ya que la cuerda que une a ambos cuerpos es inextensible:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{res_{1x}} = T - \mu_C m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha \\ m_2 a &= F_{res_{2y}} = m_2 g - T, \end{aligned} \quad (6.113)$$

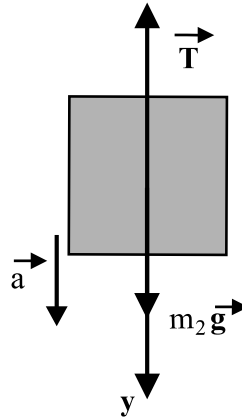


Figura 6.40: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa m_2 .

al sumar estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g - \mu_C m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha, \quad (6.114)$$

si de esta ecuación se despeja m_2 , finalmente se obtiene el valor de m_2 para el caso en el que el bloque de masa m_1 sube por el plano inclinado:

$$m_2 = \frac{m_1 [a + g(\mu_C \cos \alpha + \sin \alpha)]}{g - a}. \quad (6.115)$$

b) Si ahora el bloque de masa m_1 desciende por el plano inclinado, de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la figura 6.41, para el bloque de masa m_1 la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m_1 a_{1x} &= F_{res_{1x}} = m_1 g \sin \alpha - T - \mu_C N \\ m_1 a_{1y} &= F_{res_{1y}} = N - m_1 g \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.116)$$

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre del bloque de masa m_2 (Fig. 6.42), la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} m_2 a_{2x} &= F_{res_{2x}} = 0 \\ m_2 a_{2y} &= F_{res_{2y}} = T - m_2 g. \end{aligned} \quad (6.117)$$

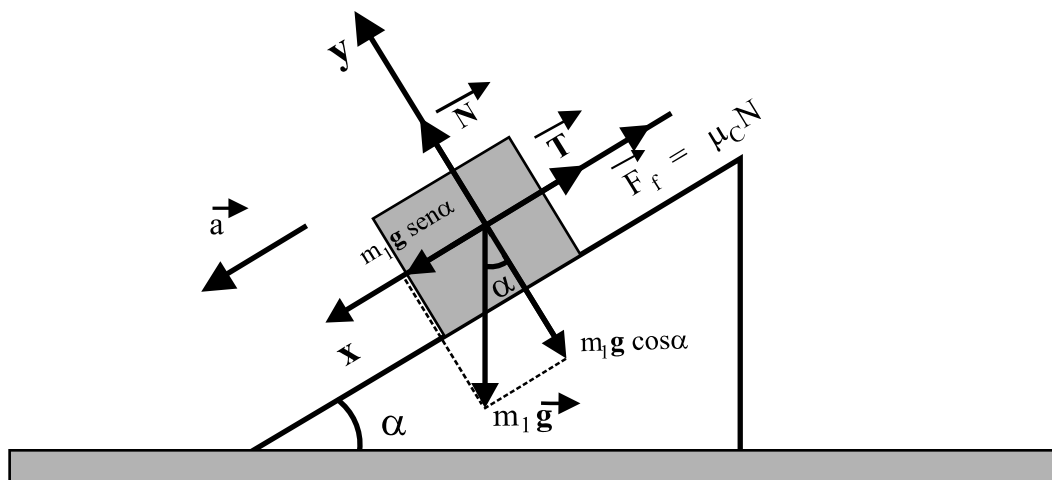


Figura 6.41: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa m_1 .

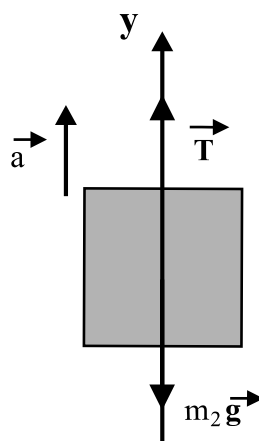


Figura 6.42: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa m_2 .

Ahora, combinando las relaciones para las coordenadas x y y de la ecuación (6.116) con la de la coordenada y de la ecuación (6.117), se obtiene, considerando adicionalmente que $a_{1x} = a_{2y} = a$, ya que la cuerda que une a ambos cuerpos es inextensible:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{res_{1x}} = m_1 g \operatorname{sen} \alpha - T - \mu_C m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a &= F_{res_{2y}} = T - m_2 g, \end{aligned} \quad (6.118)$$

al sumar estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g \sin \alpha - m_2 g - \mu_C m_1 g \cos \alpha, \quad (6.119)$$

si de esta ecuación se despeja m_2 , finalmente se obtiene el valor de m_2 para el caso en el que el bloque de masa m_1 baja por el plano inclinado:

$$m_2 = \frac{m_1 [g(\sin \alpha - \mu_C \cos \alpha) - a]}{g + a}. \quad (6.120)$$

6-20.- Considere el sistema de la siguiente figura (Fig. 6.43) en donde el bloque A tiene una masa m_A y el bloque B tiene una masa m_B . Una vez que el bloque B se pone en movimiento descende con rapidez constante.

a) Calcule el coeficiente de fricción cinética μ_C entre el bloque A y la superficie de la mesa.

b) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración del sistema, si ahora un gato, también de masa m_A , se queda dormido sobre el bloque A . Inicialmente el sistema está en movimiento con el bloque B descendiendo.



Figura 6.43: Sistema de dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea sin fricción.

Sol:

a) Para resolver cualquier problema en el que se aplican las leyes de Newton es necesario hacer el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos que constituyen el sistema físico en cuestión. Que en este caso está formado por dos bloques de masas m_A y m_B , cuyos diagramas de cuerpo libre pueden observarse en la figura 6.44. En este problema no es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre para la cuerda ya que es inextensible y posee una masa despreciable.

En los diagramas, además de señalar las fuerzas que actúan sobre cada bloque, también se señala la dirección de la velocidad constante que posee cada bloque.

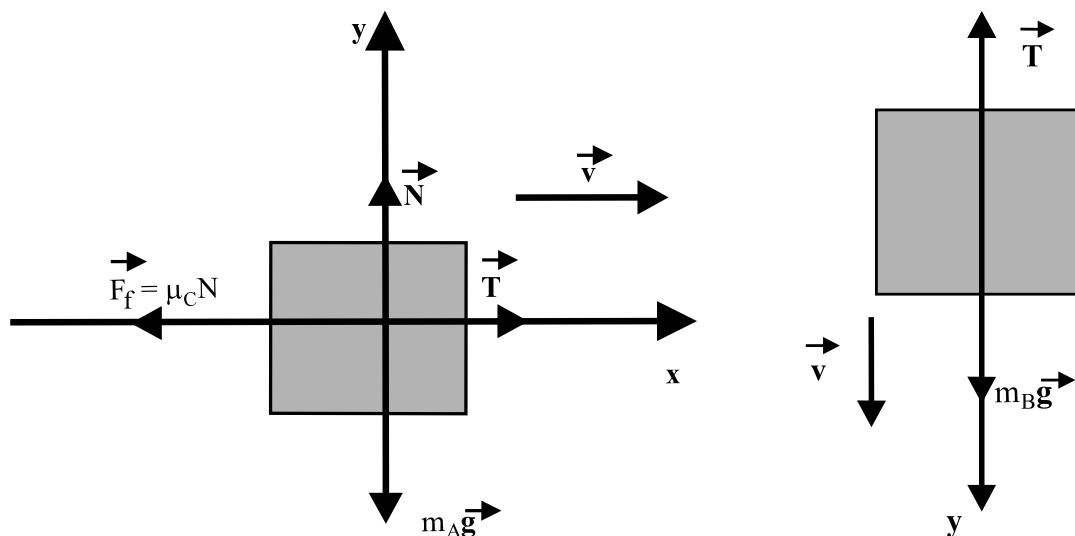


Figura 6.44: Diagrama de cuerpo libre de los cuerpos de masa m_A y m_B .

De acuerdo con estos diagramas, la segunda ley de Newton para el cuerpo A toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_C N = 0 \\ \Sigma F_{y_A} &= N - m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.121}$$

y para el bloque B resulta:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T = 0,\end{aligned}\tag{6.122}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned}N &= m_A g \\ T &= \mu_C m_A g \\ T &= m_B g,\end{aligned}\tag{6.123}$$

por consiguiente, el coeficiente de fricción cinética μ_C entre el bloque A y la superficie está dado por:

$$\begin{aligned}m_B &= \mu_C m_A \\ \Rightarrow \\ \mu_C &= \frac{m_B}{m_A}.\end{aligned}\tag{6.124}$$

b) En este caso el sistema se acelerará en una dirección desconocida y el coeficiente de fricción cinética está dado por $\mu_C = \frac{m_B}{m_A}$, porque aún cuando hay una aceleración \vec{a} , las propiedades de la superficie no cambian y por lo tanto, el coeficiente de fricción sigue teniendo el valor encontrado en el inciso anterior. Por otra parte, al estar el gato encima del bloque A y tener la misma masa que éste, el conjunto bloque más gato forma un nuevo objeto de masa $2m_A$.

En los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa $2m_A$ y m_B (Fig. 6.45), se señalan, además de las fuerzas que actúan sobre cada bloque, una dirección para la aceleración de cada bloque hipotéticamente correcta, por otra parte, como la cuerda es inextensible la aceleración de los dos bloques es la misma ($a_{Ax} = a_{By} = a$).

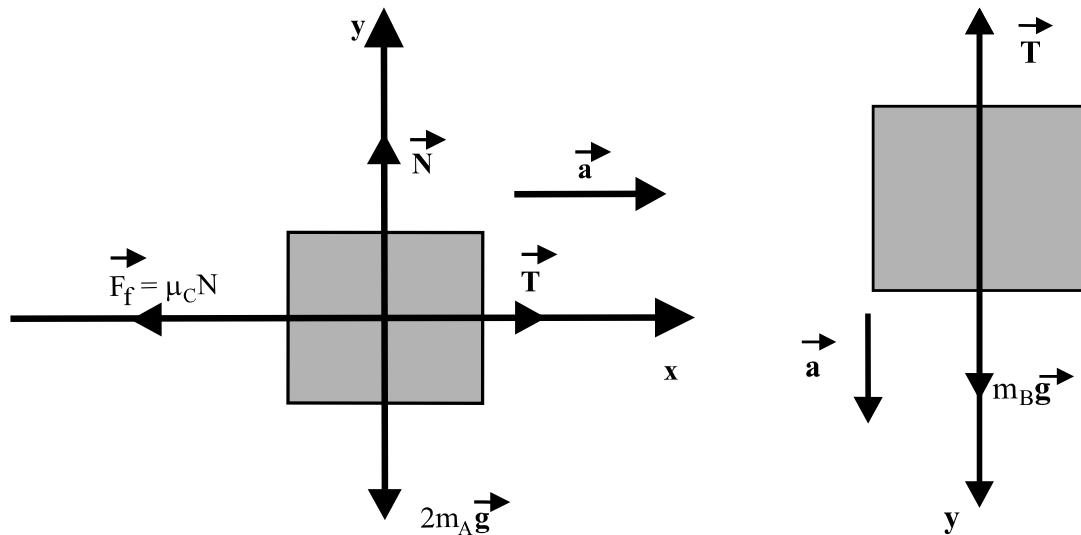


Figura 6.45: Diagrama de cuerpo libre de los bloques de masa $2m_A$ y m_B .

De acuerdo con estos diagramas de cuerpo libre (Fig. 6.45), la segunda ley de Newton para el cuerpo A de masa $2m_A$ toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_C N = 2m_A a_{Ax} = 2m_A a \\ \Sigma F_{y_A} &= N - 2m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.125}$$

y para el bloque B toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T \\ &= m_B a_{By} = m_B a,\end{aligned}\tag{6.126}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} 2m_A a &= T - \mu_C N \\ m_B a &= m_B g - T, \\ N &= 2m_A g, \end{aligned} \quad (6.127)$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} 2m_A a &= T - 2\mu_C m_A g \\ m_B a &= m_B g - T, \end{aligned} \quad (6.128)$$

ahora, al sumar estas dos últimas ecuaciones se obtiene para la aceleración:

$$(2m_A + m_B) a = m_B g - 2\mu_C m_A g, \quad (6.129)$$

donde:

$$\mu_C = \frac{m_B}{m_A},$$

y finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} (2m_A + m_B) a &= m_B g - 2 \left(\frac{m_B}{m_A} m_A \right) g \\ &\Rightarrow \\ (2m_A + m_B) a &= m_B g - 2m_B g = -m_B g \\ &\Rightarrow \\ a &= \frac{-m_B g}{2m_A + m_B}. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Por lo tanto, la aceleración de los bloques es:

$$a = -\frac{m_B g}{2m_A + m_B}. \quad (6.131)$$

Este resultado muestra que la aceleración en realidad tiene una dirección contraria a la planteada inicialmente, por lo que si el bloque B desciende, en algún momento, se detendrá debido a la aceleración negativa encontrada en la ecuación (6.131).

6-21.- Una de las atracciones de una feria es el “columpio gigante”, el cual está formado por un eje vertical central y de cuya parte superior se desprenden horizontalmente varios brazos (Fig. 6.46). Cada brazo sostiene un asiento de masa arbitraria (m_C) suspendido de un cable de $5 m$ sujeto al brazo en un punto a $3 m$ del eje vertical.

Calcule el tiempo de una revolución del columpio tomando en cuenta que el cable forma un ángulo de 30° con la vertical.

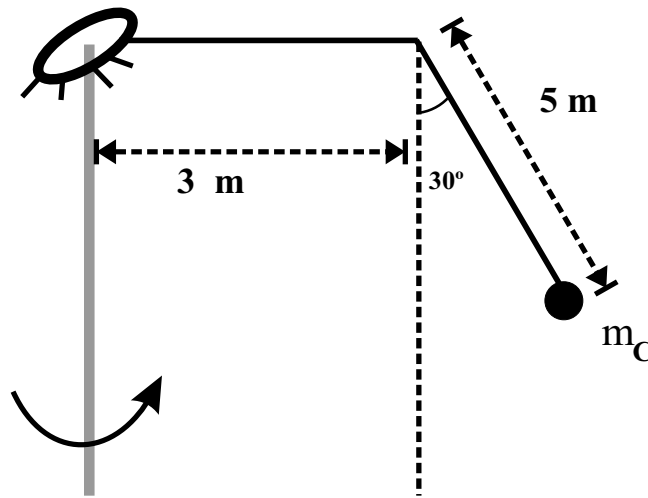


Figura 6.46: Diagrama de un columpio.

Sol:

En este problema el columpio describe un movimiento circular uniforme sobre un plano horizontal perpendicular a su propio eje de giro, la rapidez del columpio es constante en todo punto de la trayectoria circular y por lo tanto, la aceleración para el cuerpo está dada por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{R} = \frac{\frac{(2\pi R)^2}{(\tau)^2}}{R} = \\ &= \frac{4\pi^2 R}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (6.132)$$

en donde R es el radio de giro de la partícula y τ es el periodo del movimiento circular.

Como siempre, debe plantearse el diagrama de cuerpo libre de la partícula moviéndose en una trayectoria circular (Fig. 6.47).

La segunda ley de Newton en este problema toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= T \operatorname{sen} \theta = m_C a \\ \Sigma F_y &= T \cos \theta - m_C g = 0, \end{aligned} \quad (6.133)$$

con la aceleración dada por la ecuación (6.132) y $\theta = 30^\circ$, despejando la tensión de la última ecuación (6.133) y sustituyendo en la primera se encuentra que:

$$a = g \operatorname{tg} \theta, \quad (6.134)$$

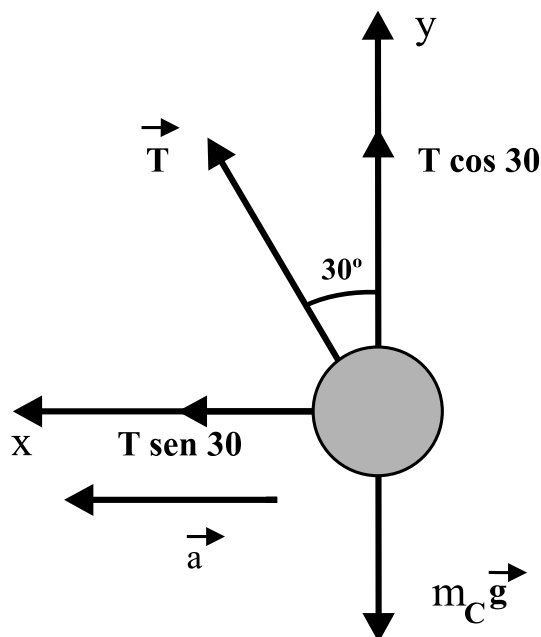


Figura 6.47: Diagrama de cuerpo libre para el columpio.

y sustituyendo la aceleración en la ecuación (6.132) se obtiene:

$$\frac{4\pi^2 R}{\tau^2} = g \operatorname{tg} \theta,$$

ahora, para obtener el valor del periodo τ es necesario conocer el radio de giro del columpio, que de acuerdo con la figura 6.48, R está dado por:

$$\begin{aligned} R &= (3 + 5 \operatorname{sen} \theta) \text{ m} \\ \Rightarrow \\ R &= 5.50 \text{ m}. \end{aligned}$$

De esta manera el periodo del movimiento está dado por:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4\pi^2 (3 + 5 \operatorname{sen} \theta)}{g \operatorname{tg} \theta} \\ \Rightarrow \\ \tau &= \sqrt{\frac{4\pi^2 (3 + 5 \operatorname{sen} \theta)}{g \operatorname{tg} \theta}}, \end{aligned} \tag{6.135}$$

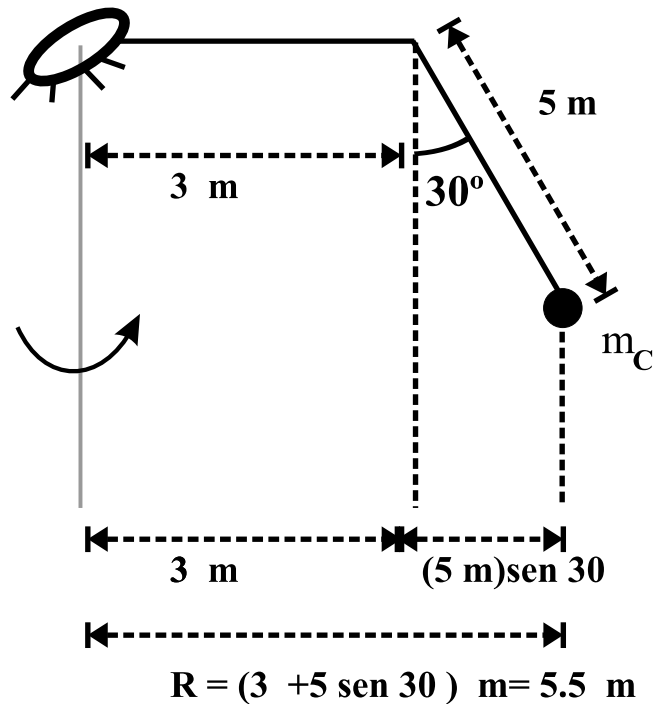


Figura 6.48: Determinación del radio de la circunferencia que describe el columpio.

tomando los valores numéricos del problema $\theta = 30^\circ$ y $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$, el tiempo que dura cada revolución del columpio es:

$$\tau = 6.19 \text{ s.}$$

6-22.- Dos bloques cuyos pesos son w_A y w_B están sostenidos sobre un plano inclinado por medio de un cable (Fig. 6.49), sin que exista fricción entre éstos y la superficie del plano.

- Calcule la tensión en la cuerda que conecta los bloques, en términos de w_A , w_B y del ángulo α .
- Calcule la tensión en la cuerda que conecta el bloque B a la pared.
- Calcule la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre cada bloque.
- Interprete sus respuestas para los casos en que $\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$.

Sol:

Para resolver los incisos $a)$, $b)$ y $c)$ de este problema, deben plantearse el diagrama de cuerpo libre del bloque A que tiene una masa $m_A = \frac{w_A}{g}$ (Fig. 6.50) y del bloque B que tiene una masa $m_B = \frac{w_B}{g}$ (Fig. 6.51).

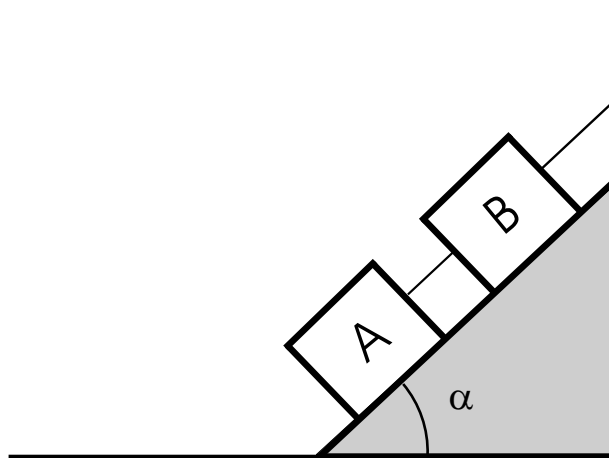


Figura 6.49: Diagrama de un sistema de bloques sobre un plano inclinado sin fricción.

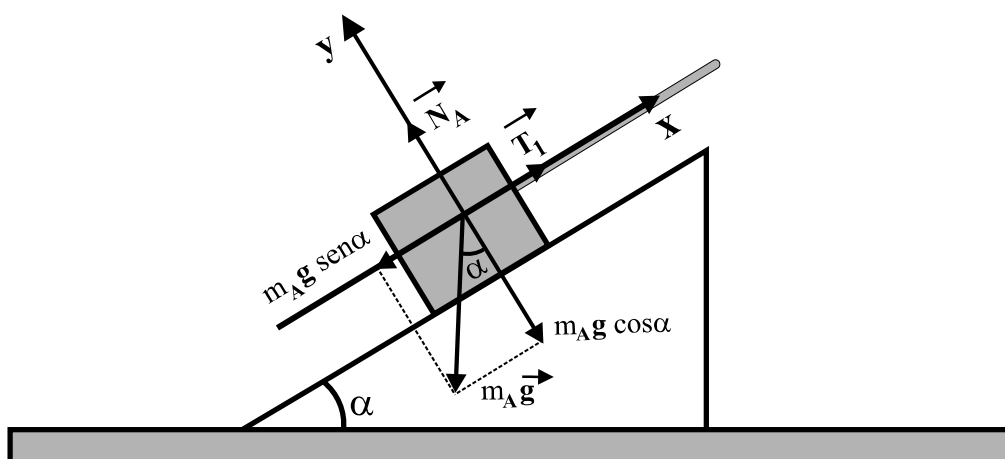


Figura 6.50: Diagrama de cuerpo libre del bloque A.

De acuerdo con estos diagramas de cuerpo libre, la segunda ley de Newton para el cuerpo A toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T_1 - m_A g \sin \alpha = 0 \\ \Sigma F_{y_A} &= N_A - m_A g \cos \alpha = 0,\end{aligned}\tag{6.136}$$

y para el bloque B , toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= T_2 - T_1 - m_B g \sin \alpha = 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= N_B - m_B g \cos \alpha = 0,\end{aligned}\tag{6.137}$$

en donde T_1 es la tensión en la cuerda que conecta los bloques, T_2 es la tensión en la cuerda que conecta el bloque B a la pared, N_A es la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el bloque A y N_B es la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el bloque B , despejando cada una de estas fuerzas de las relaciones (6.136) y (6.137) se obtiene que:

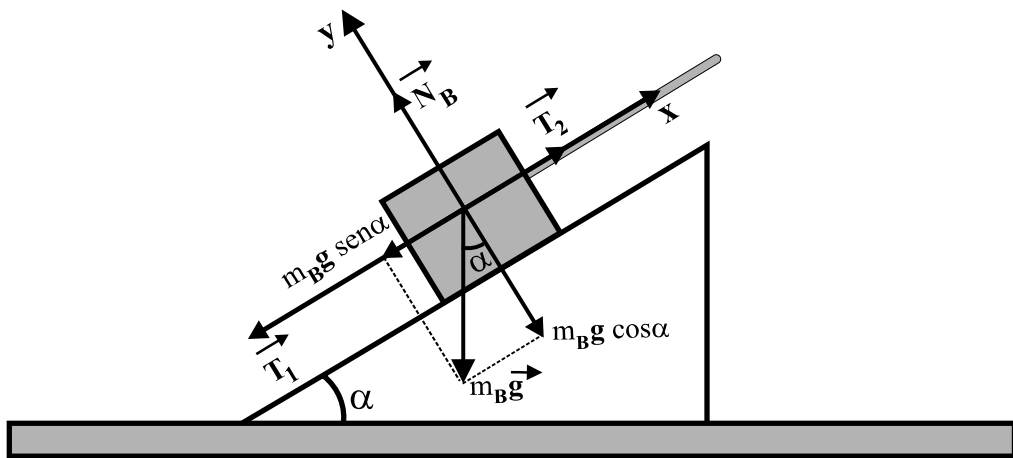


Figura 6.51: Diagrama de cuerpo libre del bloque B.

$$\begin{aligned}T_1 &= m_A g \sin \alpha \\ T_2 &= T_1 + m_B g \sin \alpha = m_A g \sin \alpha + m_B g \sin \alpha \\ &= g \sin \alpha (m_A + m_B) \\ N_A &= m_A g \cos \alpha \\ N_B &= m_B g \cos \alpha.\end{aligned}\tag{6.138}$$

d) Los resultados anteriores se pueden fácilmente interpretar para el caso en que $\alpha = 0^\circ$:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= m_A g \operatorname{sen} \alpha = 0 \\
 T_2 &= (m_A + m_B) g \operatorname{sen} \alpha = 0 \\
 N_A &= m_A g \cos \alpha = m_A g \\
 N_B &= m_B g \cos \alpha = m_B g,
 \end{aligned}
 \tag{6.139}$$

es decir, cuando $\alpha = 0^\circ$ las tensiones en las cuerdas se anulan ya que éstas no necesitan equilibrarse con otra fuerza y las normales ejercidas sobre cada bloque son iguales a los pesos de los bloques correspondientes.

Ahora, para el caso en que $\alpha = 90^\circ$, los resultados también se pueden interpretar fácilmente:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= m_A g \operatorname{sen} \alpha = m_A g \\
 T_2 &= (m_A + m_B) g \operatorname{sen} \alpha = \\
 &= (m_A + m_B) g \\
 N_A &= m_A g \cos \alpha = 0 \\
 N_B &= m_B g \cos \alpha = 0,
 \end{aligned}
 \tag{6.140}$$

es decir, cuando $\alpha = 90^\circ$ las normales ejercidas sobre cada bloque se anulan ya que éstas no necesitan equilibrarse con otra fuerza que se esté ejerciendo sobre los bloques en la dirección perpendicular al plano, que ya no es inclinado sino que ahora es una pared vertical, así, la tensión T_1 es igual al peso del bloque A y la tensión T_2 es igual a la suma de los pesos de los bloques A y B , la tensión en la cuerda superior sujeta al techo, debe equilibrar el peso de los dos bloques que cuelgan de ella.

Capítulo 7

Trabajo y energía cinética

7-1.- Una bala de 10 g viaja con una velocidad de $1200 \frac{m}{s}$.

- a) Determine la energía cinética en Joules.
- b) Si la masa se reduce a la mitad, ¿cuál es su energía cinética?
- c) Si la velocidad se duplica, ¿cuál es su energía cinética?

Sol:

a) La energía cinética de la bala está dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (7.1)$$

en donde:

$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg} \\ v &= 1200 \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

por lo tanto, la energía cinética expresada en Joules es:

$$K = \frac{1}{2}(0.01 \text{ kg})\left(1200 \frac{m}{s}\right)^2 = 7200 \left(\text{kg} \frac{m^2}{s^2}\right) = 7200 \text{ J} = K_{original} \quad (7.3)$$

b) Si la masa de la bala se reduce a la mitad, es decir:

$$M = \frac{m}{2}, \quad (7.4)$$

la energía cinética de la bala está dada por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) v^2 \\ &= \frac{1}{2} K_{original} = 3600 \text{ J}, \end{aligned}$$

esto significa que la nueva energía cinética de la bala es ahora la mitad de la energía cinética original.

c) Si la velocidad de la bala se duplica, es decir:

$$v' = 2v,$$

sin cambiar la masa original de la bala, la energía cinética está dada por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m (v')^2 = \frac{1}{2} m (2v)^2 = 4 \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \\ &= 28800 \text{ J} = 4K_{original}, \end{aligned}$$

es decir, la energía cinética es cuatro veces mayor que la energía cinética original.

7-2.- Una niña aplica una fuerza F_x paralela al eje x sobre un trineo de 10 kg que se mueve sobre la superficie congelada de un estanque. La niña controla la fuerza que aplica sobre el trineo y la componente x de esta fuerza varía con la coordenada x del trineo tal y como se muestra en la figura 7.1. Calcule el trabajo efectuado por la fuerza F_x que aplica la niña cuando el trineo se mueve:

- De $x = 0 \text{ m}$ a $x = 8 \text{ m}$.
- De $x = 8 \text{ m}$ a $x = 12 \text{ m}$.
- De $x = 0 \text{ m}$ a $x = 12 \text{ m}$.

Desprecie los efectos de la fricción entre el trineo y el estanque.

Sol:

Al desplazar el trineo de $A \rightarrow B$ el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas externas (F_x), entre estos puntos para el caso unidimensional, está dado por el área bajo la curva $F_x \text{ vs } x$, como se observa en la figura 7.2.

a) De esta forma el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen $x = 0 \text{ m}$ hasta $x = 8 \text{ m}$ está dado por el área de la región I que está sombreada en la gráfica de la figura 7.2:

$$W_{x=0 \rightarrow x=8} = A_I,$$

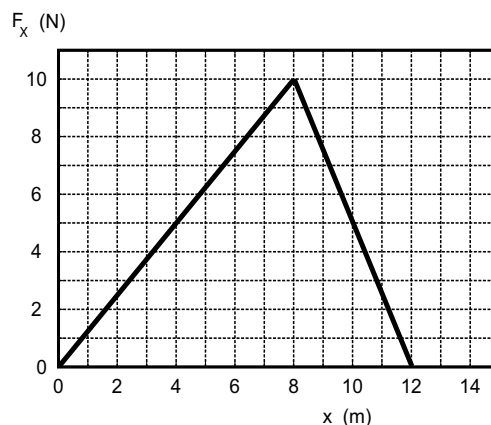


Figura 7.1: Variación de la fuerza F_x con la distancia cuando es aplicada sobre un trineo.

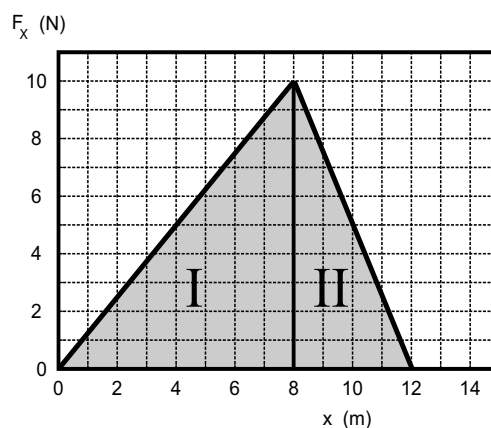


Figura 7.2: Cálculo del área bajo la curva para obtener el trabajo mecánico realizado por la fuerza que se aplica sobre un trineo.

en donde:

$$A_I = \left(\frac{10 \cdot 8}{2} \right) \quad J = 40 \text{ J},$$

y por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=8} = 40 \text{ J} .$$

b) De igual forma, el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde $x = 8 \text{ m}$ hasta $x = 12 \text{ m}$ está dado por el área de la región II que está sombreada en la gráfica

anterior (Fig. 7.2):

$$W_{x=8 \rightarrow x=12} = A_{II} = \left(\frac{10 \cdot 4}{2} \right) \quad J = 20 \text{ J.}$$

c) El trabajo total efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen $x = 0 \text{ m}$ hasta $x = 12 \text{ m}$ está dado por el área total de las regiones I y II que están sombreadas en la gráfica anterior (Fig. 7.2):

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=12} &= W_{x=0 \rightarrow x=8} + W_{x=8 \rightarrow x=12} = \\ &= A_I + A_{II} = (40 + 20) \text{ J} = 60 \text{ J.} \end{aligned}$$

7-3.- Suponiendo que el trineo del problema anterior está inicialmente en reposo en $x = 0 \text{ m}$. Usando el teorema trabajo-energía, determine la rapidez del trineo en:

a) $x = 8 \text{ m}$.

b) $x = 12 \text{ m}$.

Sol:

a) En su forma más general el teorema trabajo-energía cinética establece que el trabajo realizado por la resultante de todas las fuerzas externas que realizan trabajo sobre un objeto físico es igual al cambio en la energía cinética de este objeto, es decir:

$$W_{AB} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

en donde A y B son los puntos inicial y final del desplazamiento, respectivamente. Durante este desplazamiento se ha realizado sobre el objeto una cantidad de trabajo W_{AB} , por lo tanto, si el trineo inicialmente se encontraba en reposo en el punto A ($x = 0 \text{ m}$) y se quiere conocer su rapidez en el punto B ($x = 8 \text{ m}$) y de acuerdo al resultado del inciso a) del problema anterior:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=8} &= 40 \text{ J} = K_B - K_A \\ &= K_B - 0 = K_B = \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta $x = 8 \text{ m}$ es:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=8}}{m} \right) \frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{80}{10}} \frac{m}{s} \\ &= 2.83 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

b) Ahora, se quiere determinar la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta $x = 12 \text{ m}$, que sería el punto C del desplazamiento y partiendo desde el origen $x = 0 \text{ m}$, de acuerdo al resultado del inciso c) del problema anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=12} &= 60 \text{ J} = K_C - K_A \\ &= K_C - 0 = K_C = \frac{1}{2} m v_C^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta $x = 12 \text{ m}$ es:

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=12}}{m}\right) \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{120}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 3.46 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

7-4.- Un pequeño bloque de 0.120 kg está conectado a un cable que pasa por un orificio ubicado en el centro de una superficie horizontal, el cable se desliza a través de ésta sin fricción, tal y como se muestra en la figura 7.3. El bloque está girando a una distancia de 0.40 m del centro con una rapidez de $0.70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Cuando el cable es jalado verticalmente hacia abajo, el radio de la trayectoria del bloque se reduce a 0.10 m y la rapidez del bloque se incrementa a $2.80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- ¿Cuál es la tensión que se ejerce sobre el cable en la situación original ($v = 0.70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)?
- ¿Cuál es la tensión que se ejerce sobre el cable en la situación final ($v = 2.80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)?
- ¿Cuánto trabajo efectuó la persona que tiró del cordón?

Sol:

Para resolver los incisos *a)* y *b)* de este problema, el elemento clave para encontrar la tensión cuando ($v_i = 0.70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) y cuando ($v_f = 2.80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$), es identificar que en ambas situaciones el movimiento que el bloque realiza es un movimiento circular uniforme, por lo tanto, la tensión está dada por:

$$T = m a_C = \frac{m v^2}{r},$$

de manera que la tensión en la cuerda en la situación inicial está dada por:

$$\begin{aligned} T_i &= m a_{C_i} = \left[\frac{0.120 (0.70)^2}{0.40} \right] \frac{\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{m}} = 0.147 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 0.147 \text{ N}, \end{aligned}$$

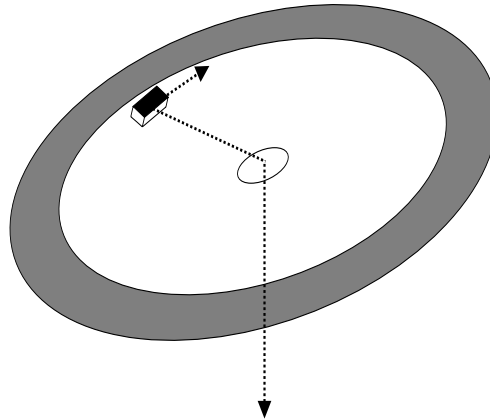


Figura 7.3: Movimiento circular de un bloque sometido al trabajo hecho por una fuerza externa que recorta el radio de giro del bloque.

y en la situación final está dada por:

$$\begin{aligned} T_f &= ma_{C_f} = \left[\frac{0.120 (2.80)^2}{0.10} \right] \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{m} = 9.41 \text{ kg} \frac{m}{s^2} = \\ &= 9.41 \text{ N}. \end{aligned}$$

c) De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética el trabajo efectuado por la persona que tiró del cordón, está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = \\ &= \frac{1}{2} 0.120 [(2.8)^2 - (0.7)^2] \text{ kg} \frac{m^2}{s^2} = 0.441 \text{ J}. \end{aligned}$$

7-5.- Un bloque de 2 kg se desliza a través de un piso sin fricción y choca contra un sistema de muelles, como se muestra en la figura 7.4. Cada una de las constantes elásticas de estos muelles tienen un valor de $1.5 \times 10^3 \frac{N}{m}$.

Sin tomar en cuenta la masa de los muelles, determine la máxima compresión de los muelles cuando la velocidad inicial del bloque es $v_0 = 4 \frac{m}{s}$.

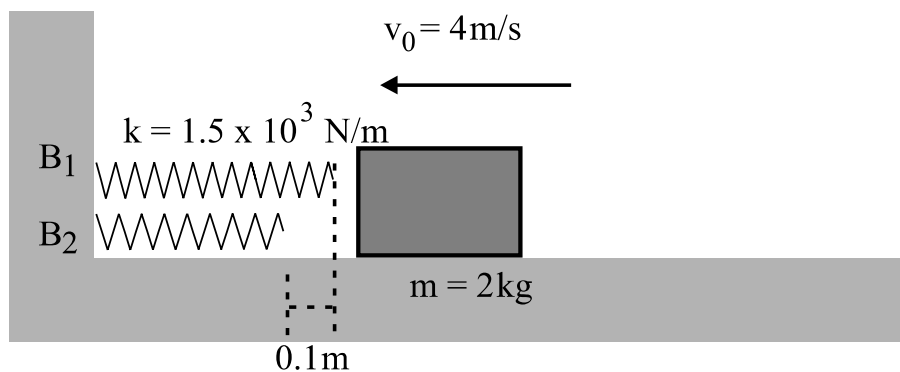


Figura 7.4: Diagrama del choque de un bloque contra un sistema de muelles.

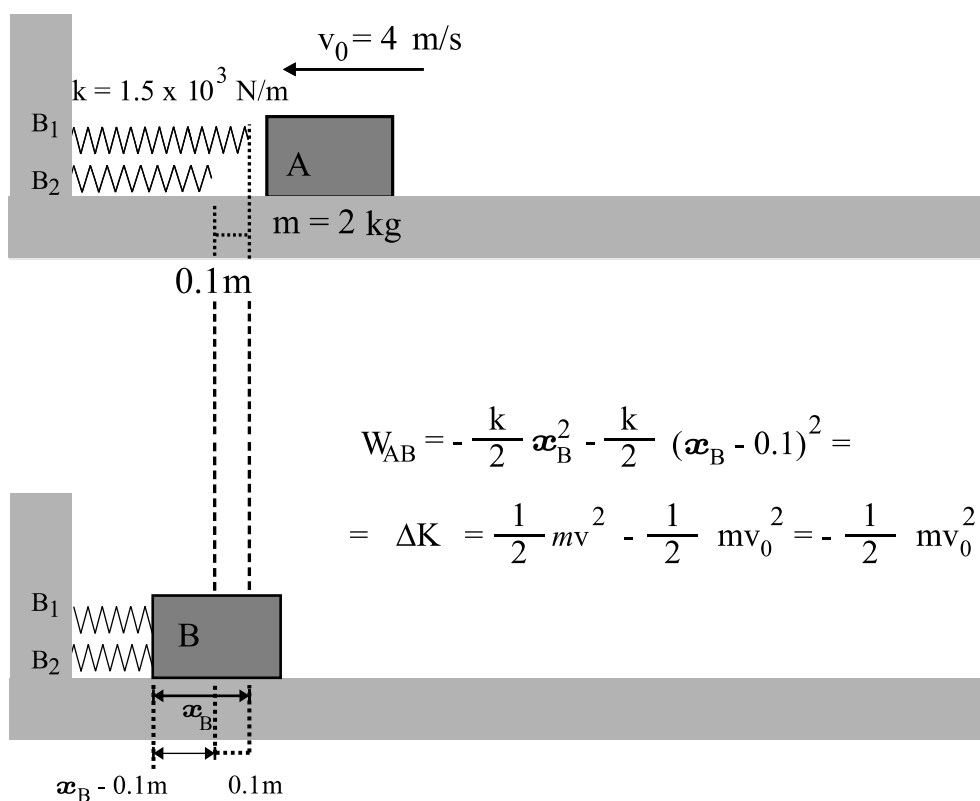


Figura 7.5: Determinación de la compresión máxima de un sistema de muelles.

Sol:

Como se observa en la situación A de la figura 7.5, inicialmente el bloque se desplaza hacia el sistema de muelles con una energía cinética constante (no hay fuerzas disipativas

actuando), la cual está dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

cuando el bloque choca con el sistema de muelles el trabajo realizado por los resortes sobre el bloque desde que éste entra en contacto con el resorte B_1 hasta que la compresión del resorte es de x_0 , está dado por:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=x_0} &= \int_0^{x_0} F_x dx + \int_0^{x_0-0.10(m)} F_x dx = \\ &= \int_0^{x_0} -kx dx + \int_0^{x_0-0.10(m)} -kx dx \\ &= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{x_0} - \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{x_0-0.10(m)} = \\ &= -\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - 0.1)^2, \end{aligned}$$

en donde se ha tomado en cuenta que el resorte B_2 se encuentra a $0.1 m$ por detrás del resorte B_1 y por lo tanto, debido a la diferencia en su extensión, la compresión del resorte B_2 es igual a la compresión del resorte B_1 menos $0.1 m$, es decir: ($x_{0B_2} = x_{0B_1} - 0.1 m = x_0 - 0.1 m$), por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=x_0} = -\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - 0.1)^2.$$

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, en el punto de máxima compresión \mathbf{x}_B en donde el bloque se detiene debido a la acción del sistema de muelles, como se observa en la figura anterior (Fig. 7.5), está dado por:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=\mathbf{x}_B} &= -\frac{1}{2}k\mathbf{x}_B^2 - \frac{1}{2}k(\mathbf{x}_B - 0.1)^2 = \\ &= \Delta K = K_B - K_A = \\ &= \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2}k\mathbf{x}_B^2 + \frac{1}{2}k(\mathbf{x}_B - 0.1)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7.6)$$

De donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{2} \left[0.1 \pm \sqrt{\left(\frac{2mv_0^2}{k} - 0.01 \right)} \right],$$

y en donde $v_0 = 4 \frac{m}{s}$, $k = 1.5 \times 10^3 \frac{N}{m}$ y $m = 2 \text{ kg}$, por lo que:

$$\mathbf{x}_B = 0.14 m. \quad (7.7)$$

7-6.- Una máquina de Atwood utiliza dos bloques de masas m_1 y m_2 que están conectados a una polea sin fricción, tal y como se muestra en la figura 7.6. Partiendo del reposo y después de transcurrido un intervalo de tiempo Δt , la rapidez de las masas es de $4 \frac{m}{s}$. En este instante, la energía cinética del sistema es de 80 J y cada una de las masas se ha desplazado una distancia de 6 m . Determinar los valores de m_1 y m_2 .

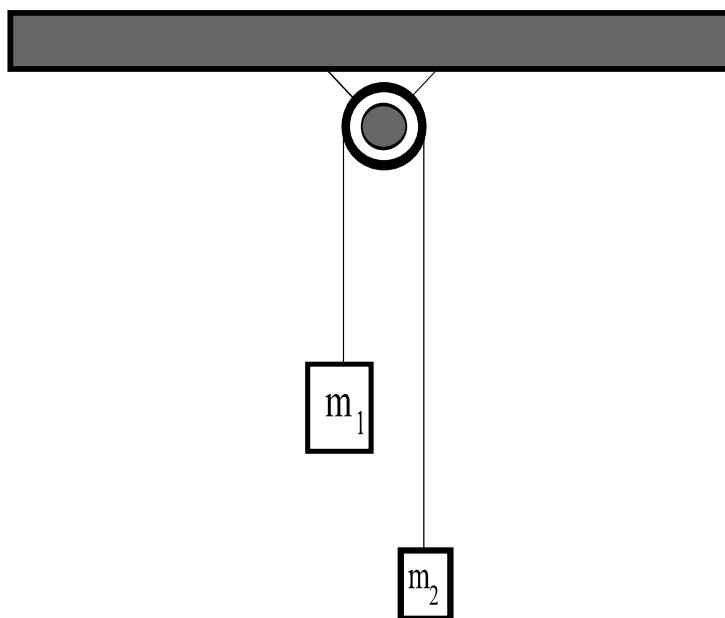


Figura 7.6: Máquina de Atwood cuyas masas m_1 y m_2 se desconocen.

Sol:

Cuando los bloques de masa m_1 y m_2 de la máquina de Atwood se han desplazado 6 m respecto a su posición inicial, la energía cinética del sistema m_1 y m_2 es de 80 J , i.e:

$$K_T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 80 \text{ J},$$

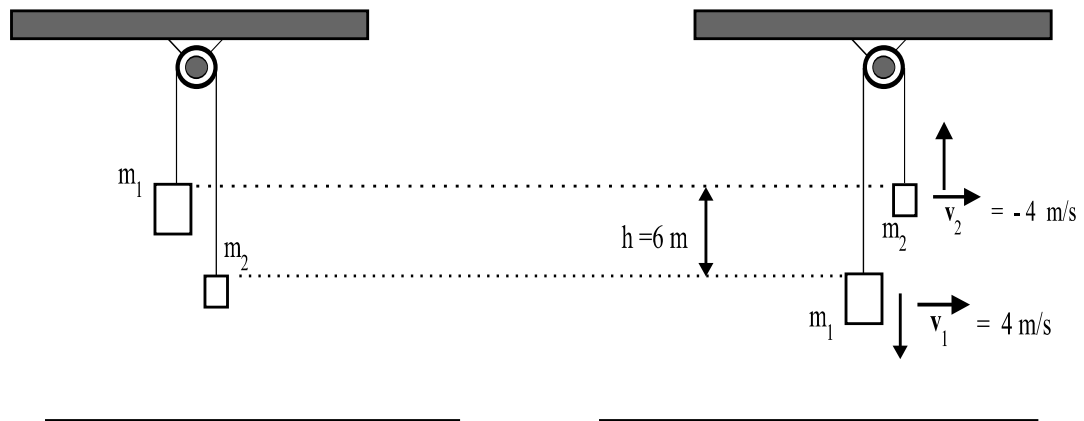


Figura 7.7: Desplazamiento de las masas m_1 y m_2 después de un intervalo de tiempo Δt en una máquina de Atwood.

además las dos masas se encuentran unidas entre sí mediante una cuerda, de manera que $v_1 = v_2 = v = 4 \frac{m}{s}$, por lo tanto:

$$K_T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 80\text{ J}$$

$$\implies m_1 + m_2 = 10\text{ kg.}$$

Por otra parte, de acuerdo al teorema trabajo-energía:

$$W = \Delta K$$

$$\implies W = 80\text{ J,}$$

donde el movimiento de los bloques se realiza bajo la acción de la fuerza gravitacional, tal y como se muestra en los diagramas anteriores (Fig. 7.7), en donde la masa m_1 desciende una distancia $h = 6\text{ m}$, mientras la masa m_2 asciende esta misma distancia. Como la fuerza gravitacional está dirigida hacia abajo, el trabajo realizado por esta fuerza sobre la masa m_1 es positivo (m_1gh), porque la fuerza y el desplazamiento de la masa m_1 son a lo largo de una recta y en la misma dirección, mientras que el trabajo realizado sobre la masa m_2 es negativo ($-m_2gh$), porque la fuerza y el desplazamiento de la masa m_2 se dan a lo largo de una recta pero en direcciones contrarias, de manera que:

$$W = (m_1 - m_2)gh = 80\text{ J}$$

$$\implies m_1 - m_2 = 1.36\text{ kg}$$

\implies

$$\begin{aligned}m_1 + m_2 &= 10 \text{ kg} \\m_1 - m_2 &= 1.360 \text{ kg},\end{aligned}$$

de donde se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned}m_1 &= 5.68 \text{ kg} \\m_2 &= 4.32 \text{ kg}.\end{aligned}$$

7-7.- Una niña aplica una fuerza F_x paralela al eje x sobre un trineo de 10 kg que se mueve sobre la superficie congelada de un estanque. La componente x de la fuerza que aplica la niña varía con la coordenada x del movimiento del trineo, tal y como se muestra en la figura 7.8.

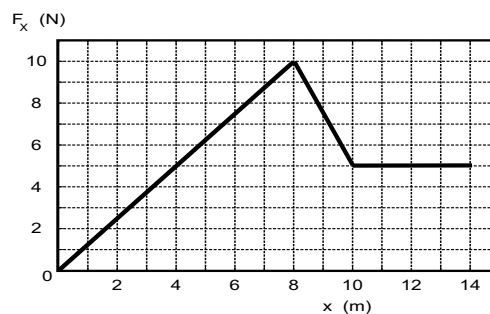


Figura 7.8: Variación de la fuerza F_x con la distancia cuando es aplicada sobre un trineo.

Calcule el trabajo efectuado por la fuerza que aplica la niña F_x , cuando el trineo se mueve:

- De $x = 0 \text{ m}$ a $x = 10 \text{ m}$.
- De $x = 10 \text{ m}$ a $x = 14 \text{ m}$.
- De $x = 0 \text{ m}$ a $x = 14 \text{ m}$.

Desprecie la fricción entre el trineo y el estanque.

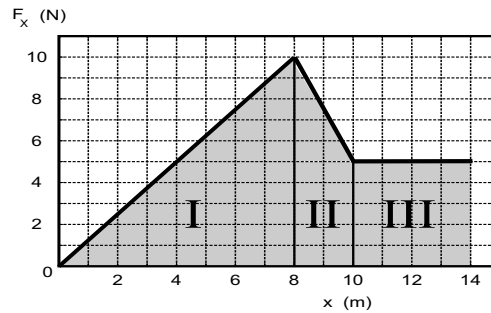


Figura 7.9: El trabajo realizado al empujar el trineo está dado por el área sombreada de la gráfica.

Sol:

Cuando se desplaza el trineo de $A \rightarrow B$ el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas externas F_x , entre los puntos A y B , está dado por el área bajo la curva F_x vs x , tal y como se muestra en la figura 7.9.

a) De esta forma el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen $x = 0\text{ m}$ hasta $x = 10\text{ m}$ está dado por el área de las regiones sombreadas I y II (Fig.7.9):

$$W_{x=0 \rightarrow x=10} = A_I + A_{II},$$

en donde:

$$A_I = \left(\frac{10 \cdot 8}{2} \right) J = 40 J$$

$$A_{II} = \left(2 \cdot 5 + \frac{2 \cdot (10 - 5)}{2} \right) J = 15 J,$$

y por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=10} = (40 + 15) J = 55 J.$$

b) De igual forma, el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde $x = 10\text{ m}$ hasta $x = 14\text{ m}$ está dado por el área de la región sombreada III (Fig. 7.9):

$$W_{x=10 \rightarrow x=14} = A_{III} = (5 \cdot 4) J = 20 J.$$

c) El trabajo total efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen $x = 0\text{ m}$

hasta $x = 14 \text{ m}$ está dado por el área total de las regiones sombreadas I , II y III :

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=14} &= W_{x=0 \rightarrow x=10} + W_{x=10 \rightarrow x=14} = \\ &= A_I + A_{II} + A_{III} = (55 + 20) \quad J = 75 \text{ J}. \end{aligned}$$

7-8.- Suponiendo que el trineo del problema anterior está inicialmente en reposo, en $x = 0 \text{ m}$. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez del trineo en:

a) $x = 10 \text{ m}$.

b) $x = 14 \text{ m}$.

Desprecie la fricción entre el trineo y el estanque.

Sol:

a) En su forma más general el teorema trabajo-energía cinética establece que el trabajo realizado por la resultante de todas las fuerzas externas que realizan trabajo sobre un objeto físico es igual al cambio en la energía cinética de dicho cuerpo, es decir:

$$W_{A B} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

en donde A y B denotan los puntos inicial y final del desplazamiento respectivamente, por lo tanto, si el trineo inicialmente se encontraba en reposo en el punto A ($x = 0 \text{ m}$) y se quiere conocer su rapidez en el punto B ($x = 10 \text{ m}$), de acuerdo al resultado del inciso a) del problema anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=10} &= 55 \text{ J} = K_B - K_A \\ &= K_B - 0 = K_B = \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta $x = 10 \text{ m}$ es:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=10}}{m}\right) \frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{110}{10} \frac{m}{s}} \\ &= 3.32 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

b) Ahora, para determinar la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta $x = 14 \text{ m}$, que sería el punto C del desplazamiento, partiendo desde el origen $x = 0 \text{ m}$, de acuerdo al resultado del inciso c) del problema anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=14} &= 75 \text{ J} = K_C - K_A \\ &= K_C - 0 = K_C = \frac{1}{2}mv_C^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta $x = 14 \text{ m}$ es:

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=14}}{m}\right) \frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{150}{10} \frac{m}{s}} \\ &= 3.87 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

7-9.- Un bloque de 5 kg se mueve con una rapidez inicial $v_0 = 6 \frac{m}{s}$ sobre una superficie horizontal, en donde no hay fricción y se dirige hacia un resorte que está sujeto a una pared. El resorte tiene masa despreciable y una constante elástica $k = 500 \frac{N}{m}$, tal y como se muestra en la figura 7.10.

a) Calcule la distancia máxima que se comprimirá el resorte.

b) Si la distancia que se comprime el resorte no debe ser mayor que 0.150 m ¿qué valor máximo puede tener v_0 ?

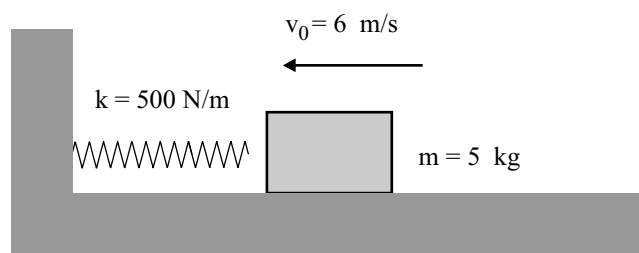


Figura 7.10: Diagrama de un bloque que se dirige hacia un resorte.

Sol:

a) Como se observa en la situación A (Fig. 7.11), inicialmente el bloque se desplaza hacia el resorte con una energía cinética constante, porque no hay fuerzas disipativas actuando, la cual está dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque desde que entran en contacto hasta que la compresión en el resorte es x_0 , está dado por:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=x_0} &= \int_0^{x_0} F_x dx = \int_0^{x_0} -kx dx \\ &= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{x_0} = -\frac{1}{2}kx_0^2, \end{aligned}$$

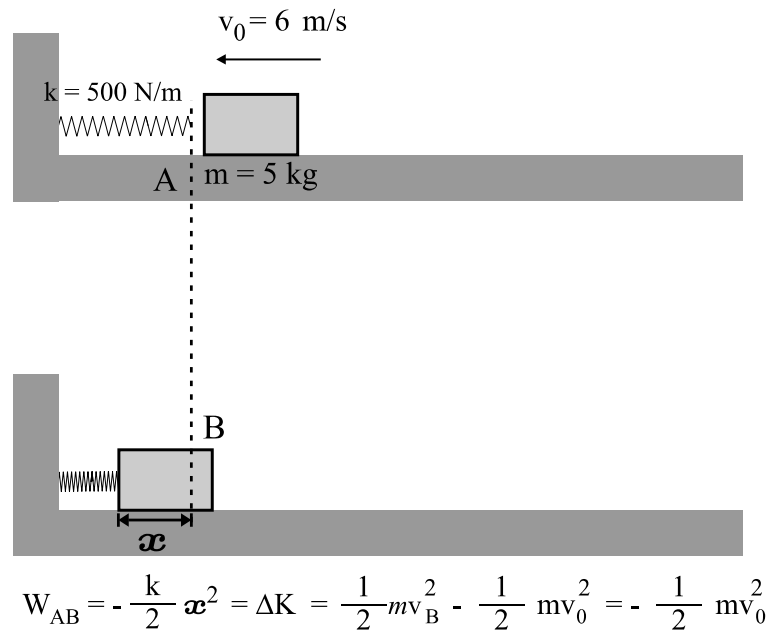


Figura 7.11: El trabajo hecho por el resorte sobre el bloque de masa m es igual al cambio en la energía cinética (ΔK) del bloque.

por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=x_0} = -\frac{1}{2} k x_0^2.$$

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, en el punto de máxima compresión x , situación B del diagrama anterior (Fig. 7.11), el bloque se detiene debido a la acción del resorte, de manera que x puede determinarse de la relación:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} k x^2 = \Delta K \\ &= K_B - K_A = \frac{1}{2} m (0)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (7.8)$$

De donde se obtiene que:

$$x = \sqrt{\frac{m v_0^2}{k}} = 0.60 \text{ m}.$$

b) Ahora, si se sabe que la máxima compresión del resorte está dada por $x = 0.150 \text{ m}$, con base en la ecuación (7.8), el valor máximo que puede tener v_0 es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = 1.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

7-10.- De una altura $h = 4 \text{ m}$ un bloque de 5 kg que parte del reposo ($v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) se desliza sobre una superficie sin fricción a lo largo de un plano inclinado, como se muestra en la figura 7.12. Determinar la rapidez v_f del bloque cuando éste termina de descender sobre el plano inclinado.

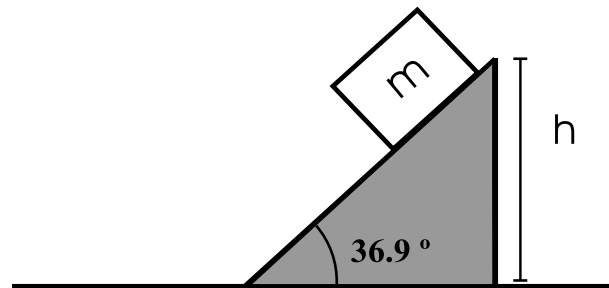


Figura 7.12: Diagrama de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado.

Sol:

Nuevamente debe aplicarse el teorema trabajo-energía cinética; como se observa en la situación *A* del siguiente diagrama (Fig. 7.13), el valor de v_A y de K_A para el bloque en la altura inicial h es igual a cero, además, la única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque es la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado ya que no hay fuerza de fricción entre el bloque y el plano inclinado.

De acuerdo con el correspondiente diagrama de cuerpo libre (Fig. 7.13), la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado está dada por:

$$F_{\parallel} = (m\vec{g})_{\parallel} = mg \sen \theta,$$

y por lo tanto, el trabajo realizado por las fuerzas externas mientras el bloque desciende por el plano inclinado hasta llegar a la superficie horizontal, tal y como puede verse en la situación *B* del diagrama (Fig. 7.13), es:

$$W_{AB} = F_{\parallel} \cdot l = mgl \sen \theta = mgh,$$

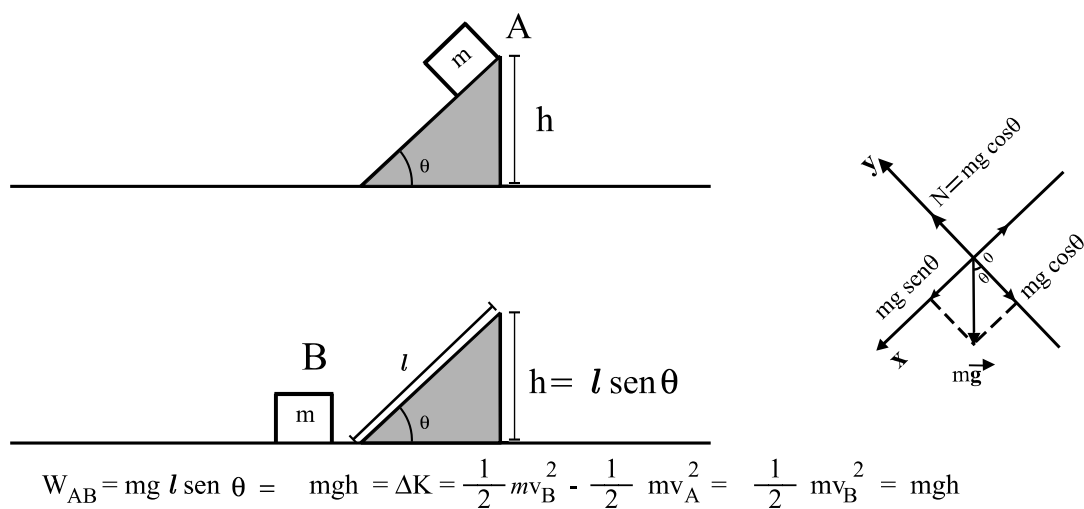


Figura 7.13: El trabajo $W_{AB} = mgh$ que la fuerza de gravedad (el peso del bloque) realiza mientras el bloque se desliza por el plano inclinado es igual al incremento en la energía cinética del bloque $\Delta K = \frac{1}{2} m v_B^2$.

en donde l es la longitud total que el bloque recorre sobre el plano inclinado hasta alcanzar la superficie horizontal.

Al llegar a la superficie horizontal el bloque llega con una rapidez v_B que de acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética satisface que:

$$\begin{aligned}
 W_{AB} &= mgh = \Delta K = \\
 &= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = \frac{1}{2} m v_B^2,
 \end{aligned}$$

de donde la rapidez final (v_B) cuando el bloque termina el descenso está dada por:

$$v_B = \sqrt{2gh} = 8.85 \frac{m}{s}.$$

Parte IV. Teoremas de conservación

En la cuarta parte de esta obra de problemas resueltos se aborda uno de los temas más importantes en el estudio de la física: los principios de conservación. En particular se consideran el de la energía mecánica total y el de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas.

Al tratar los problemas relacionados con estos principios de conservación se busca que el estudiante entienda que la aplicación correcta de los mismos le permitirán determinar de manera práctica ciertas cantidades físicas relacionadas con el movimiento de un objeto.

En los problemas que a continuación se presentan se ha puesto especial atención en el concepto de la energía potencial que adquiere un cuerpo bajo la acción de una fuerza externa.

Uno de los aspectos centrales que se han tratado es el que se refiere al manejo del punto cero de la energía potencial, ya que en muchos casos una elección adecuada del nivel cero de esta energía simplifica considerablemente las manipulaciones algebraicas necesarias para encontrar la información mecánica requerida.

También se han abordado algunos problemas en donde interviene la fuerza de fricción, sumamente importantes, ya que esta fuerza hace que la energía mecánica no sea una constante, lo que da como resultado una disminución de la energía durante el movimiento.

De igual forma se plantean varios problemas sobre el principio de conservación de la cantidad de movimiento, principio que si se aplica correctamente permite determinar, entre otras cantidades físicas, la velocidad o la masa de un cuerpo antes o después de una colisión, o si durante una colisión la energía cinética total del sistema se conserva o no se conserva, condición que define los diferentes tipos de colisión que existen: elásticas e inelásticas. Para resolver estos problemas, siempre que fue necesario se utilizó la formulación vectorial del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

En el capítulo 10 se aplican los teoremas de conservación a sistemas de partículas, mediante las propiedades del centro de masa; se presentan ejercicios en los que el centro de masa permite describir el movimiento de las partículas que forman el sistema.

Se discuten ejercicios relacionados con el movimiento relativo mediante la conservación de la cantidad de movimiento del centro de masa. También se consideran ejercicios de las leyes de Newton en los que es útil la aplicación del centro de masa.

Capítulo 8

Energía potencial y principio de conservación de la energía

8-1.- Un resorte que tiene una masa despreciable y una constante elástica de $k = 400 \frac{N}{m}$, se comprime 0.220 m debido a la presión que ejerce un bloque de 2 kg . Cuando el bloque se suelta se desliza primero por una superficie horizontal sin fricción, y después a través de un plano inclinado que tiene un ángulo de 36.9° , tal y como se muestra en la figura 8.1.

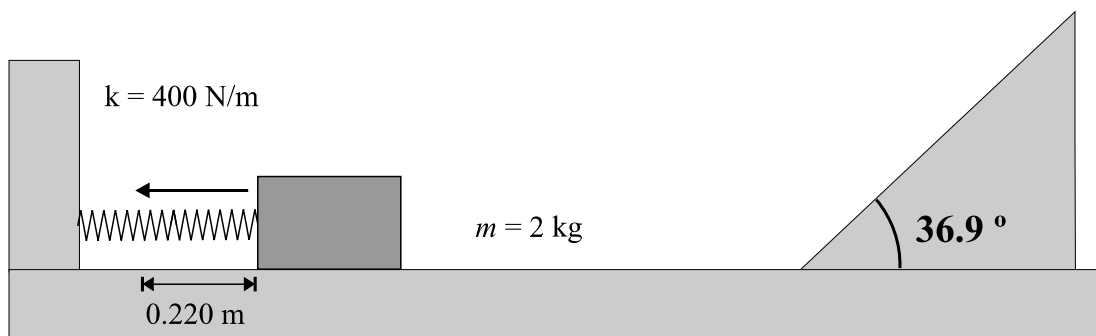


Figura 8.1: Diagrama de un bloque que comprime a un resorte y que posteriormente se desplaza hacia un plano inclinado.

- ¿Qué rapidez tiene el bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal?
- ¿Qué altura alcanza el bloque antes de pararse e iniciar el descenso?
- ¿Qué longitud máxima recorre el bloque sobre el plano inclinado antes de pararse e iniciar el descenso?

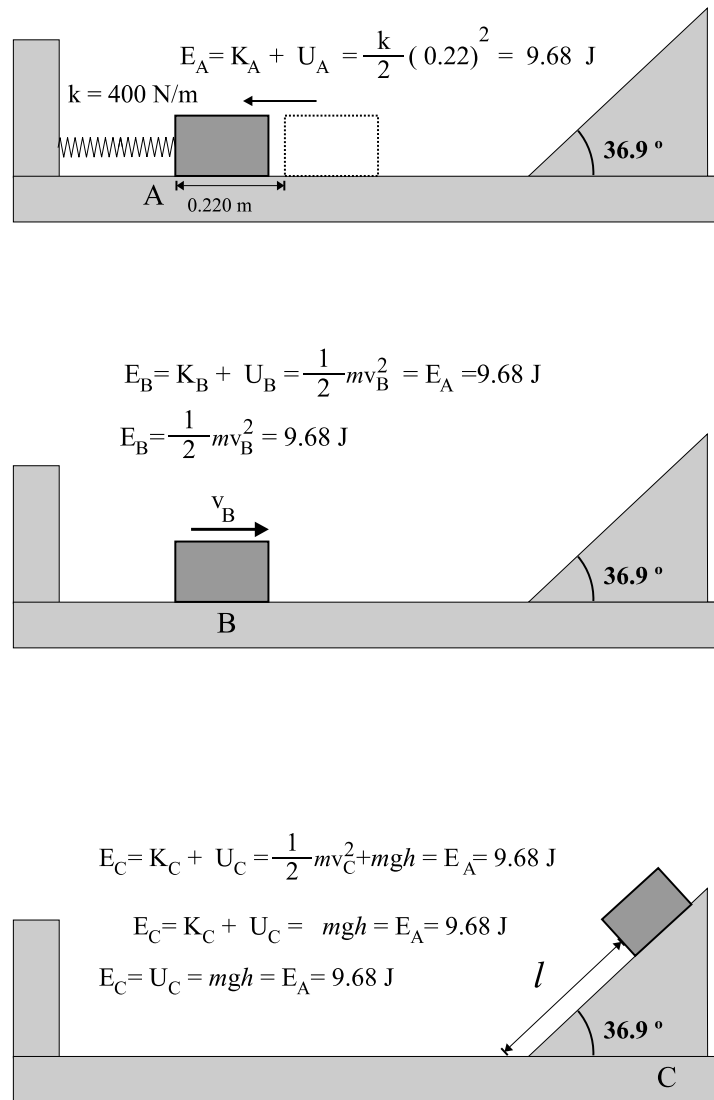


Figura 8.2: Etapas A, B y C del movimiento de un bloque.

Sol:

a) En este problema, durante el movimiento del bloque desde la posición en donde se ha comprimido el resorte 0.220 m hasta el punto de máxima altura sobre el plano inclinado, la energía mecánica total del sistema se conserva debido a la ausencia de fuerzas disipativas que den lugar a pérdidas de energía, como por ejemplo la fuerza de fricción.

Como se observa en la situación A del diagrama anterior (Fig. 8.2), si inicialmente el resorte está comprimido 0.220 m , la cantidad de energía almacenada en el sistema está

dada por:

$$E_A = K_A + U_A = 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \left(400 \frac{N}{m} \right) (0.220 m)^2 = 9.68 Nm = 9.68 J,$$

como se observa en la situación *B* (Fig. 8.2), mientras el bloque recorre la superficie horizontal esta cantidad de energía se transforma en energía cinética, de manera que:

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = E_A = 9.68 J,$$

de donde se obtiene la rapidez v_B del bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal:

$$v_B = \sqrt{\frac{2E_A}{m}} = 3.11 \frac{m}{s}.$$

b) Cuando el bloque asciende por el plano inclinado su energía cinética se irá transformando en energía potencial gravitacional hasta que se detenga a una altura h respecto a la superficie horizontal, tal y como puede verse en la situación *C* (Fig. 8.2), en donde el bloque ha transformado totalmente su energía cinética en pura energía potencial gravitacional, i.e:

$$E_C = K_C + U_C = 0 + mgh = E_A = 9.68 J,$$

de donde se obtiene la altura máxima a la que asciende el bloque por el plano inclinado:

$$h = \frac{E_A}{mg} = 0.49 m.$$

c) Una vez que se ha determinado la altura máxima h , fácilmente puede obtenerse la longitud l que el bloque recorre sobre el plano inclinado antes de detenerse e iniciar el descenso ya, que la longitud está relacionada con la altura h , de acuerdo a la siguiente relación:

$$\frac{h}{l} = \text{sen } \theta,$$

si $\theta = 36.9^\circ$, entonces la longitud máxima que el bloque recorre sobre el plano inclinado está dada por:

$$l = \frac{h}{\text{sen } \theta} = 0.82 m.$$

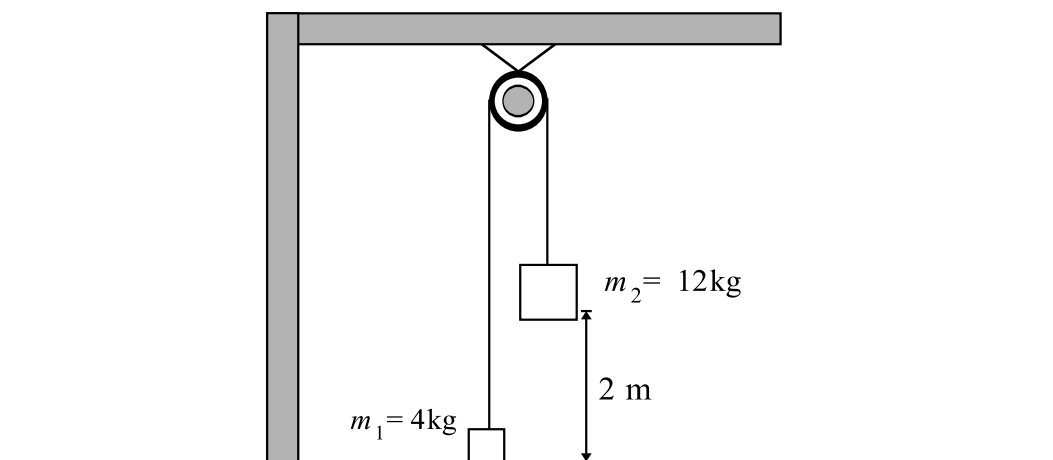


Figura 8.3: Durante el movimiento de dos cubetas unidas por una cuerda a través de una polea, la energía mecánica total del sistema se transforma de energía potencial en una mezcla de energía potencial más energía cinética.

8-2.- Un sistema formado por dos cubetas de pintura que están conectadas por una cuerda que pasa por una polea, tal y como se muestra en la figura 8.3, parte del reposo con una cubeta de 12 kg situada a 2 m sobre el piso. Usando el principio de conservación de la energía, calcule la rapidez con que la cubeta golpea el piso. Haga caso omiso de la fricción y de la masa de la polea.

Sol:

En el movimiento de este sistema, como no hay fricción entre la cuerda que une las cubetas y la polea, la energía mecánica total se conserva, por lo tanto, cuando las cubetas se encuentran en reposo y la cubeta más pesada está a una altura $h = 2 \text{ m}$ por encima del suelo, la energía del sistema está dada por:

$$E_i = U_{1i} + U_{2i} = m_1g(0) + m_2gh = 235.2 \text{ J},$$

al soltarse el sistema la cubeta más pesada desciende, mientras que la menos pesada asciende hasta llegar a una altura de $h = 2 \text{ m}$, en este momento la energía E_i se transforma en energía cinética de ambas cubetas, más energía potencial de la cubeta menos pesada, es decir:

$$\begin{aligned} E_f &= K_{1f} + U_{1f} + K_{2f} = \frac{1}{2}m_1v_f^2 + m_1gh + \frac{1}{2}m_2v_f^2 \\ &= (4 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (2 \text{ m}) + \frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + 78.4 \text{ J}, \end{aligned}$$

ya que las cubetas están unidas por una cuerda inextensible ($v_{1f} = v_{2f} = v_f$), y como la energía mecánica total se conserva ($E_f = E_i$), se obtiene que:

$$\begin{aligned} E_f &= 78.4 J + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = 235.2 J = E_i \\ &\implies \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 &= 235.2 J - 78.4 J = 156.8 J \\ &\implies \\ v_f &= \sqrt{\frac{2(156.8 J)}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{2(156.8 J)}{16 kg}} = 4.43 \frac{m}{s}, \end{aligned}$$

por lo que la cubeta de 12 kg golpea el suelo con una rapidez v_f de $4.43 \frac{m}{s}$.

8-3.- En el estudio del tiro parabólico se deduce la siguiente expresión para la altura máxima h de un proyectil lanzado con rapidez inicial v_0 y a un ángulo α_0 :

$$h = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \alpha_0}{2g}.$$

Deduzca esta expresión empleando consideraciones de energía.

Sol:

Ya que en el movimiento parabólico la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el proyectil en la dirección horizontal es igual a cero, la componente en esta dirección de la velocidad v_x permanece constante durante todo el movimiento. De esta forma la velocidad horizontal del proyectil permanecerá constante desde su lanzamiento (v_{xL}), hasta el punto de máxima elevación ($v_{x_{h\text{máx}}}$), es decir:

$$v_{xL} = v_{x_{h\text{máx}}},$$

y como en el tiro parabólico la energía mecánica total se conserva, si no se consideran los efectos de las fuerzas disipativas, por lo que:

$$\begin{aligned} E_f &= E_i \\ &\implies \\ mgh_{\text{máx}} + \frac{1}{2}m(v_{x_{h\text{máx}}}^2 + v_{y_{h\text{máx}}}^2) &= \frac{1}{2}m(\vec{v})^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m((v_{yL})^2 + (v_{xL})^2) \\ &\implies \\ mgh_{\text{máx}} + \frac{1}{2}m(v_{x_{h\text{máx}}}^2) &= \frac{1}{2}m((v_{yL})^2 + (v_{xL})^2) \\ &\implies \\ mgh_{\text{máx}} &= \frac{1}{2}m(v_{yL})^2, \end{aligned}$$

ya que inicialmente el proyectil sólo tiene energía cinética ($\frac{1}{2}mv_0^2$) y en la altura máxima la componente vertical de la velocidad es igual a cero ($v_{y_{h\text{ máx}}} = 0$), por lo tanto, la altura máxima que alcanza el proyectil es:

$$h_{\text{máx}} = \frac{(v_{y_L})^2}{2g},$$

por otra parte, si el proyectil se lanza con una inclinación α_0 la componente vertical de la velocidad está dada por:

$$v_{y_L} = v_0 \text{sen} \alpha_0,$$

por lo que:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \alpha_0}{2g},$$

resultado al cual ya se había llegado a través de la cinemática del movimiento parabólico. Sin embargo, ahora este mismo resultado se ha encontrado a partir de un principio físico más general como es la conservación de la energía mecánica total.

8-4.- En una oficina de correos un paquete de 0.200 kg parte del reposo en el punto A de una rampa que forma un cuarto de círculo y cuyo radio es de 1.60 m , tal y como se observa en la figura 8.4. El paquete es tan pequeño que puede tratarse como una partícula que se desliza primero por la rampa hasta llegar al punto B con una rapidez de $4.80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A partir de ahí, el paquete se desliza 3 m sobre una superficie horizontal hasta el punto C en donde se detiene.

- ¿Qué coeficiente de fricción cinética tiene la superficie horizontal?
- ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre el paquete al deslizarse por el arco circular entre los puntos A y B ?

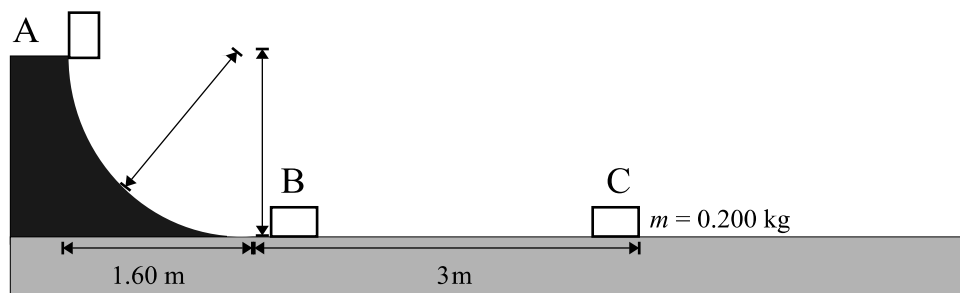


Figura 8.4: Diagrama del movimiento de un paquete.

Sol:

a) Para resolver este problema es necesario extender el principio de conservación de la energía mecánica total para tomar en consideración las pérdidas de energía que se producen por la presencia de fuerzas no conservativas, en nuestro caso la fricción existente entre el bloque y las superficies curva y horizontal. El primer paso es fijar la altura correspondiente al cero de energía potencial gravitacional. En el presente caso se escoge dicha altura como aquella a la que se encuentra la superficie horizontal con un coeficiente de fricción μ_C .

Para determinar el coeficiente de fricción cinética (μ_C) de la superficie horizontal, debe considerarse la pérdida de energía por disipación, agregando el trabajo negativo $W_{B \rightarrow C}$ realizado por la fuerza de fricción en el recorrido del paquete desde el punto B ($v_B = 4.80 \frac{m}{s}$) hasta el punto C en donde se detiene el bloque ($E_C = 0$). De esta manera la energía en C es igual a la suma de la energía que el bloque tenía inicialmente en B mas $W_{B \rightarrow C}$, es decir:

$$\begin{aligned} K_B + U_B + W_{B \rightarrow C} &= E_C = K_C + U_C = 0 \\ &\implies \\ K_B + U_B + W_{B \rightarrow C} &= K_B + W_{B \rightarrow C} = 0 \\ &\implies \\ K_B &= -W_{B \rightarrow C}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

en donde se considera que la energía potencial gravitacional es cero a la altura del punto B , por lo que $U_B = 0$, además se tiene que $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$, $W_{B \rightarrow C} = -\mu Nl = -\mu_C mgl$ y $l = 3 \text{ m}$, por lo tanto la ecuación (8.1) toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = -(-\mu_C mgl) = \mu_C mgl,$$

de donde finalmente se obtiene el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_C = \frac{v_B^2}{2gl} = 0.39.$$

b) Para determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el paquete al deslizarse por el arco circular entre los puntos A y B ($W_{A \rightarrow B}$) puede aplicarse la misma idea utilizada anteriormente para obtener el trabajo realizado por la fuerza de fricción cuando el bloque se desliza del punto B al punto C (ecuación (8.1)), es decir, para el

caso del arco circular se tiene que:

$$\begin{aligned}
 K_A + U_A + W_{A \rightarrow B} &= E_B = K_B + U_B = K_B \\
 &\implies \\
 U_A + W_{A \rightarrow B} &= K_B \\
 &\implies \\
 K_B - U_A &= W_{A \rightarrow B}, \tag{8.2}
 \end{aligned}$$

en donde $K_A = 0$, $U_A = mgh$ y $h = 1.60 \text{ m}$, que corresponde al radio de la circunferencia por la que el bloque se desliza, de este resultado se obtiene que el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el paquete al deslizarse por el arco circular entre A y B ($W_{A \rightarrow B}$) es:

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -0.832 \text{ J}.$$

- 8-5.- Un bloque de 0.50 kg se empuja contra un resorte horizontal, el cual tiene una masa despreciable, comprimiéndolo 0.20 m , tal y como se muestra en la figura 8.5. La fuerza ejercida por el resorte hace que el bloque recorra sobre la superficie horizontal una distancia de 1 m antes de detenerse. La constante elástica del resorte es $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Calcule el coeficiente de fricción cinética μ_C entre el bloque y la superficie horizontal.

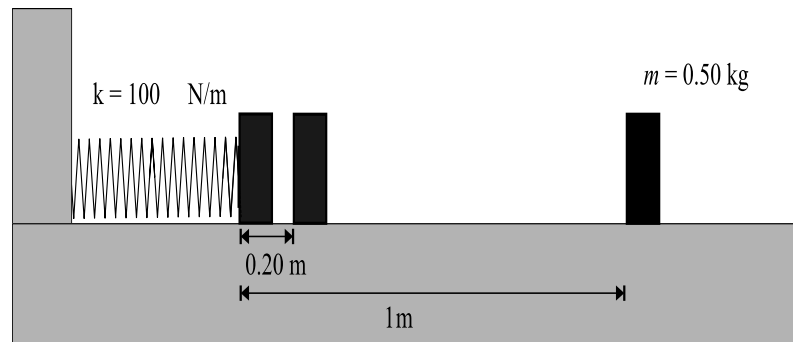


Figura 8.5: Determinación del coeficiente de fricción cinética (μ_C) de una superficie horizontal rugosa.

Sol:

Como se observa en la situación A de la siguiente figura (Fig. 8.6), cuando la compresión del resorte es igual a 0.20 m , en éste se encuentra almacenada, en forma de energía potencial elástica, una cantidad de energía inicial dada por:

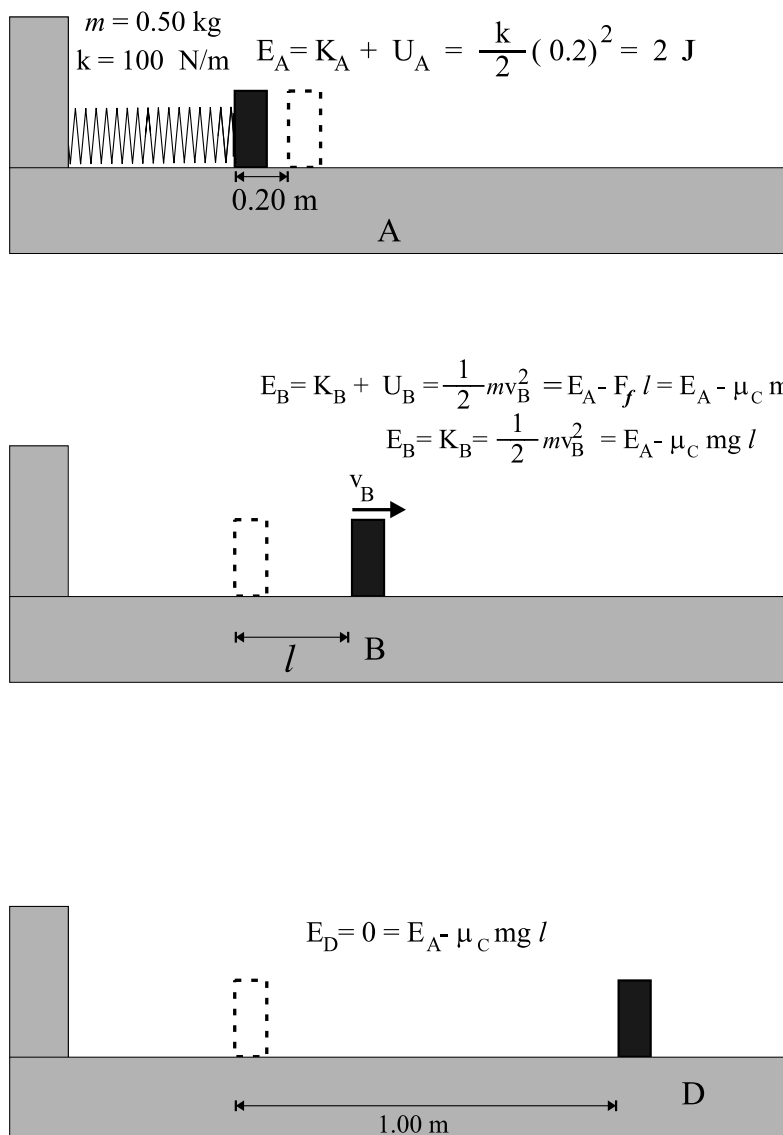


Figura 8.6: Tres diferentes etapas del movimiento de un bloque a lo largo de una superficie con fricción.

$$E_A = \frac{1}{2} k x^2 = \left[\frac{1}{2} 100 (0.2)^2 \right] \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{m}^2 = 2 \text{ J},$$

esta energía se transforma en energía cinética, la cual se irá perdiendo por disipación debido a la fuerza de fricción que existe entre el bloque y la superficie horizontal. De esta manera, cuando el bloque se detenga, como se observa en la situación *D* de la figura an-

terior (Fig. 8.6), toda la energía E_A que inicialmente se tenía se habrá perdido debido al trabajo negativo W_{otras} efectuado por la fuerza de fricción, expresando algebraicamente este hecho para el punto en donde el bloque se detiene se encuentra que:

$$\begin{aligned}
 E_A + W_{otras} &= 0 = E_D \\
 &\implies \\
 E_A &= -W_{otras} \\
 &\implies \\
 E_A &= -(-\mu_C mgl) = \mu_C mgl \\
 &\implies \\
 E_A &= \mu_C mgl, \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

en donde el trabajo realizado por la fuerza de fricción se expresa como el producto de esta fuerza ($F_f = -\mu_C mg$) por la longitud l que recorre el bloque antes de detenerse.

De la ecuación (8.3) se obtiene el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_C = \frac{E_A}{mgl} = 0.408.$$

El proceso de pérdida de energía debido a la fricción se muestra en la figura 8.6, en la cual se ha señalado para cada etapa del movimiento la forma en que la energía mecánica del sistema se va perdiendo debido a la fricción que siempre está realizando trabajo negativo sobre el bloque.

8-6.- Considerando el sistema físico de la figura 8.7, en donde partiendo del reposo un bloque de 12 kg se desliza sin fricción sobre un plano, el cual tiene una inclinación de 30° , hacia un resorte que puede ser comprimido 0.020 m por una fuerza de 270 N . Si el bloque se detiene momentáneamente cuando la compresión del resorte es igual a 0.055 m respecto a su longitud natural:

- a) ¿Cuál es la distancia que el bloque recorre desde que se encuentra en reposo hasta que se detiene por la acción del resorte?
- b) ¿Cuál es la rapidez que lleva el bloque en el momento en que hace contacto con el resorte?

Sol:

a) Nuevamente, para resolver este problema es necesario fijar la altura en donde el valor de la energía potencial gravitacional es igual a cero; que en este caso corresponde al punto en donde la compresión del resorte es máxima, tal y como se muestra en la figura 8.8.

Desde esta referencia para la energía potencial gravitacional, el bloque en reposo, situación A (Fig. 8.8), tiene una energía potencial dada por:

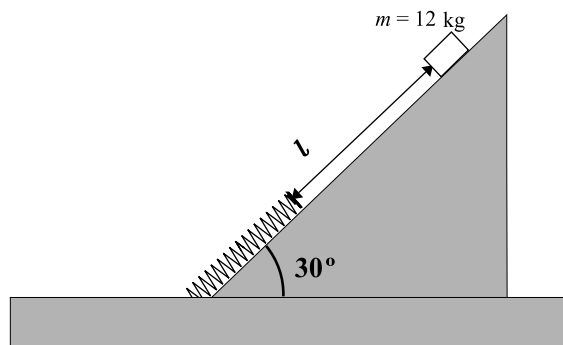


Figura 8.7: Diagrama de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado y que es detenido por un resorte.

$$E_A = U_A = mgh_i.$$

La longitud que recorre el bloque a lo largo del plano inclinado, desde el punto en que se encuentra en reposo hasta el punto en donde se detiene por la acción del resorte, se obtiene aplicando el principio de conservación de la energía mecánica total, ya que la energía potencial gravitacional que inicialmente tenía el bloque se transformará totalmente en energía potencial elástica, la cual se encuentra almacenada en el resorte en el momento en que el bloque se detiene; como se observa en la situación C (Fig. 8.8), por lo que:

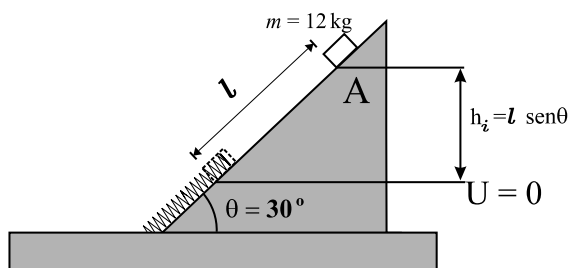
$$E_A = mgh_i = E_C = \frac{1}{2}kx^2, \quad (8.4)$$

en donde h_i es la altura inicial que se desconoce. Por lo tanto, de la ecuación (8.4) se obtiene para la altura h_i :

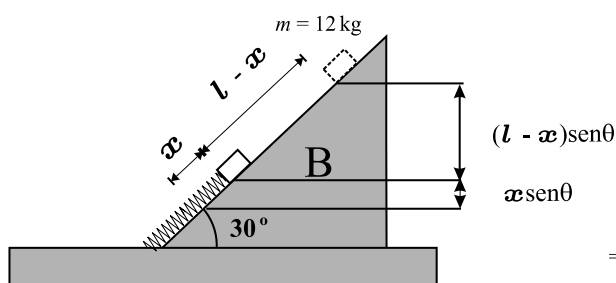
$$h_i = \frac{kx^2}{2mg},$$

en donde $x = 0.055 \text{ m}$ es la máxima compresión del resorte y $m = 12 \text{ kg}$ es la masa del bloque. Ahora bien, el valor de k se obtiene partiendo del hecho de que una compresión $x_0 = 0.020 \text{ m}$ da como resultado una fuerza ejercida por el resorte de $F = 270 \text{ N}$, por lo tanto:

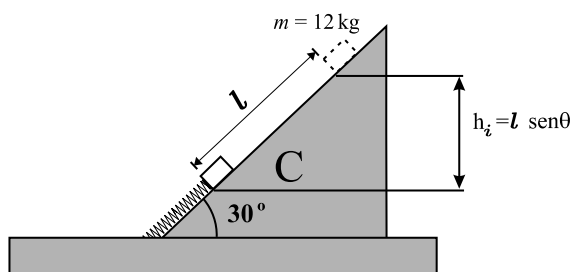
$$k = \frac{F}{x_0} = 13500 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$



$$E_A = K_A + U_A = 0 + mgh_i = mg l \text{ sen } \theta$$



$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg x \text{ sen } \theta = E_A = mg l \text{ sen } \theta$$



$$E_C = K_C + U_C = 0 + \frac{1}{2}k(x)^2 = E_A = mg l \text{ sen } \theta$$

Figura 8.8: La energía mecánica total de un bloque deslizándose sobre un plano inclinado sin fricción, que inicialmente se encuentra en forma de energía potencial gravitacional (situación A), se convierte a energía potencial elástica (situación C).

y finalmente el valor de la altura desde donde parte el bloque resulta ser:

$$h_i = 0.173 \text{ m},$$

conociendo la altura se obtiene la longitud l que el bloque recorre sobre el plano inclinado mediante la siguiente relación:

$$l \operatorname{sen} \theta = h_i,$$

si $\theta = 30^\circ$, la distancia recorrida por el bloque es:

$$l = \frac{h_i}{\operatorname{sen} \theta} = 0.346 \text{ m.}$$

b) Para determinar la rapidez v_B del bloque justo en el momento en que entra en contacto con el resorte, situación B (Fig. 8.8), se aplica nuevamente el principio de la conservación de la energía mecánica total, en este caso la energía potencial inicial U_A se transforma parcialmente en energía cinética K_B , mientras el resto se mantiene como energía potencial gravitacional U_B .

En el momento en que el resorte entra en contacto con el bloque, éste se encuentra a una altura h_B respecto al cero de energía potencial, la cual está dada por:

$$h_B = x \operatorname{sen} \theta,$$

en donde $\theta = 30^\circ$ es el ángulo de inclinación del plano inclinado y x es la compresión máxima del resorte $x = 0.055 \text{ m}$, de manera que al aplicar el principio de conservación de la energía mecánica total se obtiene:

$$\begin{aligned} E_A = U_A = mgh_i &= E_B = K_B + U_B \\ \implies \\ mgh_i &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \\ \implies \\ v_B &= \sqrt{2g(h_i - h_B)} \\ \implies \\ v_B &= \sqrt{2g \operatorname{sen} \theta (l - x)} = 1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

- 8-7.-** Un *bungee* que tiene una longitud natural de 30 m ejerce una fuerza restauradora de magnitud kx al estirarse una distancia $(30 + x) \text{ m}$. Imagine que su suegro, cuya masa es de 95 kg , está parado sobre un puente a 45 m del suelo con un extremo del *bungee* atado firmemente a su tobillo y el otro extremo atado al puente. Usted tenía varios *bungees* para escoger y los probó atando un extremo a un árbol y ejerciendo una fuerza de 380 N en el otro extremo; por lo que ha prometido a su suegro que la distancia que recorrerá al tirarse es de 41 m antes de que el *bungee* lo detenga. Durante las pruebas ¿qué distancia debió estirarse el *bungee* para que usted pueda cumplir con su promesa?

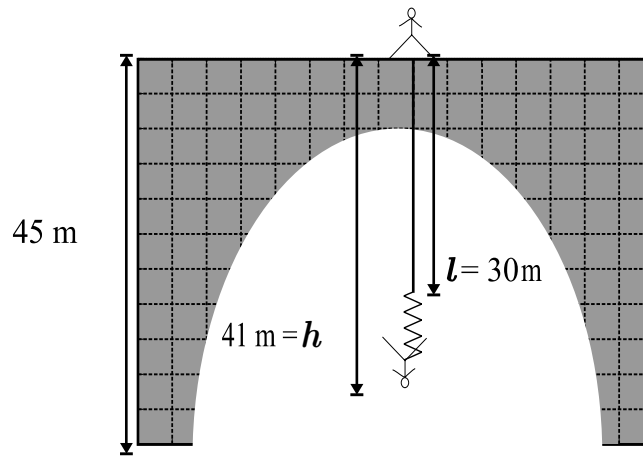


Figura 8.9: Esquema del movimiento realizado por una persona al saltar en un *bungee*.

Sol:

Este problema puede resolverse aplicando el principio de conservación de la energía mecánica total para encontrar la constante elástica y posteriormente determinar la distancia que debe estirarse el *bungee* que debe seleccionarse.

Como en esta situación física la energía potencial gravitacional juega un papel central, resulta indispensable escoger el punto en donde esta energía es igual a cero. Para este problema el cero de energía potencial se elige sobre la superficie horizontal del puente desde donde se realizan los saltos, tal y como se muestra en la figura 8.9.

En el punto desde donde se realizan los saltos, la energía mecánica total es igual a cero porque el resorte del *bungee* no se ha estirado más allá de su longitud natural. Por otra parte, en el punto en donde el *bungee* se detiene a una altura $h = 41\text{ m}$ por debajo del puente, además de energía cinética $K_2 = 0$, se tendrá energía potencial gravitacional $U_{2g} = -mgh$ y energía potencial elástica $U_{2el} = \frac{1}{2}k(h - l)^2$, la cual está almacenada en el *bungee*, en donde $l = 30\text{ m}$ es la longitud natural del *bungee*; por lo que aplicando el principio de conservación de la energía se obtiene:

$$K_1 + U_1 = 0 = K_2 + U_{2g} + U_{2el}, \quad (8.5)$$

que para el presente problema puede escribirse de la siguiente forma:

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}k(h - l)^2,$$

y de donde puede despejarse la constante elástica del *bungee*:

$$k = 2 \frac{mgh}{(h - l)^2} = 630.93 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Por otra parte, si durante las pruebas se aplica una fuerza $F = 380 \text{ N}$, el *bungee* indicado para este salto es aquél cuya longitud x al momento de estirarse sea igual a:

$$x = \frac{F}{k} = 0.602 \text{ m}.$$

8-8.- Un bloque de 2 kg se desliza sobre una pendiente que tiene una inclinación de 53.1° . Inicialmente el bloque se encuentra a una distancia de 4 m de un resorte de masa despreciable, cuya constante elástica es de $120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y que está sujeto a la base de la pendiente, tal y como se muestra en la figura 8.10.

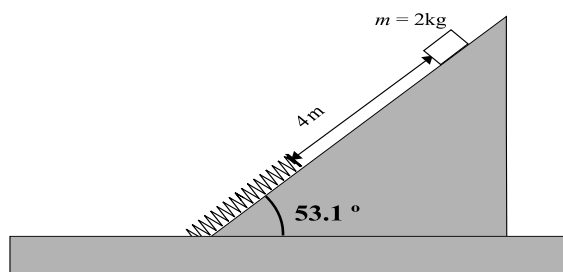


Figura 8.10: Diagrama de un bloque comprimiendo a un resorte bajo la acción de la fuerza de fricción.

Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la pendiente es $\mu_C = 0.20$, determine:

- ¿Qué rapidez lleva el bloque justo en el momento en que entra en contacto con el resorte?
- ¿Cuál es la compresión máxima del resorte?
- Al rebotar, ¿qué longitud asciende el bloque antes de detenerse nuevamente?

Sol:

a) Para aplicar el principio de conservación de la energía mecánica total en este problema es necesario tomar en consideración las pérdidas de energía debido a la presencia de fuerzas no conservativas, como es el caso de la fricción presente entre el bloque y la superficie de la pendiente. Como siempre es indispensable fijar la altura en donde la energía potencial gravitacional es igual a cero; que en este caso es aquella en la que inicialmente se encuentra el extremo libre del resorte sin comprimir, tal y como se muestra en el inciso a) de la figura 8.11.

Por otra parte, para determinar la rapidez que tiene el bloque justo antes de llegar al resorte debe aplicarse el principio de la conservación de la energía considerando las pérdidas por disipación, agregando el trabajo negativo realizado por estas fuerzas W_{otras}

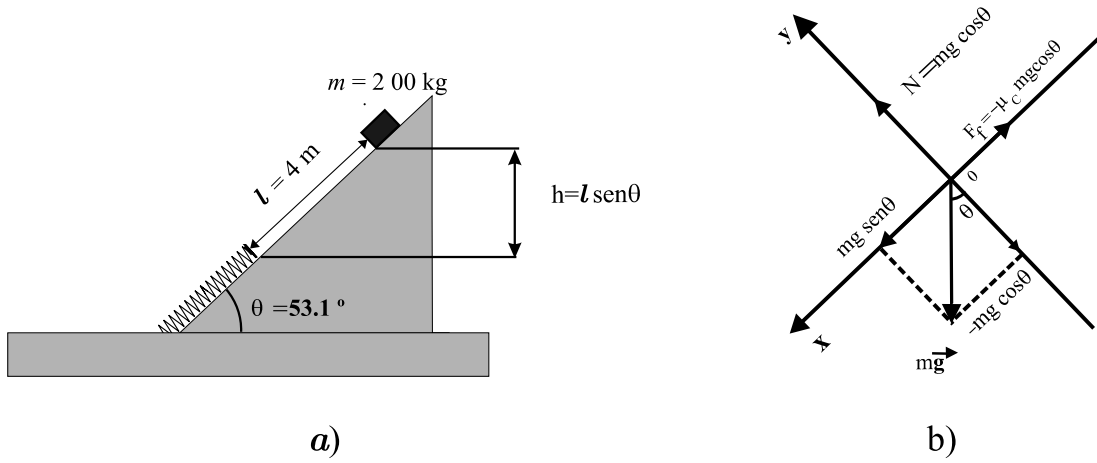


Figura 8.11: a) Elección del punto cero de energía potencial gravitacional. b) Diagrama de cuerpo libre para un bloque que desciende sobre un plano inclinado con fricción.

en el recorrido del bloque desde el punto inicial de su recorrido hasta el momento en que el bloque se detiene, es decir:

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2, \quad (8.6)$$

el subíndice 1 se refiere al punto desde donde el bloque inicia su movimiento sobre el plano inclinado y en donde $v_1 = 0$, $K_1 = 0$, $U_1 = mgh$, $h = l \text{ sen } \theta$ y en donde $l = 4 \text{ m}$ es la distancia original entre el bloque y el resorte y $\theta = 53.1^\circ$ es el ángulo de inclinación del plano. El subíndice 2 corresponde al punto en donde el bloque está por entrar en contacto con el resorte y en el cual, por la manera en que se ha seleccionado el punto donde la energía potencial gravitacional es igual a cero, $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$, $U_2 = 0$ y $W_{otras} = F_f \cdot l$, que de acuerdo con el inciso b) de la figura 8.11, $F_f = -\mu_C mg \cos \theta$ de manera que $W_{otras} = -\mu_C mgl \cos \theta$, por lo tanto, la ecuación (8.6) toma la siguiente forma:

$$mgh - \mu_C mgl \cos \theta = mgl(\text{sen } \theta - \mu_C \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_2^2, \quad (8.7)$$

de donde la rapidez que tiene el bloque justo antes de llegar al resorte está dada por:

$$v_2 = \sqrt{2gl(\text{sen } \theta - \mu_C \cos \theta)} = 7.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

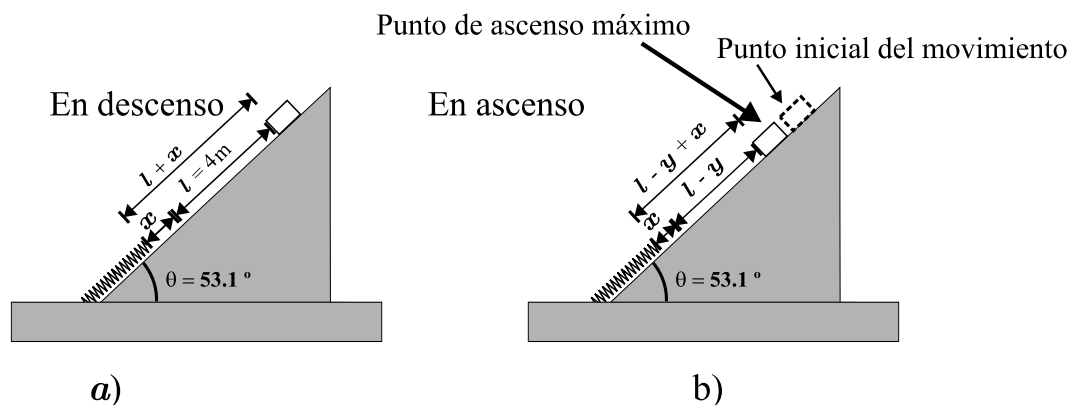


Figura 8.12: a) Diagrama de la altura inicial desde la cual el bloque inicia su movimiento hacia el resorte y b) determinación de la altura máxima que alcanza el bloque en su movimiento de ascenso tomando en consideración las pérdidas de energía debidas a la fricción.

b) Para determinar ahora la longitud x correspondiente a la compresión del resorte se aplica la misma idea del inciso anterior:

$$K_2 + U_2 + W_{otras\ 2 \rightarrow 3} = K_3 + U_3, \quad (8.8)$$

el subíndice 3 representa el punto de máxima compresión del resorte en donde $v_3 = 0$, $K_3 = 0$, $U_3 = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \sin \theta$ es la combinación de energía potencial elástica y energía potencial gravitacional y $W_{otras\ 2 \rightarrow 3} = -\mu_C mgx \cos \theta$ es la cantidad de energía pérdida por la fricción durante la compresión del resorte.

De esta manera, la ecuación (8.8) toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \mu_C mgx \cos \theta = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \sin \theta, \quad (8.9)$$

y sustituyendo:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgl(\sin \theta - \mu_C \cos \theta),$$

en la ecuación (8.9) se obtiene:

$$mgl(\sin \theta - \mu_C \cos \theta) + mgx(\sin \theta - \mu_C \cos \theta) = \frac{1}{2}kx^2,$$

o equivalentemente:

$$\frac{kx^2}{2mg(\operatorname{sen} \theta - \mu_C \cos \theta)} = l + x,$$

ahora bien, tomando los valores numéricos del problema se encuentra que:

$$4.504x^2 - x - 4 = 0,$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(4.504)(-4)}}{2(4.504)} \\ &= 1.06 \text{ m.} \end{aligned} \quad (8.10)$$

c) Nuevamente, para obtener la longitud máxima que el bloque recorre en su ascenso se aplica la misma idea que en los incisos anteriores:

$$K_1 + U_1 + W_{\text{o}t\text{r}as\ 1 \rightarrow 4} = K_4 + U_4, \quad (8.11)$$

el subíndice 4 se refiere al punto de máximo ascenso del bloque, tal y como se muestra en el inciso b) de la figura 8.12, en donde $K_1 = 0$, $U_1 = mgl \operatorname{sen} \theta$, como se vio en el inciso a), $K_4 = 0$ porque este es el punto en donde el bloque se detiene durante su ascenso, $U_4 = mg(l - y) \operatorname{sen} \theta$ en donde $(l - y)$ es la longitud máxima que asciende el bloque más allá del punto en donde el resorte se encuentra en equilibrio, $W_{\text{o}t\text{r}as\ 1 \rightarrow 4}$ está dado por la fuerza de fricción ($F_f = -\mu_C mg \cos \theta$) multiplicada por la longitud total que el bloque recorre en su movimiento de descenso y ascenso, la cual está dada por: $(l + x) + (l + x - y) = 2(l + x) - y$, en donde x es la compresión máxima del resorte calculada en el inciso anterior, por lo tanto se tiene que:

$$W_{\text{o}t\text{r}as\ 1 \rightarrow 4} = -\mu_C mg \cos \theta (2l + 2x - y),$$

por lo que finalmente se obtiene:

$$mgl \operatorname{sen} \theta - \mu_C mg \cos \theta (2l + 2x - y) = mg(l - y) \operatorname{sen} \theta,$$

y despejando y de esta última ecuación:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2\mu_C \cos \theta (l + x)}{\operatorname{sen} \theta + \mu_C \cos \theta} = \\ &= \frac{2\mu_C (l + x)}{\operatorname{tg} \theta + \mu_C} = 1.32 \text{ m,} \end{aligned} \quad (8.12)$$

por lo que la longitud que asciende el bloque más allá del punto en donde el resorte se encuentra en equilibrio es:

$$l - y = 2.68 \text{ m.} \quad (8.13)$$

8-9.- Un bloque de 0.50 kg que está en reposo en el punto A , se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción y está unido a un resorte que tiene una longitud natural de 0.60 m , una constante elástica $40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y masa despreciable, tal y como se muestra en la figura 8.13.

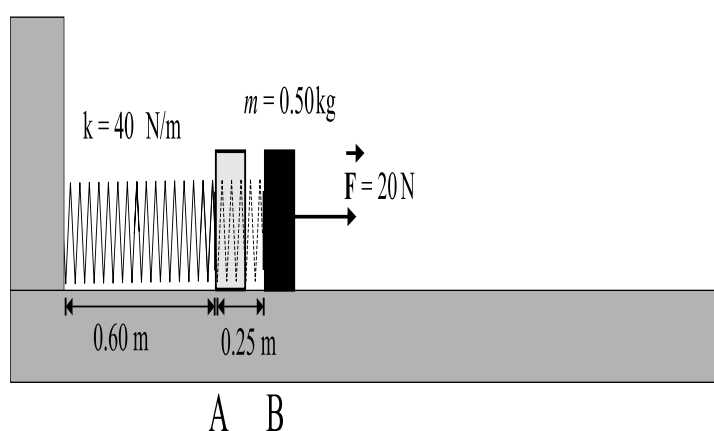


Figura 8.13: Diagrama de un bloque sujeto a un resorte bajo la acción de una fuerza externa \vec{F} .

Si se ejerce una fuerza horizontal constante hacia la derecha de 20 N sobre el bloque:

- ¿Qué rapidez tendrá cuando llegue al punto B , el cual está localizado a 0.25 m a la derecha del punto A ?
- En el punto B se suelta el bloque. En el movimiento subsecuente, ¿qué tanto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

Sol:

a) En este problema no hay fuerzas disipativas, sin embargo, cuando el bloque se desplaza del punto A al punto B , la energía mecánica total del sistema se incrementa debido a la acción de la fuerza externa \vec{F} , tal y como se muestra en la figura 8.14, el trabajo hecho por esta fuerza durante este recorrido está dado por:

$$W = F \cdot (x - l), \quad (8.14)$$

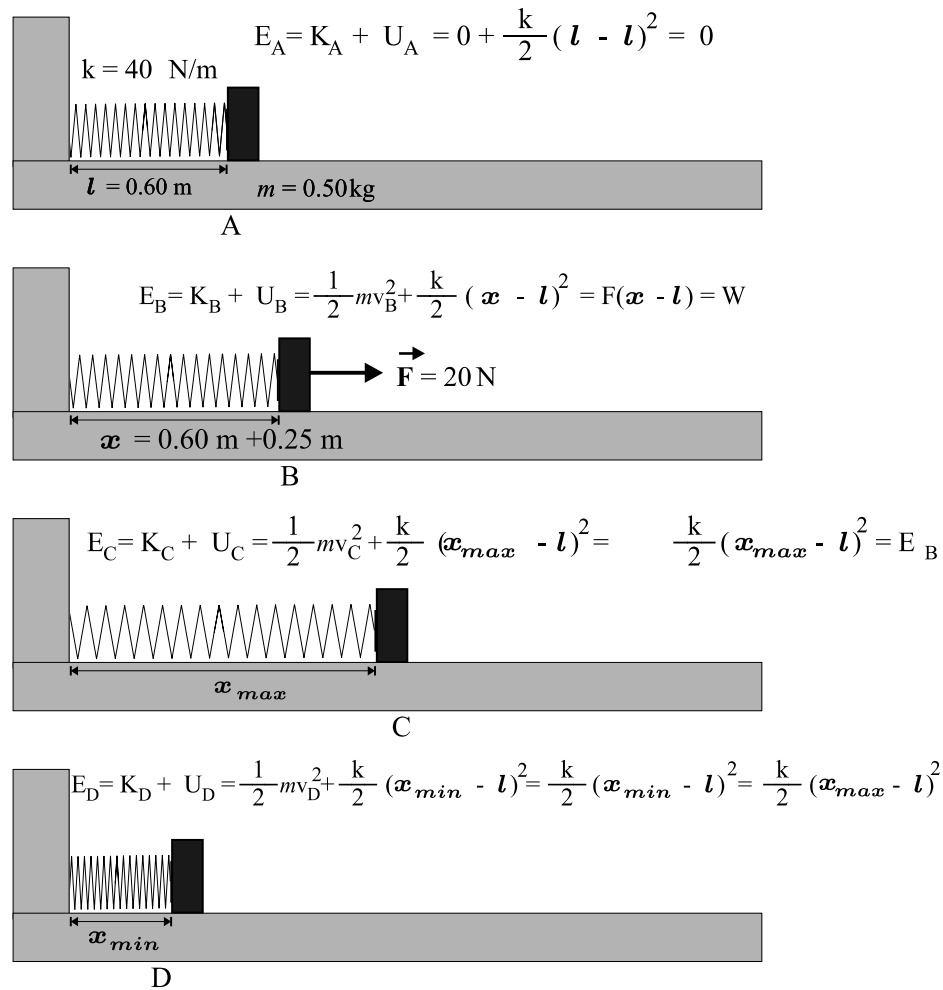


Figura 8.14: Movimiento de un bloque sujeto a un resorte. En el punto A, inicialmente el bloque está en reposo y adquiere energía debido al trabajo realizado por la fuerza externa \vec{F} .

en donde x es la posición del bloque respecto a la pared en el punto B ($x = 0.85 \text{ m}$), l es la longitud natural del resorte y F es la magnitud de la fuerza \vec{F} . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E_B &= E_A + W \\
 K_B + U_B &= K_A + U_A + W = 0 + \frac{1}{2}k(l - l)^2 + F(x - l) = \\
 &= F(x - l),
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} K_B + U_B &= F(x - l) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k(x - l)^2 &= F(x - l), \end{aligned}$$

de esta última ecuación se despeja la rapidez v_B cuando el bloque está a 0.25 m a la derecha del punto A obteniendo:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\frac{2}{m} \left[F(x - l) - \frac{1}{2}k(x - l)^2 \right]} \\ &= 3.87 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

b) Durante el desplazamiento que el bloque realiza del punto B al punto C (Fig. 8.14) la energía mecánica total del sistema se conserva, es decir:

$$\begin{aligned} E_B &= E_C \\ K_B + U_B &= F(x - l) = K_C + U_C = \\ &= 0 + \frac{1}{2}k(x_{max} - l)^2, \end{aligned} \quad (8.16)$$

por lo que:

$$x_{max} = l + \sqrt{\frac{2F(x - l)}{k}} = (0.60 + 0.50) \text{ m} = 1.10 \text{ m}, \quad (8.17)$$

y finalmente se obtiene que:

$$x_{max} = 1.10 \text{ m}. \quad (8.18)$$

Por otra parte, no se conoce x_{min} pero se sabe que esta distancia guarda una posición simétrica respecto a la longitud natural del resorte, por lo tanto, si x_{max} está a 0.50 m hacia la derecha de la posición de equilibrio del resorte, x_{min} está a 0.50 m a la izquierda de la posición de equilibrio del resorte, por lo que:

$$x_{min} = l - 0.50 \text{ m} = 0.60 \text{ m} - 0.50 \text{ m} = 0.10 \text{ m}. \quad (8.19)$$

Este resultado puede comprobarse directamente de la condición de la conservación de la energía mecánica total, tal y como se observa en la situación D (Fig. 8.14). Aplicando esta condición se obtiene:

$$E_B = E_D = K_D + U_D = 0 + \frac{1}{2}k(x_{min} - l)^2, \quad (8.20)$$

de donde:

$$\begin{aligned} (x_{min} - l) &= -\sqrt{\frac{2}{k}(F(x - l))} \\ \implies \\ x_{min} &= (0.60 - 0.50) \text{ m} = 0.10 \text{ m}, \end{aligned}$$

es decir:

$$x_{min} = 0.10 \text{ m}. \quad (8.21)$$

Por lo tanto, la distancia de máximo acercamiento entre el bloque y la pared es de 10 *cm*.

- 8-10.-** Un automóvil se queda sin frenos cuando está bajando por una pendiente cubierta de hielo que tiene un ángulo de inclinación β , tal y como se muestra en la figura 8.15. Inicialmente el automóvil baja con rapidez v_0 , después de recorrer una distancia L con fricción despreciable, el conductor guía el automóvil ascendiendo sobre una rampa de emergencia que tiene una superficie arenosa blanda en la que el coeficiente de fricción de rodamiento es μ_r y una inclinación constante α hacia arriba. ¿Qué distancia recorre el automóvil por la rampa antes de parar? Utilice métodos de energía.

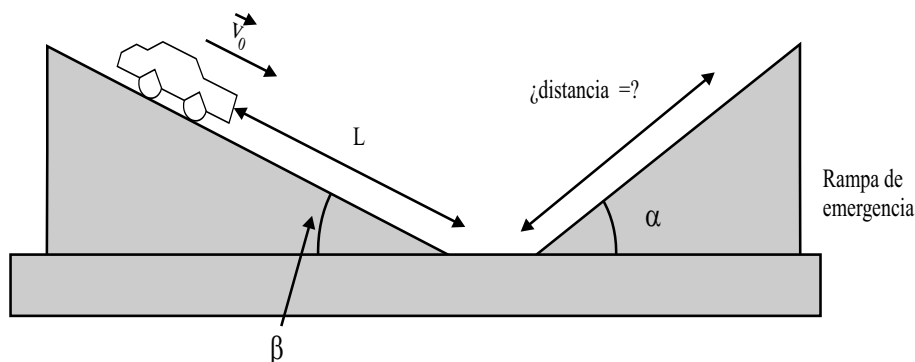


Figura 8.15: Paso de un automóvil a través de una rampa de emergencia.

Sol:

Ya que desde el inicio del descenso (situación *A*) la fricción existente entre la superficie de la pendiente y el automóvil puede despreciarse, la energía mecánica total es constante y tendrá el mismo valor en la base de la pendiente (situación *B*), es decir:

$$\begin{aligned} K_B + U_B &= K_A + U_A \\ \frac{1}{2}mv_f^2 &= mgh_i + \frac{1}{2}mv_0^2 = \\ &= mgL \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{2}mv_0^2, \end{aligned}$$

en donde v_f es la rapidez con la que el automóvil llega a la base de la pendiente e inicia el ascenso por la rampa de emergencia. A partir de este punto la energía mecánica no se conserva debido a la fricción entre el automóvil y la rampa de emergencia.

Por lo tanto, tomando en cuenta las pérdidas asociadas con las fuerzas no conservativas, el balance de energía puede expresarse de la siguiente forma:

$$K_B + U_B + W_{rampa} = U_C, \quad (8.22)$$

el punto *C* corresponde a la altura máxima que alcanza el automóvil $h = d \operatorname{sen} \alpha$, en donde d es la distancia que el automóvil recorre por la rampa de emergencia antes de detenerse y $W_{rampa} = -F_f \cdot d$, donde F_f está dada, de acuerdo al diagrama de cuerpo libre (Fig. 8.16), por:

$$F_f = \mu_r N = \mu_r mg \cos \alpha.$$

De esta manera se tiene que:

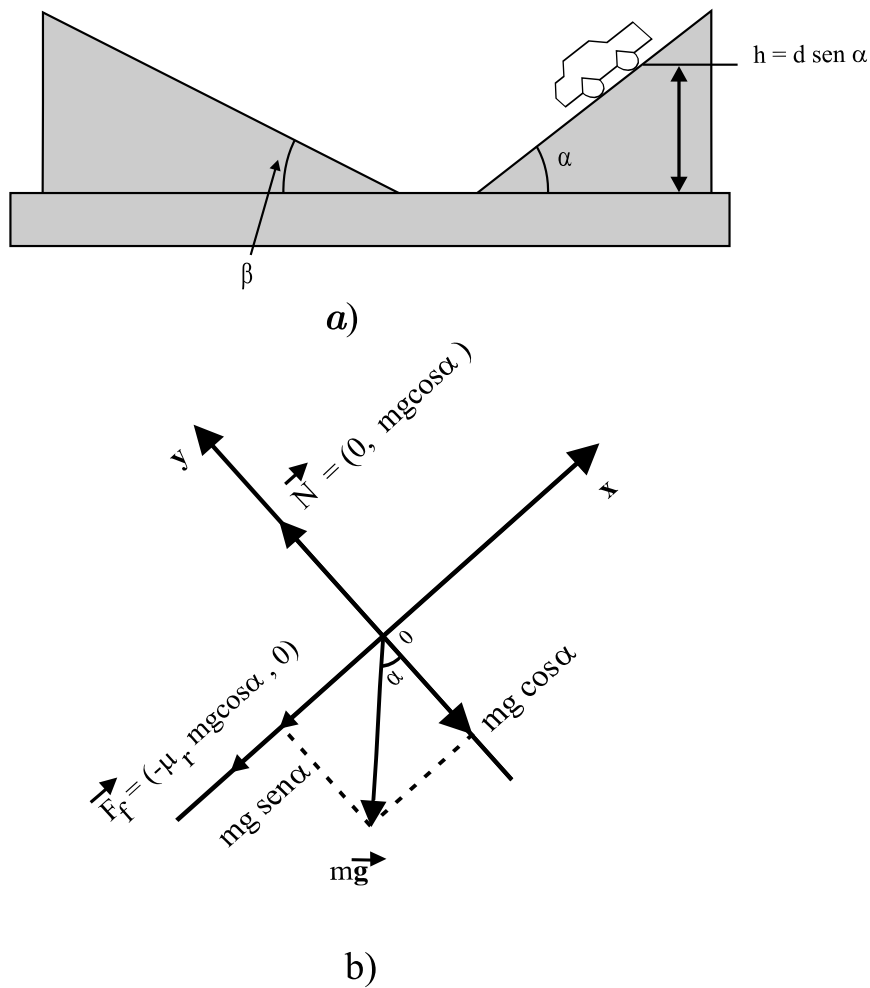


Figura 8.16: a) Diagrama del ascenso de un automóvil por una rampa de emergencia recorriendo una distancia d antes de detenerse. b) Diagrama de cuerpo libre de un automóvil durante el ascenso por una rampa de emergencia.

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \mu_r mgd \cos \alpha = mgd \sin \alpha$$

$$mgL \sin \beta + \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_r mgd \cos \alpha = mgd \sin \alpha,$$

de donde puede encontrarse la siguiente expresión para d , que es justamente la cantidad física que se quiere determinar:

$$d = \frac{\frac{v_0^2}{2g} + L \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \mu_r \cos \alpha}.$$

Capítulo 9

Colisiones y conservación del momento lineal

- 9-1.- Una estrella de *hockey* sobre hielo que pesa 756 N patina a una velocidad de $13\frac{\text{m}}{\text{s}}$ hacia un defensor que se mueve en la misma línea pero en sentido contrario a una velocidad de $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y que tiene un peso de 900 N , tal y como se muestra en la figura 9.1. Justo después de la colisión, el jugador estrella se mueve a $1.50\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en su dirección original. Sin tomar en cuenta las fuerzas horizontales externas aplicadas por el hielo a los jugadores antes y después del choque, calcule:
- ¿Qué velocidad tiene el defensor justo después del choque?
 - El cambio en la energía cinética total de ambos jugadores.

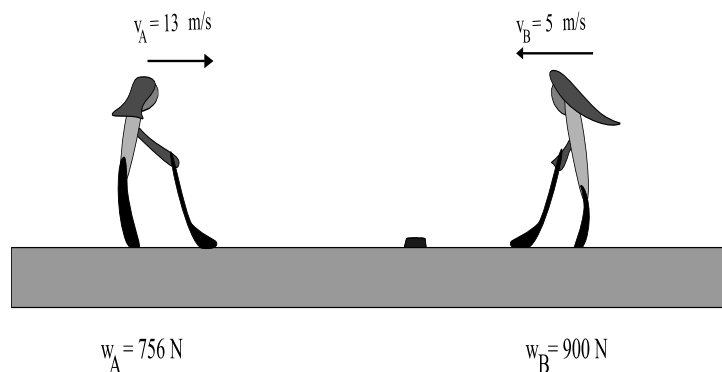


Figura 9.1: Choque entre dos jugadores de *hockey*.

Sol:

a) Para determinar la velocidad que tiene el defensor justo después del choque debe identificarse que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, la cantidad de movimiento lineal se conserva, ya que al estar patinando ambos jugadores sobre hielo, puede despreciarse la fuerza de fricción externa. Por otra parte, la tercera ley de Newton establece que la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero, por lo tanto se tiene que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.1)$$

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora bien, para calcular \vec{P}_{Total_i} y \vec{P}_{Total_f} llamando al jugador menos pesado por la letra A y al jugador más pesado por la letra B , de esta manera \vec{P}_{Total_i} está dado por:

$$\begin{aligned} P_{Total_i} &= m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i} = \\ &= v_{A_i} \frac{W_A}{g} + v_{B_i} \frac{W_B}{g} = 13 \left(\frac{756}{9.8} \right) + (-5) \left(\frac{900}{9.8} \right) \\ &= 543.67 \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

porque este problema es en una dimensión, además por la conservación de la cantidad de movimiento lineal total P_{Total_i} es igual a P_{Total_f} que está dado por:

$$\begin{aligned} P_{Total_f} &= m_A v_{A_f} + m_B v_{B_f} = P_{Total_i} = 543.67 \left(\text{kg} \frac{m}{s} \right) \\ &= v_{A_f} \frac{W_A}{g} + v_{B_f} \frac{W_B}{g} = 1.5 \left(\frac{756}{9.8} \right) + v_{B_f} \left(\frac{900}{9.8} \right) \\ &\Rightarrow \\ v_{B_f} &= \frac{P_{Total_i} - v_{A_f} \frac{W_A}{g}}{\frac{W_B}{g}} \\ &\Rightarrow \\ v_{B_f} &= 4.66 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Por lo tanto, la velocidad que tiene el defensor justo después del choque es de: $v_{B_f} = 4.66 \frac{m}{s}$.

b) Para determinar el cambio en la energía cinética total de ambos jugadores puede utilizarse el resultado del inciso anterior ya que:

$$\begin{aligned}
\Delta K &= K_f - K_i = \frac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_f}^2 - \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}m_A v_{A_i}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_i}^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2}m_A (v_{A_f}^2 - v_{A_i}^2) + \frac{1}{2}m_B (v_{B_f}^2 - v_{B_i}^2) \\
\implies \\
\Delta K &= -6582.6 \text{ J.} \tag{9.4}
\end{aligned}$$

9-2.- En un sistema físico dos bloques que se encuentran en reposo sobre una superficie plana sin fricción comprimen un resorte de masa despreciable, tal y como se muestra en la figura 9.2. El bloque *A* tiene una masa de 1 kg y el *B* una masa de 3 kg. Posteriormente el sistema se libera y el resorte cae a la superficie después de extenderse, debido a esto el bloque *B* adquiere una velocidad de $-1.20 \frac{m}{s}$.

a) ¿Qué velocidad final tiene el bloque *A*?

b) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en el resorte comprimido?

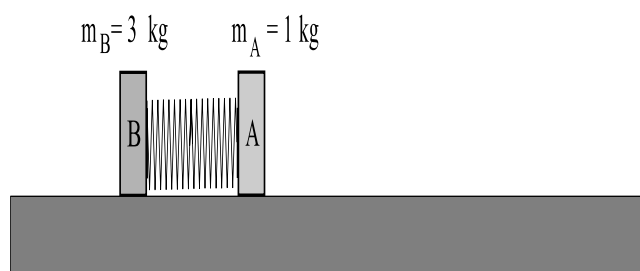


Figura 9.2: Sistema físico formado por dos bloques que inicialmente están comprimiendo a un resorte.

Sol:

a) Inicialmente el sistema físico se encuentra en reposo con una cantidad de energía $E_i = U_i = \frac{kx^2}{2}$ que está almacenada en forma de energía elástica en el resorte, en donde x corresponde a la compresión inicial del resorte. Al liberarse el sistema la energía elástica se transforma íntegramente en energía cinética de ambos bloques, ya que no hay fuerzas disipativas que actúen sobre el sistema:

$$E_i = U_i = K_f = E_f. \tag{9.5}$$

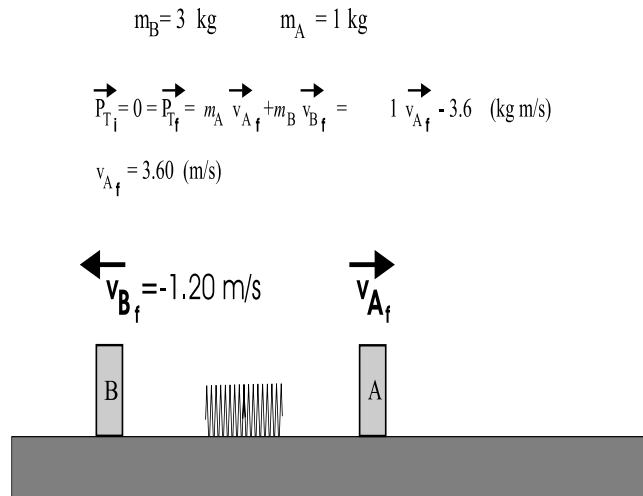


Figura 9.3: Al liberarse el sistema de bloques la energía mecánica elástica almacenada en el resorte se transforma en energía cinética de ambos bloques, de forma que el movimiento lineal total del sistema se conserva.

Por otra parte, durante el proceso en que el sistema transforma esta cantidad de energía (Fig. 9.3), con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas del sistema es igual a cero:

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = 0, \quad (9.6)$$

y en consecuencia la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conservará:

$$\vec{P}_T = \sum_i \vec{p}_i = Cte. \quad (9.7)$$

Inicialmente, al estar el sistema en reposo, la cantidad de movimiento del sistema era igual a cero, de manera que en la situación final la cantidad de movimiento lineal total del sistema también debe sumar cero, i.e:

$$\begin{aligned} P_{Ti} = 0 &= P_{Tf} = \\ &= m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = (1 v_{Af} - 3.60) \text{ kg} \frac{m}{s} = 0 \\ &\implies \\ v_{Af} &= 3.60 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

b) De acuerdo con la discusión del inciso anterior la energía potencial que se almacenó en el resorte comprimido es igual a la energía cinética total del sistema después de que el resorte se expande, i.e:

$$U_i = \frac{kx^2}{2} = K_f = \frac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_f}^2 = 8.64 J. \quad (9.9)$$

Por lo tanto, la energía potencial que inicialmente se almacenó en el resorte fue de 8.64 J.

9-3.- Un disco de *hockey* A que viaja a una velocidad de $40 \frac{m}{s}$ sobre una superficie de hielo golpea a otro disco B que se encontraba en reposo, después del impacto el disco A se desvía 30° respecto a su dirección original, tal y como se muestra en la figura 9.4, mientras que el disco B adquiere una velocidad a 45° respecto a la velocidad original de A. Los discos tienen la misma masa.

a) Calcule la rapidez de cada uno de los discos después del choque.

b) ¿Qué fracción de la energía cinética original de A se disipa durante el choque?

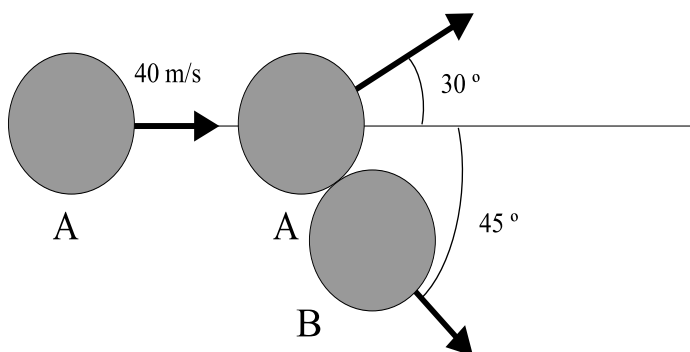


Figura 9.4: Diagrama de las trayectorias de dos discos de *hockey*.

Sol:

a) Para determinar la rapidez que tiene cada uno de los discos justo después del choque debe identificarse que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que al estar los discos de *hockey* sobre hielo puede despreciarse la fuerza de fricción externa y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.10)$$

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico formado por los discos de *hockey*. Ahora, para calcular $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ llamando al disco que inicialmente se encontraba desplazándose por la letra A y al disco inicialmente en reposo por la letra B , de esta manera $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ está dado por:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i}, \quad (9.11)$$

en donde m_A y m_B tienen el mismo valor, por lo tanto, debe uno concentrarse en los vectores velocidad de los discos antes y después del choque:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_{A_i} &= (40, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{\mathbf{v}}_{B_i} &= (0, 0) \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

adicionalmente, de la figura 9.4 resulta que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_{A_f} &= (v_{A_f} \cos 30, v_{A_f} \sen 30) \\ \vec{\mathbf{v}}_{B_f} &= (v_{B_f} \cos 45, -v_{B_f} \sen 45), \end{aligned} \quad (9.13)$$

por lo que $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ están dados por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\ &= m_A (40, 0) + m_B (0, 0) \\ \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_f} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_f} \\ &= m_A (v_{A_f} \cos 30, v_{A_f} \sen 30) + m_B (v_{B_f} \cos 45, -v_{B_f} \sen 45), \end{aligned} \quad (9.14)$$

la condición impuesta por la conservación del vector cantidad de movimiento $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ se escribe como:

$$\begin{aligned} m_A (40, 0) &= m_A (v_{A_f} \cos 30, v_{A_f} \sen 30) + m_B (v_{B_f} \cos 45, -v_{B_f} \sen 45) \\ \implies \\ 40 \frac{m}{s} &= \frac{\sqrt{3}}{2} v_{A_f} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{B_f} \\ 0 \frac{m}{s} &= \frac{1}{2} v_{A_f} - \frac{1}{\sqrt{2}} v_{B_f}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

donde se han cancelado las masas de ambos bloques porque éstas son iguales, de esta forma, la rapidez de cada uno de los discos después del choque está dada por:

$$\begin{aligned} v_{A_f} &= 29.28 \frac{m}{s} \\ v_{B_f} &= 20.70 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

b) La fracción de la energía cinética que posee el sistema físico después del choque está dada por el cociente de la energía cinética final entre la energía cinética inicial, i.e:

$$\begin{aligned} \frac{K_f}{K_i} &= \frac{\frac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_f}^2}{\frac{1}{2}m_A v_{A_i}^2} = \\ &= \frac{v_{A_f}^2 + v_{B_f}^2}{v_{A_i}^2} = 0.804, \end{aligned} \quad (9.17)$$

por lo tanto, la fracción de la energía cinética original que se disipa durante el choque es de:

$$1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - 0.804 = 0.196.$$

9-4.- En el cruce de la Avenida Texas y el Paseo Universitario, un auto subcompacto de 950 kg que viaja al este choca con una camioneta de 1900 kg que se ha pasado el alto de un semáforo mientras se dirigía hacia el norte, tal y como se muestra en la figura 9.5. Los dos vehículos quedan unidos después del impacto y se deslizan a $16 \frac{m}{s}$ en una dirección a 24° al este del norte. Calcule la rapidez de cada vehículo antes del choque. Como la colisión tiene lugar durante una tormenta las fuerzas de fricción entre los vehículos y el pavimento húmedo son despreciables.

Sol:

Para determinar la rapidez que tiene cada uno de los vehículos justo antes del choque debe identificarse que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que al estar los vehículos sobre pavimento mojado pueden despreciarse las fuerzas de fricción externas y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.18)$$

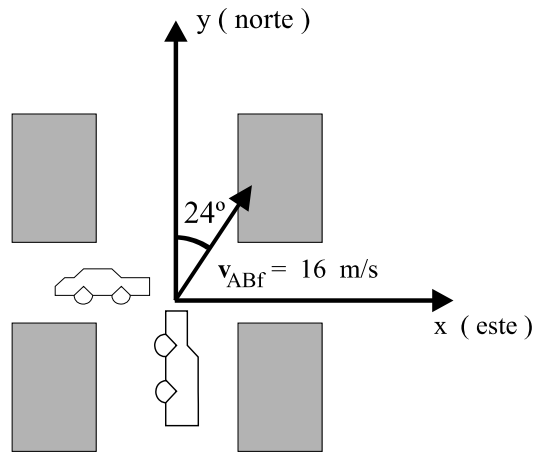


Figura 9.5: Diagrama de la colisión de dos vehículos.

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, para calcular $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ puede identificarse al vehículo menos pesado por la letra A y al vehículo más pesado por la letra B , de esta manera $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\
 &= m_A (v_{A_i}, 0) + m_B (0, v_{B_i}) \\
 &= (m_A v_{A_i}, m_B v_{B_i}),
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

después de la colisión el sistema físico se encuentra formado por un sólo objeto cuya masa es $m_A + m_B$, es decir, en el presente caso se tiene una colisión totalmente inelástica, por lo tanto, el movimiento lineal total después del impacto está dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (m_A + m_B) \vec{\mathbf{v}}_{AB_f} \\
 &= ((m_A + m_B) v_{AB_f} \cos 66, (m_A + m_B) v_{AB_f} \sin 66) \\
 &= (18547.2, 41657.67) \text{ kg} \frac{m}{s},
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

en donde $v_{AB} = 16 \frac{m}{s}$, $m_A = 950 \text{ kg}$ y $m_B = 1900 \text{ kg}$. Como $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ debe ser igual a $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (18547.2, 41657.67) \text{ kg} \frac{m}{s} = \\
&= \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = (m_A v_{A_i}, m_B v_{B_i}) \\
&\implies \\
(18547.2, 41657.67) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v_{A_i}, m_B v_{B_i}), \tag{9.21}
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
18547.2 \text{ kg} \frac{m}{s} &= m_A v_{A_i} \\
41657.67 \text{ kg} \frac{m}{s} &= m_B v_{B_i}, \tag{9.22}
\end{aligned}$$

por consiguiente, la rapidez del vehículo subcompacto antes del choque es:

$$v_{A_i} = 19.52 \frac{m}{s},$$

y la rapidez de la camioneta antes del choque es:

$$v_{B_i} = 21.92 \frac{m}{s}.$$

9-5.- Las esferas A , B y C que tienen una masa de 0.020 kg , 0.030 kg y 0.050 kg , respectivamente, se acercan al origen deslizándose sobre una mesa neumática sin fricción, tal y como se muestra en la figura 9.6. Las velocidades iniciales de A y B se indican en esta figura. Las tres esferas llegan al origen simultáneamente y después de impactarse se desplazan unidas.

a) ¿Qué componentes x y y debe tener la velocidad inicial de la esfera C si después del choque las tres se mueven juntas con una velocidad de $0.50 \frac{m}{s}$ en la dirección positiva de las x ?

b) Si la esfera C tiene la velocidad obtenida en el inciso anterior, ¿cuánto cambia la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque?

Sol:

a) Para determinar la rapidez que tiene la esfera C justo antes del choque, nuevamente debe identificarse que durante todo el proceso físico; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que las esferas están deslizándose sobre una mesa neumática sin fricción y por lo tanto, la resultante de las fuerzas externas es igual a cero y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

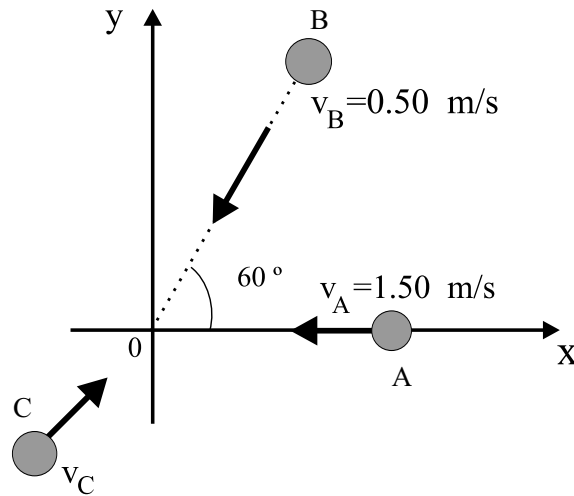


Figura 9.6: Diagrama de la trayectoria de tres esferas.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total} = cte = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}, \quad (9.23)$$

en donde i y f corresponde a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, para calcular $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ se deben obtener las componentes cartesianas de los vectores velocidad de las tres esferas antes y después de la colisión; con ayuda de la figura 9.6 se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_{A_i} &= (v_{B_i}, 0) = (-1.50, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{\mathbf{v}}_{B_i} &= (v_{B_i}, 0) = (-0.50 \cos 60, -0.50 \operatorname{sen} 60) \frac{m}{s} \\ \vec{\mathbf{v}}_{C_i} &= (v_{C_{ix}}, v_{C_{iy}}) \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

adicionalmente, debido a que la colisión es de tipo totalmente inelástico se tiene que:

$$\vec{\mathbf{v}}_{A_f} = \vec{\mathbf{v}}_{B_f} = \vec{\mathbf{v}}_{C_f} = \vec{\mathbf{v}}_{ABC_f} = (0.50, 0) \frac{m}{s}, \quad (9.25)$$

por lo tanto, de la conservación del movimiento lineal resulta que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} + m_C \vec{\mathbf{v}}_{C_i} \\ &= m_A (-1.50, 0) + m_B (-0.50 \cos 60, -0.50 \operatorname{sen} 60) + \\ &\quad + m_C (v_{C_{ix}}, v_{C_{iy}}) \\ &= \left(-1.50m_A - \frac{0.50}{2}m_B + m_C v_{C_{ix}}, -\frac{\sqrt{3}(0.50)}{2}m_B + m_C v_{C_{iy}} \right),\end{aligned}\quad (9.26)$$

en donde $m_A = 0.020 \text{ kg}$, $m_B = 0.030 \text{ kg}$ y $m_C = 0.050$, además:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (m_A + m_B + m_C) \vec{\mathbf{v}}_{ABC_f} \\ &= (m_A + m_B + m_C) (0.50, 0),\end{aligned}\quad (9.27)$$

por lo que:

$$\begin{aligned}\left(-1.50m_A - \frac{0.50}{2}m_B + m_C v_{C_{ix}}, -\frac{\sqrt{3}(0.50)}{2}m_B + m_C v_{C_{iy}} \right) &= \\ &= (m_A + m_B + m_C) (0.50, 0),\end{aligned}\quad (9.28)$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned}m_C v_{C_{ix}} &= 0.50 (m_A + m_B + m_C) + 1.50m_A + \frac{0.50}{2}m_B = 0.0875 \text{ kg} \frac{m}{s} \\ m_C v_{C_{iy}} &= \frac{\sqrt{3}(0.50)}{2}m_B = 0.01299 \text{ kg} \frac{m}{s},\end{aligned}\quad (9.29)$$

y finalmente:

$$\begin{aligned}v_{C_{ix}} &= 1.75 \frac{m}{s} \\ v_{C_{iy}} &= 0.26 \frac{m}{s} \\ v_{C_i} &= \sqrt{v_{C_{ix}}^2 + v_{C_{iy}}^2} = 1.77 \frac{m}{s},\end{aligned}\quad (9.30)$$

en donde v_{C_i} es la rapidez de la esfera C antes del choque.

b) Para determinar el cambio en la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= K_f - K_i = \\
 &= \frac{1}{2} [m_A + m_B + m_C] (v_{ABC_f})^2 - \\
 &\quad - \left[\frac{1}{2} m_A (v_{A_i})^2 + \frac{1}{2} m_B (v_{B_i})^2 + \frac{1}{2} m_C (v_{C_i})^2 \right] \\
 &= (0.0125 - 0.1045) J = -0.092 J.
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

Por lo tanto, durante el choque la energía cinética del sistema disminuyó en una cantidad de 0.092 J.

9-6.- Dos bloques se deslizan sin fricción a lo largo de una línea recta con velocidades constantes, tal y como se indica en la figura 9.7. Después de un intervalo de tiempo Δt , el bloque que tiene una masa de 1.6 kg alcanza a otro bloque que tiene una masa de 2.4 kg, originándose una colisión.

a) ¿Cuál es la velocidad \vec{v}_f del bloque de 1.6 kg después de la colisión?

b) ¿Es elástica la colisión?

c) Suponiendo que la velocidad inicial del bloque de 2.4 kg está dirigida en sentido opuesto al que se muestra en la figura 9.7. ¿Después de la colisión puede la velocidad del bloque de 1.6 kg ocurrir en la dirección que se muestra en la figura?

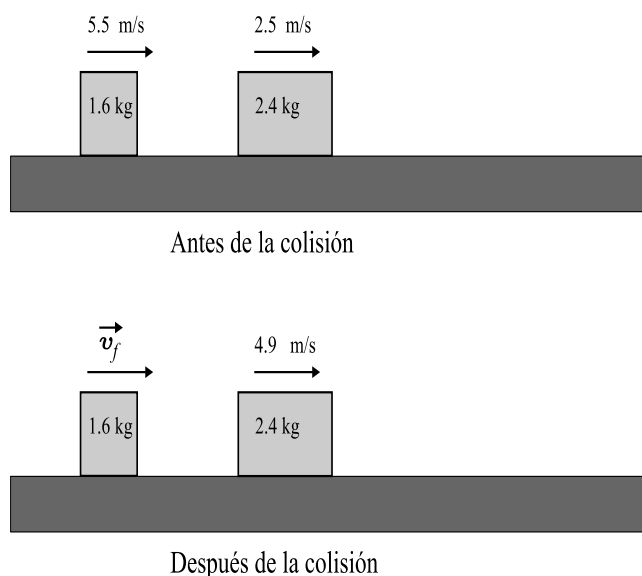


Figura 9.7: Diagramas de dos bloques, antes y después de que colisionan.

Sol:

Llamando al bloque de masa 1.6 kg como el bloque A y al bloque de masa 2.4 kg con la letra B .

a) Para determinar la velocidad \vec{v}_{Af} del bloque A cuya masa es $m_A = 1.6 \text{ kg}$ después de la colisión, debe identificarse que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que los bloques de la figura 9.7 se deslizan sobre una superficie horizontal sin fricción y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total} = cte = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}, \quad (9.32)$$

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico formado por los bloques A y B . Ahora, es necesario calcular $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$, en donde $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{v}_{A_i} + m_B \vec{v}_{B_i} \\ &= m_A (5.50, 0) + m_B (2.50, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &= (5.50m_A + 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

además:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= m_A \vec{v}_{A_f} + m_B \vec{v}_{B_f} \\ &= m_A (v, 0) + m_B (4.90, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &= (m_A v + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.34)$$

en donde v es la rapidez del bloque A después de la colisión y como $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$, $m_A = 1.6 \text{ kg}$ y $m_B = 2.4 \text{ kg}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} (5.50m_A + 2.50m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ \implies (5.50m_A + 2.50m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ \implies 14.8 \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} = (11.76 + m_A v) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ \implies v &= 1.9 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

b) Para determinar el tipo de colisión que representa el proceso físico anterior debe considerarse el valor del cambio de la energía cinética ΔK :

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= K_f - K_i = \\
 &= \frac{1}{2}m_A (v_{A_f})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{B_f})^2 - \\
 &\quad - \left[\frac{1}{2}m_A (v_{A_i})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{B_i})^2 \right] \\
 &= (31.7 - 31.7) \text{ J} = 0 \text{ J}.
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

Esto significa que la energía cinética total del sistema se conserva durante la colisión y por lo tanto, se trata de una colisión elástica.

c) Para determinar la velocidad \vec{v}_{A_f} del bloque A cuya masa es $m_A = 1.6 \text{ kg}$ después de la colisión, si ahora $\vec{v}_{B_i} = (-2.5, 0) \frac{m}{s}$, $\vec{v}_{A_i} = (5.5, 0) \frac{m}{s}$ y $\vec{v}_{B_f} = (4.9, 0) \frac{m}{s}$ se tiene que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \tag{9.37}$$

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, es necesario calcular \vec{P}_{Total_i} y \vec{P}_{Total_f} , en donde \vec{P}_{Total_i} está dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{Total_i} &= m_A \vec{v}_{A_i} + m_B \vec{v}_{B_i} \\
 &= m_A (5.50, 0) + m_B (-2.50, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
 &= (5.50m_A - 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s},
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

además, si \tilde{v} es la velocidad en la dirección x del bloque A después de la colisión, \vec{P}_{Total_f} está dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{Total_f} &= m_A \vec{v}_{A_f} + m_B \vec{v}_{B_f} \\
 &= m_A (\tilde{v}, 0) + m_B (4.90, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
 &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s},
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

y como $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$, $m_A = 1.6 \text{ kg}$ y $m_B = 2.4 \text{ kg}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 (5.50m_A - 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
 &\implies \\
 (5.50m_A - 2.50m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
 &\implies \\
 2.8 \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
 &\implies \\
 \tilde{v} &= -5.6 \frac{m}{s}, \tag{9.40}
 \end{aligned}$$

y el cambio en la energía cinética está dado por:

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= K_f - K_i = \\
 &= \frac{1}{2}m_A (v_{A_f})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{B_f})^2 - \\
 &\quad - \left[\frac{1}{2}m_A (v_{A_i})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{B_i})^2 \right] \\
 &= (53.9 - 31.7) \text{ J} = 22.20 \text{ J}. \tag{9.41}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad final $\vec{\mathbf{v}}_{A_f} = (\tilde{v}, 0) = (-5.6, 0) \frac{m}{s}$ del bloque A , de masa $m_A = 1.6 \text{ kg}$, no puede tener una dirección contraria a la que se muestra en la figura 9.7, ya que el sistema físico presentaría un incremento en su energía cinética, lo cual no está permitido de acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica total.

Capítulo 10

Dinámica de sistemas de partículas

10-1.- Dos recipientes idénticos llenos de azúcar están conectados por un cordón que pasa por una polea sin masa y sin fricción con un diámetro de 50 mm , como se muestra en la figura 10.1. Inicialmente los dos recipientes se encuentran al mismo nivel y cada uno de ellos originalmente tiene una masa de 500 g .

- a) ¿Cuál es la posición horizontal del centro de masa del sistema?
- b) Ahora se pasan 20 g de azúcar del recipiente de la izquierda al recipiente de la derecha, pero se evita que los recipientes se muevan verticalmente, ¿Cuál es la nueva posición horizontal del centro de masa de los recipientes, respecto al eje central que pasa por el recipiente mas ligero?
- c) Los dos recipientes se sueltan ahora, ¿en qué dirección se mueve el centro de masa?
- d) ¿Cuál es la aceleración del centro de masa?

Sol:

a) Debido a que inicialmente $m = m'$ el centro de masa se localiza a la mitad de la distancia horizontal entre los dos bloques es decir, el centro de masa se localiza a 25 mm a la derecha del bloque de masa m de la figura 10.1.

b) Cuando los bloques de masa m y m' de la figura 10.1 son $m = 480\text{ g}$ y $m' = 520\text{ g}$ de manera que los bloques permanezcan en reposo en la dirección vertical, la posición del centro de masa del sistema está dada por:

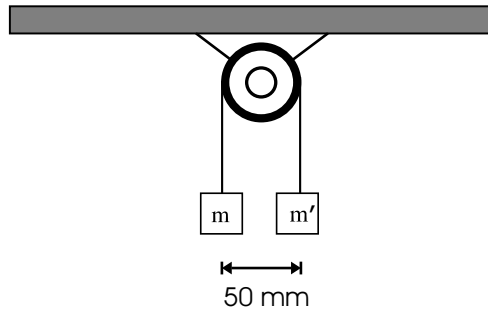


Figura 10.1: Determinación de la posición horizontal del centro de masa del sistema formado por las masas m y m' separadas 50 mm .

$$\begin{aligned}
 X_{C.M.} &= \frac{mX_m + m'X_{m'}}{m + m'} = \\
 &= \frac{(480\text{ g})(0\text{ mm}) + (520\text{ g})(50\text{ mm})}{480\text{ g} + 520\text{ g}} = \\
 &= \frac{(520\text{ g})(50\text{ mm})}{1000\text{ g}} = 26\text{ mm} , \tag{10.1}
 \end{aligned}$$

donde se ha elegido el origen del sistema de referencia en el centro del bloque de masa m , de manera que el centro de masa se encuentra a 26 mm a la derecha del bloque de masa m .

c) Si ahora los bloques se pueden mover libremente en la dirección vertical, de acuerdo a los diagramas de cuerpo libre de la figura 10.2, pueden escribirse las siguientes ecuaciones de movimiento para los dos bloques:

$$\begin{aligned}
 ma &= T - mg \\
 m'a &= m'g - T , \tag{10.2}
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$(m + m')a = (m' - m)g , \tag{10.3}$$

por lo que:

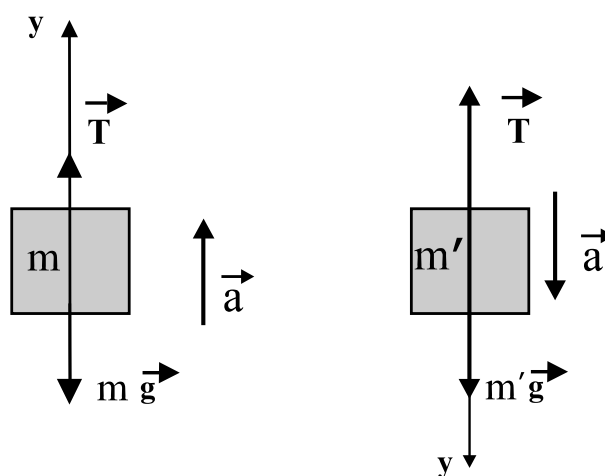


Figura 10.2: Diagramas de cuerpo libre de los bloques de masas m y m' utilizados para describir el movimiento del centro de masa del sistema.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(m' - m)g}{m + m'} \\
 &= \frac{(520\text{ g} - 480\text{ g})\left(9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{1000\text{ g}} = 0.392\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.
 \end{aligned}
 \tag{10.4}$$

De la ecuación (10.4) se observa que el sistema de masas m m' se desplazará de manera que el bloque de masa m' desciende verticalmente mientras que el bloque de masa m asciende verticalmente.

d) De acuerdo con la ecuación (10.4), la aceleración del centro de masa está dada por:

$$\begin{aligned}
 a_{C.M.} &= \frac{(ma + m'a')_y}{m + m'} = \frac{(m - m')a}{m + m'} \\
 &= \frac{(m' - m)^2 g}{(m + m')^2} = 0.01568\frac{\text{m}}{\text{s}^2},
 \end{aligned}
 \tag{10.5}$$

de manera que la aceleración del centro de masa es $a_{C.M.} = 0.01568\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, descendiendo verticalmente

10-2.- Una bola tiradora de masa $m = 165\text{ g}$ con una rapidez inicial de $v_0 = 2.00\frac{\text{m}}{\text{s}}$ rebota en la baranda de una mesa de billar, como se muestra en una vista superior

en la figura 10.3, el rebote invierte la componente y de la velocidad de la bola pero no altera la componente x .

a) ¿Cuál es el valor del ángulo θ que se indica en la figura 10.3?

b) ¿Cuál es el cambio en la cantidad de movimiento lineal de la bola en notación vectorial? (El hecho de que la bola rueda sobre la mesa sin resbalar no es relevante para el problema)

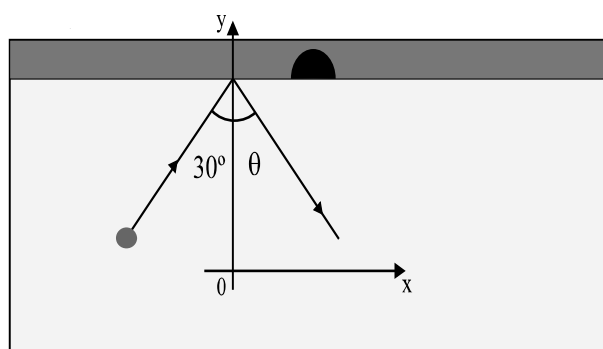


Figura 10.3: Conservación del momento lineal en una colisión elástica en una mesa de billar.

Sol:

a) El rebote de la bola de billar de esta situación física corresponde a una colisión elástica en dos dimensiones, debido a que si el rebote invierte la componente y de la velocidad de la bola pero no altera la componente x , se obtiene que:

Para determinar el ángulo θ del rebote de la bola puede utilizarse la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{v_{x_f}}{v_{y_f}} = \frac{v_{x_i}}{-v_{y_i}} \\ &= -\frac{v_{x_i}}{v_{y_i}} = -\operatorname{tg} 30^\circ \\ \implies \\ \theta &= 30^\circ, \end{aligned}$$

es decir, el ángulo θ es de 30° , donde se utiliza que en el rebote se cumple: $v_{y_f} = -v_{y_i}$.

b) Para determinar el cambio en el momento lineal de la bola en notación vectorial, el momento lineal de ésta antes y después del rebote se puede expresar de la siguiente manera:

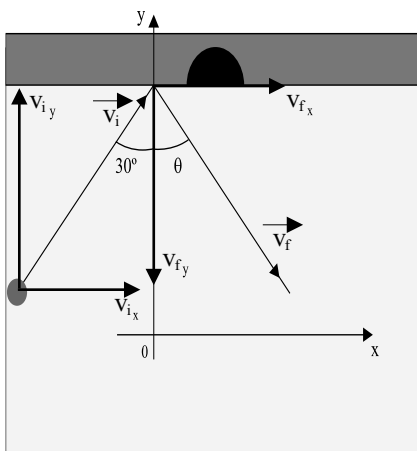


Figura 10.4: Descomposición vectorial de los vectores velocidad \vec{v}_i y \vec{v}_f .

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_i &= m\vec{v}_i \\
 &= (mv_{x_i}, mv_{y_i}) \\
 \vec{P}_f &= m\vec{v}_f \\
 &= (mv_{x_f}, mv_{y_f}) = (mv_{x_i}, -mv_{y_i}),
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

por lo que el cambio en el momento es:

$$\begin{aligned}
 \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i &= (mv_{x_f}, mv_{y_f}) - (mv_{x_i}, mv_{y_i}) \\
 &= (mv_{x_i}, -mv_{y_i}) - (mv_{x_i}, mv_{y_i}) \\
 &\implies \\
 \Delta\vec{P} &= (0, -2mv_{y_i}),
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

además, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 v_{y_i} &= v_0 \cos 30^\circ = 1.73 \frac{m}{s} \\
 m &= 165 \text{ g} = 0.165 \text{ kg},
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\Delta\vec{P} = (0, -0.571) \text{ kg} \frac{m}{s}.$$

10-3.- Considere el sistema físico formado por una mancuerna con dos esfera rígidas de masas distintas, cada una de ellas unidas a un extremo de una varilla delgada de longitud L y de masa despreciable. Esta mancuerna se desplaza horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de v . Demuestre que la energía cinética de la mancuerna está dada por:

$$K = \frac{1}{2} M_{C.M.} V_{C.M.}^2.$$

Donde $M_{C.M.}$ es la masa total del sistema y $V_{C.M.}$ es la velocidad del centro de masa.

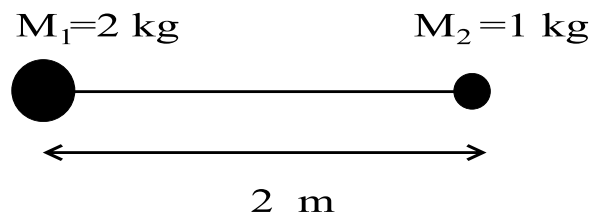


Figura 10.5: Energía cinética del centro de masa de una mancuerna rígida.

Sol:

En la presente situación física debe identificarse que la mancuerna como un todo se mueve con velocidad v por lo que la velocidad de las dos esferas que forman la mancuerna serán $v_1 = v_2 = v$, de manera que la velocidad del centro de masa está dada por:

$$\begin{aligned} V_{C.M.} &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 v + m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2) v}{m_1 + m_2} = v, \end{aligned}$$

además se tiene que:

$$M_{C.M.} = m_1 + m_2,$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_{C.M.} V_{C.M.}^2 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = K, \end{aligned}$$

por lo que finalmente se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} M_{C.M.} V_{C.M.}^2 .$$

10-4.- En la figura 10.6 se han representado gráficamente, en función del tiempo, las componentes de la cantidad de movimiento de dos cuerpos 1 y 2 que chocan en un plano. Complete las gráficas del lado derecho de la figura 10.6 mismas que representan las componentes de la cantidad de movimiento del cuerpo 2. Explique qué consideraciones físicas realiza para completar dichas gráficas.

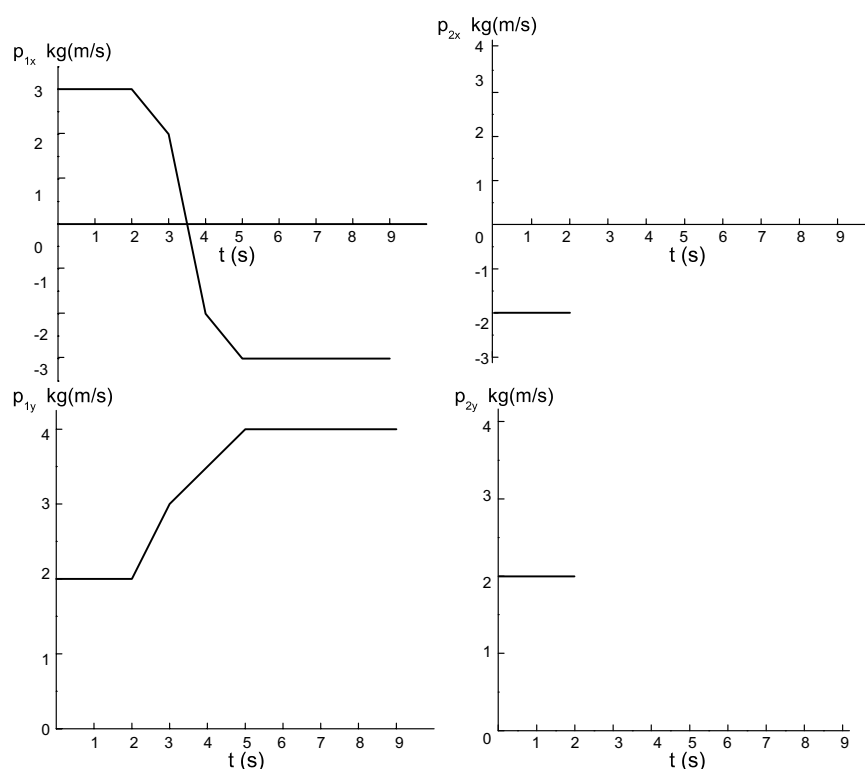


Figura 10.6: Conservación del momento lineal total de una colisión bidimensional.

Sol:

En esta situación física debe identificarse que; antes, durante y después del choque, la cantidad de movimiento lineal total se conserva, por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{Total} &= \text{Constante.} \\
&= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{Constante.} \\
\implies \\
\vec{P}_{Total} &= m_1 (v_{1x}, v_{1y}) + m_2 (v_{2x}, v_{2y}) = \text{Constante.} \\
\implies \\
P_{xTotal} &= m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = \text{Constante.} \\
P_{yTotal} &= m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = \text{Constante.}
\end{aligned} \tag{10.8}$$

así por ejemplo inicialmente $P_{xTotal} = m_1 v_{1xi} + m_2 v_{2xi} = 1$ y $P_{yTotal} = m_1 v_{1yi} + m_2 v_{2yi} = 4$, de manera que como el momento total como vector durante la colisión se mantiene constante ($\vec{P}_{Total} = \text{Constante.}$), para cualquier tiempo durante esta colisión se debe cumplir que:

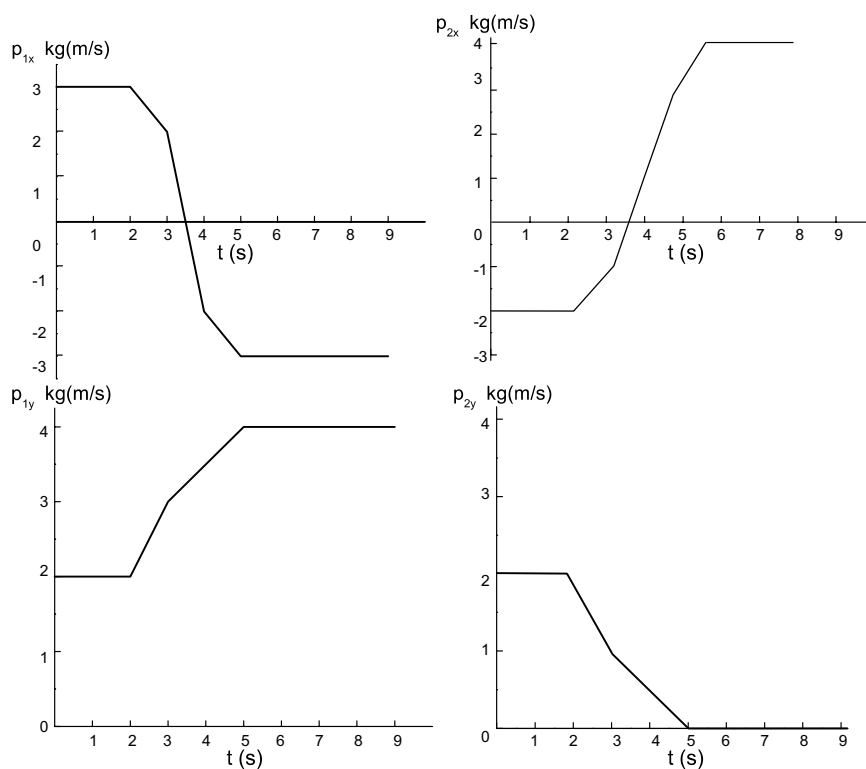


Figura 10.7: Durante la colisión bidimensional aplicando la conservación del momento lineal total la suma $p_{1x} + p_{2x}$ y $p_{1y} + p_{2y}$ deben permanecer constantes como se muestra en la figura.

$$\begin{aligned} P_{x_{Total}} &= m_1 v_{1_x} + m_2 v_{2_x} = 1 \\ P_{y_{Total}} &= m_1 v_{1_y} + m_2 v_{2_y} = 4. \end{aligned} \quad (10.9)$$

De manera que para completar las gráficas del lado derecho de la figura 10.6 que representan las componentes de la cantidad de movimiento del cuerpo 2, debe observarse que la condición impuesta por la ecuación (10.9) se cumpla.

Al completar las gráficas de las componentes de la cantidad de movimiento del cuerpo 2 cumpliendo las consideraciones anteriores se obtienen las gráficas que se muestran en la figura 10.7.

- 10-5.-** Una mujer de masa $m = 45 \text{ kg}$ está parada en una canoa de 60 kg de masa y 5 m de longitud, y comienza a caminar desde un punto a 1 m de un extremo hacia un punto a 1 m del otro extremo (veáse la figura 10.8). Si puede despreciarse la resistencia del movimiento de la canoa en el agua ¿qué distancia se mueve la canoa?

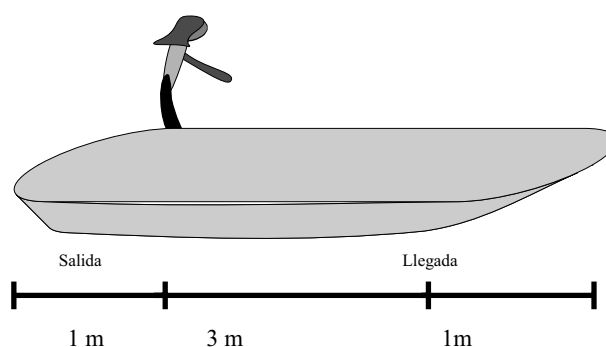


Figura 10.8: Movimiento relativo de una muchacha, respecto a una canoa.

Sol:

Durante el movimiento de la muchacha relativo a la canoa la posición del centro de masa del sistema compuesto *canoa - muchacha* debe permanecer constante, de manera que:

$$X_{C.M.I} = X_{C.M.F} ,$$

donde $X_{C.M.I}$ es la posición del centro de masa antes de que la muchacha comience a desplazarse hacia la derecha y $X_{C.M.F}$ es la posición del centro de masa cuando la muchacha se ha detenido a un metro del extremo final de la canoa.

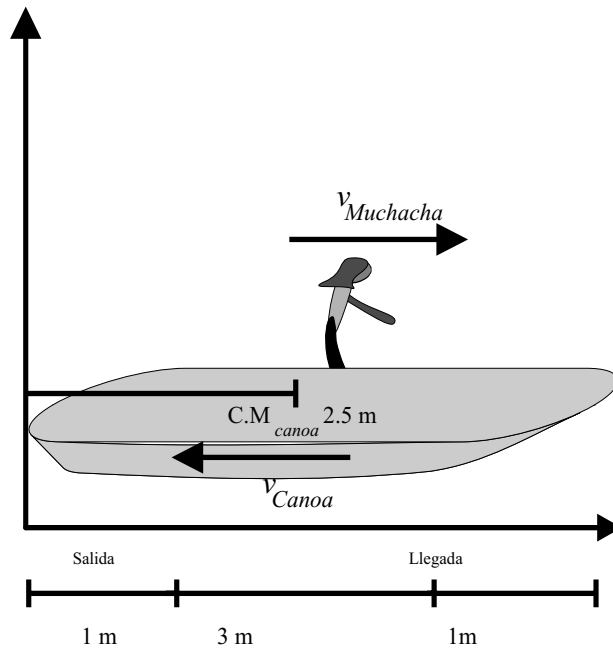


Figura 10.9: Movimiento relativo de una muchacha, respecto a una canoa.

Cuando la muchacha inicia su movimiento hacia la derecha (ver figura 10.9), para que la posición del centro de masa del sistema permanezca constante la canoa necesariamente debe moverse en sentido contrario.

Calculando la posición inicial del centro de masa se obtiene:

$$\begin{aligned} X_{C.M.I} &= \frac{m_{Canoa}X_{Canoa_I} + m_{Muchacha}X_{Muchacha_I}}{m_{Canoa} + m_{Muchacha}} = \\ &= \frac{(60 \text{ kg})(2.5 \text{ m}) + (45 \text{ kg})(1 \text{ m})}{60 \text{ kg} + 45 \text{ kg}} = 1.86 \text{ m} , \end{aligned}$$

donde se ha tomado $X_{Canoa_I} = 2.5 \text{ m}$ como la posición del centro de masa de la canoa aislada y $X_{Muchacha_I} = 1 \text{ m}$ como la posición inicial de la muchacha respecto al sistema de referencia mostrado en la figura 10.9. Por otra parte se tiene que la posición final del centro de masa del sistema es:

$$\begin{aligned} X_{C.M.F} &= \frac{m_{Canoa}X_{Canoa_F} + m_{Muchacha}X_{Muchacha_F}}{m_{Canoa} + m_{Muchacha}} = \\ &= \frac{(60 \text{ kg})X_{Canoa_F} + (45 \text{ kg})(X_{Canoa_F} + 1.5 \text{ m})}{60 \text{ kg} + 45 \text{ kg}} , \end{aligned}$$

donde se ha tomado en cuenta el hecho de que en la situación final la muchacha se encuentra a 1.5 m a la derecha del centro de masa de la canoa, igualando la posición

final e inicial del centro de masa se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (60 \text{ kg})(2.5 \text{ m}) + (45 \text{ kg})(1 \text{ m}) &= (60 \text{ kg} + 45 \text{ kg})X_{\text{Canoa}_F} + (45 \text{ kg})(1.5 \text{ m}) \\
 &\implies \\
 (60 \text{ kg})(2.5 \text{ m}) - (45 \text{ kg})(0.5 \text{ m}) &= (105 \text{ kg})X_{\text{Canoa}_F} \\
 &\implies \\
 X_{\text{Canoa}_F} &= 1.214 \text{ m},
 \end{aligned}$$

esto quiere decir que cuando la muchacha finalmente se ha detenido, el centro de la canoa ha retrocedido $2.5 - 1.214 = 1.286 \text{ m}$ respecto a su posición inicial.

10-6.- Imagine que una persona está parada en una plancha de concreto que descansa sobre un lago congelado. Suponga que no hay fricción entre la plancha y el hielo. La plancha pesa cinco veces más que la persona. Si la persona comienza a caminar a $2 \frac{m}{s}$ relativo al hielo, ¿con qué rapidez relativa al hielo se moverá la plancha?

Sol:

En esta situación física la velocidad del centro de masa $V_{C.M.}$ debe permanecer constante debido a que el sistema formado por la plancha junto con la persona se encuentra libre de la acción de fuerzas externas.

Por lo tanto:

$$V_{C.M.} = \frac{m_{\text{Plancha}}V_{\text{Plancha}} + m_{\text{Persona}}V_{\text{Persona}}}{m_{\text{Plancha}} + m_{\text{Persona}}} = \text{Constante},$$

en donde debe considerarse que la plancha pesa cinco veces más que la persona, por lo que:

$$m_{\text{Plancha}} = 5m_{\text{Persona}}.$$

Antes de que la persona comience a desplazarse sobre la plancha la velocidad inicial del centro de masa del sistema es igual a cero ($V_{C.M.I} = 0$), mientras que la velocidad del centro de masa después de que la persona inicia su movimiento es:

$$\begin{aligned}
V_{C.M.F} &= \frac{m_{Plancha}V_{Plancha_F} + m_{Persona}V_{Persona_F}}{m_{Plancha} + m_{Persona}} = \\
&= \frac{m_{Plancha}V_{Plancha_F} + \frac{1}{5}m_{Plancha}V_{Persona_F}}{m_{Plancha} + \frac{1}{5}m_{Plancha}} = \\
&= \frac{V_{Plancha_F} + \frac{1}{5}V_{Persona_F}}{\frac{6}{5}} = 0 \\
&\implies \\
V_{Plancha_F} &= -\frac{1}{5}V_{Persona_F} \\
&\implies \\
V_{Plancha_F} &= -\frac{1}{5}\left(2\frac{m}{s}\right) = -0.4\frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

Es decir, la plancha se moverá en dirección contraria a la persona con una rapidez de $0.4 \frac{m}{s}$.

Parte V. Movimiento rotacional

En esta parte del libro se presentan varios problemas relacionados con el movimiento rotacional de un objeto en función del tiempo. Se analizan ciertas situaciones físicas para el movimiento rotacional en las que es posible apreciar algunas analogías con la cinemática traslacional considerada en la parte II.

Se analizan algunos problemas relacionados con las leyes de Newton aplicadas al movimiento rotacional. En estos ejercicios el producto vectorial entre dos vectores resulta de gran utilidad para introducir el concepto de momento de una fuerza alrededor de un eje instantáneo de giro. La descripción dinámica de un cuerpo sólido se efectúa no sólo para su movimiento rotacional, sino también para el movimiento de traslación del centro de masa del objeto.

Se ha buscado que estos problemas permitan a los estudiantes entender y aplicar correctamente las leyes de Newton en la dinámica rotacional.

Se plantean algunos problemas sobre la conservación de la energía mecánica total, en los cuales es necesario considerar la contribución de la energía cinética rotacional. Se presentan ejemplos del efecto que tiene el momento de inercia de un cuerpo en la energía cinética y en consecuencia en el movimiento descrito por el objeto.

También se presentan ejercicios sobre la conservación del momento angular y la relación existente entre éste y el momento de una fuerza respecto al eje instantáneo de giro. Además se han considerado problemas en donde interviene la conservación del momento angular para situaciones en las que una partícula puntual sufre una colisión con un cuerpo sólido.

Capítulo 11

Cinemática rotacional

- 11-1.-** El Sol se halla a 2.3×10^4 años luz del centro de nuestra galaxia (La Vía Láctea), y se mueve en un círculo alrededor de ese centro con una rapidez de $250 \frac{km}{s}$
- a) ¿Cuánto tarda el Sol en completar una revolución alrededor del centro galáctico?
- b) ¿Cuántas revoluciones ha realizado desde que se formó el Sol hace unos 4.5×10^9 años?

Sol:

- a) Lo primero es conocer a cuantos *km* equivale un año luz, para esto se utiliza la definición de un año luz:

Un año luz = La distancia recorrida por la luz en un año terrestre.

$$\text{Un año luz} = 365 \text{ días} \times 300000 \frac{km}{s}$$

$$\text{Un año luz} = 365 \times 24 \text{ hrs} \times 60 \text{ min} \times 60 \text{ s} \times 300000 \frac{km}{s}$$

$$\text{Un año luz} = 9.461 \times 10^{12} \text{ km}$$

De manera que la distancia que debe recorrer el Sol para darle una vuelta completa a la La Vía Láctea es igual a:

$$D = 2\pi R = 2\pi \times 2.3 \times 10^4 \text{ años luz}$$

$$D = 1.367 \times 10^{18} \text{ km}.$$

Por lo que el Sol tardara en darle un a vuelta a la La Vía Láctea, un tiempo *T* igual a:

$$\begin{aligned} T &= \frac{D}{v} = 5.469 \times 10^{15} \text{ s} \\ &= 1.73 \times 10^8 \text{ años.} \end{aligned}$$

b) El número de revoluciones, N , realizadas por el Sol desde su nacimiento, hace unos 4.5×10^9 años, vendrá dado por:

$$N = \frac{4.5 \times 10^9 \text{ años}}{1.73 \times 10^8 \text{ años}} = 25.9 \text{ vueltas.}$$

11-2.- Una rueda gira con una aceleración angular α_z dada por:

$$\alpha_z = at^3 - 3bt^2,$$

donde t es el tiempo a y b son constantes. Si la rueda tiene una velocidad inicial ω_0 , escriba las ecuaciones de:

- a) la velocidad angular ω y del
- b) ángulo recorrido $\Delta\phi$ en función del tiempo.

Sol:

a) Para poder obtener una expresión para la rapidez angular (ω), debe utilizarse la definición de la aceleración angular:

$$\begin{aligned} \alpha_z &= \frac{d\omega}{dt} \\ \implies \Delta\omega = \omega - \omega_i &= \int_{\omega_0}^{\omega} \omega dt = \int_0^t \alpha_z dt', \end{aligned}$$

aplicando la condición inicial $\omega_i = \omega_0$ cuando $t = 0$, se obtiene, para la rapidez angular ω :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \int (at^3 - 3bt^2) dt = \\ &= \omega_0 + \frac{at^4}{4} - bt^3. \end{aligned}$$

b) De manera análoga el ángulo recorrido $\Delta\phi$ en función del tiempo puede obtenerse aplicando la definición de la rapidez angular:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\phi}{dt} \\ \implies \\ \Delta\phi = \phi - \phi_i &= \int \omega dt ,\end{aligned}$$

de esta forma se obtiene para $\Delta\phi$ en función del tiempo:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int \left(\omega_0 + \frac{at^4}{4} - bt^3 \right) dt \\ \Delta\phi &= \omega_0 t + \frac{at^4}{20} - \frac{bt^4}{4} ,\end{aligned}$$

11-3.- Un buen lanzador de béisbol puede arrojar la pelota hacia el bateador a $135 \frac{km}{h}$ con un efecto de giro de $1800 \frac{rev}{min}$. ¿Cuántas revoluciones realiza la pelota antes de llegar al bateador? Suponga que la trayectoria de la pelota es de $18 m$.

Sol:

Una importante característica de los ejercicios en cualquier área de la física es la necesidad de considerar todas las cantidades físicas involucradas en un sólo sistema de unidades así en este ejercicio se consideran sólo las unidades $\frac{m}{s}$, $\frac{rad}{s}$, etc. De manera que:

$$\begin{aligned}\omega &= 1800 \frac{rev}{min} = 188.5 \frac{rad}{s} \\ v &= 135 \frac{km}{h} = 37.5 \frac{m}{s} .\end{aligned}$$

Ahora si la pelota se desplaza con una velocidad $v = 37.5 \frac{m}{s}$, la pelota tarda en recorrer los $18 m$ en un tiempo:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{18 m}{37.5 \frac{m}{s}} = 0.48 s ,$$

y el número de revoluciones (N), resulta ser:

$$\omega t = 188.5 \frac{rad}{s} 0.48 s = 90.48 rad = 14.4 \text{ revoluciones} .$$

11-4.- ¿Qué rapidez angular tiene un automóvil que realiza una vuelta circular de radio 110 m con una rapidez de $52.4\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Sol:

Primero hay que considerar todas las cantidades físicas involucradas en un sólo sistema de unidades así en este ejercicio se tiene: $v = 52.4\frac{\text{km}}{\text{h}} = 14.55\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ahora aplicando la relación entre variables angulares y traslacionales ($v = \omega R$), con R el radio ($R = 110\text{ m}$) de la vuelta circular, de manera que la rapidez angular del automóvil está dada por:

$$\omega = \frac{v}{R} = 0.132\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

11-5.- Si una hélice de avión de radio 1.5 m gira a $2000\frac{\text{rev}}{\text{min}}$ y si el avión se impulsa a una velocidad absoluta de $480\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) ¿Qué rapidez tiene un punto del borde de la hélice vista por el piloto?

b) ¿Qué rapidez tiene un punto del borde de la hélice vista por un observador en el suelo?

Suponga que la velocidad del avión es paralela al eje de rotación de la hélice.

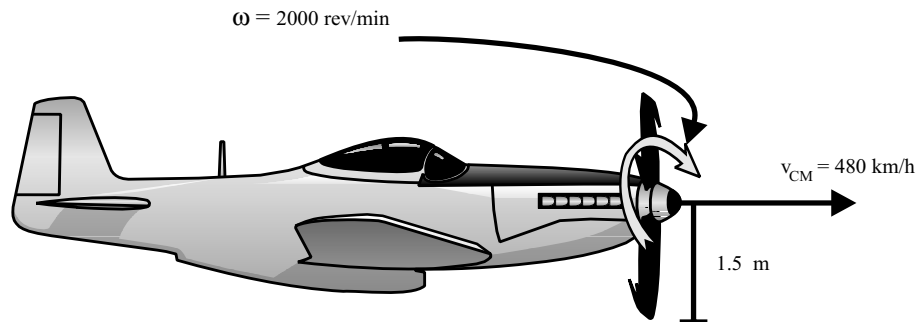


Figura 11.1: Rapidez angular de una hélice de avión y velocidad del centro de masa del mismo.

Sol:

a) Expresando todas las cantidades físicas involucradas en un sólo sistema de unidades así en este ejercicio se tiene que: $480\frac{\text{km}}{\text{h}} = 133.33\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\omega = 2000\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 209.44\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Ahora aplicando la relación para la rapidez tangencial de cualquier punto en el extremo

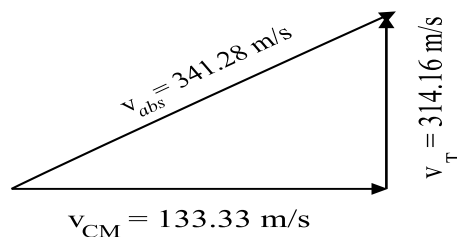


Figura 11.2: Rapidez absoluta resultante de la suma vectorial de la velocidad tangencial del borde de la hélice y la velocidad del centro de masa del avión.

de la hélice ($v_T = \omega R$), con R el radio ($R = 1.50 \text{ m}$) de la hélice del avión, se encuentra para la rapidez del borde de la hélice, medida por el piloto del avión:

$$v_{\text{Borde}} = \omega R = 314.16 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Ahora para determinar la rapidez absoluta del borde de la hélice medida por un observador en el piso debe calcularse la velocidad resultante de sumar la velocidad tangencial del borde de la hélice con la velocidad del centro de masa del avión.

Como se observa en la figura 11.1, la velocidad tangencial del borde de la hélice y la velocidad del centro de masa del avión en todo momento son perpendiculares entre sí, de acuerdo con la figura 11.2, la rapidez absoluta del borde de la hélice medida por un observador en el piso está dada por

$$v_{\text{abs}} = \sqrt{v_{\text{Borde}}^2 + v_{\text{CM}}^2} = 341.28 \frac{\text{m}}{\text{s}} ,$$

esta rapidez es la que un observador en tierra mediría para el borde de la hélice.

11-6.- La posición de un punto en el borde de una rueda giratoria se describe por medio de la siguiente relación $\phi = (4 \frac{\text{rad}}{\text{s}})t - (3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2})t^2 + (1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^3})t^3$.

- ¿Cuál es la rapidez angular en $t = 2 \text{ s}$ y en $t = 4 \text{ s}$?
- ¿Cuál es la aceleración angular promedio para el intervalo de tiempo que comienza en $t = 2 \text{ s}$ y termina en $t = 4 \text{ s}$?
- ¿Cuál es la aceleración angular instantánea al inicio y al final del intervalo considerado en el inciso b)?

Sol:

a) Para poder obtener una expresión para la rapidez angular (ω), debe utilizarse la definición de la rapidez angular como el cambio instantáneo del ángulo desplazado respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\phi}{dt} \\ \Rightarrow \\ \omega &= \frac{d}{dt} \left[\left(4 \frac{\text{rad}}{s}\right)t - \left(3 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)t^2 + \left(1 \frac{\text{rad}}{s^3}\right)t^3 \right] \\ &= \left(4 \frac{\text{rad}}{s}\right) - \left(6 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)t + \left(3 \frac{\text{rad}}{s^3}\right)t^2 ,\end{aligned}$$

por lo que la rapidez angular en $t = 2 \text{ s}$ es:

$$\begin{aligned}\omega(t = 2 \text{ s}) &= \left(4 \frac{\text{rad}}{s}\right) - \left(6 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)(2 \text{ s}) + \left(3 \frac{\text{rad}}{s^3}\right)(2 \text{ s})^2 = \\ &= 4 \frac{\text{rad}}{s}\end{aligned}$$

y la rapidez angular en $t = 4 \text{ s}$ es:

$$\begin{aligned}\omega(t = 4 \text{ s}) &= \left(4 \frac{\text{rad}}{s}\right) - \left(6 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)(4 \text{ s}) + \left(3 \frac{\text{rad}}{s^3}\right)(4 \text{ s})^2 = \\ &= 28 \frac{\text{rad}}{s} .\end{aligned}$$

b) Para la aceleración angular promedio ($\bar{\alpha}$) durante el intervalo de tiempo que comienza en $t = 2 \text{ s}$ y termina en $t = 4 \text{ s}$ se obtiene:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{28 - 4}{4 - 2} = 12 \frac{\text{rad}}{s^2} . \quad (11.1)$$

c) Para poder obtener una expresión para la aceleración angular instantánea (α), debe utilizarse la definición de la aceleración angular como el cambio instantáneo de la rapidez angular respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dt} \\ \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{d}{dt} \left[\left(4 \frac{\text{rad}}{s}\right) - \left(6 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)t + \left(3 \frac{\text{rad}}{s^3}\right)t^2 \right] \\ &= \left(-6 \frac{\text{rad}}{s^2}\right) + \left(6 \frac{\text{rad}}{s^3}\right)t ,\end{aligned}$$

por lo que la aceleración angular en $t = 2 \text{ s}$ es:

$$\begin{aligned}\alpha(t = 2 \text{ s}) &= \left(-6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) + \left(6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^3}\right)(2 \text{ s}) = \\ &= 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

y la aceleración angular en $t = 4 \text{ s}$ es:

$$\begin{aligned}\alpha(t = 4 \text{ s}) &= \left(-6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) + \left(6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^3}\right)(4 \text{ s}) = \\ &= 18 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.\end{aligned}$$

11-7.- A un astronauta se le realizan pruebas en una centrifugadora con el fin de medir su resistencia al despegue en un transbordador espacial. La centrifugadora tiene un radio de 10.4 m , y al inicio gira de acuerdo a la relación $\phi = (0.326 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2})t^2$. Cuando $t = 5.60 \text{ s}$ cuáles son:

- La rapidez angular del astronauta .
- La rapidez tangencial del astronauta.
- La aceleración tangencial del astronauta.
- La aceleración centrípeta del astronauta.

Sol:

a) Para obtener la expresión para la rapidez angular del astronauta (ω), debe utilizarse la definición de la rapidez angular como el cambio instantáneo del ángulo desplazado respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\phi}{dt} \\ \implies \\ \omega &= \frac{d}{dt} \left[(0.326 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2})t^2 \right] \\ &= (0.652 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2})t ,\end{aligned}$$

por lo que la rapidez angular en $t = 5.60 \text{ s}$ es:

$$\begin{aligned}\omega(t = 5.60 \text{ s}) &= (0.652 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}) \times (5.60 \text{ s}) = \\ &= 3.65 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Ahora para la aceleración angular se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dt} \\ \implies \\ \alpha &= \frac{d}{dt} \left[\left(0.652 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) t \right] \\ &= 0.652 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},\end{aligned}$$

por lo que la aceleración angular en $t = 5.60 \text{ s}$ es:

$$\alpha(t = 5.60 \text{ s}) = 0.652 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

b) Aplicando la relación para la rapidez tangencial del astronauta en términos de su rapidez angular ($v_T = \omega R$), con R el radio ($R = 10.4 \text{ m}$) de la centrifugadora, por lo que la rapidez tangencial en $t = 5.60 \text{ s}$ es:

$$v_T(5.60 \text{ s}) = \omega R = 37.97 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Aplicando la relación para la aceleración tangencial del astronauta en términos de su aceleración angular ($a_T = \alpha R$), por lo que la aceleración tangencial en $t = 5.60 \text{ s}$ es:

$$a_T = \alpha R = 6.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

d) Finalmente, aplicando la relación para la aceleración centrípeta del astronauta en términos de su rapidez angular ($a_C = \omega^2 R$), por lo que la aceleración tangencial en $t = 5.60 \text{ s}$ es:

$$a_C = \omega^2 R = 138.55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Capítulo 12

Dinámica rotacional

12-1.- Como se muestra en la figura 12.1, se hicieron nueve hoyos cuadrados en una placa cuadrada. La placa tiene longitud L y los hoyos una longitud a . Éstos se encuentran en el centro de los cuadrados pequeños formados al dividir cada lado del cuadrado en tres secciones iguales. Calcule el momento de inercia de este objeto alrededor de un eje perpendicular a la placa que atraviesa el centro de la placa.

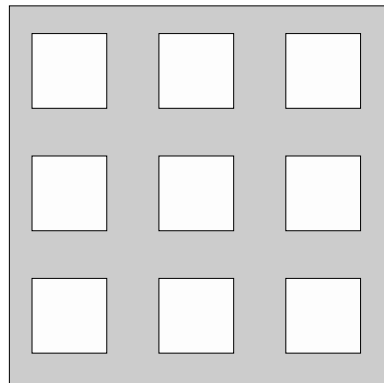


Figura 12.1: Momento de inercia de una placa cuadrada a la que se le han retirado nueve cuadrados de lado a .

Sol:

Se tiene un placa cuadrada de masa M , densidad superficial uniforme ρ y lado L a la cual se le han retirado 9 pequeños cuadrados de lado a y masa M_0 , donde:

$$M_0 = \rho a^2 = \left(\frac{M}{L^2}\right) a^2.$$

El momento de inercia para la placa de lado L estaría dado por:

$$I_{rect.} = \frac{ML^2}{6},$$

si no faltaran los nueve cuadrados pequeños.

El momento de inercia de la placa de la figura 12.1 puede calcularse como el momento de inercia de una placa cuadrada alrededor de un eje de rotación que pasa perpendicularmente por el centro de la placa cuadrada de lado L , quitándole las contribuciones de los nueve cuadrados que se han retirado.

Para encontrar los momentos de inercia de los nueve cuadrados pequeños de lado a , debe aplicarse el teorema de los ejes paralelos, porque se necesita determinar el momento de inercia de los cuadrados respecto a un eje de rotación que no pasa por el centro de los cuadrados, excepto para el cuadrado pequeño del centro (ver figura 12.2). El teorema de los ejes paralelos establece que:

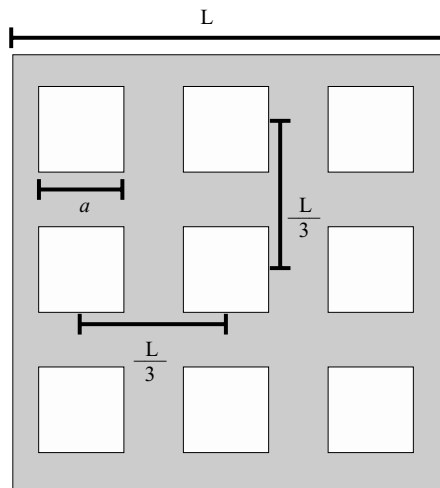


Figura 12.2: Ubicación de los nueve cuadrados de lado a faltantes en una placa cuadrada de lado L .

$$I = I_0 + M_0d^2,$$

donde $I_0 = \frac{M_0a^2}{6}$ y d es la distancia entre el centro de cada cuadrado pequeño y el centro del cuadrado grande.

De esta forma el momento de inercia para cada uno de los cuatro cuadrados que se encuentran a una distancia $d = \frac{L}{3}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
 I(d = \frac{L}{3}) &= I_0 + M_0 d^2 = \frac{M_0 a^2}{6} + M_0 \left(\frac{L}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{M_0 a^2}{6} + \frac{M_0 L^2}{9},
 \end{aligned}$$

el momento de inercia para cada uno de los cuatro cuadrados que se encuentran en las esquinas a una distancia $d = \frac{\sqrt{2}L}{3}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
 I(d = \frac{\sqrt{2}L}{3}) &= I_0 + M_0 d^2 = \frac{M_0 a^2}{6} + M_0 \left(\frac{\sqrt{2}L}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{M_0 a^2}{6} + \frac{2M_0 L^2}{9},
 \end{aligned}$$

y el momento de inercia para el cuadrado que se encuentra en el centro está dado por:

$$I(d = 0) = \frac{M_0 a^2}{6}.$$

Por lo tanto el momento de inercia de la placa de la figura 12.1 es:

$$\begin{aligned}
 I &= I_{rect.} - 4I(d = \frac{L}{3}) - 4I(d = \frac{\sqrt{2}L}{3}) - I(d = 0) \\
 &= \frac{ML^2}{6} - 9\frac{M_0 a^2}{6} - 4\frac{M_0 L^2}{9} - 4\frac{2M_0 L^2}{9} = \\
 &= \frac{ML^2}{6} - \frac{3Ma^2}{2L^2} - 4\frac{Ma^2}{3}.
 \end{aligned}$$

12-2.- Una rueda de carreta como la que se muestra en la figura 12.3 tiene un radio de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg . Cada rayo, se encuentra sobre un diámetro de la circunferencia de la rueda y tiene una masa de 0.280 kg .

¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro perpendicular al plano de la rueda?

Sol:

De acuerdo con la definición de momento de inercia:

$$I = \int r^2 dm,$$

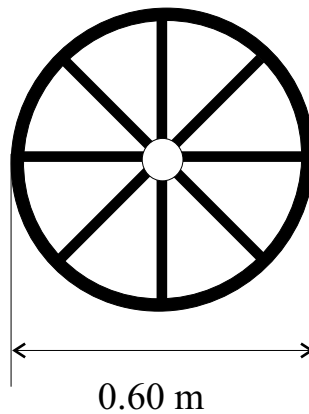


Figura 12.3: Momento de inercia de una rueda alrededor de un eje que pasa por su centro perpendicular al plano de la rueda.

se tiene que el momento de inercia de un aro de radio R respecto a un eje de giro que pasa por el centro del aro es:

$$I_{\text{aro}} = MR^2,$$

donde M es la masa del aro ($M = 1.40 \text{ kg}$) y el momento de inercia de una varilla delgada de longitud L respecto a un eje de giro que pasa por la mitad de la barra es:

$$I_{\text{varilla}} = \frac{mL^2}{12},$$

donde m es la masa de cada una de las cuatro varillas ($m = 0.280 \text{ kg}$).

Ahora en nuestro caso la rueda de la figura 12.3 puede considerarse como formada por un aro y 4 varillas delgadas que giran siempre unidas y entonces $L = 2R$, de manera que $I_{\text{varilla}} = \frac{m(2R)^2}{12}$, por lo que el momento de inercia de la rueda es:

$$\begin{aligned} I_{\text{rueda}} &= I_{\text{aro}} + 4I_{\text{varilla}} = MR^2 + 4\frac{m(2R)^2}{12} \\ &= MR^2 + \frac{16m(R)^2}{12} = \left(1 + \frac{4m}{3M}\right) MR^2 = 0.1596 \text{ kgm}^2. \end{aligned}$$

12-3.- Se aplican fuerzas $F_1 = 7.50 \text{ N}$ y $F_2 = 5.30 \text{ N}$ tangencialmente a una rueda de radio $r = 0.33 \text{ m}$, produciendo cada fuerza un momento de fuerza (τ) contrario al de la otra fuerza (ver figura 12.4).

¿Qué momento de fuerza neto producen sobre la rueda estas fuerzas, respecto a un eje perpendicular al plano de la rueda que pasa por su centro?

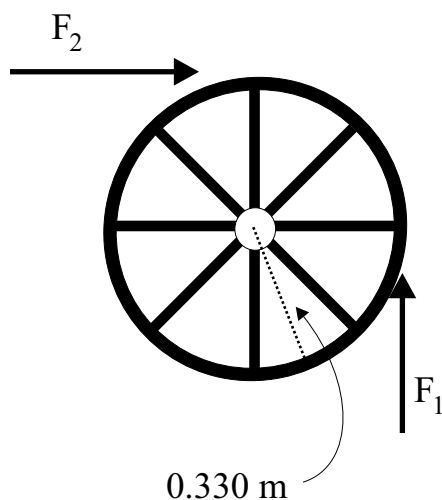


Figura 12.4: Momento de fuerza debido a las fuerzas F_1 y F_2 aplicadas a una rueda de radio r .

Sol:

De acuerdo con la definición del momento de una fuerza $\vec{\tau}$ ³ respecto a un eje de rotación, $\vec{\tau}$ está dada por:

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}},$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ respecto al eje de rotación y el símbolo \times se define como el producto vectorial de los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$.

El producto vectorial de $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ & (yF_z - zF_y)\hat{e}_x + \\ & (zF_x - xF_z)\hat{e}_y + \\ & (xF_y - yF_x)\hat{e}_z. \end{aligned}$$

La magnitud del vector $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ esta dada por:

³En algunos textos al momento de una fuerza, se le conoce como “torca” (derivado del latín “torcere”).

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \phi,$$

donde ϕ es el ángulo formado por los vectores \vec{r} y \vec{F} .

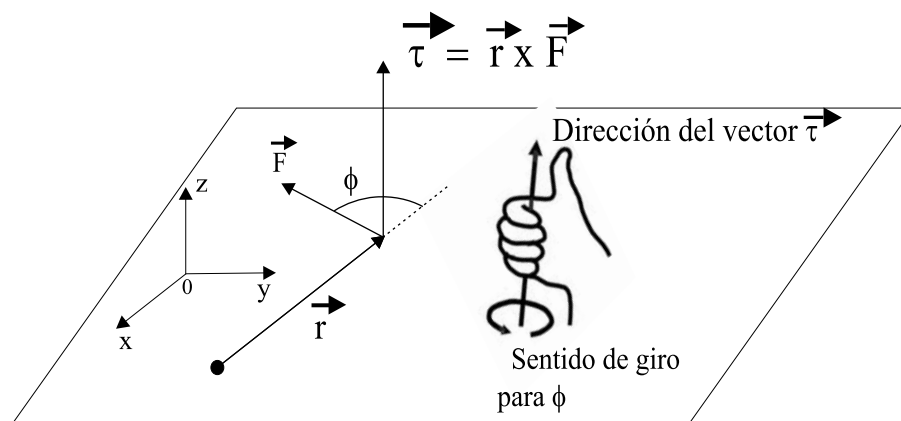


Figura 12.5: Regla de la mano derecha para el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ en dirección positiva del eje z .

La regla de la mano derecha determina la dirección del vector $\vec{r} \times \vec{F}$, esta dirección está dada por la dirección en la que apunta el dedo pulgar cuando la mano derecha se gira un ángulo ϕ partiendo de \vec{r} hasta llegar al vector \vec{F} .

Considerando los vectores \vec{r} y \vec{F} de la figura 12.5, de acuerdo a la regla de la mano derecha la dirección del vector $\vec{r} \times \vec{F}$ es la dirección positiva del eje z .

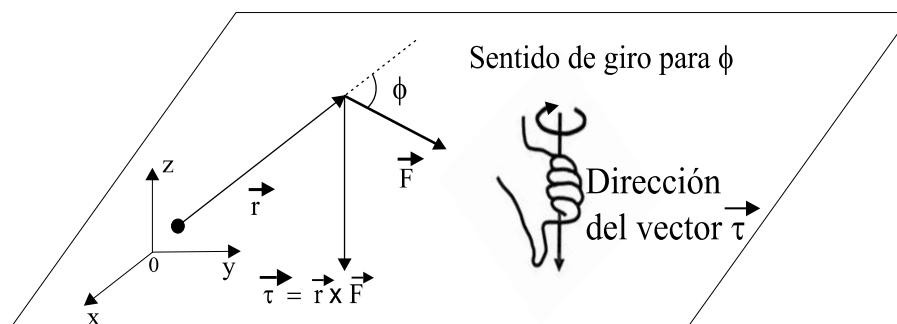


Figura 12.6: Regla de la mano derecha para el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ en dirección negativa del eje z .

Por otra parte, para los vectores \vec{r} y \vec{F} de la figura 12.6, de acuerdo a la regla de la mano derecha la dirección del vector $\vec{r} \times \vec{F}$ es la dirección negativa del eje z .

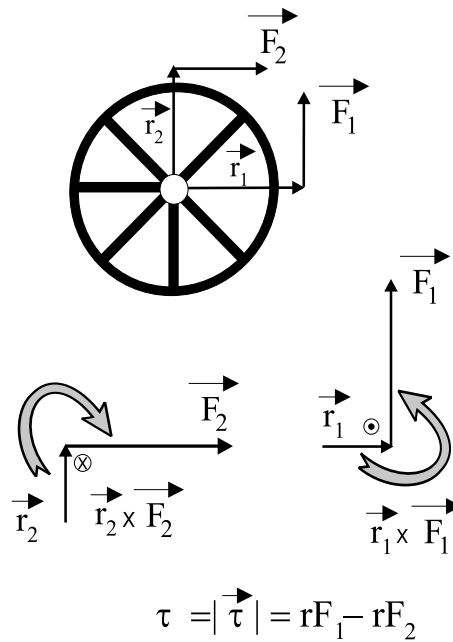


Figura 12.7: Diagrama para los momentos de fuerza que actúan sobre la rueda de la figura 12.4.

Ahora se puede calcular el momento total $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ para la rueda de la figura 12.4 y de ahí determinar la magnitud $\tau = |\vec{\tau}|$ debido a las fuerzas F_1 y F_2 . En la figura 12.7 se muestra el diagrama de los momentos de fuerzas que actúan sobre la rueda.

En la figura 12.7 el símbolo \odot señala que el vector $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ apunta en una dirección que “sale” de la hoja, esta dirección se toma como la dirección positiva del eje z . De igual manera el símbolo \otimes señala que el vector $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ apunta en una dirección que “entra” en la hoja, esta dirección se toma como la dirección negativa del eje z .

De esta manera se tiene que la magnitud del momento total es:

$$\begin{aligned} \tau &= rF_1 - rF_2 = r(F_1 - F_2) \\ &= 0.33(m)(7.50 - 5.30)(N) = 0.726(Nm), \end{aligned}$$

ya que para el presente caso los ángulos de giro ϕ formados por los vectores \vec{r}_i y \vec{F}_i resultan ser de 90° .

12-4.- Un cilindro uniforme con una masa de 2.0 kg y 0.15 m de diámetro pende de dos cuerdas enrolladas en él, como se muestra en la figura 12.8. Al bajar el cilindro las cuerdas se desenrollan.

¿Qué aceleración tiene el centro de masa del cilindro? (Desprecie la masa de las cuerdas)

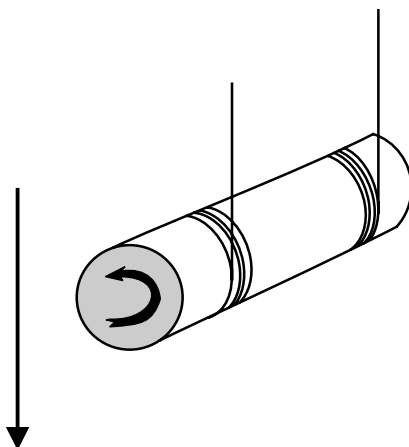


Figura 12.8: Cilindro con dos cuerdas enrolladas en sus extremos y descendiendo bajo la acción de la gravedad.

Sol:

Para plantear las ecuaciones del movimiento traslacional y rotacional del cilindro, deben realizarse los diagramas de cuerpo libre y un diagrama para el momento de fuerzas que actúan sobre él. En la figura 12.9 se pueden observar estos diagramas por separado.

De acuerdo con estos diagramas se tiene que la magnitud del momento de fuerza total es:

$$\begin{aligned} |\vec{\tau}| &= \left| \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i \right| \\ &= 2RT, \end{aligned}$$

aplicando la ecuación de movimiento:

$$I\alpha = \tau = 2RT, \quad (12.1)$$

donde α es la aceleración angular del cilindro, I es el momento de inercia del cilindro respecto a un eje de giro que pasa por su eje de simetría, R es el radio del cilindro y T es la tensión de cada cuerda que se desenrolla del cilindro.

Mientras que del diagrama de cuerpo libre de la figura 12.9 se obtiene para el movimiento de traslación:

$$ma = w - 2T = mg - 2T, \quad (12.2)$$

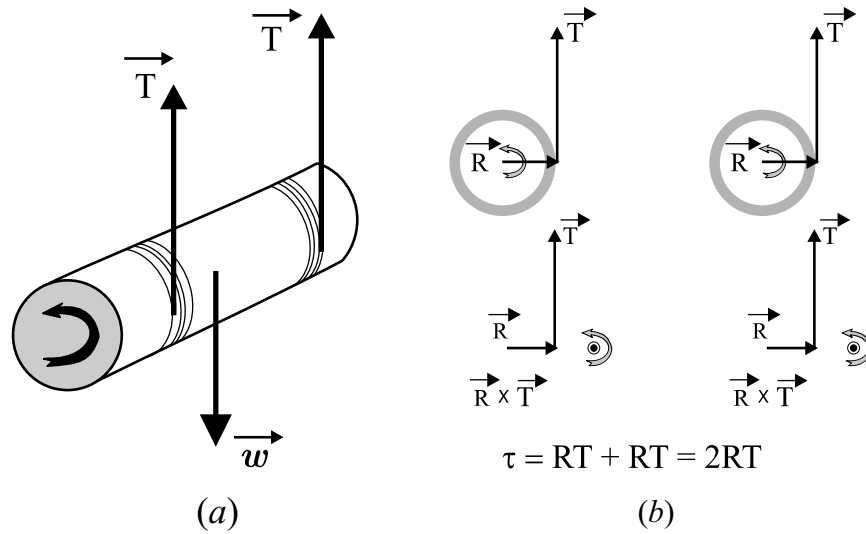


Figura 12.9: Diagrama de cuerpo libre del cilindro y de momento de fuerza debido a las tensiones de las dos cuerdas enrolladas al cilindro.

donde a es la aceleración del centro de masa del cilindro, m es su masa y g es la aceleración de la gravedad.

Suponiendo que las cuerdas se desenrollan sin deslizarse sobre el cilindro (condición de girar sin deslizar), la relación entre las variables aceleración angular α y la aceleración, (a), para el movimiento de traslación del centro de masa, se escribe como:

$$\alpha = \frac{a}{R}.$$

Sustituyendo esta expresión para α y el momento de inercia $I = \frac{mR^2}{2}$ en la ecuación (12.1) se obtiene:

$$\frac{mR^2}{2} \left(\frac{a}{R} \right) = 2TR,$$

de donde:

$$\frac{ma}{4} = T,$$

sustituyendo este resultado en (12.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} ma &= mg - \frac{ma}{2} \\ \implies a &= g - \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

o

$$a = \frac{2}{3}g = 6.53 \frac{m}{s^2}, \quad \alpha = \frac{2}{3R}g = 87.11 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

$$\text{y } T = \frac{mg}{6} = 3.27 \text{ N.}$$

12-5.- Para el sistema de la figura 12.10, $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$ y el radio y la masa de la polea son $R = 0.10 \text{ m}$ y $M = 0.10 \text{ kg}$, respectivamente.

a) ¿Qué aceleración tienen las masas? (Desprecie la fricción y la masa de la cuerda).

b) Si sobre la polea actúa un momento de fuerza debido a la fuerza de fricción τ_{F_f} constante de 0.050 Nm cuando el sistema está en movimiento ¿qué aceleración tienen las masas?

c) ¿Por qué las magnitudes de las tensiones T_1 y T_2 son diferentes?

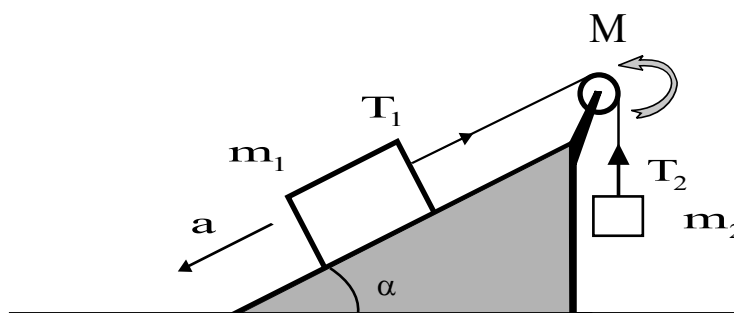


Figura 12.10: Sistema de bloques moviéndose a través de un plano inclinado unidos por una cuerda que pasa por una pulea de masa M .

Sol:

a) En este problema hay dos bloques de masas m_1 y m_2 que únicamente realizan un movimiento de traslación y una polea de masa M y radio R que sólo realiza un movimiento de rotación con un momento de inercia $\frac{MR^2}{2}$, si se considera que la polea es sólida.

Por lo tanto es necesario plantear las ecuaciones de movimiento con base en los diagramas de cuerpo libre para los dos bloques y un diagrama de momentos de fuerzas para la polea, estos diagramas se muestran en las figuras 12.11 y 12.12.

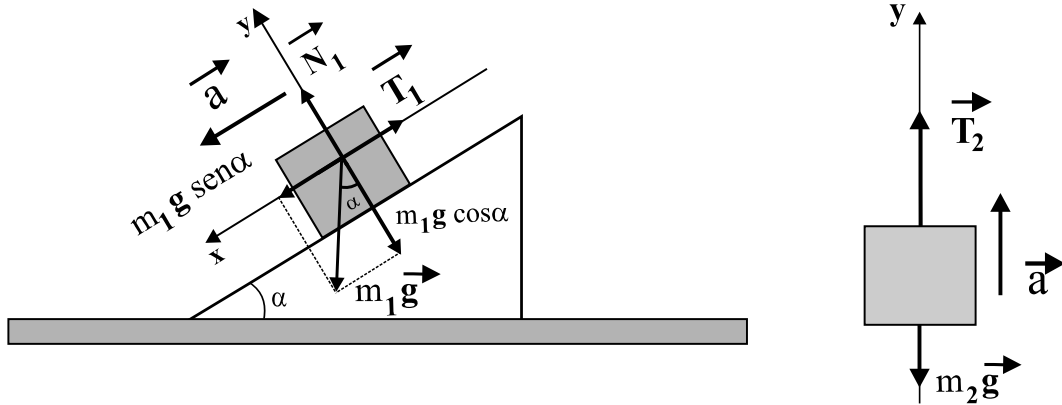


Figura 12.11: Diagramas de cuerpo libre para los bloques de masa m_1 y m_2 .

De acuerdo con la definición para el momento de una fuerza, para el caso de la figura 12.12, la magnitud del momento de fuerza total sobre la polea es:

$$\tau = RT_1 - RT_2,$$

donde se ha considerado que la dirección positiva para los momentos de fuerzas es aquella dirección que “sale” de la hoja en la figura 12.12. De acuerdo con la ecuación de movimiento ($I\alpha = \tau$), se tiene que:

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = RT_1 - RT_2, \quad (12.3)$$

utilizando la relación existente entre la aceleración angular α y la aceleración tangencial a_T de cualquier punto sobre el borde de la polea.

$$a_T = R\alpha,$$

la ecuación (12.3) puede escribirse de la siguiente forma:

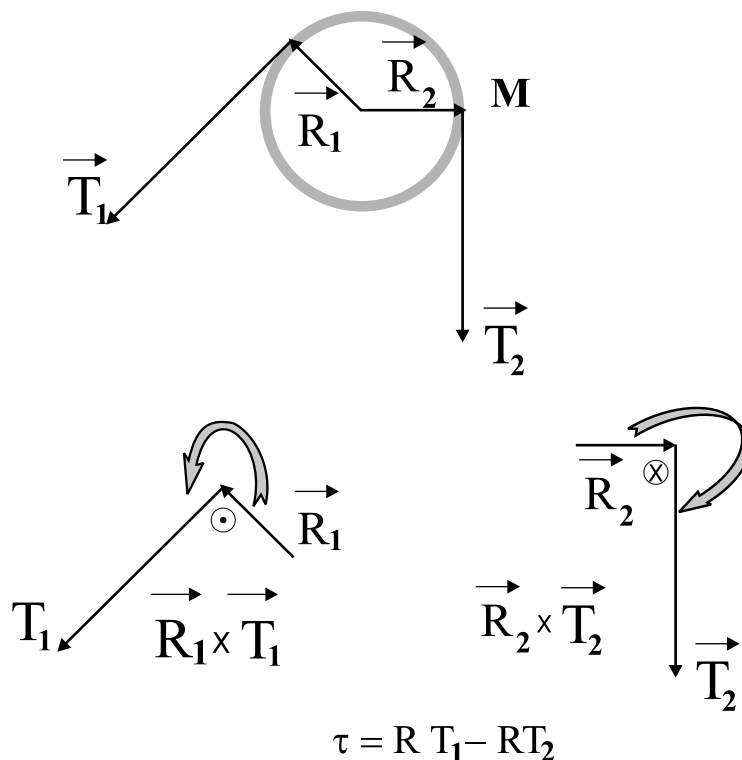


Figura 12.12: Diagrama de los momentos de fuerzas que actúan sobre la pulea.

$$\frac{1}{2} M a_T = T_1 - T_2. \tag{12.4}$$

Por otra parte de los diagramas de cuerpo libre de la figura 12.11 pueden escribirse las siguientes ecuaciones para el movimiento de cada uno de los bloques:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin \alpha - T_1 \\ m_2 a &= T_2 - m_2 g, \end{aligned}$$

donde la aceleración a , coincide con la aceleración tangencial a_T de cualquier punto en el borde de la pulea. Sumando estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g \sin \alpha - m_2 g + T_2 - T_1, \tag{12.5}$$

sustituyendo en esta última expresión el valor obtenido en la ecuación (12.4) para $T_1 - T_2$,

se encuentra que:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right) a = m_1 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 g,$$

de donde resulta para la aceleración a:

$$a = \frac{m_1 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}.$$

Sustituyendo los valores numéricos $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $R = 0.10 \text{ m}$, $M = 0.10 \text{ kg}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se obtiene:

$$a = 0.89 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Si ahora la fuerza de fricción sobre la polea contribuye al momento de fuerza total $\tau_{F_f} = 0.050 \text{ Nm}$, ésta se opone al movimiento de rotación de la polea, de manera que la ecuación (12.3) se escribirá ahora como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR^2\alpha &= R(T_1 - T_2) - \tau_{F_f} \\ \implies \\ \frac{1}{2}Ma &= T_1 - T_2 - \frac{\tau_{F_f}}{R}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (12.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) a &= m_1 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 g - \frac{1}{2}Ma - \frac{\tau_{F_f}}{R} \\ \implies \\ a &= \frac{m_1 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 g - \frac{\tau_{F_f}}{R}}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Sustituyendo los valores numéricos $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $R = 0.10 \text{ m}$, $M = 0.10 \text{ kg}$, $\tau_{F_f} = 0.050 \text{ Nm}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se obtiene:

$$a = 0.84 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Las tensiones T_1 y T_2 son diferentes porque la polea posee un momento de inercia $\frac{1}{2}MR^2$, la cual para girar debe estar sometida a un momento de fuerzas total diferente

de cero, como se encontró en la ecuación (12.3), de ahí se obtiene que las tensiones T_1 y T_2 tienen que ser diferentes.

12-6.- Calcular la aceleración del sistema de la figura 12.13 si el radio de la polea es $R = 10 \text{ cm}$ y su masa es $M = 15 \text{ kg}$, y ésta está girando debido a la fricción entre la cuerda y la polea. Ignore la fricción entre la mesa y el bloque de masa m_A .

Sol:

En este problema hay dos bloques de masas m_A y m_B que únicamente realizan un movimiento de traslación y una polea de masa M y radio R que sólo realiza un movimiento de rotación con un momento de inercia $\frac{MR^2}{2}$, si se considera que la polea es sólida.

Por lo tanto es necesario plantear las ecuaciones de movimiento con base en los diagramas de cuerpo libre para los bloques de masas m_A y m_B y un diagrama de momentos de fuerza para la polea, estos diagramas se muestran en la figura 12.14.

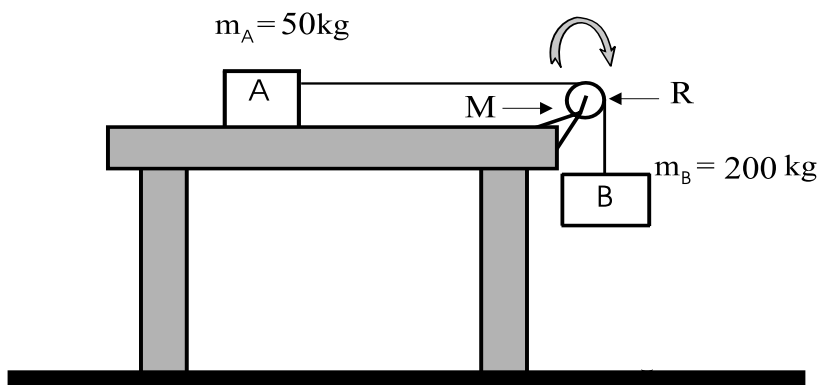


Figura 12.13: Sistema formado por dos bloques de masas m_A y m_B unidos por una cuerda que pasa por una pulea.

De acuerdo con la definición para el momento de una fuerza, para el caso de la figura 12.14, la magnitud del momento de fuerza total sobre la pulea es:

$$\tau = -RT_A + RT_B,$$

donde se ha considerado que la dirección positiva para los momentos de fuerzas es aquella dirección que “entra” en la hoja en la figura 12.14. De acuerdo con la ecuación de movimiento ($I\alpha = \tau$), se obtiene que:

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = -RT_A + RT_B, \quad (12.8)$$

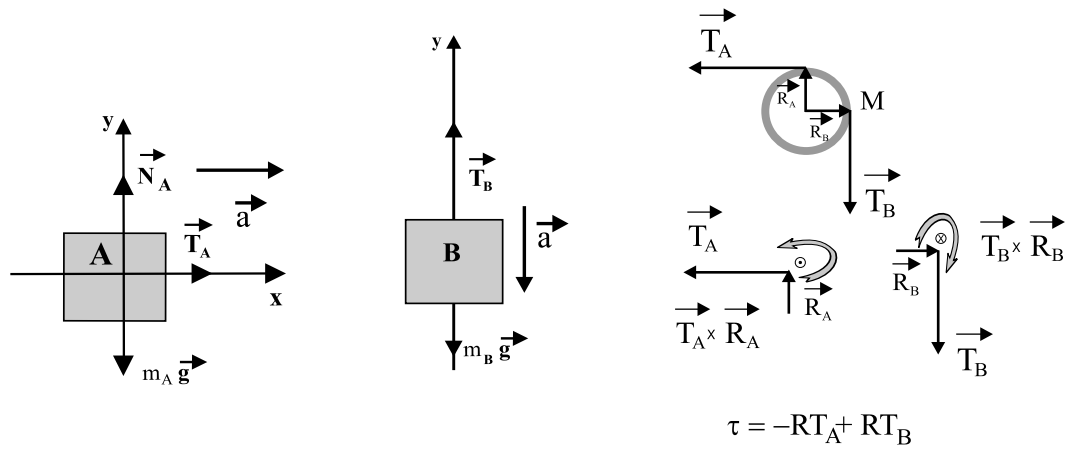


Figura 12.14: Diagramas de cuerpo libre para los bloques de masas m_A y m_B y diagrama de momento de fuerza para la polea de masa M .

utilizando la relación existente entre la aceleración angular α y la aceleración tangencial a_T de cualquier punto sobre el borde de la polea.

$$a_T = R\alpha,$$

la ecuación (12.8) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}Ma_T = T_B - T_A. \quad (12.9)$$

Por otra parte de los diagramas de cuerpo libre de la figura 12.14 pueden escribirse las siguientes ecuaciones para el movimiento de cada uno de los bloques:

$$\begin{aligned} m_A a &= T_A \\ m_B a &= m_B g - T_B, \end{aligned}$$

donde la aceleración a , coincide con la aceleración tangencial a_T de cualquier punto en el borde de la polea. Sumando estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$(m_A + m_B) a = m_B g + T_A - T_B, \quad (12.10)$$

sustituyendo en esta última expresión el valor obtenido en la ecuación (12.9) para $T_A - T_B$, se encuentra que:

$$\left(m_A + m_B + \frac{1}{2}M\right) a = m_B g,$$

de donde se obtiene para la aceleración:

$$a = \frac{m_B g}{m_A + m_B + \frac{1}{2}M}.$$

Sustituyendo los valores numéricos $m_A = 50 \text{ kg}$, $m_B = 250 \text{ kg}$, $M = 15 \text{ kg}$ y $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$, se obtiene:

$$a = 7.97 \frac{m}{s^2}.$$

- 12-7.-** En el sistema representado en la figura 12.15, $M = 1 \text{ kg}$, $m = 0.2 \text{ kg}$, $r = 0.2 \text{ m}$. Calcular la aceleración lineal del bloque de masa m , la aceleración angular del cilindro de masa M y la tensión en la cuerda, si el cilindro gira sin resbalar sobre la mesa. Despreciar el efecto de la polea pequeña que se encuentra fija a la mesa.

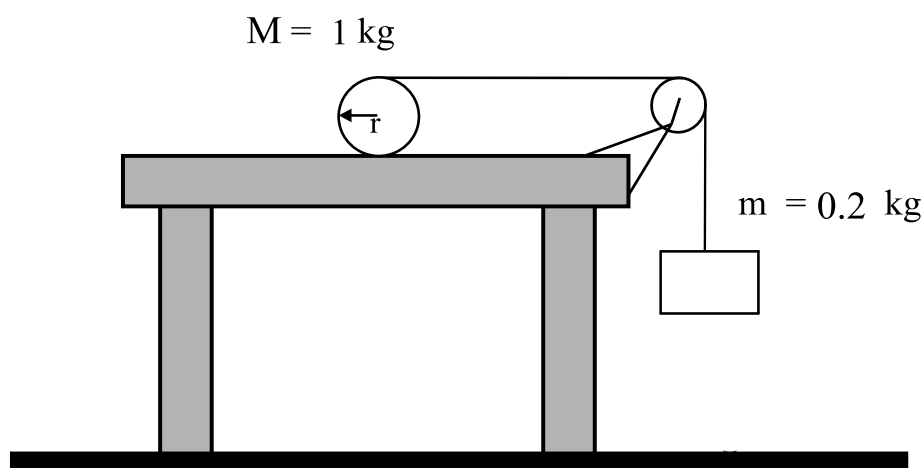


Figura 12.15: Un cilindro, de masa M y radio r , es jalado por un bloque, de masa m , mediante una cuerda que pasa por una pulea de masa despreciable.

Sol:

En este problema se tiene un bloque de masa m y un cilindro de masa M que realizan un movimiento de traslación, adicionalmente el cilindro realiza un movimiento de rotación con un momento de inercia $\frac{Mr^2}{2}$, donde r el radio del cilindro. La pulea está fija en el extremo de la mesa y únicamente transmite la tensión entre el cilindro y el bloque que descende por la vertical.

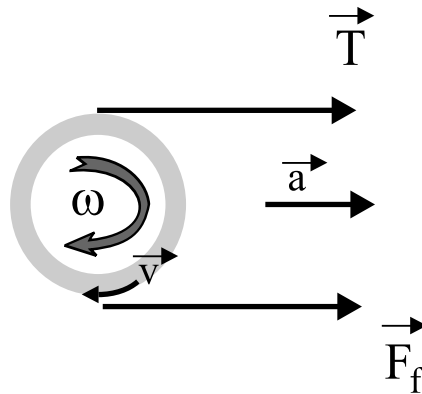


Figura 12.16: Dirección de la fuerza fricción F_f cuya dirección siempre es opuesta al movimiento del punto de contacto entre el cilindro y la superficie horizontal.

Para que el cilindro gire sin resbalar sobre la mesa es necesaria una fuerza de fricción F_f entre las superficies de contacto, la dirección de esta fuerza siempre se opone a la dirección del movimiento de la superficie del cilindro respecto a la mesa, esto puede verse claramente en el esquema de la figura 12.16. En este esquema se observa que los puntos del cilindro que están en contacto con la superficie de la mesa se mueven hacia la izquierda, mientras que el centro de masa del cilindro se desplaza hacia la derecha, de esta forma la dirección de la fuerza de fricción también apunta hacia la derecha.

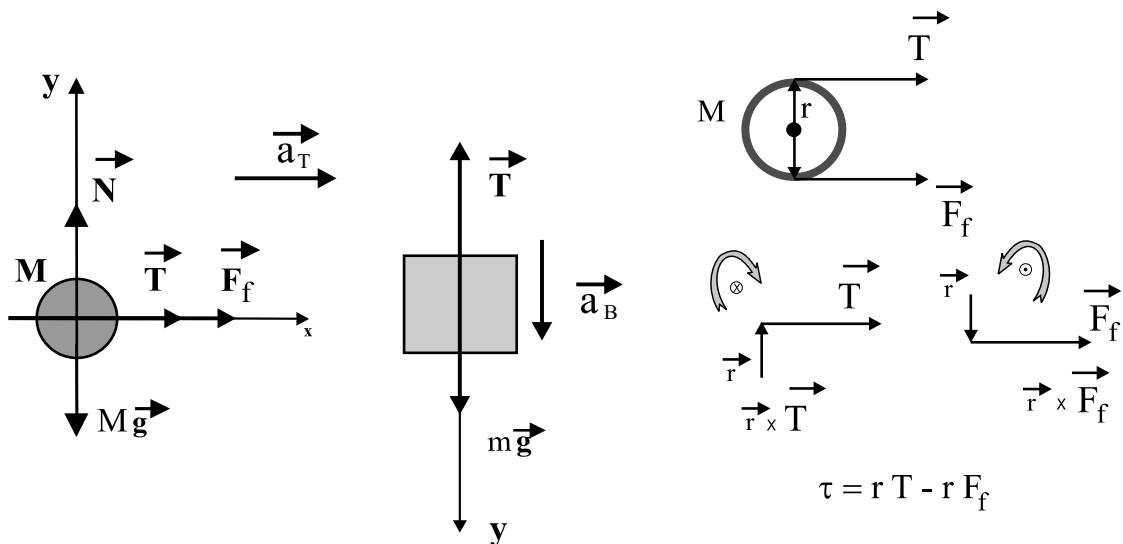


Figura 12.17: Diagramas de cuerpo libre para el cilindro de masa M , del bloque de masa m y diagrama de momento de fuerza para el cilindro cuyo radio es r .

Ahora es necesario plantear las ecuaciones de movimiento con base en los diagramas de cuerpo libre para el bloque de masa m y el cilindro de masa M y un diagrama de momento de fuerzas para este cilindro, estos diagramas se muestran en la figura 12.17.

De acuerdo con la definición para el momento de una fuerza, para el caso de la figura 12.17, la magnitud del momento de fuerza total sobre el cilindro es:

$$\tau = rT - rF_f,$$

donde se ha considerado que la dirección positiva para los momentos de fuerzas es aquella dirección que “entra” en la hoja en la figura 12.17. De acuerdo con la ecuación de movimiento ($I\alpha = \tau$), se tiene que:

$$\frac{1}{2}Mr^2\alpha = rT - rF_f, \quad (12.11)$$

utilizando la relación existente entre la aceleración angular α y la aceleración tangencial a_T de cualquier punto sobre el borde del cilindro:

$$a_T = r\alpha,$$

la ecuación (12.11) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}Ma_T = T - F_f. \quad (12.12)$$

Por otra parte, a partir de los diagramas de cuerpo libre de la figura 12.17 pueden escribirse las siguientes ecuaciones para el movimiento traslacional de cada uno de los objetos de la figura 12.15:

$$\begin{aligned} Ma &= T + F_f \\ m a_B &= mg - T, \end{aligned} \quad (12.13)$$

donde la aceleración a_B para el bloque coincide con la aceleración tangencial $a_T = 2a$ de cualquier punto en el borde del cilindro, porque éste rueda sin resbalar sobre la superficie horizontal. Por lo tanto las ecuaciones anteriores se escriben como:

$$\begin{aligned} Ma &= T + F_f \\ m (2a) &= mg - T, \end{aligned} \quad (12.14)$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$(2m + M) a = m g + F_f, \quad (12.15)$$

también combinando las ecuaciones (12.12) y (12.13) para el movimiento del cilindro se obtiene:

$$\begin{aligned} M a &= T + F_f \\ \frac{1}{2} M a &= T - F_f, \end{aligned}$$

de donde se encuentra que:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} M a &= 2T \\ \implies \\ T &= \frac{3}{4} M a \\ \implies \\ F_f &= \frac{1}{4} M a \end{aligned}$$

sustituyendo el valor obtenido para F_f en esta última expresión, en la ecuación (12.15) se encuentra que:

$$\begin{aligned} (M + 2m) a &= m g + \frac{1}{4} M a \\ \implies \\ \left(\frac{3}{4} M + 2m \right) a &= m g, \end{aligned} \quad (12.16)$$

de donde se obtiene para la aceleración:

$$a = \frac{m g}{\frac{3}{4} M + 2m}.$$

Sustituyendo los valores numéricos $m = 0.2 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$ y $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, se obtiene:

$$a = 1.704 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

La aceleración angular del cilindro de radio $r = 0.2 \text{ m}$, se puede determinar de la relación:

$$\alpha = \frac{a}{r} = 8.52 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Sustituyendo el valor obtenido para la aceleración del sistema ($a = 2.06 \frac{m}{s^2}$) y el valor de la masa del cilindro se obtiene para la tensión en la cuerda el valor:

$$T = \frac{3}{4}Ma = 1.55 N.$$

12-8.- En la figura 12.18, se muestran dos bloques, uno de hierro con una masa $m' = 500 g$ y otro de aluminio de masa $m = 460 g$ y una polea, de masa M y radio $R = 5 cm$, montada sobre cojinetes horizontales sin fricción. Cuando se suelta desde el reposo, el bloque más pesado cae $75 cm$ en $5 s$ (sin que el cordón resbale en la polea). Calcular:

- ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de los bloques?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda que soporta al bloque más pesado?
- ¿Cuál es la tensión en la cuerda que soporta al bloque más ligero?
- ¿Cuál es la magnitud de la aceleración angular de la polea?

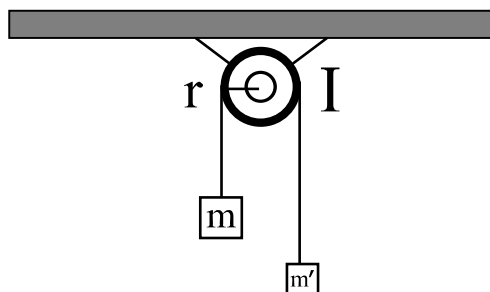


Figura 12.18: Un bloque de masa m' unido, por una cuerda de masa despreciable, a otro bloque de masa m mediante una polea cuyo momento de inercia I se desconoce.

Sol:

a) Para determinar el valor de la aceleración con la que el bloque m' desciende pueden utilizarse las relaciones de la cinemática para un movimiento con aceleración constante:

$$y - y_0 = v_{y_0}t + \frac{at^2}{2}$$

donde $y - y_0$ es el desplazamiento realizado por el bloque m' durante el tiempo transcurrido t y v_{y_0} es la velocidad inicial de este cuerpo.

En nuestro caso $y - y_0 = 0.75 \text{ m}$, $t = 5 \text{ s}$ y $v_{y_0} = 0$, porque el sistema parte del reposo. De esta manera se obtiene para la aceleración:

$$a = \frac{2y}{t^2} = \frac{2(0.750 \text{ m})}{(5.00 \text{ s})^2} = 6.00 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

y el bloque de masa m sube hacia la polea con una aceleración de $6.00 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

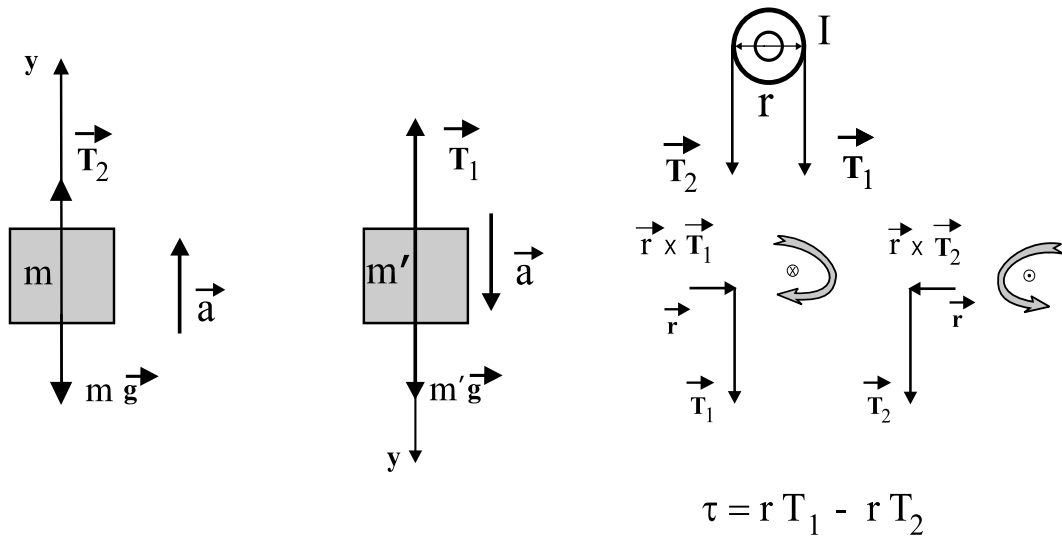


Figura 12.19: Diagramas de cuerpo libre para los bloques de masas m' y m y diagrama de momento de fuerza para una pulea cuyo momento de inercia es I y su radio es r .

b) – c) Por otra parte, a partir de los diagramas de cuerpo libre de la figura 12.19 pueden escribirse las siguientes ecuaciones para el movimiento de cada uno de los bloques:

$$\begin{aligned} m'a &= m'g - T_1 \\ ma &= T_2 - mg, \end{aligned}$$

donde la aceleración a , coincide con la aceleración tangencial (a_T) de cualquier punto en el borde de la pulea. Despejando en estas dos ecuaciones T_1 y T_2 , se encuentran las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} T_1 &= m'g - m'a \\ T_2 &= mg + ma, \end{aligned} \quad (12.17)$$

sustituyendo en esta última expresión los valores $a = 6.00 \times 10^{-2} \frac{m}{s^2}$, $m' = 500 g$, $m = 460 g$ y $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$, se encuentra que:

$$\begin{aligned} T_1 &= m'g - m'a = (0.500 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2} - 6.00 \times 10^{-2} \frac{m}{s^2} \right) = 4.87 \text{ N} \\ T_2 &= mg + ma = (0.460 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2} + 6.00 \times 10^{-2} \frac{m}{s^2} \right) = 4.54 \text{ N} . \end{aligned} \quad (12.18)$$

d) De acuerdo con la definición para el momento de una fuerza, para el caso de la figura 12.19, la magnitud del momento de fuerza total sobre la polea es:

$$\tau = rT_1 - rT_2,$$

donde se ha considerado que la dirección positiva para el momento de fuerza es aquella dirección que “entra” en la hoja en la figura 12.19. De acuerdo con la ecuación de movimiento ($I\alpha = \tau$), se obtiene que:

$$I\alpha = rT_1 - rT_2, \quad (12.19)$$

donde:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{6.00 \times 10^{-2} \frac{m}{s^2}}{5.00 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1.20 \frac{\text{rad}}{s^2}, \quad (12.20)$$

de manera que de la ecuación (12.19) se obtiene para el momento de fuerza de la polea:

$$\begin{aligned} I &= (T_1 - T_2) \frac{r}{\alpha} \\ &= \frac{(4.87 - 4.54 \text{ N})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m})}{1.20 \frac{\text{rad}}{s^2}} \\ &= 1.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 . \end{aligned} \quad (12.21)$$

12-9.- Un cilindro homogéneo de masa $M = 1 \text{ kg}$ y radio $R = 5 \text{ cm}$ se acelera debido a una fuerza $F = 1 \text{ N}$ la cual se aplica mediante una cuerda que está enrollada alrededor de un pequeño tambor de radio $r = 3 \text{ cm}$ que está unido al cilindro como el que se muestra en la figura 12.20. El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar. Determine:

- La fuerza de fricción.
- Hallar la aceleración a del centro del cilindro.

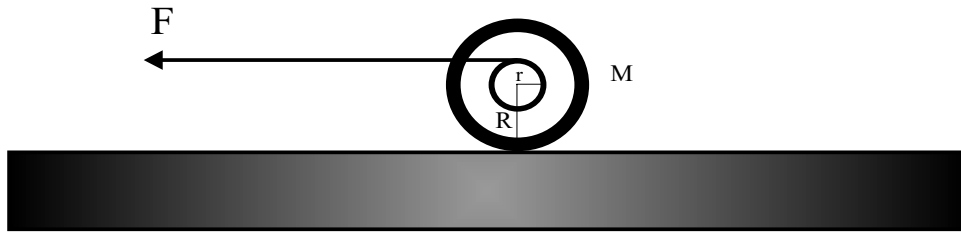
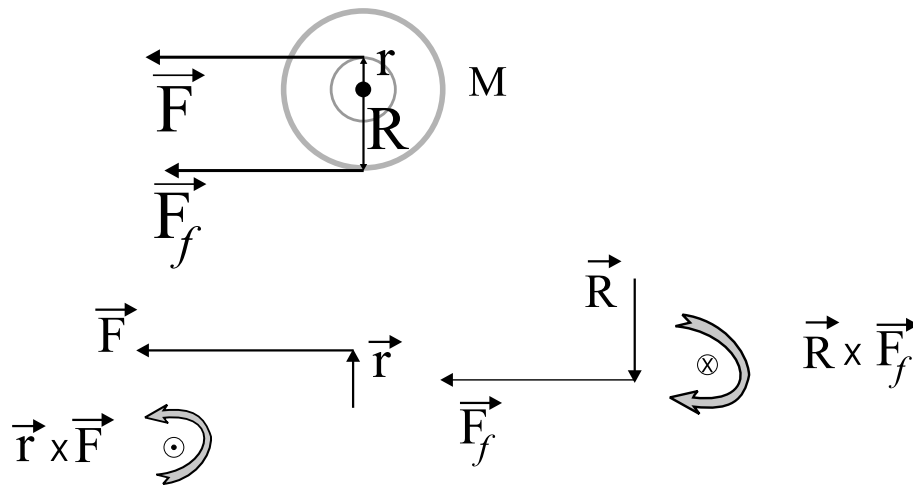


Figura 12.20: Cilindro de masa M y radio R en el que se encuentra enrollada en un tambor de radio r una cuerda que se jala con un fuerza F .

Sol:

a) – b) Para que el cilindro gire sin resbalar sobre la mesa es necesaria una fuerza de fricción F_f entre las superficies de contacto, la dirección de esta fuerza siempre se opone a la dirección del movimiento de la superficie del cilindro respecto a la mesa, esto puede verse claramente en el esquema de la figura 12.16 del problema 11-7. En el presente caso se tiene que los puntos del cilindro que están en contacto con la superficie de la mesa se mueven hacia la derecha, mientras que el centro de masa del cilindro se desplaza hacia la izquierda, de esta forma la dirección de la fuerza de fricción también apunta hacia la izquierda.



$$\tau = rF - R F_f$$

Figura 12.21: Diagramas de cuerpo libre y de momento de fuerza para el cilindro de masa M .

Ahora es necesario plantear las ecuaciones de movimiento con base en los diagramas de cuerpo libre para el cilindro de masa M y un diagrama de momento de fuerza para este cilindro, estos diagramas se muestran en la figura 12.21.

De acuerdo con la definición para el momento de una fuerza, para el caso de la figura 12.21, la magnitud del momento de fuerzas total sobre la polea es:

$$\tau = rF - RF_f,$$

donde se considera que la dirección positiva para los momentos de fuerzas es aquella dirección que “sale” de la hoja en la figura 12.21. De acuerdo con la ecuación de movimiento ($I\alpha = \tau$), se obtiene que:

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = rF - RF_f, \quad (12.22)$$

donde se ha tomado para el momento de inercia del cilindro $\left(I = \frac{MR^2}{2}\right)$, utilizando la relación existente entre la aceleración angular α y la aceleración del centro de masa $a_{C.M.}$ del cilindro:

$$a_{C.M.} = R\alpha,$$

la ecuación (12.22) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}Ma_{C.M.} = \frac{r}{R}F - F_f. \quad (12.23)$$

Por otra parte del diagrama de cuerpo libre de la figura 12.21 puede escribirse la siguiente ecuación para el movimiento traslacional del centro de masa del cilindro:

$$Ma_{C.M.} = F + F_f. \quad (12.24)$$

Uniendo la información de las ecuaciones (12.23) y (12.24), poniendo $a_{C.M.} = a$, se obtiene:

$$\left(\frac{M}{2} + M\right)a = F\left(1 + \frac{r}{R}\right), \quad (12.25)$$

de donde se obtiene para la aceleración del centro de masa del cilindro:

$$a = \frac{2F}{3M} \left(1 + \frac{r}{R} \right),$$

y para la fuerza de fricción se obtiene:

$$F_f = \frac{F}{3} \left(-1 + \frac{2r}{R} \right).$$

- 12-10.-** Un cilindro homogéneo de masa m_1 y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Se enrolla una cuerda alrededor del mismo conectada a un bloque de masa m_2 que está apoyado sobre un plano sin fricción cuya inclinación es θ , tal y como se muestra en la figura 12.22. El sistema se libera desde el reposo con el bloque 2 situado a una altura h sobre la base del plano inclinado.

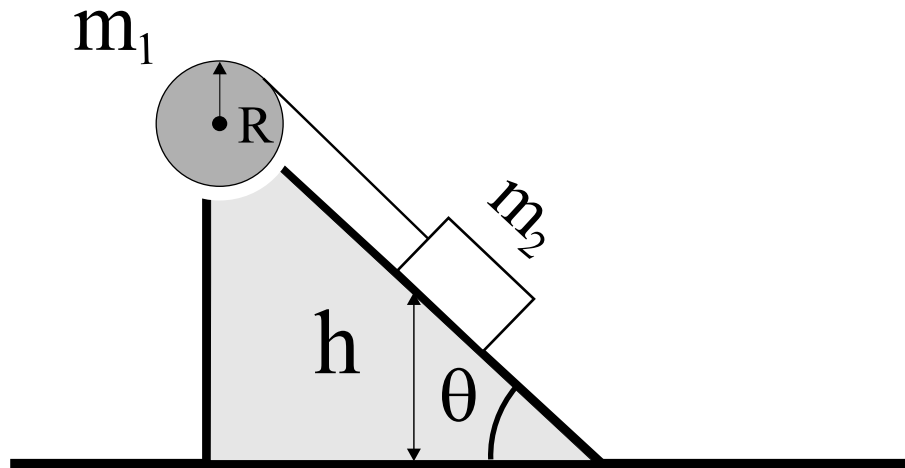


Figura 12.22: Cilindro de masa m_1 y radio R en el que se encuentra enrollada una cuerda que está atada a un bloque, de masa m_2 , que descende por un plano con un ángulo de inclinación θ .

- ¿Cuál es la aceleración del bloque?
- ¿Cuál es la tensión de la cuerda?
- ¿Cuál es la energía total del sistema cuando el bloque de masa m_2 está a la altura h ?
- ¿Cuál es la energía total cuando el bloque de masa m_2 está en la base del plano inclinado y posee una velocidad v ?
- ¿Cuál es el valor de v ?
- Analizar las respuestas para los casos extremos de $\theta = 0$, $\theta = 90^\circ$ y $m_1 = 0$.

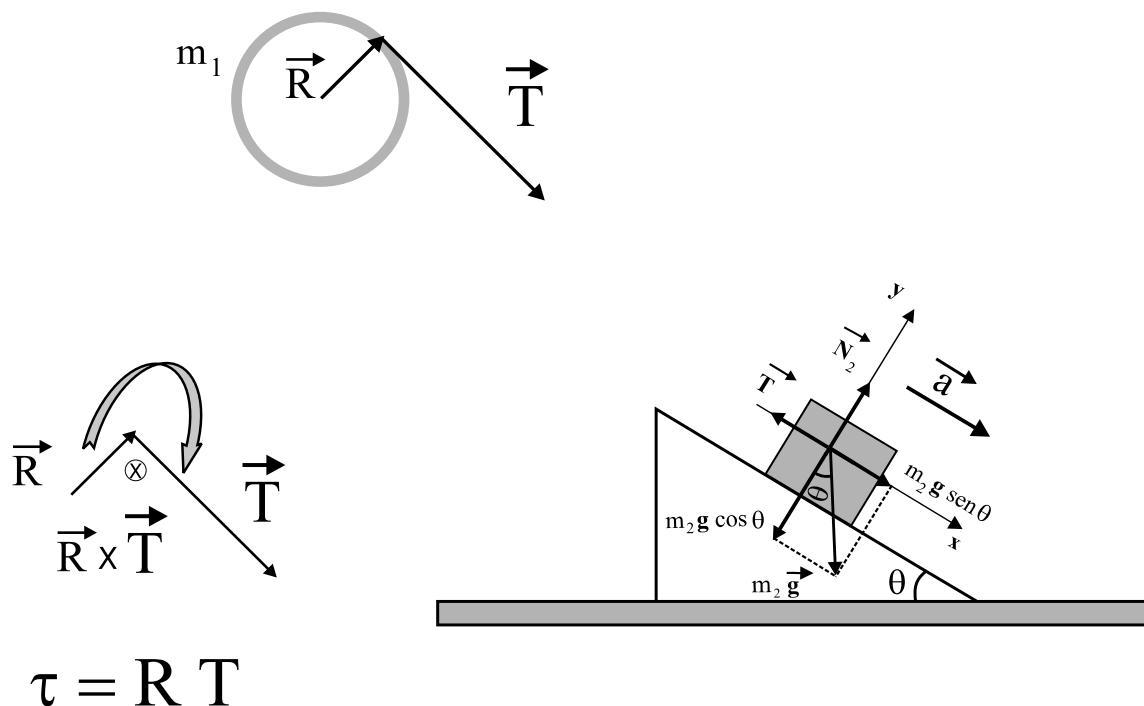


Figura 12.23: Diagramas de momento de fuerza del cilindro de masa m_1 y radio R y de cuerpo libre para el bloque de masa m_2 .

Sol:

a) – b) En este problema se tiene un bloque de masa m_2 , que realiza un movimiento de traslación y un cilindro de masa m_1 , que sólo realiza un movimiento de rotación con un momento de inercia $\frac{m_1 R^2}{2}$, donde R el radio del cilindro.

Ahora es necesario plantear las ecuaciones de movimiento con base en los diagramas de cuerpo libre para el bloque de masa m_2 y un diagrama de momento de fuerza para el cilindro de masa m_1 , estos diagramas se muestran en las figuras 12.23.

De acuerdo con la definición para el momento de una fuerza, para el caso de la figura 12.23, la magnitud del momento de fuerza total sobre la polea es:

$$\tau = RT,$$

donde se ha considerado que la dirección positiva para los momentos de fuerzas es aquella dirección que “entra” en la hoja en la figura 12.23. De acuerdo con la ecuación de movimiento ($I\alpha = \tau$), se obtiene que:

$$\frac{1}{2}m_1 R^2 \alpha = RT, \tag{12.26}$$

utilizando la relación existente entre la aceleración angular α y la aceleración tangencial a_T de cualquier punto sobre el borde de la polea.

$$a_T = R\alpha,$$

la ecuación (12.26) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}m_1a_T = T. \quad (12.27)$$

Por otra parte del diagrama de cuerpo libre de la figura 12.23 puede escribirse la siguiente ecuación para el movimiento del bloque:

$$m_2a = m_2g \operatorname{sen} \theta - T,$$

donde la aceleración a , coincide con la aceleración tangencial a_T de cualquier punto en el borde del cilindro. Sustituyendo en esta última expresión el valor de la tensión obtenido en la ecuación (12.27), se encuentra que:

$$m_2a = m_2g \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}m_1a, \quad (12.28)$$

de donde, se tiene que:

$$\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)a = m_2g \operatorname{sen} \theta,$$

de donde se obtiene para la aceleración a :

$$a = \frac{m_2g \operatorname{sen} \theta}{\frac{1}{2}m_1 + m_2}.$$

Ahora la tensión en la cuerda es:

$$T = \frac{1}{2}m_1a = \frac{\frac{1}{2}m_1m_2g \operatorname{sen} \theta}{\frac{1}{2}m_1 + m_2}.$$

c) Como en el instante inicial el sistema se encuentra en reposo la energía mecánica total del sistema es igual a la energía potencial del cilindro m_1 más la energía potencial del bloque m_2 :

$$E_{T_i} = m_1 g H_1 + m_2 g h,$$

donde H_1 es la altura del cilindro la cual es constante durante todo el movimiento.

d) Cuando el bloque m_2 se encuentra en la base del plano inclinado y posee una velocidad v , debido a la relación entre las variables angulares y tangenciales se tiene que la rapidez angular del cilindro es:

$$\omega = \frac{v}{R},$$

donde R es el radio del cilindro, y la energía mecánica total en esta situación final, vendrá dada por la suma de la energía cinética del cilindro más su energía potencial más la energía cinética del bloque m_1 , es decir:

$$\begin{aligned} E_{T_F} &= m_1 g H_1 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \\ &= m_1 g H_1 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $\omega = \frac{v}{R}$ y R es el radio del cilindro ($I = \frac{1}{2} m_1 R^2$). Simplificando la expresión anterior, se obtiene para la energía mecánica total del sistema en la situación final:

$$\begin{aligned} E_{T_F} &= m_1 g H_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \\ &= m_1 g H_1 + \frac{1}{4} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = m_1 g H_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) v^2. \end{aligned}$$

e) Para encontrar el valor de v debe aplicarse el principio de conservación de la energía mecánica total del sistema, es decir $E_{T_i} = E_{T_F}$, de donde se tiene que:

$$m_1 g H_1 + m_2 g h = m_1 g H_1 + \left(\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) v^2.$$

de esta última expresión puede despejarse la rapidez final del bloque:

$$v = \sqrt{\frac{m_2 g h}{\frac{1}{4} m_1 + \frac{1}{2} m_2}}.$$

f) Las únicas cantidades físicas que dependen del ángulo de inclinación son la aceleración y la tensión, si $\theta = 0$, se tiene que $\sin \theta = 0$ y por lo tanto $a = 0$ y $T = 0$.

Por otra parte si $\theta = 90^\circ$ se tiene que entonces:

$$a = \frac{m_2 g}{\frac{1}{2}m_1 + m_2}.$$

y

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{\frac{1}{2}m_1 + m_2}.$$

y si $m_1 = 0$, la aceleración del bloque m_2 viene dada por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_2 g \sin \theta}{\frac{1}{2}(0) + m_2} \\ &= \frac{m_2 g \sin \theta}{m_2} = g \sin \theta. \end{aligned}$$

que es precisamente la aceleración con la que desciende cualquier bloque por un plano con un ángulo de inclinación θ .

Y para la tensión en la cuerda, cuando $m_1 = 0$, se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}(0) a = \frac{\frac{1}{2}(0) m_2 g \sin \theta}{\frac{1}{2}m_1 + m_2} = 0.$$

- 12-11.-** Una esfera hueca y otra sólida (con densidad uniforme) de iguales masas m y radios iguales (R) ruedan sin resbalar por un plano inclinado desde la misma altura H . Ambas se mueven horizontalmente al salir de la rampa (figura 12.24). Cuando las esferas chocan contra el suelo, el alcance de la esfera hueca es L . Determinar el alcance L' de la esfera sólida, en términos del alcance de la esfera hueca.

Sol:

En este problema es necesario conocer la rapidez con la que las esferas, sólida y hueca abandonan la rampa por la que se encuentran descendiendo rodando sin resbalar. Para hacer esto hay que aplicar la conservación de la energía mecánica total.

En el punto inicial de altura H_T respecto al piso (ver figura 12.24). La energía mecánica total para la esfera hueca, que parte del reposo, está dada por:

$$E_I = K_I + U_I = \frac{1}{2}mv_I^2 + \frac{1}{2}I\omega_I^2 + mgH_T = mgH_T,$$

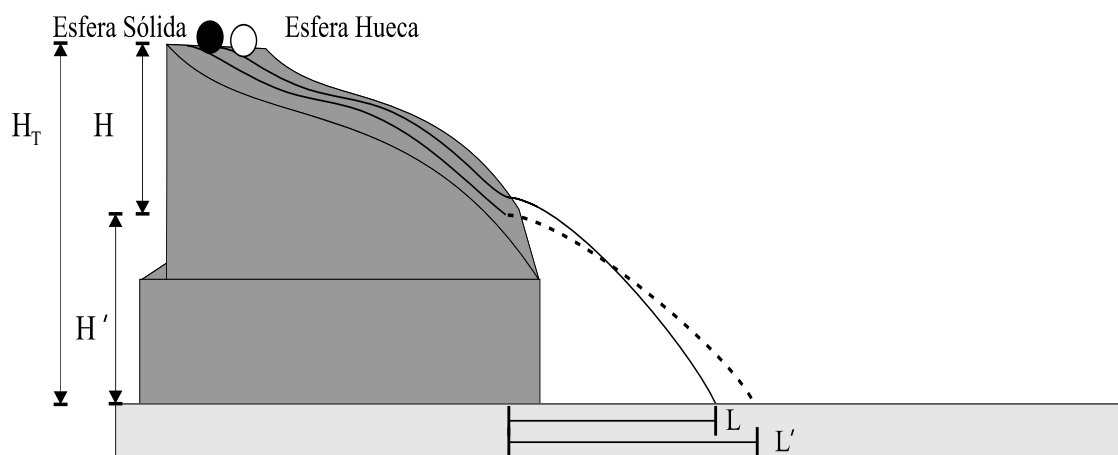


Figura 12.24: Esferas sólida y hueca describiendo un movimiento parabólico, después de abandonar una rampa a la misma altura H' .

porque inicialmente la esfera hueca no tiene velocidad de traslación $v_I = 0$ y tampoco está girando por lo tanto $\omega_I = 0$, donde I representa el momento de inercia de la esfera hueca $\left(I = \frac{2mR^2}{3}\right)$.

En el punto de altura H' respecto al suelo donde la esfera hueca abandona la rampa (ver figura 12.24). La energía mecánica total para esfera hueca en este punto final, en su recorrido por la rampa, está dada por:

$$E_F = K_F + U_F = \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}I\omega_F^2 + mgH',$$

porque la esfera hueca no sólo tiene velocidad de traslación $v_F \neq 0$, sino que también posee un movimiento de rodadura sin resbalar por lo que $\omega_F = \frac{v_F}{R}$, de manera que la energía mecánica total en el punto de altura H' respecto al suelo es:

$$\begin{aligned} E_F = K_F + U_F &= \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_F}{R}\right)^2 + mgH' \\ &= mgH' + \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2mR^2}{3}\right)\left(\frac{v_F}{R}\right)^2 \\ &= mgH' + \frac{5}{6}mv_F^2. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la conservación de la energía mecánica total se obtiene:

$$\begin{aligned} E_F &= E_I \\ mgH_T &= mgH' + \frac{5}{6}mv_F^2, \end{aligned}$$

de donde se encuentra el valor de v_F :

$$v_F = \sqrt{\frac{6}{5}g(H_T - H')} = \sqrt{\frac{6}{5}gH}.$$

Esta velocidad $v_F = \sqrt{\frac{6}{5}gH}$ es aquella con la que la esfera hueca inicia su movimiento parabólico, descrito por la ecuación:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}, \quad (12.29)$$

donde se ha puesto el origen de referencia para el movimiento parabólico ($x_0 = 0$ y $y_0 = 0$) en el punto donde la esfera hueca abandona horizontalmente ($\theta_0 = 0$) la rampa con velocidad $v_0 = v_F$.

De esta manera el alcance L para la esfera hueca está dado por:

$$-H' = -\frac{gL^2}{2v_F^2}, \quad (12.30)$$

de donde se obtiene para L :

$$L = \sqrt{\frac{2v_F^2 H'}{g}}, \quad (12.31)$$

sustituyendo el valor $v_F = \sqrt{\frac{6}{5}gH}$ se encuentra para el alcance de la esfera hueca:

$$L = \sqrt{\frac{12HH'}{5}}. \quad (12.32)$$

Ahora para el caso de la esfera sólida en el punto inicial de altura H_T respecto al piso (ver figura 12.24). La energía mecánica total para esfera sólida, que parte del reposo, está dada por:

$$E_I = K_I + U_I = \frac{1}{2}mv_I^2 + \frac{1}{2}I\omega_I^2 + mgH_T = mgH_T,$$

porque inicialmente la esfera sólida no tiene velocidad de traslación $v_I = 0$ y tampoco está girando por lo tanto $\omega_I = 0$, donde I representa el momento de inercia de la esfera sólida $\left(I = \frac{2mR^2}{5}\right)$.

En el punto de altura H' respecto al suelo donde la esfera sólida abandona la rampa (ver figura 12.24). La energía mecánica total final, para la esfera sólida está dada por:

$$E_F = K_F + U_F = \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}I\omega_F^2 + mgH',$$

porque la esfera sólida no sólo tiene velocidad de traslación $v_F \neq 0$, sino que también posee un movimiento de rodadura sin resbalar por lo que $\omega_F = \frac{v_F}{R}$, de manera que la energía mecánica total en el punto de altura H' respecto al suelo es:

$$\begin{aligned} E_F = K_F + U_F &= \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_F}{R}\right)^2 + mgH' \\ &= mgH' + \frac{1}{2}mv_F^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2mR^2}{5}\right)\left(\frac{v_F}{R}\right)^2 \\ &= mgH' + \frac{7}{10}mv_F^2. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la conservación de la energía mecánica total se obtiene:

$$\begin{aligned} E_F &= E_I \\ mgH_T &= mgH' + \frac{7}{10}mv_F^2, \end{aligned}$$

de donde se encuentra el valor de v_F :

$$v_F = \sqrt{\frac{10}{7}g(H_T - H')} = \sqrt{\frac{10}{7}gH}.$$

Esta velocidad $v_F = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$ es aquella con la que la esfera sólida inicia su movimiento parabólico, descrito por la ecuación:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}, \quad (12.33)$$

en donde se ha puesto el origen de referencia para el movimiento parabólico ($x_0 = 0$ y $y_0 = 0$) en el punto donde la esfera sólida abandona horizontalmente ($\theta_0 = 0$) la rampa con velocidad $v_0 = v_F$.

De esta manera el alcance L' para la esfera sólida está dado por:

$$-H' = -\frac{g(L')^2}{2v_F^2}, \quad (12.34)$$

de donde se obtiene para L' :

$$L' = \sqrt{\frac{2v_F^2 H'}{g}}, \quad (12.35)$$

sustituyendo el valor $v_F = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$ se encuentra para el alcance de la esfera sólida:

$$L' = \sqrt{\frac{20HH'}{7}}. \quad (12.36)$$

De los resultados de las ecuaciones (12.32) y (12.36) resulta que el alcance de la esfera hueca L y el de la esfera sólida L' están relacionados mediante la expresión:

$$L = \sqrt{\frac{21}{25}} L', \quad (12.37)$$

de este último resultado se concluye que el alcance de la esfera hueca es menor que el alcance de la esfera sólida por un factor $\sqrt{\frac{21}{25}}$.

- 12-12.-** Una bolita de masa M y radio R rueda sin resbalar camino abajo por la rampa de la izquierda de la figura 12.25 desde una altura h_1 . La bolita continua su camino en ausencia de fuerzas disipativas ascendiendo por una rampa sin fricción, por lo que la bolita puede girar resbalando. La bolita asciende hasta una altura h_2 . Determinar h_2 .

Sol:

Durante el descenso de la bolita, ésta gira sin resbalar, es decir presenta un movimiento de rotación y traslación, de manera que su energía mecánica durante el descenso es:

$$E_I = K_I + U_I = \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + MgH_I,$$

además como la bolita se suelta del reposo $v_{C.M.} = 0$ y $\omega = 0$ y la altura inicial $H_I = h_1$:

$$E_I = Mgh_1,$$

al llegar a la superficie horizontal esta energía potencial se convierte en energía cinética de traslación y rotación:



Figura 12.25: Una bolita sólida desciende sobre una rampa con fricción, posteriormente se mueve sobre una superficie horizontal girando sin resbalar y finalmente asciende por una rampa girando y deslizándose.

$$\begin{aligned} Mgh_1 &= \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I\omega_I^2 + Mgh_S \\ &= \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \end{aligned}$$

además como la bolita al llegar a la superficie gira sin resbalar $v_{C.M.} = \omega R$, donde R es el radio de la bolita y la altura de la superficie se toma igual a cero $H_S = 0$, por lo que:

$$Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_{C.M.}}{R}\right)^2,$$

es decir la velocidad del centro de masa de la bolita es:

$$v_{C.M.} = \sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{I}{MR^2}}},$$

Ahora cuando la bolita inicia el ascenso, ésta resbala por lo que durante todo el ascenso su velocidad angular no cambia hasta el punto de altura h_2 , de manera que la conservación de la energía aplicada al ascenso de la bolita sólo transforma la energía cinética de traslación en energía potencial, es decir:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{v_{C.M.}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 = Mgh_2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_{C.M.}}{R}\right)^2,$$

sustituyendo el valor $v_{C.M.}$ se obtiene:

$$\frac{h_1}{1 + \frac{I}{MR^2}} = h_2 ,$$

finalmente si se considera que la bolita es una esfera sólida de densidad uniforme se obtiene:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 ,$$

y la altura h_2 está dada en términos de la altura inicial h_1 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{h_1}{1 + \frac{2}{5}} \\ &= \frac{5}{7}h_1 . \end{aligned}$$

Es decir la altura final h_2 es menor que la altura inicial h_1 , porque cuando la esfera llega a la altura h_2 , ésta se encuentra girando respecto a un eje que pasa por su centro.

12-13.- Una barra uniforme de masa M y longitud L pivotea sobre uno de sus extremos y cuelga libremente sin fricción como se muestra en la figura 12.26. Una fuerza horizontal F_0 golpea a la barra durante un tiempo muy corto Δt a una distancia x por debajo del pivote.

Demostrar que la velocidad del centro de masa de la barra inmediatamente después del golpe es: $v_0 = \frac{3F_0x\Delta t}{2ML}$.

Sol:

En esta situación física lo primero que debe relacionarse es la velocidad del centro de masa del pivote $v_{C.M.}$ con la velocidad angular ω con que el pivote gira respecto a un eje fijo:

$$v_{C.M.} = \frac{L}{2}\omega$$

de manera que después de un intervalo de tiempo Δt la aceleración angular α es:

$$\omega = \alpha\Delta t ,$$

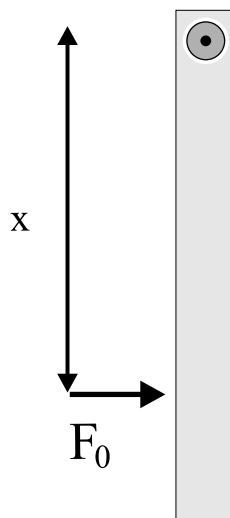


Figura 12.26: Barra uniforme de masa M sobre la cual actúa una fuerza F_0 durante un pequeño tiempo Δt a una distancia x del eje de giro.

esta aceleración angular se relaciona con el momento de fuerza τ ejercido por la fuerza F_0 mediante la expresión:

$$\tau = F_0 x = I_{pivote} \alpha .$$

De donde se obtiene para α :

$$\alpha = \frac{F_0 x}{I_{pivote}} ,$$

donde el momento de inercia para una varilla delgada de longitud L , respecto a un eje de giro que pasa por uno de sus extremos está dado por:

$$I_{pivote} = \frac{1}{3} M L^2 .$$

Sustituyendo este valor se obtiene:

$$\alpha = \frac{3 F_0 x}{M L^2} .$$

Por lo que la velocidad angular de la varilla en términos de su aceleración angular es:

$$\omega = \alpha \Delta t = \frac{3F_0 x \Delta t}{ML^2}.$$

De esta manera la velocidad del centro de masa de la varilla justo después del golpe resulta ser:

$$v_{C.M.} = \frac{L}{2} \omega = \frac{3F_0 x \Delta t}{2ML}.$$

12-14.- Las partículas de la figura 12.27 se unen mediante una varilla muy ligera cuyo momento de inercia puede despreciarse. Todas las partículas giran alrededor del eje y con una velocidad angular $\omega = 2 \frac{rad}{s}$.

- a) Hallar la velocidad de cada partícula y con éstas calcular la energía cinética de este sistema directamente a partir de la expresión $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$.
- b) Hallar el momento de inercia de este sistema cuando éste gira alrededor del eje y y calcular la energía cinética a partir de la expresión $K = \frac{1}{2} I \omega^2$.

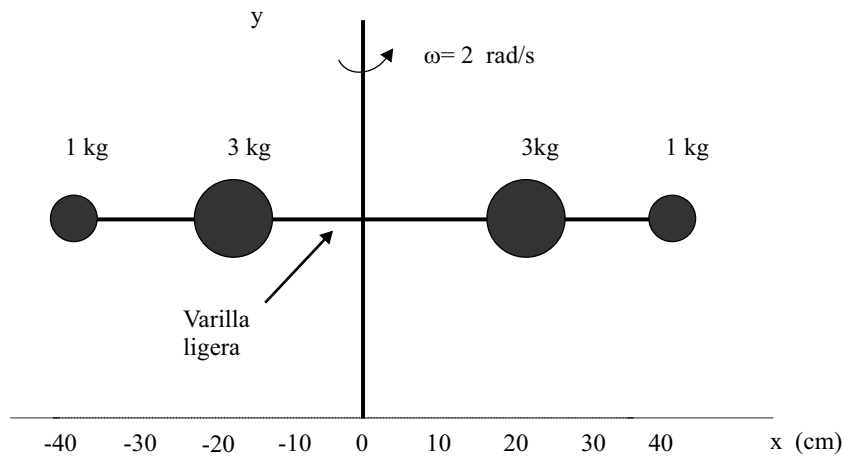


Figura 12.27: Mancuerna formada por cuatro pequeñas esferas girando alrededor de un eje perpendicular a la mancuerna y que pasa por el centro de la barra que une a las esferas.

Sol:

- a) La velocidad tangencial de la i -ésima partícula está dada por:

$$v_{t_i} = \omega r_i,$$

donde r_i es el radio de giro de la i -ésima partícula, es decir su distancia al eje de giro, de esta forma las partículas de masa 1 kg tendrán una velocidad tangencial de:

$$v_t = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} (0.4 \text{ m}) = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

mientras que la velocidad tangencial de las partículas de 3 kg es:

$$v_t = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} (0.2 \text{ m}) = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ahora la energía cinética del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 \text{ kg} \left(0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 1 \text{ kg} \left(0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 3 \text{ kg} \left(0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + 3 \text{ kg} \left(0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] = \\ &= 1.12 \text{ J}. \end{aligned}$$

b) El momento de inercia I del sistema de la figura 12.27 está dado por:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = \\ &= [1 \text{ kg} (0.4 \text{ m})^2 + 1 \text{ kg} (-0.4 \text{ m})^2 + 3 \text{ kg} (0.2 \text{ m})^2 + 3 \text{ kg} (-0.2 \text{ m})^2] \\ &= 0.56 \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

Ahora calculando la energía cinética mediante la expresión $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} (0.56 \text{ kg m}^2) \left(2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 1.12 \text{ J}$$

por lo que ambos resultados coinciden con base en la definición del momento de inercia I , y de la relación entre la velocidad tangencial v_t y la velocidad angular ω .

12-15.- Una bola de billar de radio r se encuentra inicialmente en reposo sobre una mesa de billar horizontal como se muestra en la figura 12.28. La bola se golpea con un taco que desarrolla una fuerza de módulo F_0 durante un tiempo muy corto Δt . El taco golpea la bola en un punto situado a una distancia h del punto de contacto entre la bola y la mesa. Demostrar que la velocidad angular ω_0 está relacionada con la velocidad lineal inicial del centro de masa mediante la siguiente expresión:

$$\omega_0 = \frac{5v_0(h-r)}{2r^2}.$$

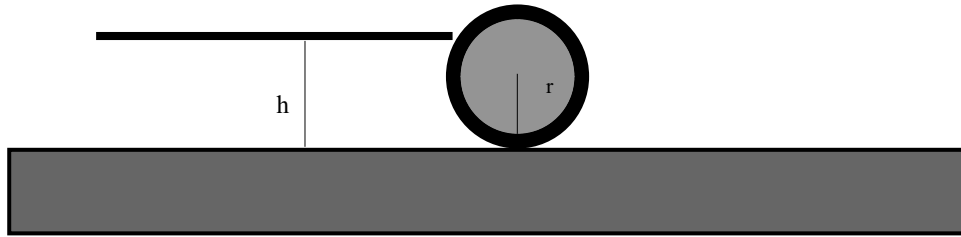
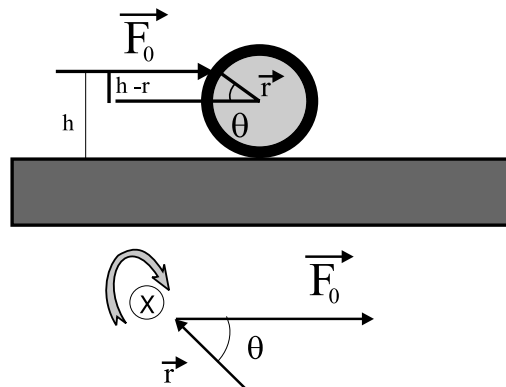


Figura 12.28: Esfera sólida golpeada por una fuerza impulsiva F_0 que es aplicada a una altura h sobre el piso.

Sol:

Una vez que se golpea la bola con un taco que desarrolla una fuerza F_0 , se produce un cambio en el momento lineal $P_0 = F_0\Delta t$ del centro de masa de la bola de billar. La velocidad de traslación del centro de masa está dada por:

$$v_0 = \frac{P_0}{m} = \frac{F_0\Delta t}{m}. \quad (12.38)$$



$$\tau = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_0| = F_0 r \sin(\theta) = F_0 (h - r)$$

Figura 12.29: Diagrama del momento de fuerza debido a la fuerza impulsiva $F_0 = \frac{P_0}{\Delta t}$.

Adicionalmente la fuerza F_0 también produce un momento de fuerza $\tau = F_0 r \sin \theta = F_0(h-r)$ (véase la figura 12.29). Este momento de fuerza es igual al cambio en el momento angular L , de la bola de billar de manera que:

$$L = I\omega_0 = \tau\Delta t = F_0(h-r)\Delta t. \quad (12.39)$$

Relacionando ahora $F_0\Delta t = mv_0$ con la velocidad angular se obtiene, sustituyendo el valor del momento de inercia de una esfera sólida $I = \frac{2}{5}mr^2$:

$$\frac{2}{5}mr^2\omega_0 = mv_0(h - r), \quad (12.40)$$

de donde finalmente se puede despejar ω_0 obteniendo:

$$\omega_0 = \frac{5v_0(h - r)}{2r^2}. \quad (12.41)$$

Capítulo 13

Conservación del momento angular

13-1.- En la figura 13.1 el plano inclinado es una superficie lisa sin fricción y la cuerda pasa a través del centro de masa de cada bloque. La polea tiene un momento de inercia I y un radio R , determinar:

- El momento total de fuerza del sistema (las dos masas, la cuerda y la polea), respecto al centro de la polea.
- Expresar el momento angular total del sistema respecto al centro de la polea cuando las masas se mueven con velocidad v .
- Determinar la aceleración de las masas a partir de los resultados *a)* y *b)* igualando el momento total de fuerzas del sistema con la derivada respecto al tiempo del momento angular total del sistema.

Sol:

a) La magnitud del momento de fuerza total de cada uno de los bloques y de la polea que forman el sistema se han calculado por separado en la figura 13.2, respecto al eje que pasa por el centro de la polea. De acuerdo con este resultado el momento de fuerza total del sistema respecto al eje que pasa por el centro de la polea, está dado por (ver figura 13.3):

$$\tau_T = (m_2 \operatorname{sen} \alpha - m_1) gR, \quad (13.1)$$

donde se considera que la dirección positiva para los momentos de fuerzas es aquella dirección que “sale” de la hoja en la figura 13.3.

b) El valor de la magnitud del momento angular $L = |\vec{\mathbf{L}}|$, de acuerdo con la figura 13.4, es igual a la suma de las contribuciones de las dos masas (m_1 y m_2) y el momento

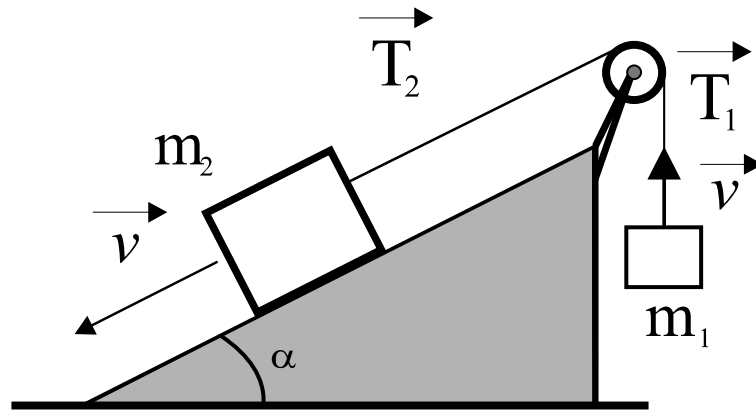


Figura 13.1: Sistema de dos bloques y una polea cuya aceleración se determina utilizando la relación entre el momento total de fuerzas y la variación respecto al tiempo del momento angular total.

angular de la polea todos evaluados respecto a un eje de giro que pase por el centro de la polea. La magnitud del momento angular total está dado por:

$$L_T = |\vec{L}_T| = (m_1 + m_2)vR + I\omega,$$

donde I puede aproximarse por el momento de inercia de un disco sólido girando alrededor de su centro

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

c) De acuerdo con la definición de la variación del momento angular respecto al tiempo,

se tiene que:

$$\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{T_i} = \vec{\tau}_T,$$

$$\begin{aligned} \frac{dL_T}{dt} &= \frac{d((m_1 + m_2)vR + I\omega)}{dt} = (m_1 + m_2)aR + I\alpha \\ &= (m_1 + m_2)aR + I\frac{a}{R} = \tau_T. \end{aligned}$$

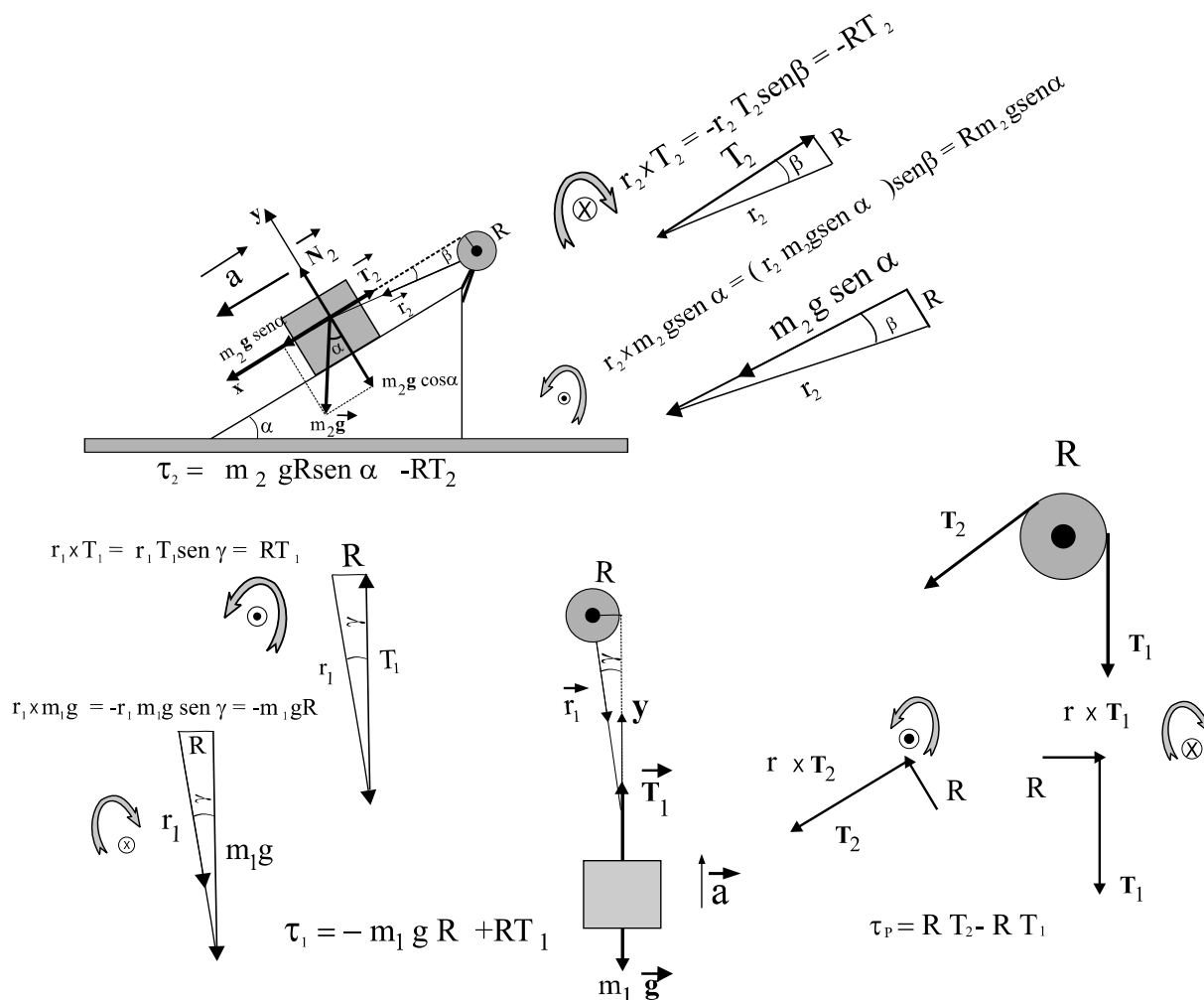


Figura 13.2: Determinación del momento de fuerza de cada uno de los bloques y de la polea que forman el sistema del plano inclinado.

De donde finalmente se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dL_T}{dt} &= (m_1 + m_2) a R + I \frac{a}{R} = \tau_T = (m_2 g \sin \alpha - m_1 g) R \\ &\Rightarrow \\ \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) a &= m_2 g \sin \alpha - m_1 g \\ &\Rightarrow \\ a &= \frac{m_2 g \sin \alpha - m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \end{aligned}$$

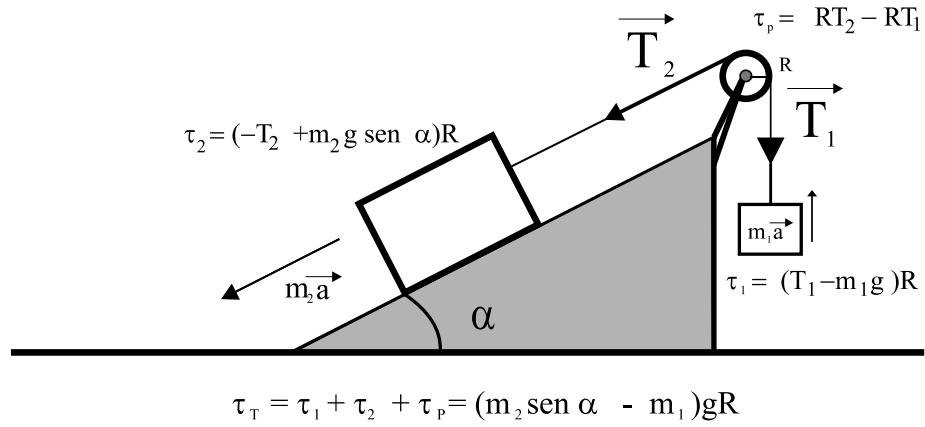


Figura 13.3: Determinación del momento total de fuerzas del sistema.

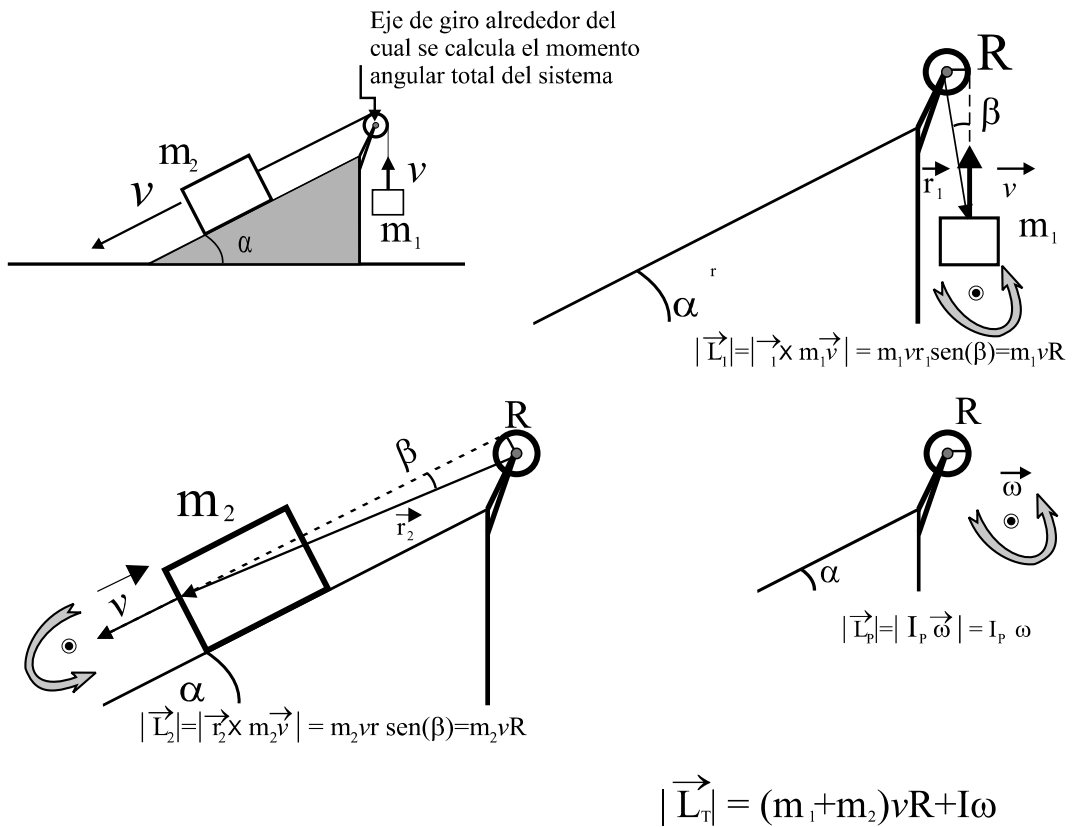


Figura 13.4: Determinación del momento angular total del sistema.

Que es el mismo resultado obtenido en el problema 11-5 del capítulo anterior.

13-2.- La figura 13.5 muestra una barra de longitud d , masa M y densidad uniforme que cuelga de un pivote en la parte superior. La barra se encuentra inicialmente en reposo y posteriormente recibe el impacto de una partícula de masa m en un punto localizado a una distancia $x = 0.8d$ del pivote. Suponer que la partícula, al impactar, se pega a la barra. ¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad inicial v de la partícula para que el ángulo máximo entre la barra y la vertical sea de 90° ?

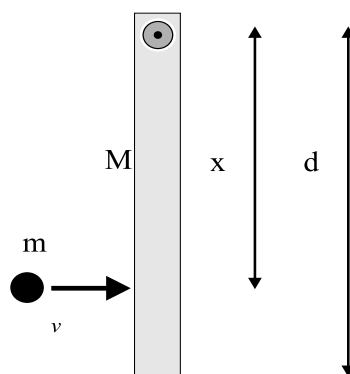


Figura 13.5: Una pequeña partícula de masa m choca con una barra de longitud d y masa M que tiene un extremo fijo a un pivote.

Sol:

Durante la colisión el momento angular total del sistema se conserva, de manera que debe aplicarse la condición:

$$L_i = L_f \tag{13.2}$$

y de acuerdo a los diagramas para el momento angular total del sistema antes y después del impacto de la partícula (figura 13.6), se obtiene que:

$$\begin{aligned} L_i &= mvx = 0.8mvd \\ L_f &= \left(mx^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega = \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega, \end{aligned} \tag{13.3}$$

igualando estas dos últimas expresiones, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0.8mvd &= \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega \\ \Rightarrow \\ \omega &= \frac{0.8mvd}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}}. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Ahora imponiendo la condición de que en la situación final la barra se encuentre formando un ángulo de 90° con la vertical, es necesario considerar la conservación de la energía mecánica total, a partir del momento en que la partícula junto con la barra giran alrededor del pivote:

$$E_i = E_f \quad (13.5)$$

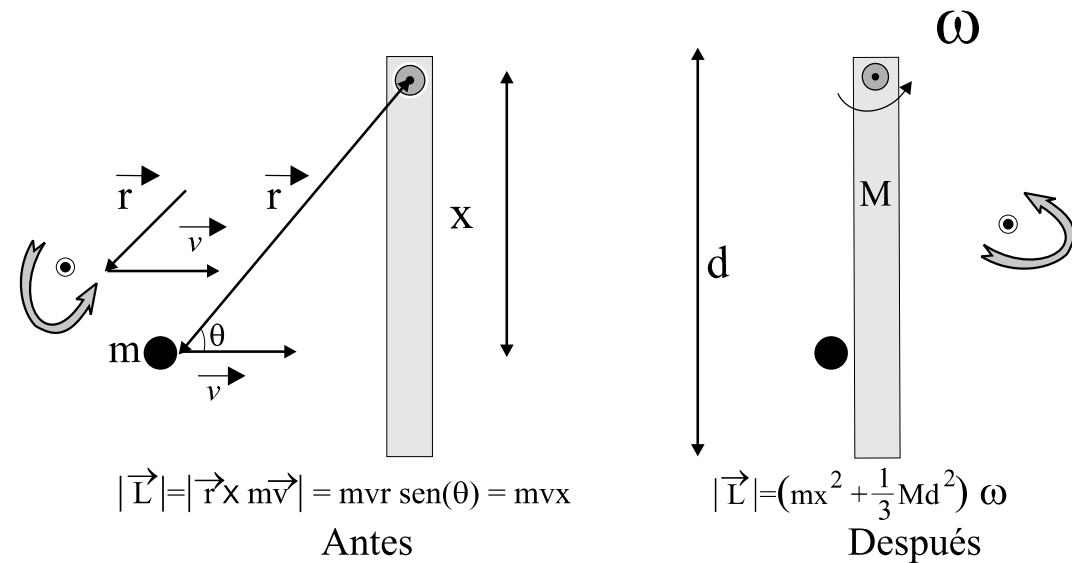


Figura 13.6: Momento angular total del sistema, calculado respecto al pivote que sujeta a la barra, antes y después del impacto de la partícula de masa m .

donde

$$\begin{aligned} E_i &= \left(mx^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega^2 = \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega^2 \\ E_f &= mgx + \frac{Mgd}{2} = mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2}, \end{aligned} \quad (13.6)$$

igualando estas dos últimas expresiones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega^2 &= mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2} \\ \Rightarrow \\ \omega^2 &= \frac{mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2}}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Sustituyendo el valor obtenido para ω en la ecuación (13.4), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{0.8mvd}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}} \right)^2 &= \frac{mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2}}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}} \\
 &\Rightarrow \\
 v^2 &= \frac{\left(mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2} \right) \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right)}{(0.8md)^2} \\
 &\Rightarrow \\
 v &= \sqrt{\frac{\left(m(0.8) + \frac{M}{2} \right) \left(m(0.8)^2 + \frac{M}{3} \right) gd}{(0.8m)^2}}. \quad (13.8)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que después de la colisión la barra junto con la partícula pegada a la barra formen un ángulo de 90° con la vertical, la partícula debe chocar con la barra a una rapidez dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\left(m(0.8) + \frac{M}{2} \right) \left(m(0.8)^2 + \frac{M}{3} \right) gd}{(0.8m)^2}}. \quad (13.9)$$

13-3.- Si en el ejercicio anterior, $d = 1.2 \text{ m}$, $M = 0.8 \text{ kg}$ y $m = 0.3 \text{ kg}$ y el ángulo máximo entre la barra y la vertical es de 60° , determinar la velocidad de la partícula antes del impacto.

Sol:

Del ejercicio anterior se sabe que, aplicando la conservación del momento angular, la rapidez angular después de la colisión está dada por:

$$\omega^2 = \frac{mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2}}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}}. \quad (13.10)$$

Ahora aplicando la conservación de la energía para un ángulo final de 60° :

$$E_i = E_f \quad (13.11)$$

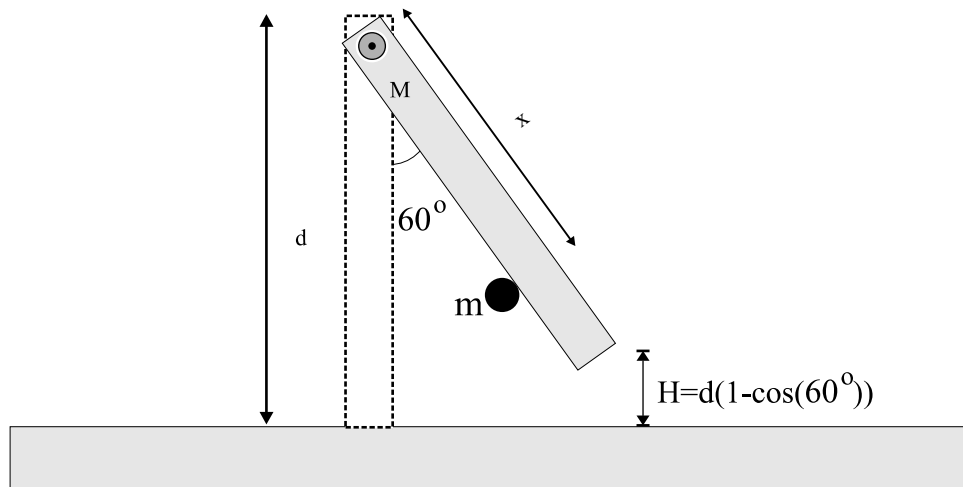


Figura 13.7: Altura final del sistema barra-partícula.

donde

$$\begin{aligned}
 E_i &= \left(mx^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega^2 = \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega^2 \\
 E_f &= mgh + MgH = mgx(1 - \cos(60^\circ)) + \frac{Mgd(1 - \cos(60^\circ))}{2} \\
 &= mg(0.8d)(1 - \cos(60^\circ)) + \frac{Mgd(1 - \cos(60^\circ))}{2}, \quad (13.12)
 \end{aligned}$$

ya que la altura final del centro de masa está dado por:

$$H_f = \frac{d(1 - \cos(60^\circ))}{2} \quad (13.13)$$

como puede observarse en la figura 13.7, y la altura final de la partícula es:

$$h = x(1 - \cos(60^\circ)). \quad (13.14)$$

Aplicando la conservación de la energía, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right) \omega^2 &= mg(0.8d)(1 - \cos(60^\circ)) + \frac{Mgd}{2}(1 - \cos(60^\circ)) \\
 \Rightarrow \omega^2 &= \left(\frac{mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2}}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}} \right) (1 - \cos(60^\circ)). \quad (13.15)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor obtenido para ω en la ecuación (13.10), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{0.8mvd}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}} \right)^2 &= \left(\frac{mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2}}{m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3}} \right) (1 - \cos(60^\circ)) \\
 &\Rightarrow \\
 v^2 &= \left(\frac{\left(mg(0.8d) + \frac{Mgd}{2} \right) \left(m(0.8d)^2 + \frac{Md^2}{3} \right)}{(0.8md)^2} \right) (1 - \cos(60^\circ)) \\
 &\Rightarrow \\
 v &= \sqrt{\left(\frac{\left(m(0.8) + \frac{M}{2} \right) \left(m(0.8)^2 + \frac{M}{3} \right) gd}{(0.8m)^2} \right) (1 - \cos(60^\circ))}.
 \end{aligned}
 \tag{13.16}$$

Por lo tanto, para que después de la colisión la barra junto con la partícula pegada a la barra formen un ángulo de 60° con la vertical, la partícula debe impactar a la barra con una rapidez dada por:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\left(m(0.8) + \frac{M}{2} \right) \left(m(0.8)^2 + \frac{M}{3} \right) gd}{(0.8m)^2} \right) (1 - \cos(60^\circ))}. \tag{13.17}$$

Sustituyendo los valores numéricos; $d = 1.2 \text{ m}$, $M = 0.8 \text{ kg}$ y $m = 0.3 \text{ kg}$, se obtiene:

$$v = 5.47 \frac{m}{s}. \tag{13.18}$$

13-4.- Una barra metálica delgada y uniforme de $2m$ de longitud y con un peso de 90 N , cuelga verticalmente del techo mediante un pivote sin fricción colocado en el extremo superior de la barra. De repente, una pelota de 3 kg , que viaja a $v_0 = 10 \frac{m}{s}$ en dirección horizontal, golpea la barra 1.50 m por debajo del techo.

La pelota rebota en dirección opuesta con una rapidez de $v = 6 \frac{m}{s}$.

a) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque.

b) ¿Por qué se conserva la cantidad de movimiento angular pero no la lineal?

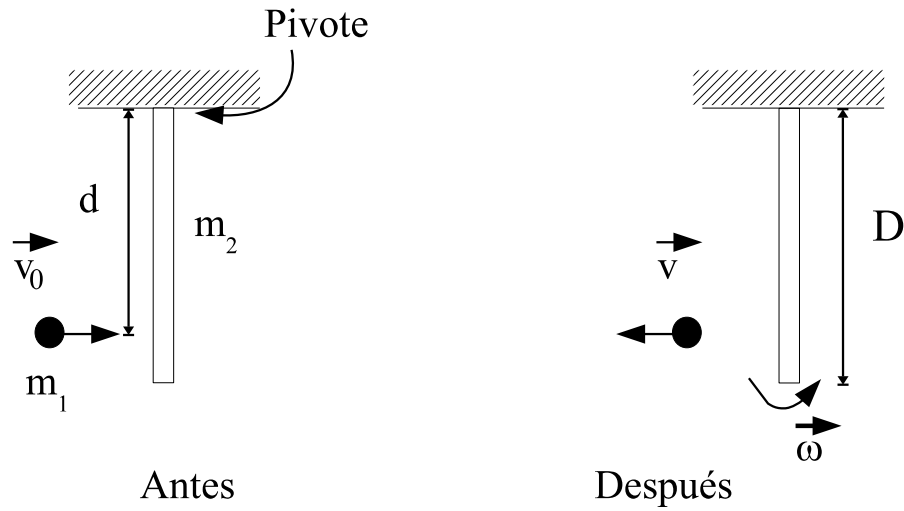


Figura 13.8: Una barra metálica delgada es golpeada por una pelota con una rapidez inicial v_0 a una distancia de 1.50 m por debajo del pivote fijo de la barra.

Sol:

a) Durante la colisión el momento angular total del sistema se conserva, de manera que debe aplicarse la condición:

$$L_i = L_f \quad (13.19)$$

y de acuerdo a los diagramas para el momento angular total del sistema antes y después del impacto de la partícula (figura 13.9), se obtiene que:

$$\begin{aligned} L_i &= m_1 v_0 d \\ L_f &= -m_1 v d + \frac{m_2 D^2 \omega}{3}, \end{aligned} \quad (13.20)$$

igualando estas dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\begin{aligned} m_1 v_0 d &= -m_1 v d + \frac{m_2 D^2 \omega}{3} \\ \Rightarrow \\ \omega &= \frac{3m_1 d(v_0 + v)}{m_2 D^2}. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Sustituyendo los valores numéricos $D = 2\text{ m}$, $m_2 = \frac{90\text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 9.18\text{ kg}$, $m_1 = 3\text{ kg}$, $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $d = 1.50\text{ m}$ y $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, se encuentra que:

$$\omega = 5.51 \frac{rad}{s^2}. \tag{13.22}$$

b) El momento angular se conserva porque la fuerza que el pivote ejerce sobre la barra (\vec{F}_P), no produce un momento neto de fuerza distinto de cero ($\tau_T = 0$), pero el momento lineal (\vec{P}), no se conserva porque esta fuerza ejercida por el pivote sobre la barra no se equilibra por ninguna otra fuerza, de manera que:

$$\vec{F}_P = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t},$$

y por lo tanto \vec{P} no se conserva.

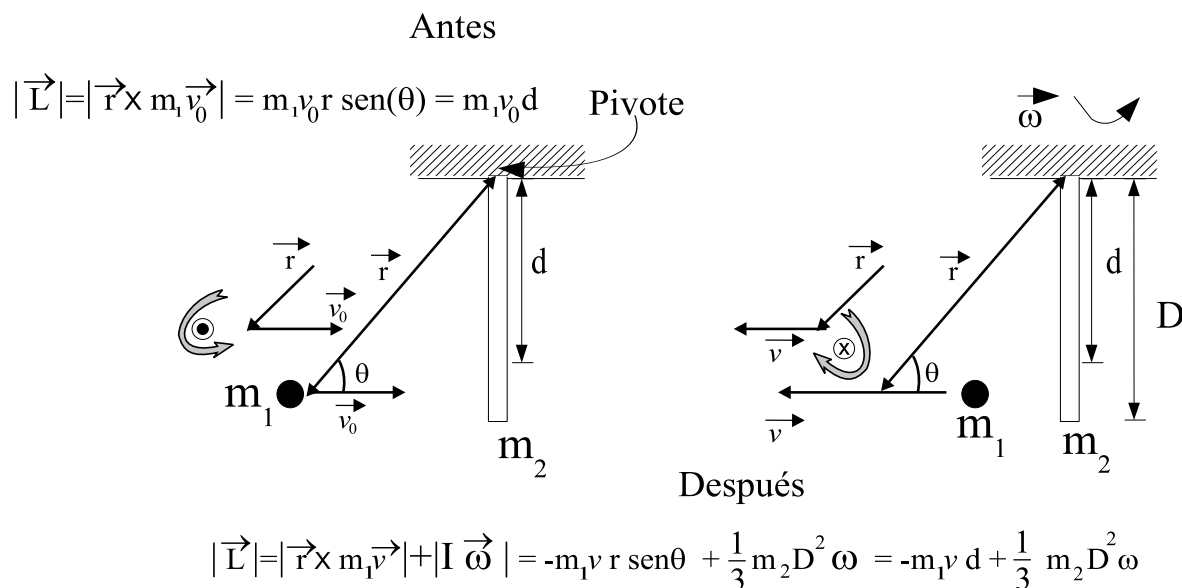


Figura 13.9: Momento angular total del sistema, calculado respecto al pivote que sujeta a la barra delgada, antes y después del impacto de una pelota con rapidez inicial v_0 .

13-5.- Una puerta sólida de madera de $1\ m$ de ancho y $2\ m$ de alto tienes las bisagras en un lado y su masa es de $40\ kg$. La puerta, que inicialmente está en reposo, se golpea en su centro por un puñado de lodo pegajoso de $0.50\ kg$ que viaja

en dirección perpendicular a la puerta a $12 \frac{m}{s}$ justo antes del impacto. Calcule la rapidez angular final de la puerta. ¿Es apreciable la aportación del lodo al momento de inercia?

Sol:

Durante la colisión el momento angular total del sistema se conserva, de manera que debe aplicarse la condición:

$$L_i = L_f \quad (13.23)$$

y de acuerdo a los diagramas para el momento angular total del sistema antes y después del impacto de la partícula (figura 13.10), se encuentra que:

$$\begin{aligned} L_i &= mvd \\ L_f &= \left(md^2 + \frac{M(2d)^2}{3} \right) \omega = \left(m(d)^2 + \frac{4Md^2}{3} \right) \omega, \end{aligned} \quad (13.24)$$

igualando estas dos últimas expresiones, se obtiene:

$$\begin{aligned} mvd &= \left(md^2 + \frac{4Md^2}{3} \right) \omega \\ \Rightarrow \\ \omega &= \frac{mvd}{\left(md^2 + \frac{4Md^2}{3} \right)}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Sustituyendo los valores numéricos $D = 2 \text{ m}$, $m_2 = 40 \text{ kg}$, $m_1 = 0.5 \text{ kg}$, $v = 10 \frac{m}{s}$ y $d = 1 \text{ m}$, se encuentra para la rapidez angular:

$$\omega = 0.11 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad (13.26)$$

la contribución de la pequeña masa de lodo al momento de inercia del sistema compuesto después del impacto, puede estimarse considerando el resultado para la rapidez angular (ecuación (13.25)), despreciando el valor de la masa de lodo ($m = 0.50 \text{ kg}$), en el denominador, de donde se obtiene que:

$$\omega = \frac{mvd}{\left(\frac{4Md^2}{3} \right)} = 0.11 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (13.27)$$

Por lo que la contribución de la masilla al momento de inercia del sistema compuesto es despreciable.

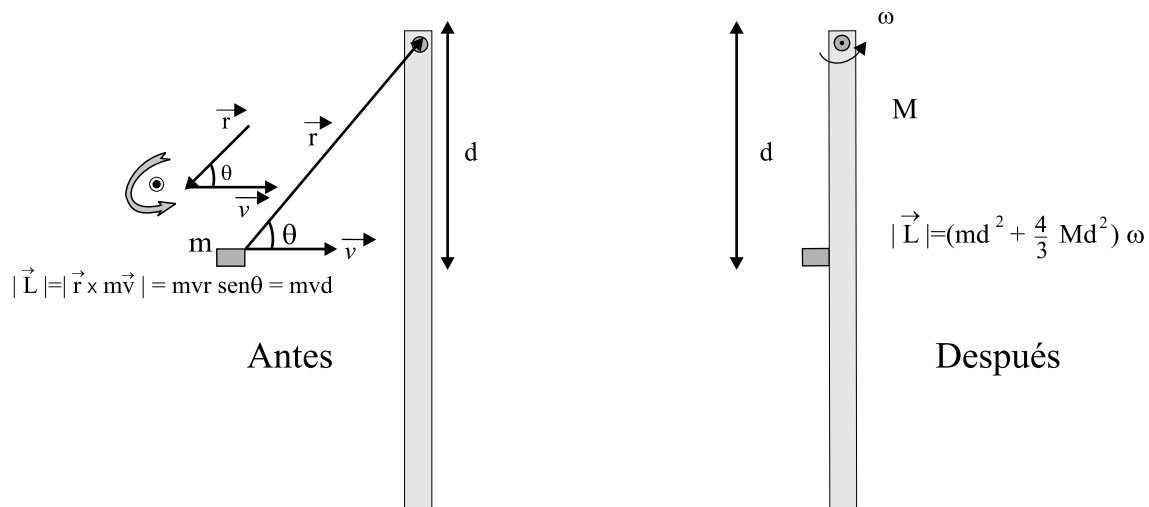


Figura 13.10: Determinación del momento angular antes y después de que una bola de lodo choque contra una puerta.

13-6.- Una partícula de masa m como la que se muestra en la figura 13.11 se desliza hacia abajo por una superficie sin fricción desde una altura h y choca contra una varilla vertical uniforme (de masa M y longitud d) quedando pegada a ella. La varilla gira alrededor de un pivote fijo hasta desplazarse un ángulo θ antes de detenerse momentáneamente. Encuentre θ .

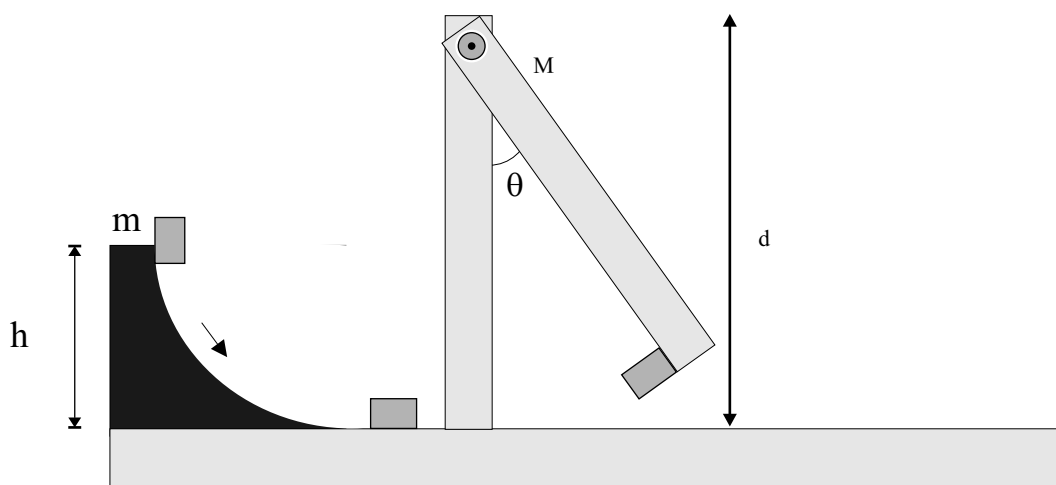


Figura 13.11: Un bloque de masa m se desliza sin fricción por una rampa y posteriormente queda pegado a una barra de masa M y longitud d .

Sol:

En el movimiento del bloque descendiendo desde una altura h , como no hay fricción entre las superficies la energía mecánica total se conserva, por lo tanto, durante el recorrido del bloque hasta justo antes de chocar contra la varilla vertical la energía del bloque se transformará de la siguiente manera:

$$E_i = K_{1i} + U_{1i} = mgh = K_{1f} + U_{1f} = \frac{mv^2}{2},$$

de manera que el bloque llega justo antes de chocar con la varilla con una rapidez determinada por:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh}.$$

En este momento tiene lugar una “colisión rotacional” entre la varilla y el bloque durante la cual el momento angular se conserva:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

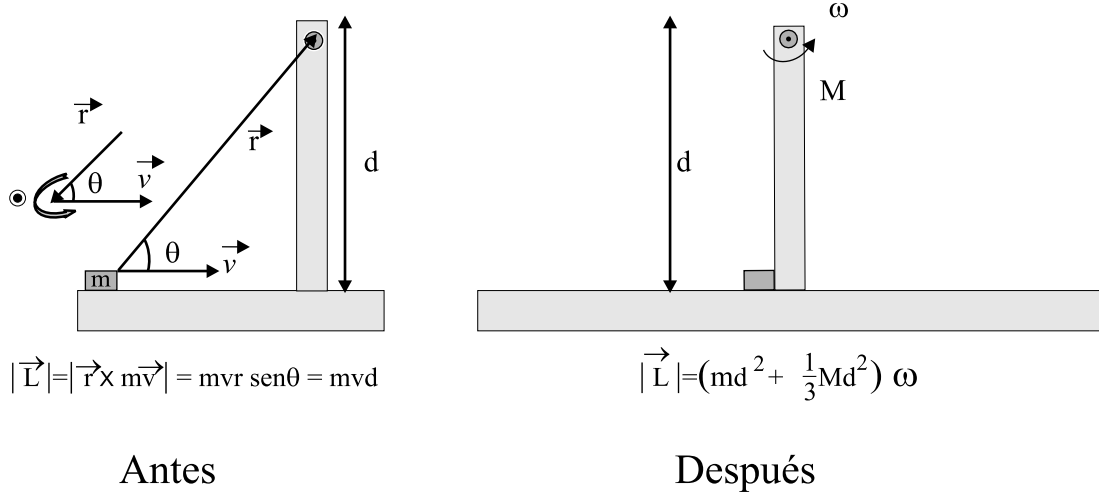


Figura 13.12: Determinación del momento angular antes y después de que el bloque choque con la barra.

El valor de la magnitud del momento angular $L = |\vec{L}|$, de acuerdo con la figura 13.12, en la situación inicial está dado por:

$$L_i = mvr \operatorname{sen}\theta = mvd,$$

el valor que tiene en la situación final el momento angular es:

$$L_f = (I_{\text{var}} + md^2) \omega ,$$

donde I_{var} puede aproximarse por el de una barra delgada girando alrededor de uno de sus extremos, aplicando el teorema de los ejes paralelos se obtiene:

$$I_{\text{var}} = \frac{1}{12}Md^2 + M \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}Md^2 .$$

Por lo tanto, igualando $L_i = L_f$ se encuentra para la rapidez angular de sistema justo después de que el bloque y la varilla entran en contacto:

$$\omega = \frac{md\sqrt{2gh}}{\frac{1}{3}Md^2 + md^2}$$

en este momento el sistema completo posee una energía cinética $\frac{1}{2}(I_{\text{rod}} + md^2)\omega^2$ que se transformará en energía potencial en la posición final, donde el bloque ha alcanzado una altura H (relativa al punto más bajo) y el centro de masa de la varilla se ha elevado $\frac{H}{2}$. Partiendo de la trigonometría de la situación final, se encuentra para H en función del ángulo θ girado $H = d(1 - \cos \theta)$ (véase la figura 13.13), por lo que:

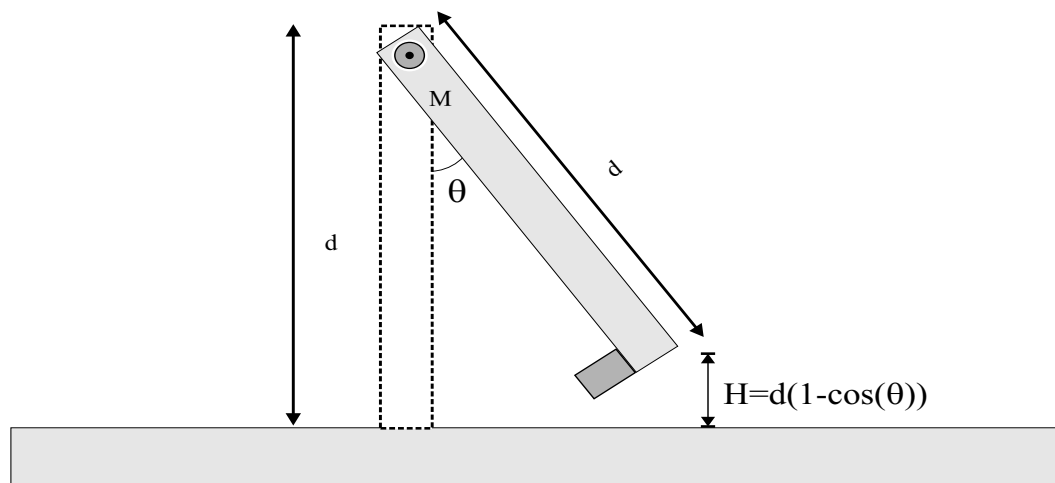


Figura 13.13: Determinación de la altura final H del sistema unido.

$$\frac{1}{2} (I_{\text{rod}} + md^2) \omega^2 = mgH + Mg \frac{H}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{m^2 d^2 (2gh)}{\frac{1}{3} M d^2 + md^2} \right] = \left(m + \frac{M}{2} \right) gd (1 - \cos \theta)$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\theta = \cos^{-1} \left(1 - \frac{m^2 h}{\left(m + \frac{1}{2} M \right) \left(m + \frac{1}{3} M \right) d} \right) .$$

- 13-7.-** Un bloque de 0.025 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a un cordón sin masa que pasa por un agujero en la superficie como se muestra en la figura 13.14. El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0.300 m del agujero, con una rapidez angular de $1.75 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Posteriormente se tira del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m . El bloque puede tratarse como una partícula puntual.

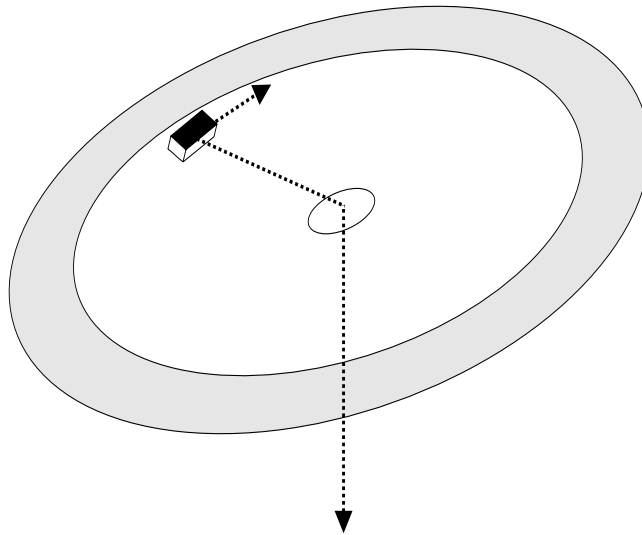


Figura 13.14: Conservación del momento angular de un bloque en una trayectoria circular cuyo radio de giro disminuye.

- a) ¿Se conserva la cantidad de momento angular? Explique
 b) ¿Qué valor tiene en la situación final la rapidez angular?
 c) ¿Calcule el cambio en la energía cinética del bloque?
 d) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar del cordón?

Sol:

a) De acuerdo a la definición para la variación del momento angular respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}},$$

cuando se tira del cordón desde abajo de la superficie horizontal, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m , la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y el vector posición $\vec{\mathbf{r}}$ son paralelos ($\vec{\mathbf{F}} \parallel \vec{\mathbf{r}}$), por lo que de acuerdo a la definición de producto vectorial $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = 0$, por lo tanto:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0.$$

De acuerdo con este último resultado el momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ no cambia en el tiempo, es decir el momento angular permanece constante durante el movimiento del bloque.

b) El valor de la magnitud del momento angular $L = |\vec{\mathbf{L}}|$, en la situación inicial está dado por:

$$\begin{aligned} L_i &= m\omega_i r_i^2 = (0.025)(1.75)(0.3)^2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 3.94 \times 10^{-3} \text{ Js}, \end{aligned}$$

el valor que tiene en la situación final el momento angular es:

$$L_f = m\omega_f r_f^2,$$

con $r_f = 0.150\text{ m}$ para determinar el valor de la rapidez angular ω_f cuando se ha acortado el radio de giro a un valor r_f , debe aplicarse la conservación del momento angular:

$$\begin{aligned} L_f &= L_i \\ \implies \\ mr_i^2\omega_i &= mr_f^2\omega_f, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} r_i^2 \omega_i &= r_f^2 \omega_f \\ \implies \\ \omega_f &= \frac{r_i^2}{r_f^2} \omega_i \\ &= \frac{(0.3 \text{ m})^2}{(0.15 \text{ m})^2} \left(1.75 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

c) El cambio de la energía cinética, está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = \\ &= \frac{1}{2} m [(\omega_f r_f)^2 - (\omega_i r_i)^2], \end{aligned}$$

y de acuerdo al resultado del inciso b) de este problema $\omega_f = \frac{r_i^2}{r_f^2} \omega_i$ por lo que:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} m [(\omega_f r_f)^2 - (\omega_i r_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{r_i^2}{r_f^2} \omega_i r_f \right)^2 - (\omega_i r_i)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (0.025 \text{ kg}) \left[\left(\frac{0.30^2 \text{ m}^2}{0.15 \text{ m}} \times 1.75 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 - \left(1.75 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0.30 \text{ m} \right)^2 \right] \\ &= 0.0103 \text{ J}. \end{aligned}$$

d) De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, el trabajo W realizado al tirar del cordón, está dado por:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} m [(\omega_f r_f)^2 - (\omega_i r_i)^2] = 0.0103 \text{ J}.$$

Parte VI. Oscilaciones y ondas mecánicas

En la última parte de esta obra de problemas resueltos se abordan problemas de oscilaciones y ondas mecánicas. Estos temas resultan de gran importancia en el estudio de la física, no sólo en la mecánica, sino también en otras áreas de la física como son la acústica, la electricidad y el magnetismo, la elasticidad etcétera.

Al tratar los problemas relacionados con las oscilaciones y ondas mecánicas, se busca que el estudiante entienda que la descripción de estos fenómenos requiere de la aplicación correcta de muchos de los principios físicos, presentados con anterioridad en el libro a través de ejercicios resueltos.

En los problemas aquí considerados se ha puesto especial atención en los conceptos de periodicidad temporal y espacial, mediante cantidades como la frecuencia de oscilación, la longitud de onda, el periodo de oscilación, la amplitud de onda o de oscilación, etcétera.

Uno de los aspectos centrales abordados es el de la representación gráfica de las oscilaciones y ondas mecánicas. Estas representaciones gráficas resultan de gran utilidad en la obtención de información básica como: la frecuencia de oscilación, la longitud de onda, el periodo de oscilación de una onda o la amplitud, necesarios para la descripción de estos fenómenos físicos.

También se han abordado algunos problemas en donde interviene la superposición de las ondas mecánicas y que da lugar, por ejemplo, a las ondas estacionarias en una cuerda. Finalmente se aborda el efecto Doppler debido al movimiento relativo de fuentes sonoras.

Capítulo 14

Oscilaciones y ondas mecánicas

14-1.- La figura 14.1 muestra el desplazamiento de un objeto oscilante en función del tiempo. Calcule:

- a) La frecuencia de oscilación.
- b) La amplitud de la oscilación y el ángulo de fase.
- c) El periodo de oscilación.
- d) Escriba la ecuación que representa este movimiento.

Sol:

a) La manera más directa para determinar la frecuencia de oscilación es a través de obtener el periodo de oscilación del movimiento armónico simple mostrado en la figura 14.1, para esto puede obtenerse de esta gráfica el tiempo que tarda la oscilación en repetirse (Determinación del periodo de oscilación T). De la gráfica de la figura 14.2 puede verse que el periodo de oscilación es: $T = 2 \text{ s}$.

Ahora utilizando la relación existente entre el periodo T y la frecuencia de oscilación f :

$$fT = 1 ,$$

se obtiene para la frecuencia de oscilación:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0.5 \text{ Hz} ,$$

y la frecuencia angular de oscilación ω es:

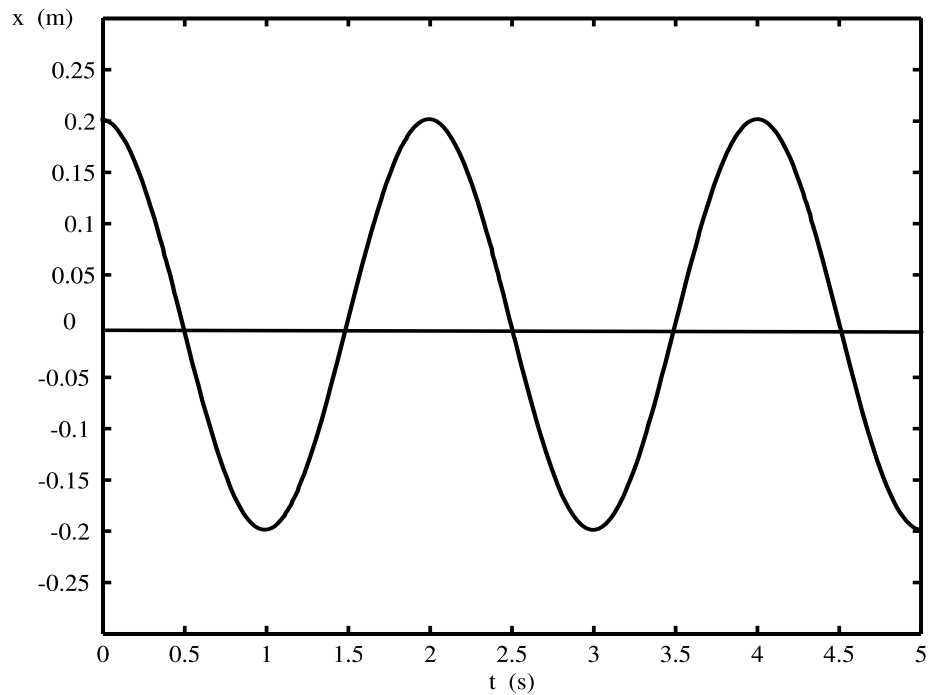


Figura 14.1: Representación gráfica de las oscilaciones de un cuerpo como función del tiempo.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\text{ s}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

b) Para determinar la amplitud de oscilación a partir de la figura 14.1, es necesario obtener, a partir de la gráfica, el valor máximo que para cualquier tiempo puede alcanzar la oscilación (máximo valor de la elongación del sistema). De la gráfica de la figura 14.2 puede verse que la amplitud de oscilación A es: $A = 0.2\text{ m}$.

El ángulo de fase puede determinarse a partir de la gráfica de la figura 14.2, a partir de la cual se observa que en el tiempo inicial $t = 0$ la elongación x es igual a la amplitud $x(t = 0) = A$, lo que corresponde a un ángulo de fase ϕ igual a cero $\phi = 0$.

c) Como ya se vio en el inciso a) de este ejercicio el periodo de oscilación es $T = 2\text{ s}$.

d) La forma más general en que puede describirse una oscilación armónica en función del tiempo es:

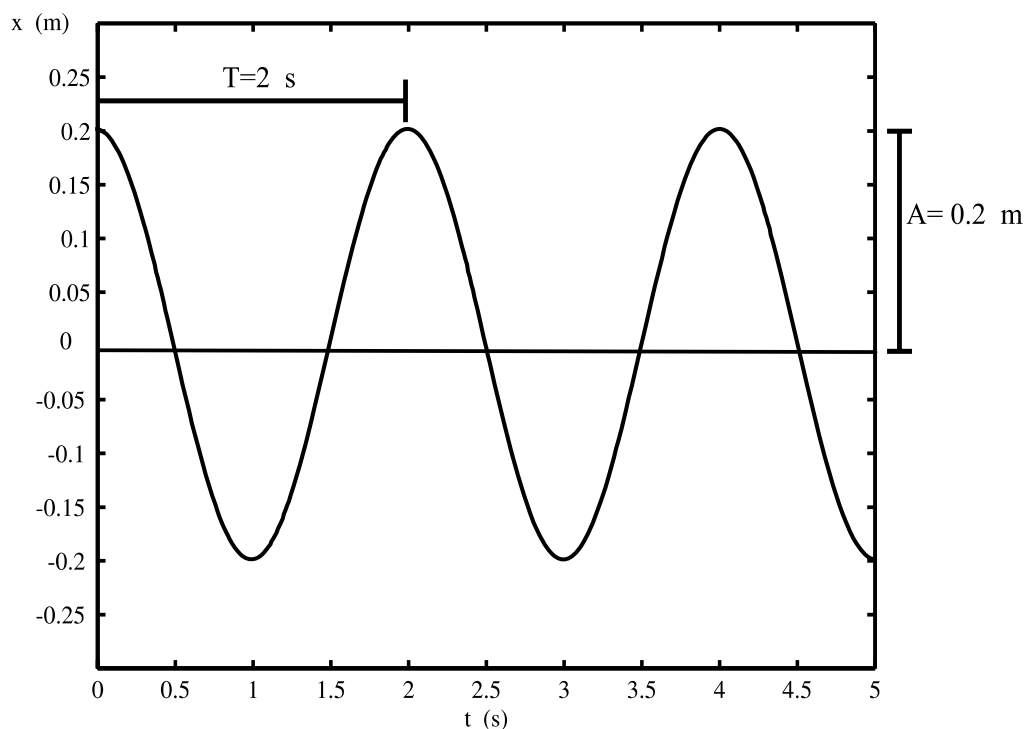


Figura 14.2: Determinación del periodo T y amplitud A de un cuerpo describiendo un movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) ,$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia angular de oscilación y ϕ es el ángulo de fase.

De acuerdo a los resultados de los tres incisos anteriores, la expresión matemática para la oscilación representada en la figura 14.1 es:

$$x(t) = (0.2 \text{ m}) \cos\left(\left(\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) t\right) .$$

14-2.- Dos resortes están conectados a un bloque de masa m , que puede deslizarse por una superficie horizontal sin fricción, como se aprecia en la figura 14.3.

Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} ,$$

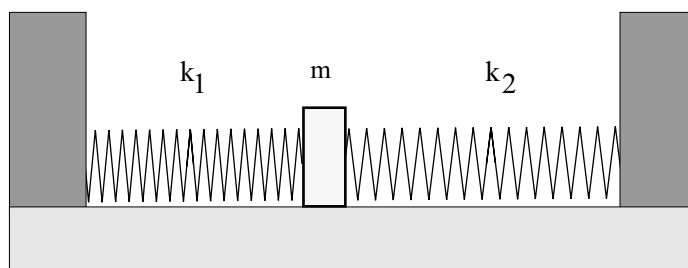


Figura 14.3: Bloque oscilante de masa m , sujeto a un resorte en cada uno de sus extremos.

donde f_1 y f_2 son las frecuencias a la que el bloque oscilaría si estuviera conectado sólo al resorte 1 o 2.

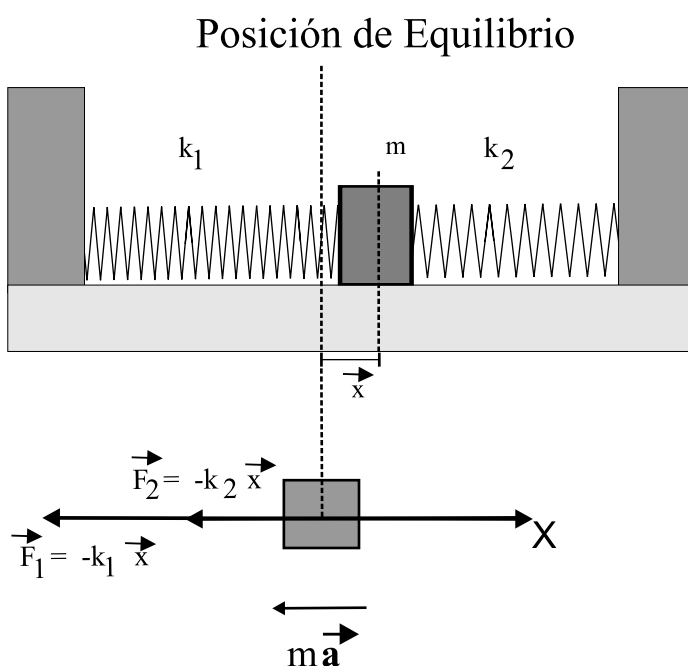


Figura 14.4: Diagrama de cuerpo libre para el bloque oscilante de masa m , sujeto a un resorte en cada uno de sus extremos.

Sol:

Recordando el origen de las oscilaciones armónicas, la ecuación de movimiento, para un objeto de masa m sujeto a un resorte de constante elástica k , está dada por:

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x ,$$

donde x es la elongación del resorte respecto a su posición de equilibrio.

Ahora para la frecuencia angular de oscilación se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x \\ \implies \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} . \end{aligned}$$

Ahora aplicando estas ideas al bloque sujeto a dos resortes como se muestra en la figura 14.3. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre para este bloque (véase la figura 14.4), la ecuación de movimiento de este bloque es:

$$\begin{aligned} ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k_1 x - k_2 x \\ \implies \\ ma &= -(k_1 + k_2) x \\ \implies \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right) x = -\omega^2 x \\ \implies \\ \omega &= \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} , \end{aligned}$$

donde ω es la frecuencia angular de oscilación para el bloque de masa m sujeto a dos resortes distintos de constantes elásticas k_1 y k_2 como se muestra en la figura 14.3. Ahora utilizando la relación:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f &= \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}} , \end{aligned}$$

se encuentra para la frecuencia de oscilación para el bloque de la figura 14.3:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\omega}{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \\
 &= \sqrt{\frac{k_1}{4\pi^2 m} + \frac{k_2}{4\pi^2 m}} \\
 &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2},
 \end{aligned}$$

donde, f_1 y f_2 son las frecuencias de oscilación si dicho bloque sólo estuviera sujeto al resorte de constante elástica k_1 ó k_2 respectivamente.

14-3.- Un bloque de masa M se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, el bloque está unido a un soporte rígido a través de un resorte de constante elástica k . Una bala de masa m y velocidad \vec{v} golpea al bloque como se muestra en la figura 14.5. Al chocar la bala ésta se incrusta en el bloque, determine:

- La velocidad del sistema compuesto después del choque.
- La amplitud del movimiento durante el movimiento armónico simple.

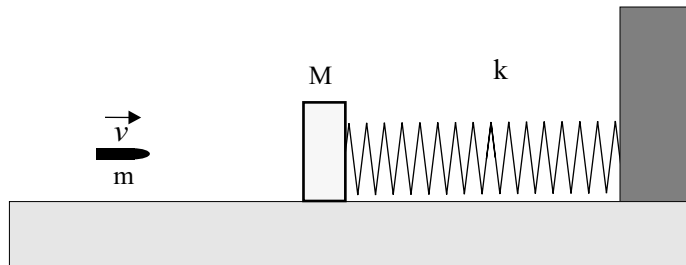


Figura 14.5: Una bala de masa m se impacta con un bloque pesado de masa M que se encuentra sujeto a un resorte de constante elástica k , después del impacto la bala y el bloque quedan unidos describiendo un movimiento armónico simple.

Sol:

a) Para determinar la rapidez que tiene el sistema de la bala y el bloque unidos después de la colisión debe identificarse que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que éstos se desplazan sobre una superficie libre de fuerzas de fricción externas y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total} = cte = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}, \quad (14.1)$$

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, para calcular $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ llamando a la bala de masa m por la letra A y al bloque de masa M por la letra B , de esta manera $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\ &= m_A (v_{A_i}, 0) + m_B (0, 0) \\ &= (mv, 0), \end{aligned} \quad (14.2)$$

después de la colisión el sistema físico se encuentra formado por un sólo objeto cuya masa es $M + m$ y su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}_{AB_f}$, es decir, en el presente caso se trata de una colisión totalmente inelástica, por lo tanto, el movimiento lineal total después del impacto está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (m_A + m_B) \vec{\mathbf{v}}_{AB_f} \\ &= (M + m) (v_{AB_f}, 0), \end{aligned} \quad (14.3)$$

en donde v_{AB_f} es la rapidez con la que el sistema compuesto inicia su movimiento sujeto a la acción del resorte de constante elástica k . Como $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ debe ser igual a $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (M + m) (v_{AB_f}, 0) = \\ &= \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = (mv, 0) \\ &\implies \\ (M + m) (v_{AB_f}, 0) &= (mv, 0), \end{aligned} \quad (14.4)$$

por lo que:

$$v_{AB_f} = \frac{mv}{M + m}. \quad (14.5)$$

por consiguiente, la rapidez del sistema compuesto un instante después de la colisión es $v_{AB_f} = \frac{mv}{M + m}$.

b) La energía mecánica total un instante después de la colisión para el sistema compuesto es igual a la energía cinética del sistema:

$$\begin{aligned}
 E_T &= K_T = \frac{1}{2} (M + m) (v_{AB_f})^2 \\
 &= \frac{1}{2} (M + m) \left(\frac{mv}{M + m} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 v^2}{M + m} \right),
 \end{aligned}$$

y la amplitud máxima que el sistema compuesto comprime estira el resorte está determinada por la conservación de la energía mecánica total:

$$\begin{aligned}
 E_T &= K_T = \frac{1}{2} (M + m) (v_{AB_f})^2 = U_{elás} = \frac{1}{2} k A_m^2 \\
 \implies \\
 \frac{1}{2} k A_m^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 v^2}{M + m} \right),
 \end{aligned}$$

donde A_m es la amplitud máxima del resorte durante el movimiento armónico simple es:

$$A_m = \sqrt{\frac{m^2 v^2}{k(M + m)}}.$$

14-4.- La figura 14.6 muestra un sistema vibrante masa-muelle colocado sobre una superficie sin fricción y que originalmente se encuentra oscilando de manera que $x(t) = (0.1 \text{ m}) \cos(40 \text{ s}^{-1}t)$, en donde x es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. Un segundo cuerpo de igual masa que se mueve hacia el sistema con una velocidad \vec{v} . Posteriormente las masas chocan elásticamente justo cuando la masa vibrante pasa por su posición de equilibrio y se mueve hacia la izquierda.

- ¿Cuál debe ser la velocidad \vec{v} de la segunda masa antes de la colisión, para que el sistema masa-muelle quede en reposo después de la colisión elástica?
- ¿Cuál es la velocidad de la segunda masa después de la colisión elástica?

Sol:

a) Para determinar la rapidez que tiene el bloque de masa M , que se desplaza hacia la derecha, justo antes del choque debe identificarse que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que ambos bloques se desplazan sobre una superficie libre de fuerzas de fricción externas y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

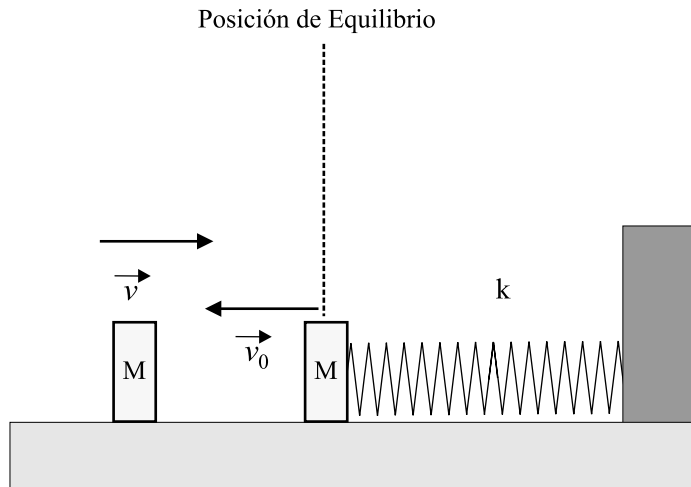


Figura 14.6: Colisión elástica entre dos bloques de igual masa, M , inicialmente desplazándose en direcciones opuestas.

Por lo tanto:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total} = cte = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}, \quad (14.6)$$

en donde i y f corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, para calcular $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ y $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ llamando al bloque desplazándose hacia la derecha por la letra A y al bloque sujeto al muelle desplazándose hacia la izquierda por la letra B , de esta manera $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= M\vec{\mathbf{v}}_{A_i} + M\vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\ &= M(v_{A_i}, 0) + M(-v_{B_i}, 0) \\ &= (Mv_{A_i} - Mv_{B_i}, 0), \end{aligned} \quad (14.7)$$

con $v_{B_i} = v_0$, después de la colisión elástica el sistema físico se encuentra con el bloque sujeto al muelle en reposo, por lo tanto, el movimiento lineal total después del impacto está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= M\vec{\mathbf{v}}_{A_f} + M\vec{\mathbf{v}}_{B_f} \\ &= M(-v_{A_f}, 0) + M(0, 0) \\ &= (-Mv_{A_f}, 0), \end{aligned} \quad (14.8)$$

en donde v_0 es la máxima velocidad del bloque sujeto al muelle, además, se tiene que en un movimiento armónico simple la velocidad del bloque es máxima cuando éste pasa

por su posición de equilibrio $v_0 = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{\text{Equilibrio}} = \left. \frac{d(0.1 m) \cos(40 s^{-1}t)}{dt} \right|_{\text{Equilibrio}} = -4 \text{ sen}(40 s^{-1}t) \Big|_{\text{Equilibrio}} = 4 \frac{m}{s}$. Además al tratarse de una colisión elástica se tiene que:

$$\begin{aligned} K_{T_i} &= K_{T_f} \\ \frac{1}{2} M v_{A_i}^2 + \frac{1}{2} M v_{B_i}^2 &= \frac{1}{2} M v_{A_f}^2 \end{aligned} \quad (14.9)$$

$$\begin{aligned} &\implies \\ v_{A_i}^2 + v_0^2 &= v_{A_f}^2 \end{aligned} \quad (14.10)$$

Adicionalmente como \vec{P}_{Total_f} debe ser igual a \vec{P}_{Total_i} :

$$\begin{aligned} M v_{A_i} - M v_0 &= -M v_{A_f} \\ &\implies \\ v_{A_i} - v_0 &= -v_{A_f}, \end{aligned} \quad (14.11)$$

por lo que, combinando estas dos últimas ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} v_{A_i}^2 - v_{A_f}^2 &= -v_0^2 \\ v_{A_i} + v_{A_f} &= v_0 \\ &\implies \\ v_{A_i} + v_{A_f} &= v_0 \\ v_{A_i} - v_{A_f} &= -v_0 \\ &\implies \\ v_{A_i} &= 0 \\ v_{A_f} &= v_0, \end{aligned} \quad (14.12)$$

por consiguiente, la rapidez del bloque A que se desplazaba hacia la derecha antes del choque es:

$$v_{A_i} = 0 \frac{m}{s},$$

es decir, que este bloque estaba inicialmente en reposo.

b) De igual forma para el bloque A su rapidez después del choque es:

$$v_{A_f} = -4 \frac{m}{s},$$

aquí el signo negativo nos indica que este bloque al chocar con el sistema bloque-muelle adquiere una rapidez igual a la del bloque sujeto al muelle antes del choque.

14-5.- Después de la colisión elástica del problema anterior, la energía cinética de la masa en retroceso es $8 J$. Determinar el valor de las masas M y la constante elástica k del muelle.

Sol:

Si la energía cinética de la masa en retroceso es de $8 J$ se encuentra que el valor de las masas M está dado por la condición ($|v_{A_f}| = 4 \frac{m}{s}$):

$$\begin{aligned} K_{T_f} &= \frac{1}{2} M v_{A_f}^2 = 8 J \\ \implies \\ M &= 1 kg, \end{aligned}$$

además de la expresión para el movimiento armónico simple del bloque sujeto al muelle:

$$x(t) = (0.1 m) \cos(40 s^{-1}t),$$

puede determinarse que el valor de la frecuencia angular de oscilación es:

$$\omega = 40 \frac{rad}{s},$$

aplicando la definición de la frecuencia angular en términos de la masa M y la constante del resorte k :

$$\omega^2 = \frac{k}{M},$$

finalmente se obtiene para la constante del resorte:

$$k = M\omega^2 = 1600 \frac{N}{m}.$$

14-6.- Las ondas sonoras se propagan en el aire a $340 \frac{m}{s}$ ¿Cuáles son las longitudes de onda sonora con frecuencias de 20, 1000 y $12000 Hz$?

Sol:

La velocidad de propagación (v), de una onda sonora está relacionada con la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) a través de la siguiente relación:

$$v = \lambda f,$$

de manera que:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

Por lo tanto, si $f = 20 \text{ Hz}$ y $v = 340 \frac{m}{s}$, la longitud de onda correspondiente es:

$$\lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m},$$

de igual manera si $f = 1000 \text{ Hz}$, la longitud de onda correspondiente es:

$$\lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{1000 \text{ Hz}} = 0.34 \text{ m},$$

y si $f = 12000 \text{ Hz}$, la longitud de onda correspondiente es:

$$\lambda = \frac{340 \frac{m}{s}}{12000 \text{ Hz}} = 0.02833 \text{ m}.$$

14-7.- El adulto promedio puede percibir sonidos cuyas frecuencias van desde 17 Hz hasta 17000 Hz . ¿Cuáles son las longitudes de onda correspondientes, y cómo se comparan con las dimensiones de los objetos cotidianos como cajas ordinarias o envases?

Sol:

La velocidad de propagación de una onda sonora ($v = 340 \frac{m}{s}$), está dada por la expresión:

$$v = \lambda f,$$

esta expresión relaciona la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) de manera que el producto de ambas es constante para las ondas de sonido. Así cuando las frecuencias son pequeñas las longitudes de onda serán grandes y viceversa.

Por lo tanto si el límite superior de frecuencias auditivas del oído humano es $f_{\text{máx}} = 17000 \text{ Hz}$, la longitud onda para el límite inferior es:

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{340 \frac{m}{s}}{17000 \text{ Hz}} = 0.02 \text{ m},$$

y el límite superior para las longitudes de onda sonoras que el oído humano puede registrar es:

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{340 \frac{m}{s}}{17 \text{ Hz}} = 20 \text{ m}.$$

De manera que el intervalo de longitudes de onda sonora para el oído humano está comprendido entre los 0.02 m y los 20 m . Longitudes que corresponden: (0.02 m) es el tamaño de una goma o la longitud de un alfiler y (20 m) es la altura de un edificio de 7 u 8 pisos.

14-8.- La ecuación $y(x, t) = 8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{t}{2} \right) \right]$, describe una onda mecánica propagándose a través de una cuerda, estando x y y en metros y t en segundos. Determine:

- La amplitud de la onda.
- La longitud de onda.
- El periodo de la onda.
- La frecuencia de la onda.
- La dirección de propagación de la onda.
- La masa de la cuerda es de 5 kg y su longitud es de 10 m . Calcule la tensión de la cuerda.
- Dibuja la forma de la cuerda en el tiempo inicial ($t = 0$).

Sol:

a) La amplitud de onda de la onda $y(x, t) = 8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{t}{2} \right) \right]$ corresponde al valor máximo que puede tomar y para algún tiempo y posición dados. Entonces para la onda en cuestión la amplitud es de 8 m .

b) La ondas $y(x, t)$ tienen como característica principal ser las soluciones de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

cuya solución es una onda que está determinada mediante una función arbitraria g de argumento $kx \pm \omega t$ ($g(x, t) = g(kx \pm \omega t)$), donde k se define como el número de onda y ω es la frecuencia angular de oscilación de la onda y el signo $-$ corresponde a una onda que viaja hacia la derecha y el signo $+$ corresponde a una onda que viaja hacia la izquierda.

Por otra parte el número de onda k está relacionado con la longitud de onda λ mediante la relación:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

y la frecuencia angular de oscilación ω está relacionada con el periodo de la onda T mediante la relación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

comparando:

$$g(kx \pm \omega t) = y(x, t) = 8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{t}{2} \right) \right]$$

resulta que:

$$k = \frac{2\pi}{20}$$

y:

$$\omega = \frac{2\pi}{2},$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} k = \frac{2\pi}{20} &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ &\implies \\ \lambda &= 20 \text{ m}, \end{aligned}$$

por lo que la longitud de onda es de 20 m.

c) Para el periodo de oscilación del movimiento ondulatorio representado por la onda $y(x, t) = 8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{t}{2} \right) \right]$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{2\pi}{2} &= \frac{2\pi}{T} \\ &\implies \\ T &= 2 \text{ s}, \end{aligned}$$

por lo que el periodo de oscilación es de 2 s.

d) La frecuencia de la onda f está dada por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0.5 \text{ Hz}.$$

e) Comparando:

$$g(kx \pm \omega t) = y(x, t) = 8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{t}{2} \right) \right]$$

se encuentra que para la onda considerada en este caso, ésta corresponde al signo $-$ y por lo tanto, la onda se propaga hacia la derecha.

f) En una onda mecánica la tensión de la cuerda F está relacionada con la densidad de la cuerda μ y con la velocidad de propagación de la onda $v = \frac{\omega}{k}$, mediante la relación:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

de donde:

$$F = v^2 \mu$$

y:

$$v = \frac{\frac{2\pi}{2}}{\frac{2\pi}{20}} = 10 \frac{m}{s}$$

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{5 \text{ kg}}{10 \text{ m}} = 0.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}},$$

por lo que:

$$F = v^2 \mu = \left(10 \frac{m}{s} \right)^2 \left(0.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right) = 50 \text{ N}.$$

g) Para dibujar la forma de la cuerda en el tiempo inicial ($t = 0$), se tiene que si $t = 0$, la onda considerada toma la forma:

$$y(x, t = 0) = 8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{0}{2} \right) \right] = 8 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{10} \right),$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 14.7.

14-9.- La ecuación $y(x, t) = 0.2 \cos(6.28 t) \operatorname{sen}(18.8 x)$, describe una onda estacionaria, estando x y y en metros y t en segundos. ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de las dos ondas que dan lugar a esta onda estacionaria?

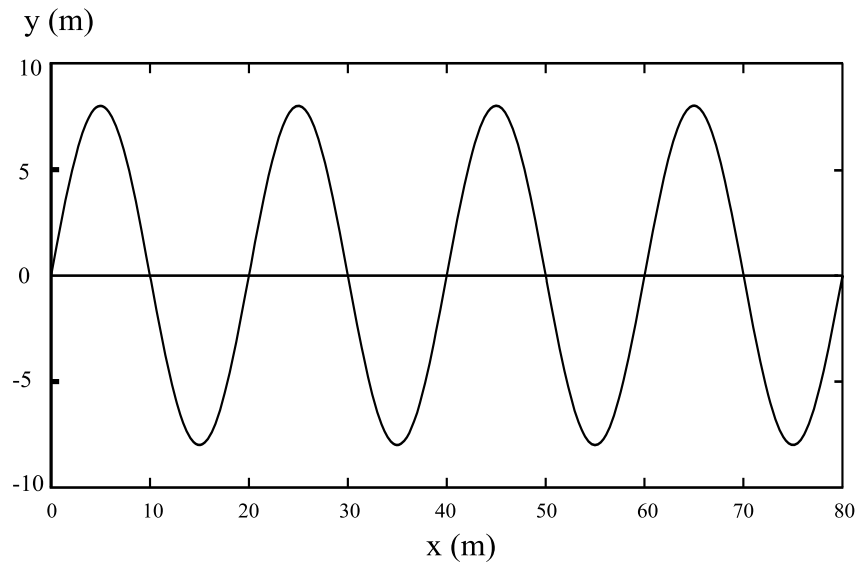


Figura 14.7: Comportamiento de la onda $8 \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{20} - \frac{t}{2} \right) \right]$, en función de la posición, para el tiempo inicial $t = 0 \text{ s}$.

Sol:

Las ondas estacionarias en una dimensión son el resultado de la superposición de dos ondas de igual amplitud, igual longitud de onda y frecuencia viajando en direcciones opuestas:

$$y(x, t) = y_1(kx - \omega t) + y_2(kx + \omega t)$$

con:

$$\begin{aligned} y_1(kx - \omega t) &= A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi_1) \\ y_2(kx + \omega t) &= A \operatorname{sen}(kx + \omega t + \phi_2), \end{aligned}$$

de manera que utilizando la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right), \quad (14.13)$$

la superposición de las ondas $y_1(kx - \omega t)$ y $y_2(kx + \omega t)$ resulta ser:

$$y(x, t) = y_1(kx - \omega t) + y_2(kx + \omega t) = 2A \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \operatorname{sen} \left(kx + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right),$$

comparando este resultado con la expresión:

$$y(x, t) = 0.2 \cos(6.28 t) \sin(18.8 x) ,$$

se encuentra que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) &= \cos(6.28 t) \\ \operatorname{sen}\left(kx + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right) &= \operatorname{sen}(18.8 x) , \end{aligned} \quad (14.14)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} &= 0 \\ \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} &= \frac{\pi}{2} \\ \omega &= 6.28 \frac{1}{s} \\ k &= 18.8 \frac{1}{m} \\ 2A &= 0.2 m \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{\pi}{2} \\ \phi_2 &= \frac{\pi}{2} \\ T &= 1 s \\ f &= \frac{1}{T} = 1 Hz \\ \lambda &= 0.324 m \\ A &= 0.1 m , \end{aligned}$$

por lo tanto, la longitud de onda de las dos ondas es de $\lambda = 0.324 m$ con una frecuencia de $f = 1 Hz$.

14-10.- Dos ondas viajan por una cuerda. Una de ellas está representada por:

$$y_1(x, t) = 3.2 \operatorname{sen} [2\pi (0.04 x - 20 t)]$$

y la otra mediante

$$y_2(x, t) = 3.2 \operatorname{sen} [2\pi (0.04 x + 20 t + 0.25)],$$

estando x y y en centímetros y t en segundos. Localice el nodo de la onda estacionaria resultante, que esté más cerca de $x = 0$, y calcule la distancia entre nodos adyacentes.

Sol:

Las ondas estacionarias en una dimensión son el resultado de la superposición de dos ondas de igual amplitud, igual longitud de onda y frecuencia viajando en direcciones opuestas:

$$y(x, t) = y_1(kx - \omega t) + y_2(kx + \omega t)$$

con:

$$\begin{aligned} y_1(kx - \omega t) &= A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi_1) \\ y_2(kx + \omega t) &= A \operatorname{sen}(kx + \omega t + \phi_2), \end{aligned}$$

de manera que:

$$y(x, t) = y_1(kx - \omega t) + y_2(kx + \omega t) = 2A \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \operatorname{sen}\left(kx + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right),$$

sustituyendo en esta expresión:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= 3.2 \operatorname{sen} [2\pi (0.04 x - 20 t)] \\ y_2(x, t) &= 3.2 \operatorname{sen} [2\pi (0.04 x + 20 t + 0.25)] , \end{aligned}$$

la onda estacionaria resultante está dada por:

$$y(x, t) = y_1(kx - \omega t) + y_2(kx + \omega t) = 6.4 \operatorname{sen}\left(40\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(0.08\pi x + \frac{\pi}{4}\right),$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} &= \frac{\pi}{4} \\ \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} &= \frac{\pi}{4} \\ \omega &= 40\pi \frac{1}{s} \\ k &= 0.08\pi \frac{1}{m} \\ A &= 3.2 m . \end{aligned}$$

Por lo que el primer nodo de la onda estacionaria en dirección x positiva se encuentra para x_1 satisfaciendo la condición:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(0.08\pi x + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \implies \\ 0.08\pi x_1 + \frac{\pi}{4} &= \pi, \end{aligned}$$

es decir, el primer nodo en la dirección de las x positivas, se encontrará en:

$$x_1 = \frac{1}{0.08\pi} \frac{3\pi}{4} = 9.375 \text{ m},$$

de igual forma, el primer nodo de la onda estacionaria en dirección x negativa se encuentra para x_0 satisfaciendo la condición:

$$0.08\pi x_0 + \frac{\pi}{4} = 0,$$

por lo que el primer nodo en la dirección de las x negativas, se encuentra en:

$$x_0 = -\frac{1}{0.08\pi} \frac{\pi}{4} = -3.125 \text{ m}.$$

Por lo que la distancia entre nodos adyacentes es:

$$x_1 - x_0 = 12.5 \text{ m}.$$

- 14-11.-** La frecuencia de un silbato de tren, que oye el conductor, es de 800 Hz . Si en un cruce una persona oye el silbato con una frecuencia de 760 Hz ¿a qué velocidad va el tren? ¿Se acerca o se aleja de la persona? Suponga que la velocidad del sonido en el aire es de $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol:

La persona en el cruce percibe una frecuencia f_{persona} , resulta ser menor que la frecuencia original del silbato del tren f'_{silbato} , por lo tanto el tren se está alejando del cruce donde se encuentra la persona.

La velocidad v_f , con la que se aleja el tren del cruce donde se encuentra la persona está dada en términos de: la diferencia de frecuencias $\Delta f = f'_{\text{silbato}} - f_{\text{persona}}$, la frecuencia del silbato f'_{silbato} y la velocidad del sonido en el aire para la fuente en reposo $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, se obtiene para la velocidad del tren:

$$\begin{aligned} v_f &= v \frac{\Delta f}{f_{\text{persona}}} \\ \implies \\ v_f &= 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{40 \text{ Hz}}{760 \text{ Hz}} \right) = 17.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] P. G. Hewitt. *Física Conceptual*. 9^a ed., Pearson, México D.F., 2004.
- [2] Eliézer Braun E. *Física 1 (Mecánica)*. 1^a ed., Trillas, México D.F., 1993.
- [3] U. Haber-Schaim, J. B. Cross, J. H. Dodge & J. A. Walter. *PSSC Física*. 3^a ed., Reverté, México D.F., 1998.
- [4] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, R. A. Freedman. *Física Universitaria*. 11^a ed., Pearson, 2004.
- [5] R. Resnick, D. Halliday, J. Walker. *Fundamentos de Física I*. 6^a ed., CECSA, México D.F., 2001.
- [6] P. A. Tipler & Mosca Gene. *Física para la Ciencia y la Tecnología*. 5^a ed., Editorial Reverté, Barcelona, España, 2004.
- [7] U. Ingard & W. L. Kraushaar. *Introducción al estudio de la Mecánica, Materia y Ondas*. 1^a ed., Editorial Reverté, Barcelona, España, 1960.
- [8] T. D. Navarrete & J. A. Rocha. *Colección de Problemas Resueltos para el Curso de Energías Mecánicas y Eléctricas*. 1^a ed., Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, 1997.
- [9] E. Hecht & F. J. Bueche. *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Physics*. Ninth edition, Mc Graw Hill, New York, 1997.
- [10] S. Targ. *Curso Breve de Mecánica Teórica*. 5^a ed., Editorial Mir, Moscú, 1986.
- [11] J. Flores V. & G. Anaya D. *Dinámica del Cuerpo Rígido*. SEP-Fondo de Cultura Económica, México D.F., 1989.
- [12] D.T. Greenwood. *Classical Dynamics*. Dover Publication, New York, 1997.
- [13] S. Strelkov. *Mecánica*. Editorial Mir, Moscú, 1978.

Índice alfabético

- aceleración angular, 209
- aceleración centrípeta, 37, 68, 107, 121, 211
- aceleración del centro de masa, 191, 235
- aceleración tangencial, 37, 211
- alcance en un movimiento
 - parabólico, 242
- amplitud de oscilación, 275, 280, 282
- amplitud de una onda, 287, 289
- análisis dimensional, 4

- cantidad de movimiento lineal, 264
- cinemática en dos dimensiones, 33, 34, 37, 40, 42, 50, 52, 53, 55, 56, 66
- cinemática en una dimensión, 21, 24, 26, 28, 30, 45, 48
- coeficiente de fricción cinética, 85, 118
- coeficiente de fricción estática, 85, 89, 94, 101, 110
- colisiones elásticas, 186
- colisiones inelásticas, 175
- colisiones inelásticas en dos dimensiones, 179, 181, 183
- componentes cartesianas del vector velocidad, 40, 42, 50, 53, 55, 56, 66
- conservación de la cantidad de movimiento lineal, 175, 177, 179, 181, 183, 186
- conservación de la cantidad de movimiento lineal de los sistemas de partículas, 194, 197, 199, 201
- conservación de la energía, 149, 152–154, 156, 158, 161, 163, 167, 170, 177, 238, 242, 246, 259, 267, 271
- conservación de la energía durante el movimiento parabólico, 153
- conservación del momento angular, 271
- conservación del momento angular en colisiones, 259, 264, 266, 267

- desplazamiento, 21, 28, 60, 63
- diagrama de cuerpo libre, 71, 75, 77, 79, 83, 85, 89, 92, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 121, 124
- dinámica de los sistemas de partículas, 191, 194, 196, 197, 199, 201
- dinámica rotacional, 220, 223, 227, 229, 233, 235, 248, 251, 255, 259, 264, 266, 267, 271

- efecto doppler, 293
- energía cinética, 129, 130, 132–134, 137, 139, 141, 142, 144, 149, 152–154, 156, 158, 161, 163, 167, 170, 175, 177, 179, 181, 183, 186
- energía cinética del centro de masa, 196
- energía cinética rotacional, 238, 242, 246, 250, 259, 267, 271
- energía potencial asociada con la fuerza del peso, 149, 152–154, 158, 161, 163, 167, 170
- energía potencial asociada con la fuerza elástica de un resorte, 149, 156, 158, 161, 163, 167, 170

- frecuencia angular de oscilación, 275, 278
- frecuencia de oscilación, 275, 282
- frecuencia del movimiento ondulatorio, 285–287, 289, 292, 293
- fuerza de fricción, 79, 83, 85, 89, 94, 101, 110, 112, 114, 118

- fuerza de tensión, 77, 79, 83, 85, 89, 94, 104, 107, 114, 118, 121, 124
- fuerza del peso, 77, 79, 83, 85, 89, 92, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 121, 124
- fuerza elástica, 92
- fuerza normal, 77, 79, 83, 85, 89, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 124
- fuerza paralela al desplazamiento, 130, 132–134, 137, 139, 141, 142, 144
- fuerza resultante, 71–75, 79, 83, 85, 89, 92, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 121, 124
- fuerza resultante igual a cero, 75, 77, 79, 83, 85, 89, 94, 101, 104, 110, 118, 124
- ley de Hooke, 92, 134, 142
- leyes de Newton, 71–75, 77, 79, 83, 85, 89, 92, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 121, 124
- longitud de onda, 285–287, 289, 292
- momento angular, 255, 259, 264, 266, 267, 271
- momento angular y
 - forma rotacional de la segunda ley de Newton, 255
- momento de inercia, 213, 215, 242, 246, 250, 251
- momento de una fuerza, 217
- momento de una fuerza y
 - forma rotacional de la segunda ley de Newton, 220, 223, 227, 229, 233, 235, 238, 248, 251
- momento de una fuerza y
 - fuerza de fricción, 223, 229, 235
- movimiento
 - en dos dimensiones, 34, 37, 52, 53
- movimiento
 - en dos dimensiones con aceleración constante, 40, 42, 50, 55, 56, 66
- movimiento
 - en una dimensión con aceleración constante, 48
- movimiento armónico simple, 275, 278, 280
- movimiento armónico simple y
 - colisiones elásticas, 282
- movimiento armónico simple y
 - conservación de la cantidad de movimiento lineal, 280, 282
- movimiento armónico simple y
 - conservación de la energía, 280, 282, 285
- movimiento circular, 34
- movimiento circular uniforme, 68, 107, 121
- movimiento con aceleración constante
 - en una dimensión, 21, 24, 26, 28, 30, 59, 60, 63
- movimiento de proyectiles, 40, 42, 55, 56, 66
- movimiento ondulatorio, 285, 287, 289, 292
- movimiento relativo, 199, 201
- movimiento, relación entre
 - variables lineales y angulares, 207, 208, 211, 220
- movimiento
 - en dos dimensiones, 33
- nodos y antinodos de una
 - onda estacionaria, 292
- ondas estacionarias, 289
- ondas mecánicas, 285–287, 289
- ondas sonoras, 293
- periodo de oscilación, 275
- periodo de una onda, 287, 289, 292
- periodo del movimiento
 - circular uniforme, 68
- producto vectorial, 217, 220, 223
- rapidez, 48
- rapidez angular, 207, 209

- rapidez angular,
 - relación con la aceleración centrípeta, 211
- regla de la mano derecha, 217, *véase* producto vectorial, 223
- relación entre
 - variables lineales y angulares, 227, 229, 233, 238, 242, 246, 248, 250, 251, 255, 259, 264, 266, 267, 271
- relación entre el momento angular y el momento de una fuerza, 251
- relación entre el vector velocidad y la trayectoria, 52
- relación entre la aceleración y la velocidad instantánea, 26, 45
- representación gráfica de la
 - trayectoria en un movimiento bidimensional, 33, 34, 37
- representación gráfica de una onda, 287
- representación gráfica del trabajo, 130, 132, 139, 141
- representación gráfica del
 - movimiento con aceleración constante en una dimensión, 21, 30, 59, 60, 63
- representación matemática de una onda, 287
- segunda ley de Newton, 72, 73, 75, 79, 83, 85, 89, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 121, 124
- segunda ley de Newton en sistemas de referencia no inerciales, 92, 98, 110
- segunda ley de Newton para los sistemas de partículas, 191
- Sistema Internacional de Unidades (S.I.), 3, 4
- sistemas de referencia no inerciales, 92, 98, 110
- superposición de ondas en una dimensión, 289
- teorema trabajo-energía cinética, 130, 132–134, 137, 139, 141, 142, 144
- tercera ley de Newton, 74, 104
- tiro parabólico, 40, 42, 55, 56, 66
- trabajo, 271
- trabajo y movimiento circular uniforme, 133
- trabajo debido a la fuerza del peso, 137, 144
- trabajo debido a la fuerza elástica de un resorte, 134, 142
- trabajo realizado por la fuerza de fricción, 154, 156, 163, 170
- vector aceleración, 37
- vector aceleración media, 34
- vector velocidad, 37
- vector velocidad media, 50, 53
- vectores, adición de , 9
- vectores, componentes cartesianas de, 7, 71, 74, 75, 77, 79, 83, 85, 89, 92, 94, 98, 101, 104, 107, 110, 112, 114, 118, 121, 124
- vectores, multiplicación escalar de , 9
- vectores, producto escalar de , 14
- velocidad de propagación de una onda, 285–287, 289, 292
- velocidad de propagación de una onda y movimiento relativo, 293
- velocidad instantánea, 26, 45
- velocidad media, 26, 45
- velocidad relativa, 199, 201, 208
- velocidad tangencial,
 - relación con la rapidez angular, 207, 211



Coordinación técnica:
Aarón E. Aguilar Almanza
Mtro. Héctor Castañeda Ibarra
Sergio Javier Cortés Becerril
Domingo Vite

Problemas Resueltos de Mecánica
se terminó de imprimir en el mes de
septiembre de 2009, en los talleres de la
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,
con un tiraje de 300 ejemplares.

Problemas resueltos de Mecánica

Esta obra presenta, a los estudiantes universitarios del primer curso de física, un conjunto de problemas y sus soluciones en el área de: la cinemática y dinámica de una partícula, la cinemática y dinámica rotacional, los sistemas de partículas y las oscilaciones y ondas mecánicas; en los cuales se enfatizan las consideraciones físicas necesarias para resolver los problemas.

Esta obra debe verse por los estudiantes como un apoyo adicional a los libros de texto, como un libro que los acompaña en el estudio de la mecánica y no como una fuente en donde pueden encontrar la solución de las tareas o de los trabajos escolares.

La idea de proporcionar a los estudiantes este conjunto de problemas y sus soluciones es darles más elementos con los que pueden contrastar sus aprendizajes, proponiéndoles el siguiente método de trabajo:

- Intentar resolver los problemas hasta llegar a una solución de los mismos.
- Consultar la solución del problema para tratar de comprender los diferentes procedimientos realizados para ello y no efectuar una tarea de memorización de la solución.
- Resolver el problema sin consultar la solución poniendo especialmente énfasis en la aplicación de las ideas físicas, en la forma de plantear éstas en el lenguaje algebraico, así como en los detalles presentes en las manipulaciones algebraicas que conducen a la solución del problema.

Huitzilin Yépez Martínez es maestro —galardonado con la medalla Alfonso Caso— y doctor en Física por la Universidad Nacional Autónoma de México; actualmete se desempeña como profesor–investigador de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Biblioteca
BE
del
Estudiante

ISBN 978-607-7798-00-2