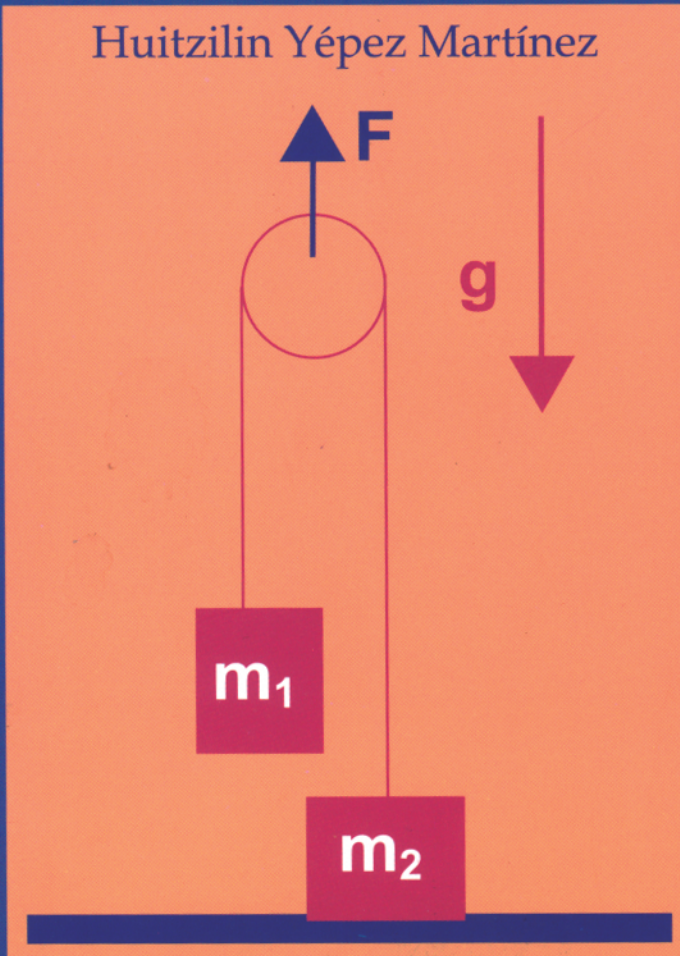


# Problemas Resueltos de Cinemática y Dinámica de una Partícula

Huitzilin Yépez Martínez



**UACM**

Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México

*Nada humano me es ajeno*

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

# Problemas Resueltos de Cinemática y Dinámica de una Partícula.

Huitzilin Yépez Martínez



© *Problemas Resueltos de Cinemática y Dinámica de una Partícula*, primera edición, 2006.

© Huitzilin Yépez Martínez

D.R. Universidad Autónoma de la Ciudad de México  
Fray Servando Teresa de Mier 99, Col. Centro,  
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06080, México, D.F.

Academia de Física, UACM.

Diseño de portada: Aarón Aguilar

ISBN: 9685720-75-4

Hecho e impreso en México / *Printed in Mexico*

Para Alma con todo mi amor

A mis padres y mis hermanos

A la memoria de todos mis seres queridos

# Agradecimientos

Quiero agradecer a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) por darme todas las facilidades para la realización de este libro.

También quiero agradecer a la Biblioteca del Estudiante de la UACM, por todo el apoyo para la terminación de esta obra. Especialmente a Rafael López por revisar tan cuidadosamente el libro, así como todas sus invaluable observaciones.

Agradezco a mis compañeros y amigos del Colegio de Ciencia y Tecnología por todos sus comentarios y sugerencias, que dieron una motivación adicional para la realización de este libro.

A mis amigos del Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM-UNAM), por todo su apoyo y amistad. A Alejandro Durán por ser un gran amigo, maestro y compañero. A Sigfredo, Roberto y al señor Ángel.

Además quiero expresar mi agradecimiento a todos los estudiantes de la UACM con los que he tenido la oportunidad de aprender día a día a mejorar la práctica docente, aunque sea sólo un poco.

# Índice

Introducción	II
Parte I. Unidades de medida y vectores	1
1. Unidades de medida y análisis dimensional	2
2. Vectores	6
Parte II. Cinemática de una partícula en una y dos dimensiones	17
3. Cinemática en una dimensión	18
4. Cinemática en dos dimensiones	30
5. Cinemática en una y dos dimensiones	40
Parte III. Leyes de Newton y teorema trabajo-energía	64
6. Leyes de Newton	66
7. Trabajo y energía cinética	121
Parte IV. Teoremas de conservación	138
8. Energía potencial y principio de conservación de la energía	139
9. Colisiones y conservación del momento lineal	163
Bibliografía	178

# Introducción

Una de las más grandes dificultades con la que se enfrentan los estudiantes que por primera vez tienen contacto con la física a nivel universitario, es la de plasmar en un problema sencillo, pero específico, las ideas generales discutidas en clase. Esta dificultad para plantear y resolver problemas resulta ser un gran obstáculo para que los estudiantes avancen en el estudio de esta área del conocimiento.

Actualmente existen una gran cantidad de libros introductorios a la física [1, 2, 3]<sup>1</sup>, y de texto a nivel universitario excelentes [4, 5, 6, 7], que abordan la gran mayoría de los contenidos de un primer curso a nivel superior de cualquier carrera de ciencias o ingeniería. Algunas de estas obras han sido revisadas y editadas en numerosas ocasiones a lo largo de más de tres décadas [4, 5], por lo que han mejorado notablemente, tanto en sus contenidos como en su enfoque pedagógico. Sin embargo, la dificultad que para los estudiantes representa el planteamiento y la solución de los problemas en el campo de la física persiste.

Esta obra presenta a los estudiantes universitarios del primer curso de física un conjunto de problemas y sus soluciones en el área de la cinemática y dinámica de una partícula, en los cuales se enfatizan las consideraciones físicas necesarias para resolver los problemas.

Esta obra debe ser vista por los estudiantes como un apoyo adicional a los libros de texto, como un libro que los acompaña en el estudio de la cinemática y la dinámica de una partícula y no como una fuente en donde pueden encontrar la solución de las tareas o de los trabajos escolares.

La idea de proporcionar a los estudiantes este conjunto de problemas y sus soluciones es darles más elementos con los que puedan contrastar sus aprendizajes, proponiéndoles el siguiente método de trabajo:

- Intentar resolver los problemas hasta llegar a una solución de los mismos.
- Consultar la solución del problema tratando de comprender los diferentes procedimientos realizados para ello y no efectuar una tarea de memorización de la solución.

---

<sup>1</sup>Los números entre corchetes corresponden a libros que se encuentran en la bibliografía de esta obra y que pueden ser consultados.

- Resolver el problema sin consultar la solución, poniendo especial énfasis en la explicación de las ideas físicas aplicadas, en la forma de plantear estas ideas en el lenguaje algebraico, así como en los detalles presentes en las manipulaciones algebraicas que conducen a la solución del problema.

Esta dinámica de trabajo permitirá que los estudiantes aborden los problemas aplicando las ideas físicas involucradas y no solamente traten de recordar la forma en que resolvieron con anterioridad un problema similar.

Posteriormente, siguiendo con la dinámica antes descrita, los estudiantes podrán consultar otras obras de problemas resueltos mucho más extensas en el área de la mecánica [8, 9], en donde se presentan una gran cantidad y variedad de muy interesantes problemas, pero cuyas explicaciones y desarrollos requieren que los estudiantes hayan desarrollado una cierta habilidad en la correcta aplicación de las ideas físicas involucradas y de un planteamiento matemático muy concreto.

En este libro se han considerado problemas en los que su solución involucra la aplicación de algunas ideas físicas sencillas, pero generales, sobre mecánica y rara vez se han considerado problemas que requieran desarrollos matemáticos más allá del álgebra básica. Sin embargo, en algunos ejercicios se hace referencia a ideas muy elementales del cálculo diferencial e integral, como es el caso de la velocidad y aceleración instantáneas, así como en la discusión general del trabajo mecánico realizado por una fuerza.

La gran mayoría de los problemas que aquí se presentan han sido tomados de libros de texto clásicos [3, 4, 5, 6, 7], no obstante, algunos fueron modificados buscando que las ideas físicas que se necesitan aplicar para su solución se puedan identificar más claramente.

Otra motivación importante, para la elaboración de este libro, es que los estudiantes de ciencias y carreras tecnológicas aumenten su interés en el estudio de la física y se interesen en temas más elaborados de mecánica [10, 11, 12] y de ondas [13].

El libro se divide en cuatro partes:

- En la parte I se analizan cuestiones previas al estudio de la cinemática, como son: el manejo de las unidades de medida de cantidades físicas relevantes para el estudio de la mecánica, y algunos aspectos básicos relacionados con el manejo de las cantidades vectoriales.
- En la parte II se presenta una serie de problemas relacionados con la cinemática de una partícula, como son: el movimiento uniformemente acelerado, la caída libre, el movimiento circular y el tiro parabólico.
- En la parte III se consideran una serie de problemas típicos sobre las leyes de Newton y sobre las aplicaciones del teorema trabajo-energía, este tipo de problemas permitirán que el estudiante entre en contacto con el concepto de fuerza y reconozca su importancia para la descripción del movimiento de una partícula.

- Finalmente, en la parte IV se analizan ejercicios relacionados con los principios de conservación de la energía y el teorema de conservación de la cantidad de movimiento lineal. También se analizan algunos ejemplos en los que la energía mecánica total no se conserva debido a la presencia de fuerzas disipativas.

# Parte I. Unidades de medida y vectores

En los capítulos 1 y 2, comprendidos en esta primera parte, se presentan algunos problemas sencillos relacionados con el manejo y la conversión de ciertas unidades de medida utilizadas comúnmente en distintos sistemas de unidades. También se consideran algunos ejercicios de análisis dimensional, una herramienta física muy poderosa que permite rápidamente, basándose en las unidades involucradas, saber si la solución de un problema es dimensionalmente consistente.

Finalmente, se presentan algunos problemas elementales que permitirán a los estudiantes familiarizarse con los vectores, mismos que juegan un papel muy importante en la descripción del movimiento de una partícula. En estos problemas se aborda la imagen geométrica de las operaciones entre vectores como son: la suma vectorial, el producto de un escalar por un vector y el producto escalar entre vectores.

# Capítulo 1

## Unidades de medida y análisis dimensional

1-1.- Exprese las siguientes mediciones en unidades del Sistema Internacional de Unidades (S.I.), mediante los prefijos apropiados. El símbolo de la unidad base esta entre paréntesis:

- a) 298000 metros ( $m$ )
- b) 7600 volts ( $V$ )
- c) 0.000067 amperes ( $A$ )
- d) 0.0645 newtons ( $N$ )
- e) 43000000 gramos ( $g$ )
- f) 0.00000065 farads ( $F$ )

**Sol:**

a)  $298000 m = 2.98 \times 10^5 m = 2.98 \times 100 km = 298 km.$

b)  $7600 V = 7.6 \times 10^3 V = 7.6 kV.$

c)  $0.000067 A = 67 \times 10^{-6} A = 67 \mu A.$

d)  $0.0645 N = 6.45 \times 10^{-2} N = 64.5 \times 10^{-3} N = 64.5 mN.$

e)

$$\begin{aligned}
 1 \text{ g} &= \frac{1}{1000} \text{ kg}^1 \\
 &\implies \\
 43000000 \text{ g} &= 43000000 \text{ g} \left( \frac{1}{1000} \right) \left( \frac{\text{kg}}{\text{g}} \right) \\
 &= 43000 \text{ kg} = 43 \times 10^3 \text{ kg} = 43 \text{ Ton} \\
 &\implies \\
 43000000 \text{ g} &= 43 \text{ Ton}.
 \end{aligned}$$

$$f) 0.00000065 \text{ F} = 6.5 \times 10^{-7} \text{ F} = 0.65 \times 10^{-6} \text{ F} = 0.65 \mu\text{F}.$$

**1-2.-** ¿Cuáles son las tres cantidades físicas fundamentales que aparecen en la descripción de la mayor parte de los fenómenos mecánicos? Nombrar las tres unidades fundamentales asociadas con estas cantidades físicas en el S.I.

**Sol:**

En la descripción física de una gran cantidad de fenómenos mecánicos, hablamos de **longitudes** recorridas, del **tiempo** necesario para que un objeto llegue a un determinado lugar y de la cantidad de **masa** que tiene un cuerpo. De lo anterior se desprende que las tres cantidades físicas fundamentales utilizadas en la descripción de la mayor parte de los fenómenos mecánicos son: **longitud**, **tiempo** y **masa**. Las unidades de medida asociadas a estas cantidades físicas establecidas en el S.I. son:

- a) El metro ( $m$ ) unidad de medida de longitud.
- b) El segundo ( $s$ ) unidad de medida de tiempo.
- c) El kilogramo ( $kg$ ) unidad de medida de masa.

**1-3.-** Admitiendo que las unidades de las cantidades físicas: de  $l$  sean metros ( $m$ ), de  $v$  metros sobre segundo ( $\frac{m}{s}$ ), de  $a$  metros sobre segundo cuadrado ( $\frac{m}{s^2}$ ) y de  $t$  segundos ( $s$ ). Determine si las siguientes relaciones son correctas o incorrectas en base al análisis dimensional:

- a)  $l = vt + \frac{1}{2}at^2$
- b)  $2al = v_f^2 - v_i^2$
- c)  $v_f = v_i + at^2$
- d)  $l = vt + 4at^2$

---

<sup>1</sup>En esta conversión la cantidad de masa debe expresarse en kilogramos (kg), porque esta es la unidad de medida para la masa en el S.I.

**Sol:**

En base al análisis dimensional para el inciso a) tenemos que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 [l] &= [vt] + \left[ \frac{1}{2} \alpha t^2 \right] \\
 &\implies \\
 [m] &= \left[ \frac{m}{s} s \right] + \left[ \frac{m}{s^2} s^2 \right] \\
 &\implies \\
 [m] &= [m] + [m] \\
 &\implies \\
 [m] &= [m].
 \end{aligned}$$

Por lo que la expresión  $l = vt + \frac{1}{2}\alpha t^2$ , es dimensionalmente correcta.

Para el inciso b) tenemos que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 [2\alpha l] &= [v_f^2] - [v_i^2] \\
 &\implies \\
 \left[ \frac{m}{s^2} m \right] &= \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right] \\
 &\implies \\
 \left[ \frac{m^2}{s^2} \right] &= \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right] \\
 &\implies \\
 \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right] &= \left[ \left( \frac{m}{s} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Por lo que la expresión  $2\alpha l = v_f^2 - v_i^2$ , es dimensionalmente correcta.

Para el inciso c) tenemos que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
 [v_f] &= [v_i] + [\alpha t^2] \\
 &\implies \\
 \left[ \frac{m}{s} \right] &= \left[ \frac{m}{s} \right] + \left[ \frac{m}{s^2} s^2 \right] \\
 &\implies \\
 \left[ \frac{m}{s} \right] &= \left[ \frac{m}{s} \right] + [m] \\
 &\implies \\
 \left[ \frac{m}{s} \right] &= \left[ \frac{m}{s} \right] + [m].
 \end{aligned}$$

Por lo que la expresión  $v_f = v_i^2 + \alpha t^2$ , es dimensionalmente incorrecta.

Finalmente para el inciso *d*) tenemos que si esta relación es dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} [l] &= [vt] + [4\alpha t^2] \\ &\implies \\ [m] &= \left[ \frac{m}{s} s \right] + \left[ \frac{m}{s^2} s^2 \right] \\ &\implies \\ [m] &= [m] + [m] \\ &\implies \\ [m] &= [m]. \end{aligned}$$

Por lo que la expresión  $l = vt + 4\alpha t^2$ , es dimensionalmente correcta.

**1-4.-** En la segunda década del siglo pasado estuvieron en uso dos tipos de unidades de barril en Estados Unidos. El barril de manzanas tenía un volumen legalmente fijado de 7056 pulgadas cúbicas ( $in^3$ ); mientras que el barril de bayas tenía un volumen de 5826  $in^3$ . Si un comerciante vende 20 barriles de bayas a un cliente que quiere comprar 20 barriles de manzanas ¿cuál es la discrepancia en el volumen del embarque en litros?

**Sol:**

En base al contenido de un barril de manzanas, que es de 7056 pulgadas cúbicas, y del contenido de un barril de bayas, que es de 5826  $in^3$ , la diferencia en el volumen de mercancía ( $\Delta V$ ) está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 20(7056 - 5826) in^3 \\ &= 24600 in^3. \end{aligned}$$

Ahora es necesario transformar la unidad de volumen  $in^3$  a unidades de volumen del S.I. como son los litros ( $L$ ). Para esto sabemos que  $1 in = 2.54 cm$  de manera que:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 24600 (2.54)^3 cm^3 \\ &= 4.03 \times 10^5 cm^3. \end{aligned}$$

También sabemos que un  $cm^3$  es igual a  $\frac{1}{1000} L$  por lo tanto, la diferencia en el volumen de mercancía ( $\Delta V$ ) dada en litros es de:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 4.03 \times 10^5 \left( \frac{1}{1000} \right) L \\ &= 4.03 \times 10^2 L. \end{aligned}$$

# Capítulo 2

## Vectores

2-1.- Dados dos vectores  $\vec{\mathbf{a}}$  y  $\vec{\mathbf{b}}$  que satisfacen que:

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = 11\hat{e}_x - \hat{e}_y \quad y \quad \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = -5\hat{e}_x + 11\hat{e}_y,$$

en donde  $\hat{e}_x$  y  $\hat{e}_y$  son vectores unitarios y ortogonales.

a) Determinar  $\vec{\mathbf{a}}$  y  $\vec{\mathbf{b}}$ .

b) Determinar el ángulo formado por  $\vec{\mathbf{a}}$  y  $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ , respecto al eje  $x$ , utilizando métodos vectoriales.

**Sol:**

a) Si realizamos la suma de los vectores  $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$  y  $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) &= 2\vec{\mathbf{a}} = \\ 11\hat{e}_x - \hat{e}_y + (-5\hat{e}_x + 11\hat{e}_y) &= 6\hat{e}_x + 10\hat{e}_y, \end{aligned}$$

por lo que ahora podemos despejar el valor de  $\vec{\mathbf{a}}$ , para el que obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\vec{\mathbf{a}} &= 6\hat{e}_x + 10\hat{e}_y \\ \implies \\ \vec{\mathbf{a}} &= 3\hat{e}_x + 5\hat{e}_y = (3, 5). \end{aligned}$$

Una vez que conocemos el valor de  $\vec{\mathbf{a}}$  podemos obtener el valor de  $\vec{\mathbf{b}}$  despejando este vector de cualquiera de las dos relaciones originales, i.e.,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{b}} &= 11\hat{e}_x - \hat{e}_y - \vec{\mathbf{a}} = \\ 11\hat{e}_x - \hat{e}_y - (3\hat{e}_x + 5\hat{e}_y) &= 8\hat{e}_x - 6\hat{e}_y = (8, -6). \end{aligned}$$

b) Para determinar el ángulo formado por  $\vec{\mathbf{a}}$  y  $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ , respecto al eje  $x$ , utilizando métodos vectoriales, es necesario calcular los productos internos de cada uno de los vectores anteriores con el vector unitario  $\hat{e}_x$ , porque el ángulo  $\theta_{\angle \vec{\mathbf{v}} x}$  formado por un vector  $\vec{\mathbf{v}}$  cualquiera con el eje  $x$  esta dado por:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{v}} x} &= \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{e}_x}{|\vec{\mathbf{v}}| |\hat{e}_x|} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{e}_x}{|\vec{\mathbf{v}}|}, \end{aligned}$$

donde hemos tomado en cuenta que  $\hat{e}_x$  es un vector unitario,  $|\hat{e}_x| = 1$ . Aplicando este resultado a los vectores  $\vec{\mathbf{a}}$  y  $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$  obtenemos los ángulos buscados.

Utilizando la definición del producto escalar en términos de sus componentes cartesianas:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_x w_x + v_y w_y,$$

recordando que  $\hat{e}_x$  sólo tiene componente  $x$  y de tamaño la unidad ( $\hat{e}_x = (1, 0)$ ) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{a}}, x} &= \frac{(3, 5) \cdot (1, 0)}{|(3, 5)|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{34}}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{a}}, x} = 0.515,$$

y por lo tanto:

$$\theta_{\angle \vec{\mathbf{a}}, x} = 59.04^\circ.$$

De igual forma para el vector  $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\angle \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}, x} &= \frac{(11, -1) \cdot (1, 0)}{|(11, -1)|} \\ &= \frac{11}{\sqrt{11^2 + 1^2}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{122}}, \end{aligned}$$

por lo que:

$$\cos \theta_{\vec{a}+\vec{b}, x} = 0.996,$$

y finalmente:

$$\theta_{\angle \vec{a}+\vec{b}, x} = -5.194^\circ.$$

**2-2.-** Sea  $\vec{A} = 2 \text{ cm}$  a  $70^\circ$  al este del norte y  $\vec{B} = 3.5 \text{ cm}$  a  $130^\circ$  al este del norte. Dibujar en el plano cartesiano:

- Los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y otros dos vectores paralelos a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  pero 2.5 veces más grandes.
- Multiplicar  $\vec{A}$  por  $-2.5$  y  $\vec{B}$  por  $3$  y encontrar el vector suma de los nuevos vectores.
- Colocar un punto a  $10 \text{ cm}$  al norte del origen. Encontrar múltiplos de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de tal forma que la suma de los vectores resultantes sea igual al vector que une el origen con el punto en cuestión.
- Resolver analíticamente los incisos *b)* y *c)*.

**Sol:**

*a)* Sea  $\vec{A} = 2 \text{ cm}$  a  $70^\circ$  al este del norte (lo que significa que el vector tiene una desviación de  $70^\circ$  hacia el este respecto de la dirección norte), que es equivalente a un vector de  $2 \text{ cm}$  de tamaño a  $20^\circ$  al norte de la dirección este, tal como se muestra en la figura 2.1.

Sea el vector  $\vec{B} = 3.5 \text{ cm}$  a  $130^\circ$  al este del norte (lo que significa que el vector tiene una desviación de  $130^\circ$  hacia el este respecto de la dirección norte), que es equivalente a un vector de  $3.5 \text{ cm}$  de tamaño a  $40^\circ$  al sur de la dirección este, i.e. ( $-40^\circ$ ) respecto a la dirección este, tal como se muestra en la figura 2.2.

Ahora, encontrar dos vectores paralelos a  $\vec{A}$  y a  $\vec{B}$ , 2.5 veces más grandes, quiere decir: obtener dos nuevos vectores  $\vec{A}'$  y  $\vec{B}'$  en las direcciones de  $\vec{A}$  y de  $\vec{B}$  respectivamente, pero 2.5 veces más grandes (Fig. 2.3).

*b)* Multiplicar el vector  $\vec{A}$  por  $-2.5$  corresponde a un vector 2.5 veces más grande que  $\vec{A}$  y en una dirección a  $180^\circ$  respecto a la dirección original, i.e.  $-2.5\vec{A} = (5 \text{ cm}, 200^\circ)$ , como se muestra en la figura 2.4.

De igual forma multiplicar  $\vec{B}$  por  $3$  corresponde a un vector 3 veces más grande y en la misma dirección que  $\vec{B}$ ,  $3\vec{B} = (10.5 \text{ cm}, -40^\circ)$ , como se muestra en la figura 2.5.

El vector suma  $-2.5\vec{A} + 3\vec{B}$  puede obtenerse mediante la regla del paralelogramo como se muestra en la figura 2.6.

*c)* Encontrar los múltiplos  $\lambda\vec{A}$  y  $\gamma\vec{B}$  de  $\vec{A}$  y de  $\vec{B}$ , respectivamente, de manera que sumados den un vector de  $10 \text{ cm}$  de tamaño al norte del origen, equivale a trazar todos

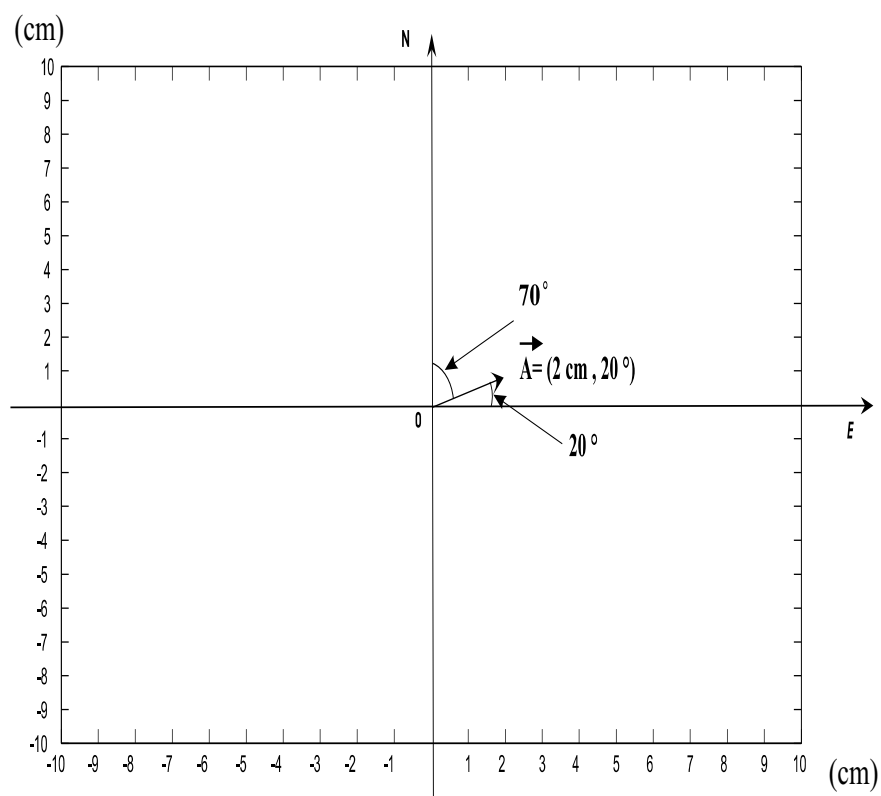


Figura 2.1: Localización en el plano cartesiano del vector  $\vec{A}$ .

los vectores paralelos a  $\vec{A}$  y a  $\vec{B}$  y buscar el vector suma que resulte a  $10\text{ cm}$  al norte del origen utilizando la regla del paralelogramo, tal y como se muestra en la figura 2.7, y de esta figura al medir los tamaños de  $\lambda\vec{A}$  y  $\gamma\vec{B}$  y dividirlos entre los tamaños  $|\vec{A}|$  y  $|\vec{B}|$ , respectivamente, obtenemos los valores de  $\lambda$  y de  $\gamma$ :

$$\lambda = 4.4$$

$$\gamma = -3.1.$$

d) Para resolver analíticamente los incisos b) y c) de este ejercicio necesitamos obtener las componentes cartesianas de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , es decir:

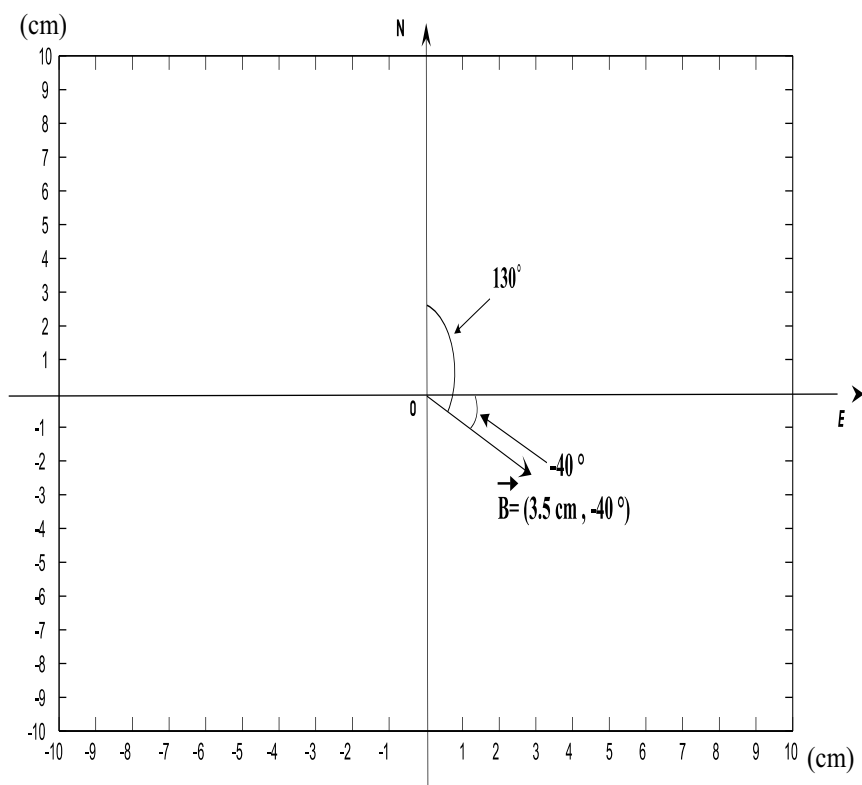


Figura 2.2: Localización en el plano cartesiano del vector  $\vec{B}$ .

$$\begin{aligned}
 A_x &= |\vec{A}| \cos \theta_{\vec{A}} = |2 \text{ cm}| \cos 20 = 1.879 \text{ cm} \\
 A_y &= |\vec{A}| \sin \theta_{\vec{A}} = |2 \text{ cm}| \sin 20 = 0.684 \text{ cm} \\
 B_x &= |\vec{B}| \cos \theta_{\vec{B}} = |3.5 \text{ cm}| \cos 40 = 2.681 \text{ cm} \\
 B_y &= -|\vec{B}| \sin \theta_{\vec{B}} = -|3.5 \text{ cm}| \sin 40 = -2.25 \text{ cm},
 \end{aligned}$$

(2.1)

por lo que:

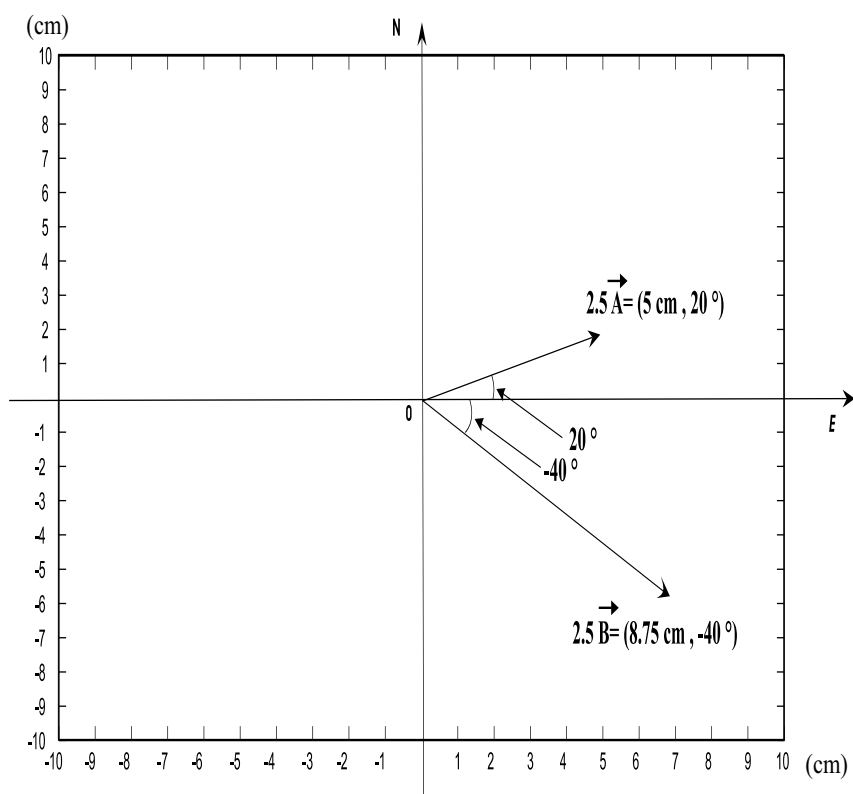


Figura 2.3: Localización en el plano cartesiano de los vectores paralelos a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  pero 2.5 veces más grandes.

$$-2.5 \vec{A} = (-2.5 A_x, -2.5 A_y) = (-4.6975, -1.71) \text{ cm}$$

y

$$3 \vec{B} = (3 B_x, 3 B_y) = (8.043, -6.75) \text{ cm}.$$

Ahora podemos efectuar la suma  $-2.5 \vec{A} + 3 \vec{B}$ , para la que obtenemos:

$$\begin{aligned} -2.5 \vec{A} + 3 \vec{B} &= (-4.6984, -1.71) \text{ cm} + (8.043, -6.75) \text{ cm} \\ &= (-4.6984 + 8.043, -1.71 - 6.75) \text{ cm} = (3.3446, -8.46) \text{ cm}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $-2.5 \vec{A} + 3 \vec{B} = (3.3446, -8.46) \text{ cm}$ .

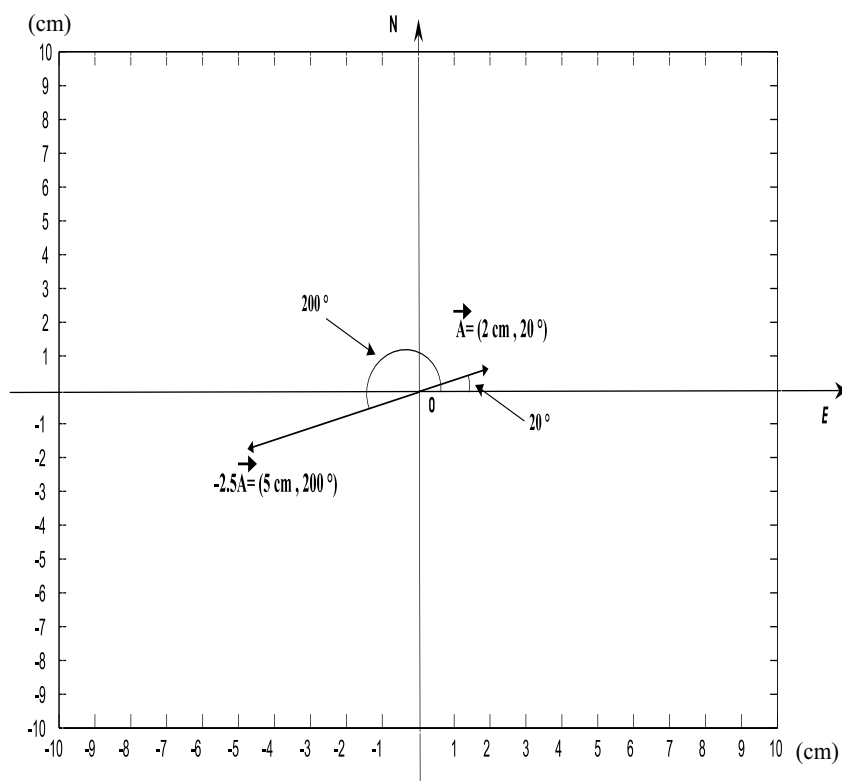


Figura 2.4: Localización en el plano cartesiano de los vectores  $\vec{A}$  y  $-2.5\vec{A}$ .

Para encontrar los múltiplos de  $\vec{A}$  y de  $\vec{B}$  que sumados den como resultado un vector de 10 cm en dirección norte se escribe:

$$\begin{aligned} (0, 10) \text{ cm} &= \lambda \vec{A} + \gamma \vec{B} = \\ &= (\lambda A_x + \gamma B_x, \lambda A_y + \gamma B_y), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 \text{ cm} &= \lambda A_x + \gamma B_x \\ 10 \text{ cm} &= \lambda A_y + \gamma B_y \\ \implies \\ 0 \text{ cm} &= (1.879 \lambda + 2.681 \gamma) \text{ cm} \\ 10 \text{ cm} &= (0.684 \lambda + (-2.25) \gamma) \text{ cm}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

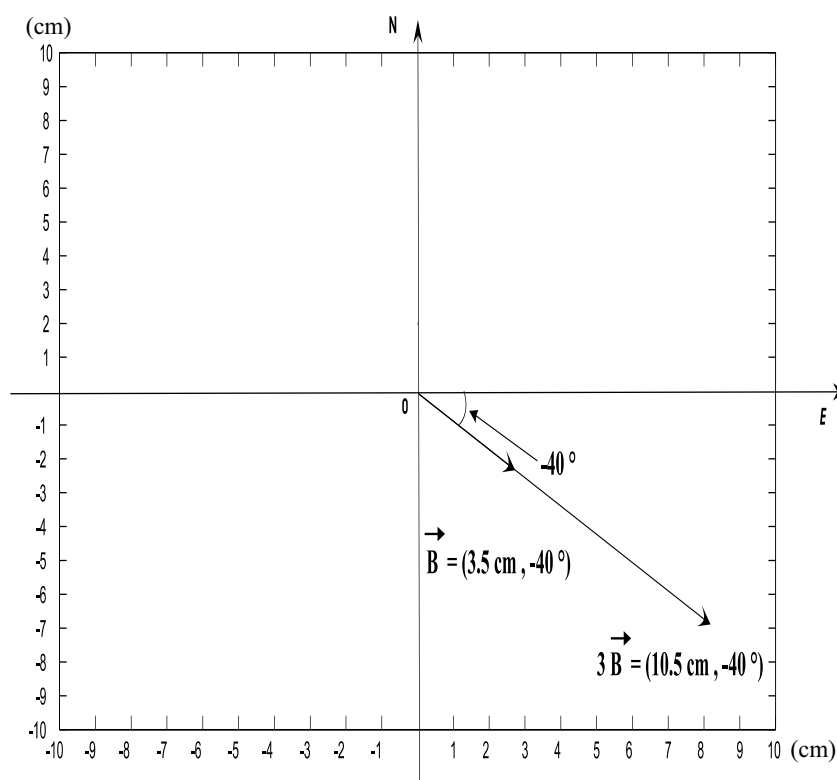


Figura 2.5: Localización en el plano cartesiano de los vectores  $\vec{B}$  y  $3\vec{B}$ .

cuya solución está dada por:

$$\lambda = 4.42$$

$$\gamma = -3.1.$$

**2-3.-** Dados los vectores  $\vec{a} = 3\hat{e}_x + 4\hat{e}_y$  y  $\vec{b} = -\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$ , calcular:

- La magnitud de cada vector.
- El producto escalar  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .
- El ángulo formado entre ambos vectores.
- El vector suma  $\vec{a} + \vec{b}$  y el vector diferencia  $\vec{a} - \vec{b}$ .
- El producto vectorial  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

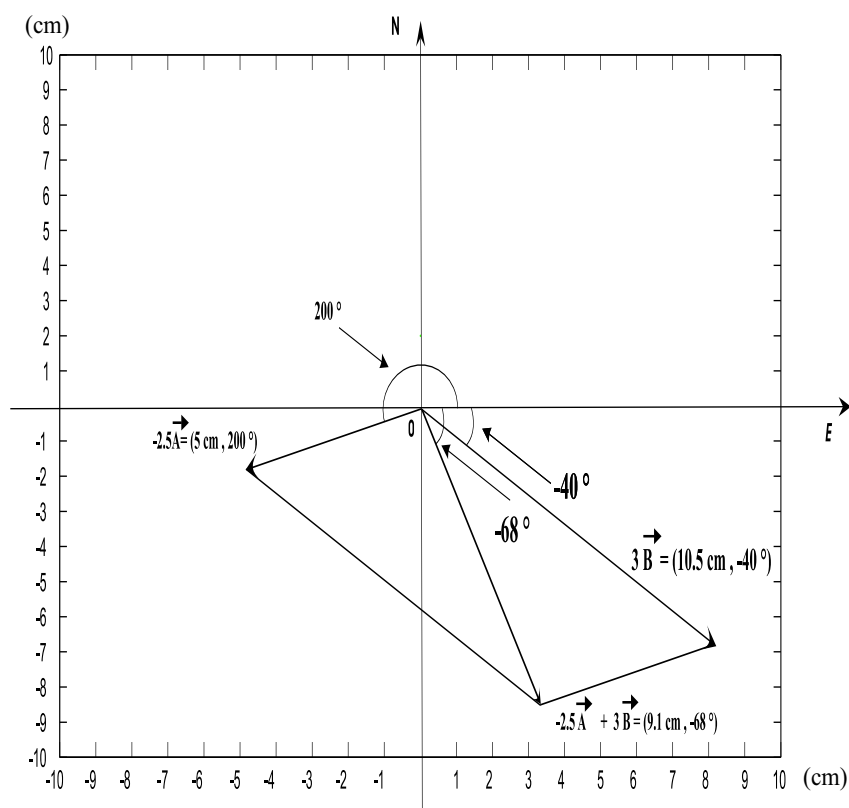


Figura 2.6: Localización en el plano cartesiano del vector suma  $-2.5 \vec{A} + 3 \vec{B}$ .

**Sol:**

a) La magnitud de un vector  $\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y$  se encuentra dada por:

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad (2.3)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2.24. \end{aligned}$$

b) El producto escalar de  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y = \\ (3)(-1) + (4)(2) &= -3 + 8 = 5. \end{aligned}$$

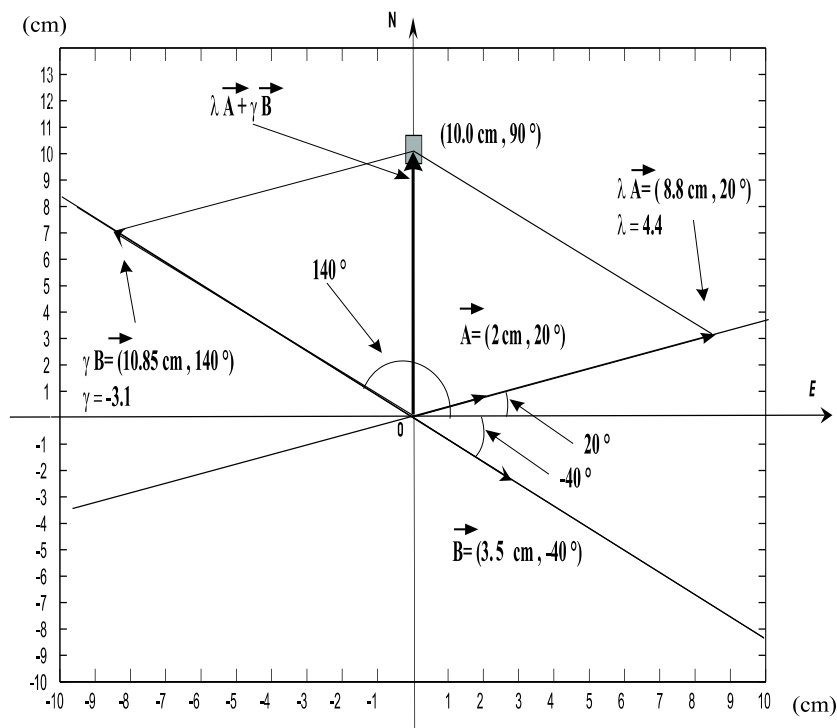


Figura 2.7: Localización en el plano cartesiano del vector suma  $\lambda \vec{A} + \gamma \vec{B} = 10 \text{ cm}$  al norte del origen.

c) El ángulo formado entre ambos vectores se puede obtener aplicando la definición del producto escalar  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo formado entre ambos vectores; aplicando la definición anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \\ \implies \cos \theta &= \frac{5}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \\ &= \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

esto es:

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = 63.44^\circ.$$

d) La suma vectorial  $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$  está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= (a_x + b_x)\hat{e}_x + (a_y + b_y)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= (3 - 1)\hat{e}_x + (4 + 2)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} &= 2\hat{e}_x + 6\hat{e}_y,\end{aligned}$$

y la diferencia  $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$  está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} &= (a_x - b_x)\hat{e}_x + (a_y - b_y)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} &= (3 - (-1))\hat{e}_x + (4 - 2)\hat{e}_y \\ &\implies \\ \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} &= 4\hat{e}_x + 2\hat{e}_y.\end{aligned}$$

e) El producto vectorial de  $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$  está dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \\ (a_x b_y - a_y b_x)\hat{e}_z &= (3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1))\hat{e}_z = \\ (6 + 4)\hat{e}_z &= 10\hat{e}_z.\end{aligned}$$

## Parte II. Cinemática de una partícula en una y dos dimensiones

En la primera parte del libro se abordaron algunas generalidades sobre el manejo de las unidades de medida (capítulo 1) y sobre las operaciones básicas entre vectores, para familiarizarnos, al menos un poco, con la notación vectorial (capítulo 2). En esta segunda parte se presentan varios problemas relacionados con una de las ideas centrales de la mecánica: describir el cambio de posición de un objeto conforme transcurre el tiempo. Para lograr este propósito, primero se analizan ciertas situaciones físicas para el movimiento en una línea recta, y posteriormente, para el movimiento en dos dimensiones.

Asimismo, se presentan problemas resueltos en los que se utilizan los conceptos físicos de desplazamiento, velocidad promedio y de aceleración promedio, que anteceden a los conceptos de velocidad instantánea y de aceleración instantánea, también se hace uso de la diferencia entre la rapidez y la velocidad de una partícula y de la interpretación geométrica de esta última en una gráfica de posición como función del tiempo.

En esta parte del libro se utilizan por primera vez, algunas ideas sobre vectores para el estudio del movimiento de proyectiles lanzados con una cierta inclinación inicial de ascenso (tiro parabólico). Se utilizan nociones vectoriales para la descripción del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria circular con rapidez constante, en donde la dirección de la velocidad de la partícula cambia debido a la aceleración centrípeta a la que se encuentra sujeta cualquier partícula en un movimiento circular.

También se plantean problemas sencillos en los que partiendo de una tabla o una gráfica de la posición de una partícula como función del tiempo, se puede obtener información general sobre su velocidad y su aceleración instantánea.

Adicionalmente, se han utilizado algunas ideas básicas de cálculo diferencial e integral con la finalidad de que los estudiantes empiecen a familiarizarse con el cálculo, indispensable para estudios posteriores en el área de la física.

En el capítulo 5 se abordan problemas adicionales de la cinemática en una y dos dimensiones que son un poco más elaborados y que requieren que los estudiantes posean cierta práctica en el planteamiento y solución de problemas mecánicos. Sin embargo, los estudiantes que todavía no han adquirido estas habilidades pueden, sin ninguna dificultad, abordar los ejercicios planteados a lo largo de la obra y dejar los problemas del capítulo 5 para una segunda etapa en el estudio de la mecánica, ya que estén provistos de una mayor experiencia en el manejo de la cinemática y del cálculo diferencial e integral.

# Capítulo 3

## Cinemática en una dimensión

3-1.- Un gato camina en línea recta, en lo que llamaremos eje  $x$ , con dirección positiva a la derecha. Usted efectúa mediciones del movimiento del felino y construye una gráfica de la velocidad en función del tiempo, como se muestra en la figura 3.1.

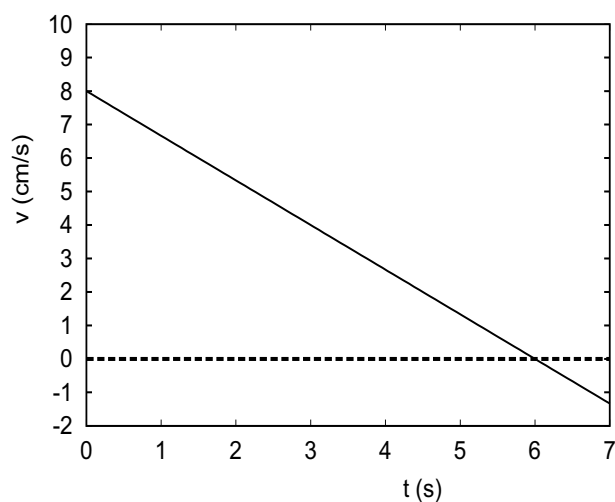


Figura 3.1: **Gráfica de velocidad vs tiempo del gato.**

- Determine la velocidad del felino en función de  $t$  cuando  $t = 4$  s y en  $t = 7$  s.
- ¿Qué aceleración tiene el gato en  $t = 3$  s, en  $t = 6$  s y en  $t = 7$  s?
- ¿Qué distancia recorre el gato durante los primeros 4.5 s? y ¿qué distancia recorre entre  $t = 0$  s y  $t = 7.5$  s?
- Dibuje gráficas claras de la aceleración y la posición del gato en función del tiempo suponiendo que el gato partió del origen.

**Sol:**

a) De la gráfica de la velocidad como función del tiempo se observa que la relación existente entre las cantidades físicas es lineal, por lo que la velocidad como función del tiempo estará dada por:

$$v(t) = 8 \left( \frac{cm}{s} \right) - \frac{4}{3} \left( \frac{cm}{s^2} \right) t (s) , \quad (3.1)$$

que es precisamente la ecuación de la recta de la gráfica anterior (Fig. 3.1), de manera que la velocidad del gato cuando  $t = 4 s$  será:

$$v(4) = \left[ 8 - \frac{4}{3}(4) \right] \frac{cm}{s} = \frac{8}{3} \frac{cm}{s}$$

y en  $t = 7 s$ :

$$v(7) = \left[ 8 - \frac{4}{3}(7) \right] \frac{cm}{s} = -\frac{4}{3} \frac{cm}{s}.$$

b) Para obtener la aceleración del gato, una vez que conocemos su velocidad derivamos la ecuación (3.1) respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 8 - \frac{4}{3}t \right) = -\frac{4}{3} \frac{cm}{s^2}. \quad (3.2)$$

De esta expresión se desprende que el gato realiza un movimiento uniformemente acelerado (desacelerado en este caso particular) con una aceleración constante de  $-\frac{4}{3} \frac{cm}{s^2}$ , por lo tanto, este será el valor de la aceleración del gato en cualquier instante de tiempo.

c) La distancia recorrida por el gato entre  $t = 0 s$  y  $t = 4.5 s$  será igual al área comprendida entre la curva  $v(t)$  en este intervalo y el eje del tiempo. Con base en la gráfica de la figura 3.1 tenemos que:

$$\Delta x (t = 0 \rightarrow t = 4.5) = \left[ (2)(4.5) + \frac{1}{2}(6)(4.5) \right] \frac{cm}{s} = 22.5 cm.$$

La distancia recorrida por el gato en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 0 s$  y  $t = 7.5 s$  es igual al área comprendida entre la curva  $v(t)$  y el eje del tiempo en el intervalo entre  $t = 0 s$  y  $t = 6 s$ , más el área comprendida entre la curva  $v(t)$  y el eje del tiempo en el intervalo entre  $t = 6 s$  y  $t = 7.5 s$ .

$$\Delta x (t = 0 \rightarrow t = 7.5) = \Delta x (t = 0 \rightarrow t = 6) + \Delta x (t = 6 \rightarrow t = 7.5)$$

$$\Delta x (t = 0 \rightarrow t = 6) = \frac{1}{2}(8)(6) \frac{cm}{s} = 24 cm,$$

para determinar el área bajo la curva de la velocidad del gato entre  $t = 6 \text{ s}$  y  $t = 7.5 \text{ s}$ , necesitamos conocer la altura del triángulo formado por el eje del tiempo en este intervalo y la velocidad del gato dada por la ecuación (3.1). La altura del triángulo está dada por el valor absoluto de la velocidad en el tiempo  $t = 7.5 \text{ s}$ , que a su vez está determinada por:

$$\begin{aligned} |v(t = 7.5)| &= \left| \left( 8 - \frac{4}{3}(7.5) \right) \right| \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ &= |-2| \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

y el área del triángulo formado por el eje del tiempo en el intervalo comprendido entre  $t = 6 \text{ s}$  y  $t = 7.5 \text{ s}$  y la velocidad del gato dada por la ecuación (3.1) será:

$$\Delta x(t = 6 \rightarrow t = 7.5) = \frac{1}{2}(2)(1.5) \frac{\text{cm}}{\text{s}} \text{s} = 1.5 \text{ cm}, \quad (3.4)$$

en la ecuación (3.4) hemos puesto  $|v(t = 7.5 \text{ s})| = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  para la altura del triángulo formado por el eje del tiempo y la curva  $v(t)$  en el intervalo comprendido entre  $t = 6 \text{ s}$  y  $t = 7.5 \text{ s}$  y no  $v(t = 7.5) = -2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ , porque lo que nos interesa es la distancia recorrida por el gato y no su posición en  $t = 7.5 \text{ s}$ .

Por lo tanto, la distancia cubierta en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 7.5 \text{ s}$  es igual a:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 7.5) = 24 \text{ cm} + 1.5 \text{ cm} = 25.5 \text{ cm}.$$

d) La gráfica de la aceleración como función del tiempo (que en este caso es constante) se muestra a continuación:

La posición del gato como función del tiempo está dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (3.5)$$

en donde  $x_0 = 0 \text{ m}$  es la posición inicial,  $v_0 = 8 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  es la velocidad inicial y  $a = -\frac{4}{3} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$  es la aceleración; por lo que la posición estará dada por:

$$x(t) = 8t - \frac{2}{3} t^2. \quad (3.6)$$

Alternativamente, la gráfica de la posición del gato como función del tiempo puede obtenerse integrando la ecuación (3.1) respecto al tiempo, suponiendo que en  $t = 0 \text{ s}$  el gato se encuentra en el origen de nuestro sistema de referencia ( $x_0 = 0 \text{ m}$ ):

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t \left( 8 - \frac{4}{3} t' \right) dt' = 8t - \frac{2}{3} t^2 \text{ cm}.$$

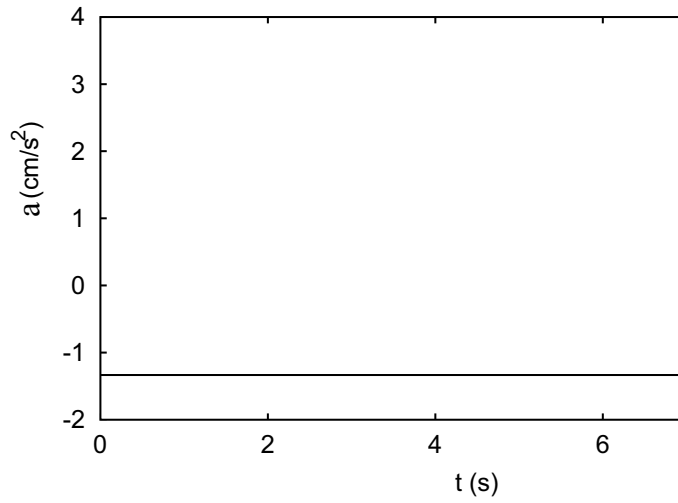


Figura 3.2: **Gráfica de la aceleración vs tiempo de un gato.**

Este resultado coincide desde el punto de vista físico con el obtenido aplicando las relaciones de la cinemática del movimiento uniformemente acelerado (ecuación (3.6)).

La gráfica de la función posición  $x(t) = 8t - \frac{2}{3}t^2$   $\text{cm}$  corresponde a una parábola decreciente con un máximo en  $t = 6$   $\text{s}$ , tal y como puede observarse en la gráfica de la figura 3.3.

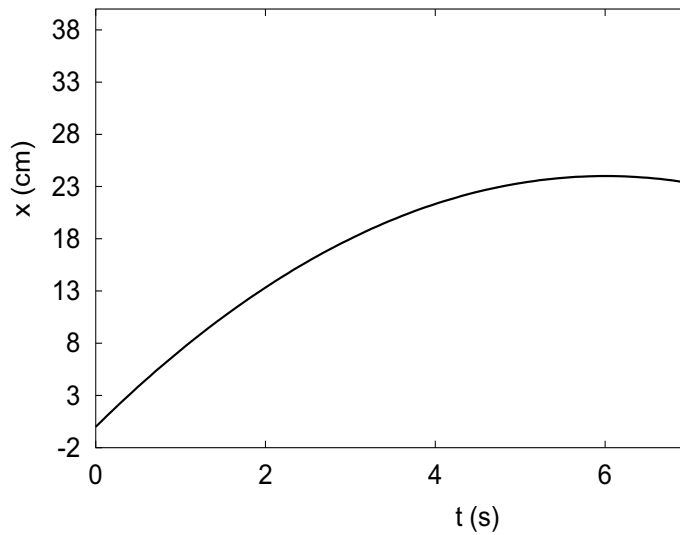


Figura 3.3: **Gráfica de la posición vs tiempo de un gato.**

- 3-2.-** Un coche de  $3.5 \text{ m}$  de longitud que viaja con una rapidez constante de  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  se acerca a un cruce que tiene  $20 \text{ m}$  de largo (Fig. 3.4). Cuando el frente del coche está a  $50 \text{ m}$  del cruce, el semáforo se pone en amarillo. Tomando en cuenta que el semáforo estará en amarillo durante  $3 \text{ s}$ , que si el conductor pisa el freno el auto disminuirá su velocidad a  $-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , y que si pisa el acelerador el auto aumentará su velocidad a  $1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ; ¿el conductor debe frenar o acelerar para no estar en el cruce con el semáforo en rojo? Ignore el tiempo de reacción del conductor.

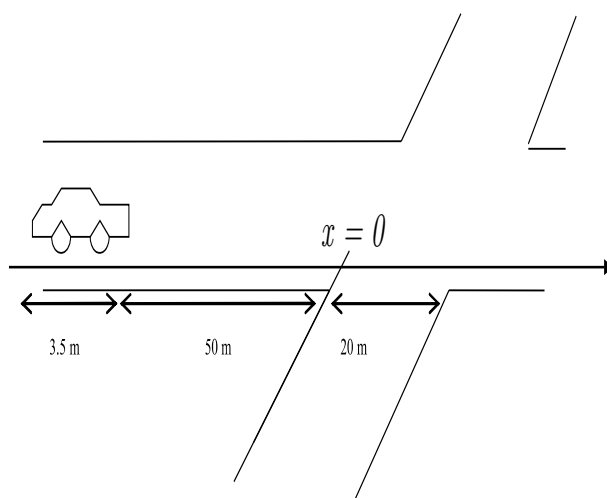


Figura 3.4: Diagrama de un automóvil aproximándose a un cruce con semáforo.

**Sol:**

Analicemos cuidadosamente la situación, tenemos un coche que para no encontrarse en medio del cruce vehicular dentro de  $3 \text{ s}$ , a partir del tiempo inicial, debe acelerar a  $1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  o desacelerar a  $-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . La decisión que tome el conductor debe ser tal que, si desacelera, la parte delantera del coche se encuentre en el extremo izquierdo del cruce vehicular (Fig. 3.4). Si por el contrario, el conductor decide acelerar, el extremo trasero del coche debe encontrarse en el extremo derecho de la intersección.

Veamos primero el caso de la aceleración positiva; tomando la posición en el tiempo inicial ( $t = 0 \text{ s}$ )  $x_0$  la del extremo trasero del coche estará dado por:

$$x_0 = (-50 - 3.5) \text{ m} = -53.5 \text{ m},$$

tomando como origen de referencia el extremo izquierdo del cruce vehicular, la posición en cualquier momento posterior del extremo trasero del coche estará dada por:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2,$$

en donde  $a_1 = 1.5 \frac{m}{s^2}$  y  $v_0 = 20 \frac{m}{s}$ . Por lo tanto, acelerando la posición del extremo trasero del coche después de que transcurran 3 s, estará dada por:

$$x(3) = \left[ -53.5 + 20(3) + \frac{1}{2}(1.5)(3)^2 \right] m = 13.25 m,$$

y necesitamos que  $x(3)$  sea, por lo menos, igual a 20 m.

Analicemos ahora el caso de la desaceleración: tomando la posición en el tiempo inicial ( $t = 0$  s)  $x'_0$  la del extremo frontal del coche:

$$x'_0 = -50 m,$$

tomando nuevamente como origen de referencia el extremo izquierdo del cruce vehicular, la posición en cualquier momento posterior, del extremo frontal del coche, estará dada por:

$$x(t) = x'_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad m,$$

en donde  $a_2 = -4.0 \frac{m}{s^2}$  y  $v_0 = 20 \frac{m}{s}$ . Por lo tanto, la posición del extremo frontal del coche después de que transcurran 3 s, estará dada por:

$$x(3) = \left[ -50 + 20(3) + \frac{1}{2}(-4)(3)^2 \right] m = -8 m,$$

y necesitamos que  $x(3)$  sea, como máximo, igual a 0 m.

Por lo tanto, el conductor debe **FRENAR**.

**3-3.-** La posición de un auto que viaja en línea recta, después de estar parado ante un semáforo, está dada por  $x(t) = b t^2 - c t^3$ , en donde  $b = 2.4 \frac{cm}{s^2}$  y  $c = 0.12 \frac{cm}{s^3}$ .

- Calcule la velocidad media entre  $t = 0$  s y  $t = 10$  s.
- Calcule la velocidad instantánea cuando  $t = 0$  s,  $t = 5$  s y  $t = 10$  s.
- ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado?

**Sol:**

a) Si tomamos el semáforo como el origen de nuestro sistema de referencia, la posición del auto está dada por:

$$x(t) = 2.4 t^2 - 0.12 t^3 \text{ cm}, \quad (3.7)$$

y la velocidad media en el intervalo entre  $t = 0$  s y  $t = 10$  s será:

$$v_{media}(t = 0 \rightarrow t = 10) = \frac{x(10) - x(0)}{(10 - 0) s},$$

de acuerdo con la ecuación (3.7),  $x(10)$  será igual a:

$$x(10) = 2.40 (10)^2 - 0.120 (10)^3 = 120 \text{ cm},$$

y tenemos que  $x(0) = 0 \text{ cm}$ , por lo tanto:

$$v_{media}(t = 0 \rightarrow t = 10) = \left( \frac{120 - 0}{10 - 0} \right) \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

b) Sabemos que la velocidad instantánea del automóvil está dada por:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (2.40t^2 - 0.120t^3) \frac{\text{cm}}{\text{s}} = (4.80t - 0.360t^2) \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad (3.8)$$

por lo tanto, la velocidad instantánea del automóvil en  $t = 0 \text{ s}$  será igual a:

$$v(t = 0) = [4.80 (0) - 0.360 (0)^2] \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

en  $t = 5 \text{ s}$  será de:

$$v(t = 5) = [4.80 (5) - 0.360 (5)^2] \frac{\text{cm}}{\text{s}} = (24 - 9) \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 15 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

y para  $t = 10 \text{ s}$  será igual a:

$$v(t = 10) = [4.80 (10) - 0.360 (10)^2] \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

c) Para que el automóvil vuelva a detenerse (observe que en  $t = 0 \text{ s}$  la velocidad del automóvil es cero), necesitamos encontrar un valor del tiempo para el que la velocidad del automóvil sea igual a cero, esto es:

$$v(t_0) = [4.80 (t_0) - 0.360 (t_0)^2] = 0,$$

de donde se obtiene que:

$$t_0 = \frac{4.80}{0.360} = 13.33 \text{ s},$$

por lo tanto, 13.33 s después de que parte del reposo en el semáforo, el automóvil volverá a detenerse.

**3-4.-** La siguiente gráfica muestra la velocidad de un policía en motocicleta en función del tiempo.

a) Calcule la aceleración instantánea en  $t = 3 \text{ s}$ ,  $t = 7 \text{ s}$  y  $t = 11 \text{ s}$ .

b) Calcule la distancia recorrida por el policía durante los primeros 5 s, 9 s y 13 s.

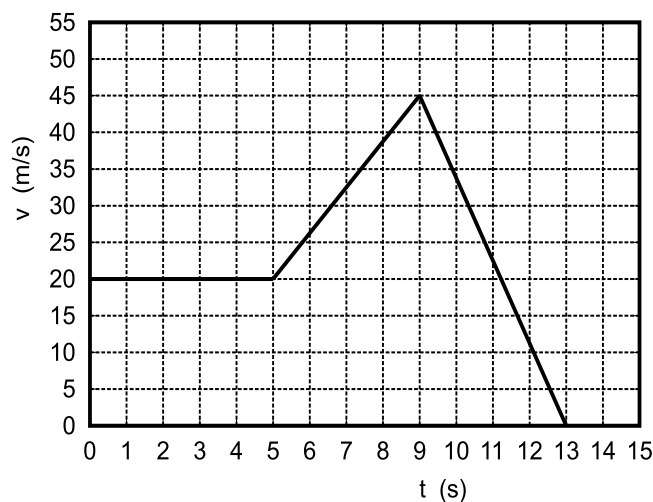


Figura 3.5: Gráfica de velocidad vs tiempo de un policía.

**Sol:**

a) De acuerdo con la definición de la aceleración instantánea:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt},$$

la aceleración en  $t = 3 \text{ s}$  está dada por el valor de la pendiente de la curva  $v(t)$  vs  $t$  en este punto de la gráfica (Fig. 3.5), sin embargo, la pendiente de esta gráfica en el intervalo comprendido entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 5 \text{ s}$  es cero, por lo tanto, la aceleración instantánea en  $t = 3 \text{ s}$  es igual a cero:

$$a(3) = 0.$$

En  $t = 7 \text{ s}$  la aceleración está dada por el valor de la pendiente de la curva  $v(t)$  vs  $t$  en este punto de la gráfica, la pendiente en el intervalo comprendido entre  $t = 5 \text{ s}$  y  $t = 9 \text{ s}$  está dada por:

$$a(t = 5 \rightarrow t = 9) = \left( \frac{45 - 20}{9 - 5} \right) \frac{m}{s^2} = \left( \frac{25}{4} \right) \frac{m}{s^2} = 6.25 \frac{m}{s^2},$$

por lo tanto, la aceleración instantánea en  $t = 7 \text{ s}$  es igual a  $6.25 \frac{m}{s^2}$ .

De igual forma en  $t = 11 \text{ s}$  la aceleración está dada por el valor de la pendiente de la curva  $v(t)$  vs  $t$  en este punto de la gráfica, la pendiente en el intervalo comprendido entre  $t = 9 \text{ s}$  y  $t = 13 \text{ s}$  está dada por:

$$a(t = 9 \rightarrow t = 13) = \left( \frac{0 - 45}{13 - 9} \right) \frac{m}{s^2} = \left( -\frac{45}{4} \right) \frac{m}{s^2} = -11.25 \frac{m}{s^2}.$$

por lo tanto, la aceleración instantánea en  $t = 11 \text{ s}$  es igual a  $-11.25 \frac{m}{s^2}$ .

b) La distancia recorrida por el policía entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 5 \text{ s}$  será igual al área comprendida entre la curva  $v(t)$  y el eje del tiempo en este intervalo. De la gráfica anterior (Fig. 3.5) tenemos que:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 5) = (20)(5) \frac{m}{s} = 100 \text{ m}.$$

Ahora bien, la distancia cubierta por el policía en el intervalo  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 9 \text{ s}$  es igual al área comprendida entre la curva  $v(t)$  y el eje del tiempo en el intervalo entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 5 \text{ s}$ , más el área comprendida entre la curva  $v(t)$  y el eje del tiempo en el intervalo  $t = 5 \text{ s}$  y  $t = 9 \text{ s}$ .

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) = \Delta x(t = 0 \rightarrow t = 5) + \Delta x(t = 5 \rightarrow t = 9)$$

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 5) = (20)(5) \frac{m}{s} = 100 \text{ m}$$

$$\Delta x(t = 5 \rightarrow t = 9) = \left[ (20)(4) + \frac{1}{2}(25)(4) \right] \frac{m}{s} = 130 \text{ m},$$

por lo tanto, la distancia cubierta por el policía en el intervalo comprendido entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 9 \text{ s}$  está dada por:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) = 100 \text{ m} + 130 \text{ m} = 230 \text{ m}.$$

Finalmente, la distancia recorrida por el policía en el intervalo  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 13 \text{ s}$  es igual al área comprendida entre la curva  $v(t)$  y el eje del tiempo en el intervalo  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 9 \text{ s}$ , más el área comprendida entre  $t = 9 \text{ s}$  y  $t = 13 \text{ s}$ .

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 13) = \Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) + \Delta x(t = 9 \rightarrow t = 13)$$

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 9) = 230 \text{ m}$$

$$\Delta x(t = 9 \rightarrow t = 13) = \frac{1}{2}(45)(4) \frac{m}{s} = 90 \text{ m},$$

por lo tanto, la distancia cubierta por el policía en el intervalo comprendido entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 13 \text{ s}$  está dada por:

$$\Delta x(t = 0 \rightarrow t = 13) = 230 \text{ m} + 90 \text{ m} = 320 \text{ m}.$$

**3-5.-** El maquinista de un tren de pasajeros que viaja a  $25 \frac{m}{s}$  avista a un tren de carga  $200 \text{ m}$  más adelante sobre la misma vía. El tren de carga viaja en la misma

dirección pero a una velocidad de  $15 \frac{m}{s}$ . El maquinista del tren de pasajeros aplica de inmediato los frenos, lo que ocasiona una aceleración constante de  $-0.100 \frac{m}{s^2}$ , mientras que el tren de carga mantiene una velocidad constante. Siendo  $x = 0$  el punto en donde está el frente del tren de pasajeros cuando el maquinista aplica los frenos:

- ¿Los trenes colisionarán?
- De ser así, ¿a qué distancia del primer avistamiento ocurrirá?
- Dibuje en una sola gráfica las posiciones del frente del tren de pasajeros y del tren de carga en función del tiempo.

**Sol:**

a) De acuerdo con la información inicial y la fórmula general del movimiento uniformemente acelerado:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

tomando  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $v_0 = 25 \frac{m}{s}$ ,  $a = -0.1 \frac{m}{s^2}$  y el tiempo ( $t$ ) en segundos ( $s$ ), la posición del tren de pasajeros está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x_{\text{pasajeros}}(t) &= \left(25 \frac{m}{s}\right)t(s) + \left[\frac{1}{2}\left(-0.1 \frac{m}{s^2}\right)\right]t^2(s^2) \\ &= 25t - \frac{0.1}{2}t^2 \text{ m}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y tomando  $x_0 = 200 \text{ m}$ ,  $v_0 = 15 \frac{m}{s}$ ,  $a = 0 \frac{m}{s^2}$  y el tiempo ( $t$ ) en segundos ( $s$ ), la posición del tren de carga está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x_{\text{carga}}(t) &= (200 \text{ m}) + \left(15 \frac{m}{s}\right)t(s) \\ &= 200 + 15t \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para saber si el tren de pasajeros choca con el tren de carga, necesitamos conocer el instante de tiempo ( $t_0$ ) en el que el extremo frontal del tren de pasajeros y el extremo

final del tren de carga se encuentran en la misma posición, es decir:

$$\begin{aligned}
 x_{carga}(t_0) &= x_{pasajeros}(t_0) \\
 &\Rightarrow \\
 (25 \frac{m}{s})t_0 + - \left[ \frac{1}{2}(-0.1 \frac{m}{s^2}) \right] t_0^2 &= (200 m) + \left( 15 \frac{m}{s} \right) t_0 \\
 \Rightarrow 0 &= 10t_0 - 0.05t_0^2 - 200 \\
 \Rightarrow t_0 &= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-0.05)(-200)}}{-0.10} \\
 \Rightarrow t_0 &= 22.54 s \\
 \Rightarrow t_0 &= 177.46 s.
 \end{aligned}$$

El momento en que los trenes se encuentran corresponde a  $t_0 = 22.54 s$  y la velocidad del tren de pasajeros será:

$$v_{pasajeros}(t) = 25 \frac{m}{s} - \left( 0.1 \frac{m}{s^2} \right) t_0 = 22.75 \frac{m}{s},$$

y la velocidad constante del tren de carga durante el movimiento será:

$$v_{carga}(t) = 15 \frac{m}{s}.$$

Esto significa que los trenes, al encontrarse en  $t = t_0$  a diferentes velocidades, colisionarán.

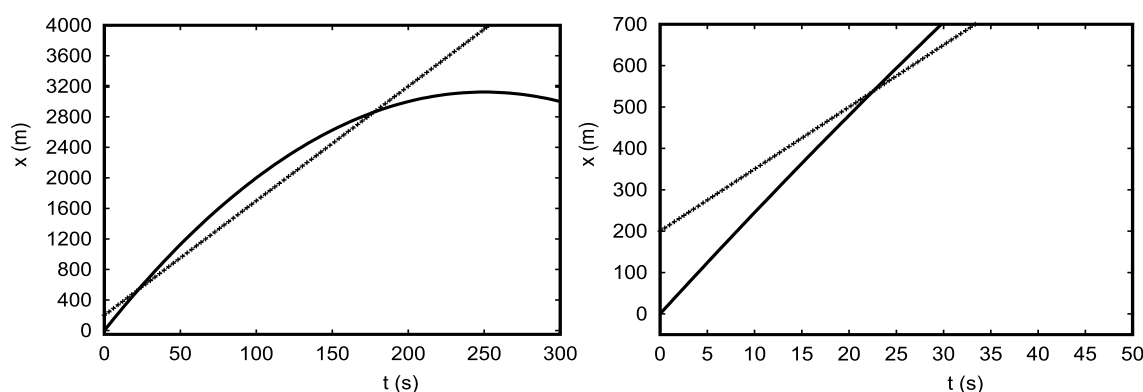


Figura 3.6: Gráfica de posición vs tiempo de ambos trenes que colisionan en un tiempo  $t_0 = 22.54 s$ , después del primer avistamiento, la línea recta representa la posición como función del tiempo del tren de carga, mientras que el trazo curvado representa la posición como función del tiempo del tren de pasajeros.

b) La colisión tendrá lugar en:

$$x_{pasajeros}(t_0) = x_{carga}(t_0) = 25t_0 - \frac{0.1}{2}t_0^2 = 538.1 \text{ m},$$

es decir, a 538.1 m pasando el punto del primer avistamiento hecho por el maquinista del tren de pasajeros.

c) En las gráficas de la figura 3.6 se muestran las posiciones de ambos trenes dadas por las ecuaciones (3.9) y (3.10), el trazo curvado representa la posición del tren de pasajeros y la línea recta la del tren de carga. En la primera gráfica podemos observar un intervalo más amplio que nos permite identificar las características del movimiento de cada uno de los trenes, mientras que en la gráfica de la derecha se muestra un intervalo de tiempo pequeño alrededor del punto de la colisión.

También debemos mencionar que después de que  $t = t_0 = 22.54 \text{ s}$  estas gráficas de posición en función del tiempo no tienen sentido físico porque los movimientos de los trenes después de la colisión no se encuentran descritos por las ecuaciones (3.9) y (3.10).

# Capítulo 4

## Cinemática en dos dimensiones

4-1.- La figura 4.1 muestra la trayectoria de un automóvil formada por segmentos rectilíneos y cuadrantes de circunferencia. El automóvil parte del reposo en el punto **A**, después de que alcanza el punto **B** mantiene velocidad constante hasta que llega al punto **E** y finalmente termina en reposo su recorrido en el punto **F**.

- En un punto intermedio de la trayectoria **AB**, **BC**, **CD**, **DE** y **EF**, ¿cuál es la dirección de la velocidad?
- ¿En cuál de estos puntos el automóvil posee aceleración y en que dirección?
- ¿En qué cuadrante es mayor la aceleración: en **BC** o **DE**?

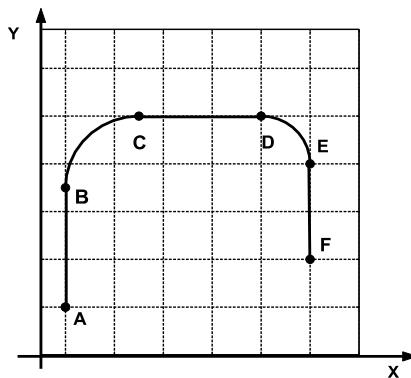


Figura 4.1: Gráfica de la trayectoria de un automóvil.

**Sol:**

a) De acuerdo a la figura 4.2 el vector velocidad en los intervalos **AB**, **CD** y **EF** es paralelo a la trayectoria del automóvil. Como en los puntos **A** y **F** el automóvil se

encuentra en reposo, la velocidad primero aumentará y posteriormente disminuirá. En los intervalos **BC** y **DE** la trayectoria es circular y el vehículo mantiene una velocidad constante y tangente en cualquier punto de estos intervalos.

b) De acuerdo a la figura 4.2 el vector velocidad en el intervalo **AB** aumenta, por lo tanto, al ser una trayectoria recta, el vector aceleración tendrá una dirección paralela a la velocidad del automóvil, por otra parte, en el intervalo **EF** la velocidad del automóvil disminuye, por lo tanto, la aceleración será paralela a la trayectoria del automóvil, pero en dirección contraria al vector velocidad.

Para el intervalo **CD**, al ser la velocidad constante y a lo largo de una línea recta, la aceleración será cero (en **CD**  $\vec{a} = 0$ ).

Para los intervalos **BC** y **DE**, como la trayectoria es circular con rapidez constante, el vector aceleración en cualquier punto tiene una dirección hacia el centro de la circunferencia, por lo que la magnitud de la aceleración estará dada por:  $a = \frac{v^2}{R}$ , en donde  $v$  es la rapidez de la partícula y  $R$  es el radio de la circunferencia.

c) Ya que la aceleración en los intervalos **BC** y **DE** es centrípeta y su magnitud está dada por  $\frac{v^2}{R}$ , la aceleración en el intervalo **DE** será mayor porque el radio de su circunferencia es menor que el radio de la circunferencia del intervalo **BC**.

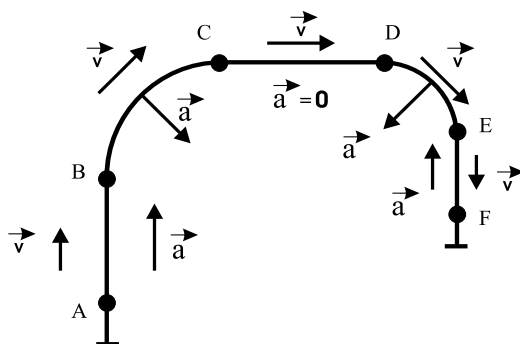


Figura 4.2: Gráfica de las velocidades y aceleraciones de una partícula en una trayectoria bidimensional.

4-2.- En los diagramas de la figura 4.3, las partículas se mueven en trayectorias circulares y con velocidades variables. En cada diagrama se han dibujado los vectores velocidad para dos tiempos distintos. Determinar el vector aceleración media entre las dos posiciones que se indican en cada caso.

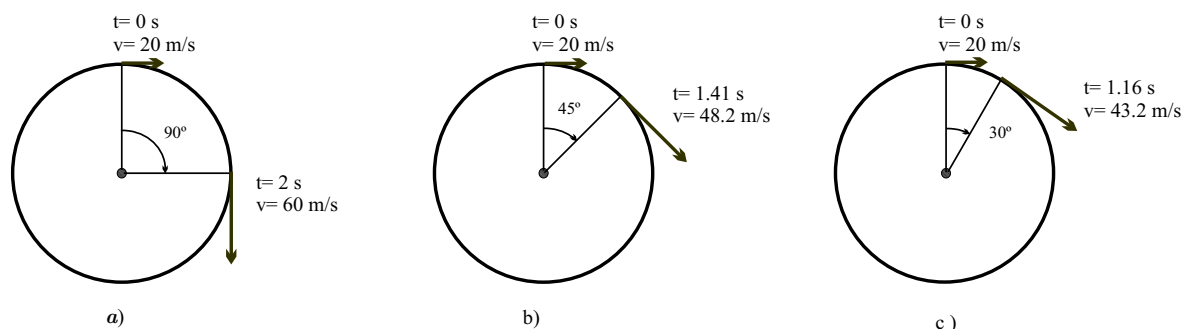


Figura 4.3: Velocidades para tres tiempos distintos de una partícula en un movimiento circular no uniforme.

**Sol:**

Para calcular la aceleración promedio en cada uno de los diagramas (Fig. 4.3), debemos descomponer los vectores velocidad inicial  $\vec{v}_1$  y final  $\vec{v}_2$  en sus componentes cartesianas, por ejemplo: para el inciso a) tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (v_{x1}, v_{y1}) = \left(20 \frac{m}{s}, 0 \frac{m}{s}\right) = (20, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{v}_2 &= (0, -60) \frac{m}{s},\end{aligned}$$

de donde podemos calcular el vector diferencia  $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , el cual estará dado por:

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-20, -60) \frac{m}{s}$$

y si  $\Delta t = 2$  s, finalmente, la aceleración promedio estará dada por:

$$\vec{a}_{med} = (a_{x_{med}}, a_{y_{med}}) = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = (-10, -30) \frac{m}{s^2}.$$

Para el inciso b) tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (20, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{v}_2 &= (48.2 \cos 45, -48.2 \sin 45) \frac{m}{s} = (34.08, -34.08) \frac{m}{s},\end{aligned}$$

de donde podemos calcular el vector diferencia  $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , el cual estará dado por:

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (14.08, -34.08) \frac{m}{s}$$

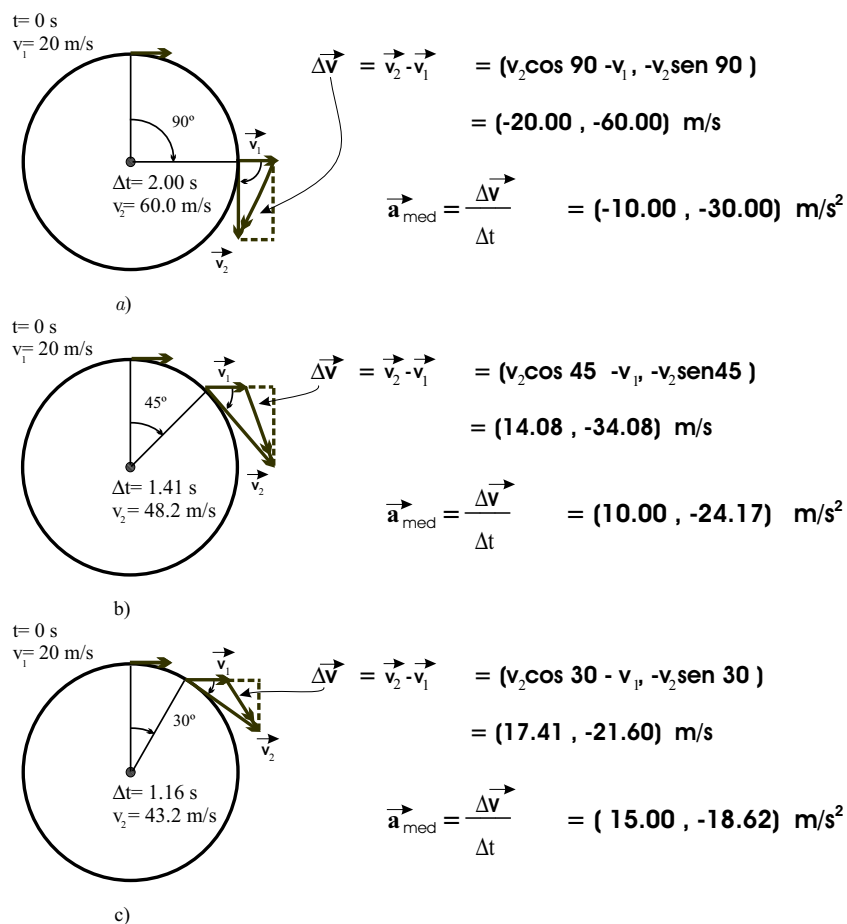


Figura 4.4: Aceleraciones promedio para tres intervalos de tiempo distintos de una partícula en un movimiento circular no uniforme.

y si  $\Delta t = 1.41$  s, finalmente, la aceleración promedio estará dada por:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = (10, -24.17) \frac{m}{s^2}.$$

Para el inciso c) tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (20, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{v}_2 &= (43.2 \cos 30, -43.2 \sin 30) \frac{m}{s} = (37.41, -21.6) \frac{m}{s}, \end{aligned}$$

de esta manera  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  estará dado por:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (17.41, -21.6) \frac{m}{s}$$

y si  $\Delta t = 1.16$  s, finalmente, la aceleración promedio estará dada por:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = (15, -18.62) \frac{m}{s^2},$$

estos resultados pueden observarse en los diagramas anteriores (Fig. 4.4).

**4-3.-** Una partícula sigue un camino tal y como se muestra en la figura 4.5. Entre los puntos **B** y **D** sigue una trayectoria recta. Dibuje los vectores de aceleración en **A**, **C** y **E** si:

- La partícula se mueve con rapidez constante.
- La rapidez de la partícula aumenta continuamente.
- La rapidez de la partícula disminuye continuamente.

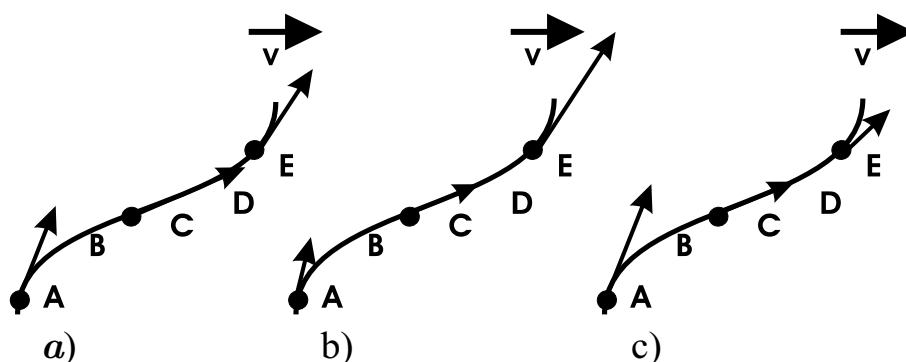


Figura 4.5: **Diferentes relaciones existentes entre el vector velocidad y el vector aceleración.**

**Sol:**

En una trayectoria arbitraria, como la de la figura 4.6, el vector aceleración tiene dos componentes: una componente  $a_{\perp}$  perpendicular a la trayectoria de la partícula y una componente  $a_{\parallel}$  paralela a la trayectoria; ambas dadas por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a_{\perp} &= \frac{v^2}{R} \\ a_{\parallel} &= \frac{d|\vec{v}|}{dt}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

en la figura 4.6 se pueden observar las representaciones gráficas de las dos componentes, para dos diferentes situaciones, la de la parte inferior de esta figura  $a_{\parallel}$  es paralela y en la misma dirección que la velocidad y en consecuencia la rapidez de la partícula aumenta.

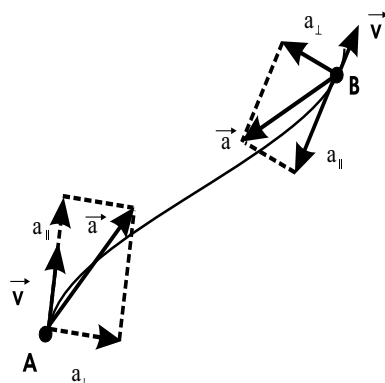


Figura 4.6: **Diferentes relaciones existentes entre el vector velocidad y el vector aceleración.**

En la parte superior  $a_{\parallel}$  también es paralela pero en dirección contraria a la velocidad y en consecuencia la rapidez de la partícula disminuye, en ambos casos el vector aceleración  $\vec{a}$  resulta ser la suma vectorial de las componentes dadas por la ecuación (4.1).

De manera que para el inciso a) de la figura 4.5, en el que la rapidez es constante en toda la trayectoria, la aceleración sólo tendrá componente  $a_{\perp}$  en los intervalos **AB** y **DE** (dirigidas al centro de curvatura de la trayectoria en dichos intervalos), porque entre los puntos **B** y **D** el camino es recto y la partícula se mueve con velocidad constante, por lo que la aceleración en esta trayectoria será igual a cero, estos resultados se muestran en el inciso a) de la figura 4.7.

Para el inciso b) de la figura 4.5, en el que la velocidad de la partícula aumenta a lo largo de la trayectoria, la dirección de la aceleración  $\vec{a}$  apunta siempre adelantando a la componente perpendicular  $a_{\perp}$ , porque  $a_{\parallel} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$  es positiva la rapidez de la partícula aumenta, mientras que entre los puntos **B** y **D** el camino es recto y, por lo tanto, la aceleración sólo tiene componente tangencial a la trayectoria con la misma dirección que la velocidad, al ir ésta última aumentando, estos resultados se muestran en el inciso b) de la figura 4.7.

Finalmente para el caso del inciso c) de la figura 4.5, en el que la velocidad de la partícula disminuye a lo largo de la trayectoria, la dirección de la aceleración  $\vec{a}$  apunta siempre atrasándose respecto a la componente perpendicular  $a_{\perp}$ , porque  $a_{\parallel} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$  es negativa, la rapidez de la partícula disminuye, mientras que entre los puntos **B** y **D** el camino es recto y la aceleración sólo tiene componente tangencial a la trayectoria con la dirección opuesta a la velocidad, al ir esta última disminuyendo, estos resultados se muestran en

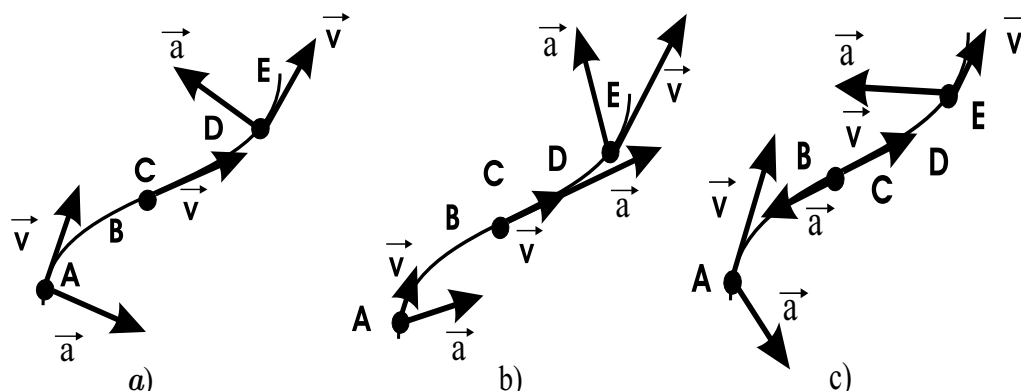


Figura 4.7: Diferentes relaciones existentes entre el vector velocidad y el vector aceleración para los incisos a), b) y c).

el inciso c) de la figura 4.7.

- 4-4.- Un profesor de física realiza audaces acrobacias en su tiempo libre. En la última intentó saltar un río en motocicleta (Fig. 4.8). Tomando en cuenta que la rampa de despegue tiene una inclinación de  $53^\circ$ , que el río tiene  $40\text{ m}$  de ancho y que la ribera lejana y el río se encuentran a  $15\text{ m}$  y  $100\text{ m}$ , respectivamente, por debajo del punto más alto de la rampa:

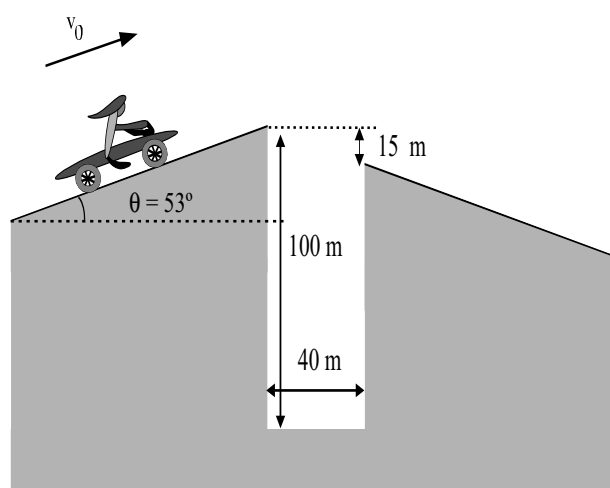


Figura 4.8: Rapidez mínima para un motociclista saltando una zanja.

a) ¿Qué rapidez necesita alcanzar la motocicleta en el punto más alto de la rampa para llegar al borde de la otra orilla?

b) Si la rapidez fuera sólo la mitad del valor obtenido en el inciso a): ¿en dónde caería el motociclista?

**Sol:**

a) Recordemos las ecuaciones generales del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\v_x(t) &= v_0 \cos \theta,\end{aligned}\tag{4.2}$$

despejando el tiempo  $t$  en  $x(t)$  de la ecuación (4.2) y sustituyendo en  $y(t)$ , obtenemos (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el borde superior de la rampa, en donde  $x_0 = 0$  y  $y_0 = 0$ ):

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},\tag{4.3}$$

de esta ecuación despejamos  $v_0$  para obtener finalmente:

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2 \cos^2 \theta (x \operatorname{tg} \theta - y)}.\tag{4.4}$$

Si en esta última ecuación ponemos la condición de que el motociclista llegue durante su movimiento parabólico por lo menos al borde de la otra orilla ( $x = 40 \text{ m}$ ,  $y = -15 \text{ m}$  y  $\theta = 53^\circ$ ), la velocidad con la que el motociclista debe despegar de la rampa será:

$$v_0^2 = \frac{9.8(40)^2}{2 \cos^2 53(40 \operatorname{tg} 53 - (-15))} = 318 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2},$$

de donde:

$$v_0 = 17.84 \frac{\text{m}}{\text{s}}.\tag{4.5}$$

b) Si el motociclista parte con una velocidad inicial de  $v_0 = 8.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , que es igual a la mitad de la velocidad mínima para llegar a la otra orilla, éste caerá hasta llegar al nivel

del río en donde la altura es  $y = -100 \text{ m}$  y a una distancia de la rivera cercana dada por la ecuación (4.3), si de esta ecuación resolvemos para  $x$  obtenemos:

$$x = \frac{\operatorname{tg} \theta \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta - \frac{2gy}{(v_0)^2 \cos^2 \theta}}}{\frac{g}{(v_0)^2 \cos^2 \theta}} = 28.40 \text{ m.} \quad (4.6)$$

Por lo tanto, el motociclista caerá en el río a  $28.40 \text{ m}$  de la rivera cercana.

4-5.- Para ganar un muñeco de peluche en una feria se tiene que lanzar una moneda a un plato, el cual está colocado en una repisa más arriba del punto en que la moneda abandona la mano y a una distancia horizontal de  $2.1 \text{ m}$  de ese punto (Fig. 4.9). Si usted lanza la moneda con una velocidad de  $6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  a  $60^\circ$  grados sobre la horizontal, se logra el objetivo de colocarla en el plato. En este problema no es necesario considerar la resistencia del aire.

- ¿A qué altura está la repisa sobre el punto de partida de la moneda?
- ¿Con qué velocidad en la dirección vertical incide la moneda sobre el plato?

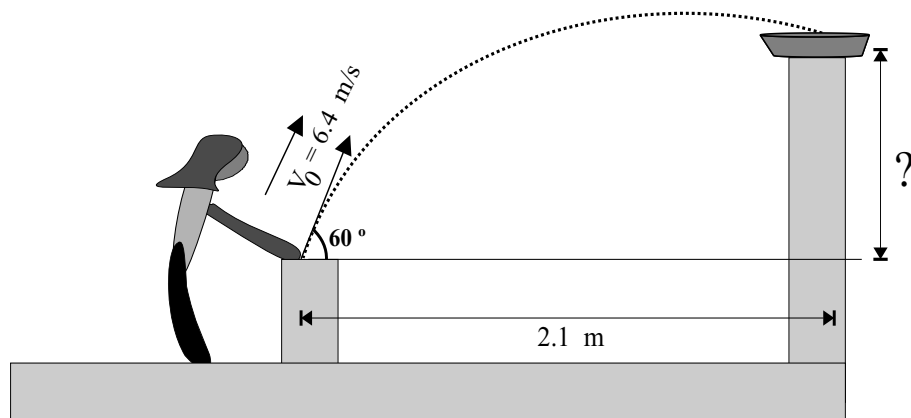


Figura 4.9: Trayectoria de una moneda.

**Sol:**

a) Nuevamente recordemos las ecuaciones generales del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\ x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\ v_x(t) &= v_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

despejando el tiempo  $t$  en  $x(t)$  de la ecuación (4.7) y sustituyendo en  $y(t)$ , obtenemos (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el borde de donde se lanza la moneda, en donde  $x_0 = 0$  y  $y_0 = 0$ ):

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} . \quad (4.8)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.8)  $x = 2.1 \text{ m}$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $v_0 = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , obtenemos la altura a la que se encuentra la repisa sobre el punto de partida de la moneda:

$$y = 2.1 \operatorname{tg} 60 - \frac{9.8(2.1)^2}{2(6.4)^2 \cos^2 60} = 1.53 \text{ m} . \quad (4.9)$$

b) Despejando el tiempo  $t$  en  $x(t)$  de la ecuación (4.7) y sustituyendo en la ecuación para  $v_y(t)$  obtenemos (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el borde de donde se lanza la moneda, en donde  $x_0 = 0$  y  $y_0 = 0$ ):

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta} . \quad (4.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.10)  $x = 2.1 \text{ m}$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $v_0 = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , obtenemos para la velocidad en la dirección vertical con la que la moneda incide sobre el plato:

$$v_y = 6.4 \operatorname{sen} 60 - \frac{(9.8)(2.1)}{6.4 \cos 60} = -0.89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4.11)$$

y

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta = 6.4 \cos 60 = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (4.12)$$

# Capítulo 5

## Cinemática en una y dos dimensiones

5-1.- La posición de una partícula en función del tiempo viene dada por:

$t$ (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x$ (m)	0	5	15	45	65	70	60	-30	-50	-50	-55	-55

Representar  $x$  en función de  $t$  y dibujar una curva continua  $x(t)$ . Señalar los instantes o intervalos de tiempo en los que:

- a) La velocidad es máxima.
- b) La velocidad es mínima.
- c) La velocidad es cero.
- d) La velocidad es constante.
- e) La aceleración es positiva.
- f) La aceleración es negativa.

**Sol:**

Para este problema es necesario realizar un análisis cualitativo de la gráfica de la posición vs el tiempo para poder obtener información de la velocidad de la partícula como función del tiempo. La gráfica de la posición en función del tiempo se muestra en la figura 5.1.

De esta gráfica podemos determinar la velocidad en cada instante de tiempo porque sabemos que la velocidad instantánea  $v(t)$  está dada por la derivada de la posición respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \quad (5.1)$$

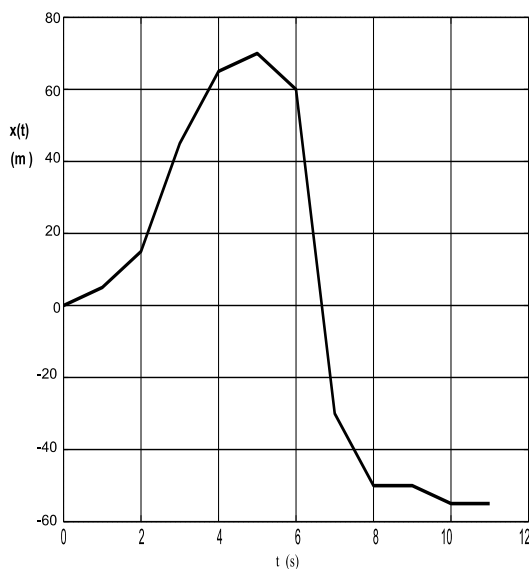


Figura 5.1: Gráfica de la posición vs tiempo de una partícula.

Para obtener los puntos en que la velocidad es máxima, mínima o cero, debemos hacer uso de la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: la derivada en el punto en cuestión es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Así, aunque el número de datos de nuestra función  $x(t)$  es reducido, podemos aproximar la función  $v(t)$  por su valor medio  $v_m$  en cada intervalo de tiempo, la cual puede calcularse de la siguiente manera:

$$v_m(t_i) = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (5.2)$$

en donde las coordenadas  $(t_i, x_i)$  corresponden a la  $i$ -ésima pareja ordenada de la gráfica anterior.

De esta manera podemos calcular de forma aproximada los puntos de la gráfica  $v(t)$  vs  $t$ . El resultado de estos cálculos de velocidades como función del tiempo se muestra en la gráfica de la figura 5.2.

De ambas gráficas podemos extraer una gran cantidad de información cualitativa sobre el movimiento de la partícula, en esta gráfica (Fig.5.2) observamos que:

a) La velocidad máxima alcanzada por la partícula es de  $30 \frac{m}{s}$  y ocurre, aproximadamente, cuando  $t = 3 s$ .

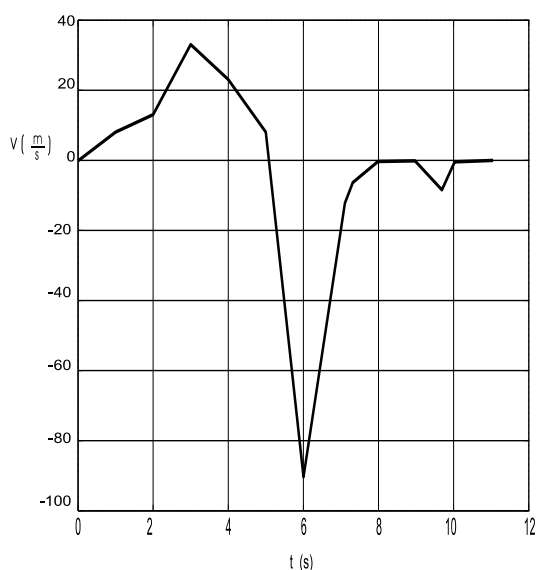


Figura 5.2: Gráfica de la velocidad media vs tiempo de una partícula.

b) La velocidad mínima alcanzada por la partícula es de  $-90 \frac{m}{s}$  y ocurre, aproximadamente, cuando  $t = 6 s$ .

c) La velocidad de la partícula es igual a cero: cuando  $t = 5 s$ , al igual que en el intervalo de tiempo comprendido entre  $t = 8 s$  y  $t = 9 s$  y en el intervalo entre  $t = 10 s$  y  $t = 11 s$ , estos dos últimos resultados los podemos ver más claramente en la primera gráfica (Fig. 5.1), ya que en ambos intervalos la posición de la partícula permanece constante.

d) La velocidad de la partícula entre  $t = 0 s$  y  $t = 11 s$  presenta cambios significativos, por lo que no puede considerarse que la velocidad permanezca constante en algún intervalo de tiempo distinto a los ya mencionados en el inciso anterior; es decir: entre  $t = 8 s$  y  $t = 9 s$  y entre  $t = 10 s$  y  $t = 11 s$  en donde la velocidad permanece constante y es igual a cero.

Para poder obtener información sobre la aceleración de la partícula como función del tiempo, nuevamente debemos calcular la derivada respecto al tiempo pero ahora de la velocidad. La aceleración de la partícula en un tiempo  $t^*$  estará dada por la pendiente de la recta tangente a la curva de velocidad en  $t^*$  y la cual puede obtenerse, al menos cualitativamente, de la figura 5.2. En ésta la aceleración será positiva para pendientes positivas y negativa para pendientes negativas. De esta forma observamos que:

e) La aceleración de la partícula es positiva en el intervalo de tiempo comprendido entre

$t = 0$  s y  $t = 3$  s, también es positiva entre  $t = 6$  s y  $t = 8$  s y aproximadamente entre  $t = 9.5$  s y  $t = 10$  s.

Recordemos que entre  $t = 8$  s y  $t = 9$  s y entre  $t = 10$  s y  $t = 11$  s la velocidad permanece constante y es igual a cero, por lo que en estos intervalos de tiempo la aceleración es igual a cero (Fig. 5.1).

f) La aceleración de la partícula es negativa en los intervalos de tiempo comprendidos entre  $t = 3$  s y  $t = 6$  s y entre  $t = 9$  s y aproximadamente  $t = 9.5$  s.

5-2.- Para cada uno de los cuatro gráficos de  $x$  en función de  $t$  de la figura 5.3 indicar:

- i) Si la velocidad en el instante  $t_2$  es mayor, menor o igual que la velocidad en el instante  $t_1$ .
- ii) Si la rapidez en el tiempo  $t_2$  es mayor, menor o igual que la rapidez en el instante  $t_1$ .

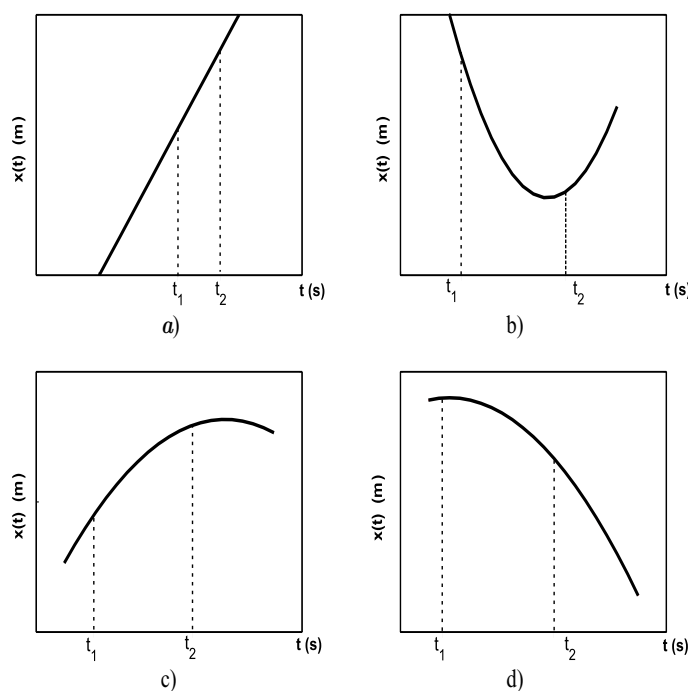


Figura 5.3: Gráficas de la posición vs tiempo de una partícula en cuatro situaciones físicas distintas.

**Sol:**

Para este problema es necesario realizar un análisis cualitativo de las gráficas de la posición en función del tiempo (Fig. 5.3), y así obtener información de la velocidad de la partícula como función del tiempo.

De estas gráficas podemos determinar la velocidad en cada instante de tiempo porque sabemos que la velocidad instantánea  $v(t)$  está dada por la derivada de la posición respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

ahora, para obtener información de los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o cero, debemos usar la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto: la derivada en el punto en cuestión es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, por lo que:

En el inciso a) observamos un objeto en movimiento que recorre distancias iguales en tiempos iguales, este comportamiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, positiva en este caso por ser la pendiente de la curva positiva, por lo tanto en  $t_1$  y en  $t_2$  las velocidades son iguales.

Como la rapidez es igual al valor absoluto ( $|\vec{v}|$ ) de la velocidad, la rapidez del objeto  $t_1$  y en  $t_2$  es la misma.

En el inciso b) observamos un objeto en movimiento pero que no tiene una velocidad constante porque la pendiente de la gráfica de posición en función del tiempo varía con el tiempo. Además podemos ver que para  $t_1$  la pendiente es negativa, por lo tanto, también la velocidad será negativa.

Por otra parte, en el instante  $t_2$  la pendiente es positiva y en consecuencia, también la velocidad será positiva. Por lo tanto en  $t_2$  la velocidad del objeto es mayor que en  $t_1$ .

Al ser la velocidad en  $t_2$  positiva pero no muy grande y en  $t_1$  bastante negativa, al considerar sus valores absolutos ( $v = |\vec{v}|$ ), tendremos que la rapidez del objeto en  $t_1$  es mayor que en  $t_2$ .

En el inciso c) observamos en el instante  $t_1$  un objeto en movimiento que tiene una velocidad positiva porque la pendiente de la gráfica de posición en función del tiempo es positiva y grande.

Por otra parte, en el instante  $t_2$  la pendiente es positiva pero no muy grande y en consecuencia, también la velocidad es positiva pero no muy grande. Por lo tanto, en  $t_1$  la velocidad del objeto es mayor que en  $t_2$ .

Al ser la velocidad en  $t_2$  positiva pero no muy grande, en  $t_1$  positiva y grande, al considerar sus valores absolutos ( $v = |\vec{v}|$ ), tendremos que la rapidez en  $t_1$  es mayor que en  $t_2$ .

En el inciso d) observamos un objeto moviéndose de tal manera que la pendiente en  $t_1$  es igual a cero, por lo tanto, también la velocidad es cero.

Por otra parte, en el instante  $t_2$  la pendiente es negativa, en consecuencia, también la velocidad será negativa. Por lo tanto, en  $t_1$  la velocidad del objeto es mayor que en  $t_2$ .

Al ser la velocidad en  $t_1$  igual cero, en  $t_2$  negativa, al considerar sus valores absolutos ( $v = |\vec{v}|$ ), tendremos que la rapidez del objeto en  $t_1$  es menor que en  $t_2$ .

**5-3.-** Las coordenadas en un plano de la posición de una partícula están dadas por  $(x, y)$  y son iguales a  $(x = 2 \text{ m}, y = 3 \text{ m})$  cuando  $t = 0 \text{ s}$ ; a  $(x = 6 \text{ m}, y = 7 \text{ m})$  cuando  $t = 2 \text{ s}$  y a  $(x = 13 \text{ m}, y = 14 \text{ m})$  cuando  $t = 5 \text{ s}$ .

a) Hallar  $\vec{v}_m$  para el intervalo comprendido entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 2 \text{ s}$ .

b) Hallar  $\vec{v}_m$  para el intervalo comprendido entre  $t = 2 \text{ s}$  y  $t = 5 \text{ s}$ .

**Sol:**

En general la velocidad media de una partícula en un intervalo de tiempo  $[t_i, t_{i+1}]$  puede obtenerse a partir de su definición:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad (5.3)$$

en donde  $\vec{r}(t_i)$  es el vector posición de la partícula en el tiempo  $t_i$ .

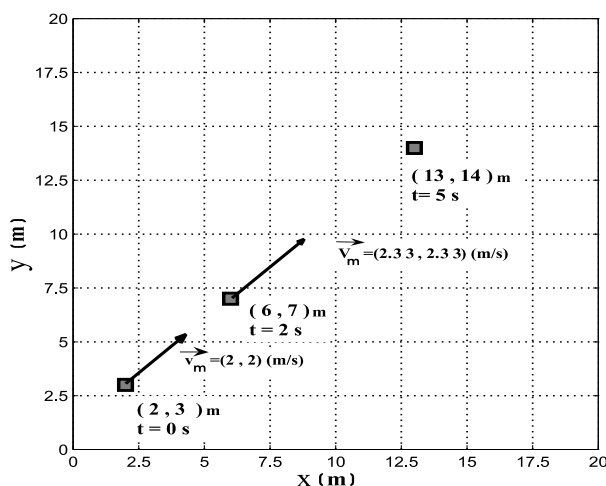


Figura 5.4: **Representación gráfica de la posición de una partícula en el plano cartesiano y de su velocidad promedio ( $\vec{v}_m$ ) para dos intervalos de tiempo dados.**

a) Aplicando la definición (5.3) al caso en que  $(x_1, y_1)$  es igual a  $(2 \text{ m}, 3 \text{ m})$  cuando  $t_1 = 0 \text{ s}$  y  $(x_2, y_2) = (6 \text{ m}, 7 \text{ m})$  cuando  $t_2 = 2 \text{ s}$ , obtenemos:

$$v_{m_x} = \left( \frac{6-2}{2-0} \right) \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s}$$

$$v_{m_y} = \left( \frac{7-3}{2-0} \right) \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s},$$

por lo tanto, la velocidad media en el intervalo de tiempo  $[0, 2]$  s resulta ser:

$$\vec{v}_m = (2, 2) \frac{m}{s}.$$

b) Aplicando la definición (5.3) al caso en que  $(x_1, y_1)$  es igual a  $(6 \text{ m}, 7 \text{ m})$  cuando  $t_1 = 2 \text{ s}$  y  $(x_2, y_2) = (13 \text{ m}, 14 \text{ m})$  cuando  $t_2 = 5 \text{ s}$ , obtenemos:

$$v_{m_x} = \left( \frac{13-6}{5-2} \right) \frac{m}{s} = 2.33 \frac{m}{s}$$

$$v_{m_y} = \left( \frac{14-7}{5-2} \right) \frac{m}{s} = 2.33 \frac{m}{s},$$

por lo tanto, la velocidad media en el intervalo de tiempo  $[2, 5]$  s resulta ser:

$$\vec{v}_m = (2.33, 2.33) \frac{m}{s}.$$

Estos resultados los podemos observar en la gráfica anterior (Fig. 5.4) en donde se muestran los vectores  $\vec{v}_m$  para los intervalos de tiempo señalados y las posiciones de la partícula en los tres instantes de tiempo considerados.

**5-4.-** Considerando la trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio:

- a) ¿Qué relación geométrica existe entre el vector velocidad y la trayectoria de la partícula?
- b) Representar una trayectoria curva y dibujar el vector velocidad de la partícula en diversas posiciones de la trayectoria

**Sol:**

a) La relación existente entre el gráfico de la trayectoria de una partícula y su velocidad se puede expresar como una generalización del caso unidimensional, recordemos que la velocidad es una cantidad física vectorial  $\vec{v}$ , por lo tanto, la velocidad en un punto dado  $\mathbf{R}$  define el sentido instantáneo del movimiento de la partícula.

De esta manera podemos encontrar la relación presente entre la velocidad y la trayectoria de un móvil para el caso de más de una dimensión de la siguiente forma, el vector velocidad está definido por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (5.4)$$

entonces, **en general para los casos de dos y tres dimensiones la velocidad siempre será tangente a la trayectoria de una partícula**, definiendo el sentido instantáneo del movimiento de la partícula.

b) En el siguiente diagrama (Fig. 5.5) podemos observar los vectores velocidad de una partícula en diversas posiciones de una trayectoria curva para los cuales la velocidad siempre es tangente a su trayectoria.

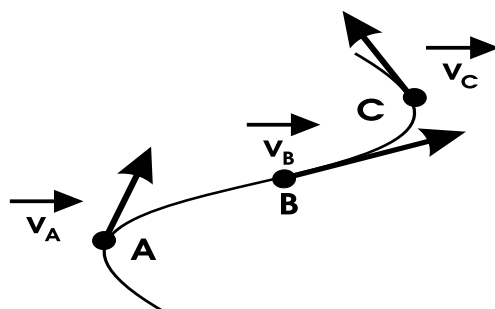


Figura 5.5: Vectores velocidad de una partícula en diversas posiciones (A, B y C) a lo largo de una trayectoria curva en dos dimensiones.

5-5.- Las partículas 1 y 2 se mueven a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  con velocidades constantes  $\vec{v}_1 = 2 \hat{e}_x \frac{cm}{s}$  y  $\vec{v}_2 = 3 \hat{e}_y \frac{cm}{s}$ , respectivamente. Para  $t = 0$  s las posiciones de las partículas están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 \text{ cm} & y_1 &= 0 \text{ cm} \\ x_2 &= 0 \text{ cm} & y_2 &= -3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

a) Encontrar el vector  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  que representa la posición de la partícula 2 respecto a la partícula 1 en función del tiempo  $t$ .

b) ¿Cuándo y en dónde las dos partículas están más cerca entre sí?

**Sol:**

a) Para encontrar el vector  $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$  como función del tiempo hay que tomar en cuenta los vectores posición de las partículas 1 y 2 en forma de sus componentes cartesianas y que el vector velocidad para cada partícula es constante; aplicando las formulas generales del movimiento rectilíneo uniforme en dos dimensiones obtenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{1_0} + v_{1_x}t \\y_1 &= y_{1_0} + v_{1_y}t \\x_2 &= x_{2_0} + v_{2_x}t \\y_2 &= y_{2_0} + v_{2_y}t,\end{aligned}\tag{5.5}$$

en donde  $x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}$ , corresponden a las posiciones iniciales de las partículas y que para este problema están dadas por:

$$\begin{aligned}x_{1_0} &= -3 \text{ cm} \\y_{1_0} &= 0 \text{ cm} \\x_{2_0} &= 0 \text{ cm} \\y_{2_0} &= -3 \text{ cm},\end{aligned}$$

por otra parte,  $v_{1_x}, v_{1_y}, v_{2_x}, v_{2_y}$ , se obtienen de los vectores velocidad para cada una de las partículas:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}_1 &= (2, 0) \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ \vec{\mathbf{v}}_2 &= (0, 3) \frac{\text{cm}}{\text{s}},\end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned}v_{1_x} &= 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\v_{1_y} &= 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\v_{2_x} &= 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\v_{2_y} &= 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}},\end{aligned}$$

sustituyendo toda la información anterior en la ecuación (5.5) finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -3 + 2t \text{ cm} \\
 y_1 &= 0 \text{ cm} \\
 x_2 &= 0 \text{ cm} \\
 y_2 &= -3 + 3t \text{ cm},
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

y en su forma vectorial tendremos:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{r}}_1 &= (-3 + 2t, 0) \text{ cm} \\
 \vec{\mathbf{r}}_2 &= (0, -3 + 3t) \text{ cm}.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Por lo tanto, el vector  $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$  como función del tiempo estará dado por:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 &= (0, -3 + 3t) - (-3 + 2t, 0) \text{ cm} \\
 &= (3 - 2t, -3 + 3t) \text{ cm}.
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

b) Ahora queremos saber el instante de tiempo  $t$  en que la distancia entre 1 y 2 es mínima. Así, tenemos que la distancia  $r$  entre 1 y 2 como función del tiempo está dada por:

$$\begin{aligned}
 r &= |\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1| = \\
 &= \sqrt{(3 - 2t)^2 + (-3 + 3t)^2},
 \end{aligned}$$

y para encontrar el tiempo  $t$  donde  $r$  es mínima, debemos derivar  $r$  respecto al tiempo e igualar el resultado a cero, es decir:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(2)(-2)(3 - 2t) + (2)(3)(3t - 3)}{\sqrt{(3 - 2t)^2 + (-3 + 3t)^2}} = 0,
 \tag{5.9}$$

la condición anterior implica que el numerador de esta fracción debe ser igual a cero, es decir:

$$0 = (-2)(3 - 2t) + (3)(3t - 3) = -6 + 4t + 9t - 9 = 13t - 15,$$

de donde se obtiene que:

$$t = \frac{15}{13} \text{ s} = 1.15 \text{ s}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, cuando  $t = 1.15 \text{ s}$  la distancia  $r$  entre las partículas 1 y 2 será mínima. En este momento la distancia entre las partículas será:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(3 - 2 \cdot 1.15)^2 + (-3 + 3 \cdot 1.15)^2} \\ &= \sqrt{(0.6923)^2 + (0.4615)^2} = 0.832 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

**5-6.-** Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una cornisa a  $200 \text{ m}$  por encima de un valle con una velocidad inicial de  $60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  a  $60^\circ$  respecto de la horizontal, tal y como se muestra en la figura 5.6. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, ¿en donde caerá el proyectil?

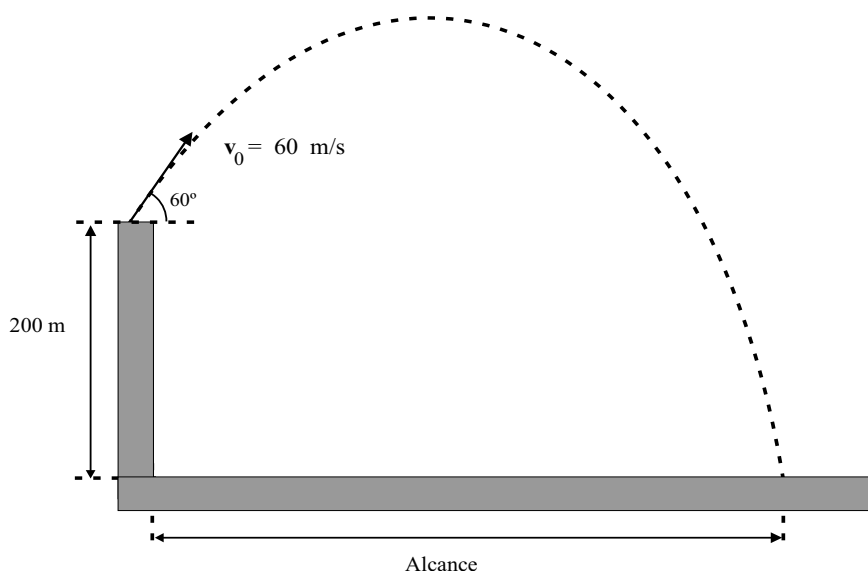


Figura 5.6: Determinación del alcance de un tiro parabólico.

**Sol:**

En este problema la cantidad física que deseamos conocer es el alcance horizontal del proyectil cuando éste se encuentra a  $200 \text{ m}$  por debajo del punto de lanzamiento ( $y = -200 \text{ m}$ ). Si elegimos el punto de lanzamiento como el origen de nuestro sistema de referencia, entonces la solución física que deseamos determinar corresponde a un punto  $(x, y)$  de la parábola:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (5.12)$$

si en la ecuación (5.12) sustituimos los valores  $y = -200 \text{ m}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $v_0 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $g = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  para  $x > 0$ , obtenemos que:

$$-200 = 1.732x - 0.00545x^2,$$

cuya solución está dada por:

$$\begin{aligned} x &= = \frac{1.732 \pm \sqrt{2.9998 + 4.36}}{0.109} \\ &\implies \\ x &= 407.8 \text{ m}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

es decir, el proyectil lanzado caerá en  $x = 407.8 \text{ m}$ ,  $y = -200 \text{ m}$ .

**5-7.-** Una moto salta una zanja de anchura  $x$  gracias a la ayuda de una rampa que tiene una inclinación  $\theta$ ; de esta forma alcanza el otro extremo cuya altura difiere en un valor  $H$  respecto al lado inicial de la zanja.

- ¿Cuál es el máximo valor de  $H$  para un ángulo  $\theta$  dado y una distancia  $x$  para que el motociclista pueda saltar la zanja?
- Para un valor dado de  $H$  inferior al valor máximo calculado en el inciso anterior, ¿cuál es la velocidad mínima  $v_0$  con la que puede abandonar la rampa para lograr el salto?

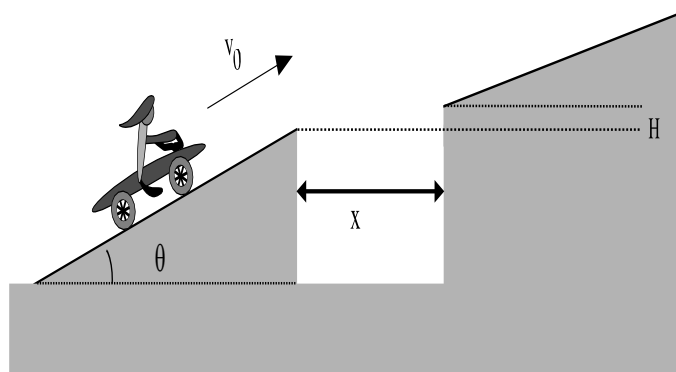


Figura 5.7: Cálculo de la altura máxima para un motociclista saltando una zanja.

**Sol:**

a) En este problema la cantidad física que deseamos conocer es la altura máxima que la moto puede alcanzar al saltar sobre la rampa para evitar la zanja, en función de la velocidad que lleve antes de abandonar la rampa  $v_0$  y del ángulo de inclinación  $\theta$  que ésta tiene.

Si tomamos las ecuaciones de la cinemática del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\v_x(t) &= v_0 \cos \theta,\end{aligned}\tag{5.14}$$

la condición física que debemos imponer es la de determinar el valor máximo de  $H$  para que al saltar por la rampa el vehículo llegue justo al otro extremo, esto significa que la moto llegue al otro extremo con velocidad cero en la dirección  $y$ . De la ecuación:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t,\tag{5.15}$$

obtenemos que (tomando como origen del sistema de referencia el extremo superior de la rampa i.e,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta},$$

que es el tiempo que le toma al vehículo recorrer una distancia  $x$  en la dirección horizontal. Si sustituimos este valor del tiempo  $t$  en la ecuación:

$$v_y(t) = v_0 \operatorname{sen} \theta - gt,\tag{5.16}$$

obtenemos:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta},$$

ahora bien, una de las condiciones físicas que se tiene que cumplir para obtener la altura máxima es que  $v_y = 0$ , lo que implica que:

$$v_0^2 = \frac{gx}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta},\tag{5.17}$$

al sustituir el valor encontrado para el tiempo  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$  en la ecuación para la posición vertical del vehículo obtenemos que:

$$H_{max} = v_0 \operatorname{sen} \theta \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g \left( \frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2}{2},$$

en donde hemos tomado  $y_0 = 0$  y  $y(t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}) = H_{max}$ , si en esta última ecuación sustituimos el valor encontrado para  $v_0$  en la ecuación (5.17), es decir:  $v_0^2 = \frac{gx}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}$ , finalmente obtenemos el valor de  $H_{max}$  que estamos buscando:

$$\begin{aligned} H_{max} &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \\ &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2 \left( \frac{gx}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \right) \cos^2 \theta} \\ &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{x \operatorname{tg} \theta}{2} \\ &= \frac{x \operatorname{tg} \theta}{2}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

por lo tanto,  $H_{max} = \frac{x \operatorname{tg} \theta}{2}$ .

b) Ahora necesitamos encontrar el valor de  $v_0$  de la ecuación:

$$H = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta},$$

de donde obtenemos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2 \cos^2 \theta (x \operatorname{tg} \theta - H)}},$$

que es la velocidad mínima  $v_0$  con la que se puede abandonar la rampa para lograr el salto.

**5-8.-** Establecer si la aceleración es negativa, positiva o igual a cero en cada una de las funciones de posición  $x(t)$  de la siguiente figura.

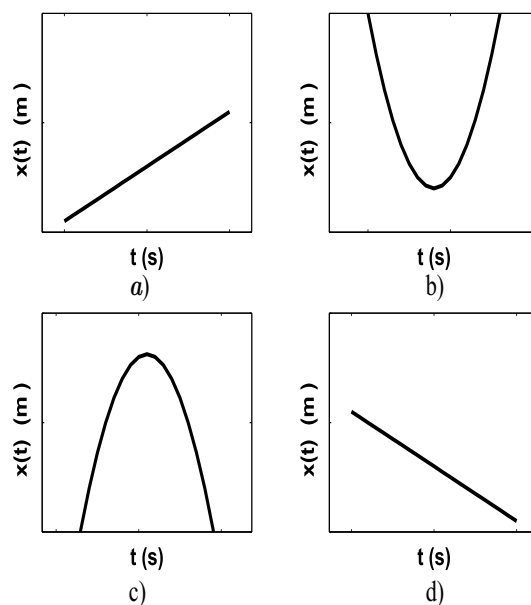


Figura 5.8: Gráficas de la posición vs tiempo.

**Sol:**

En el inciso *a)* podemos observar un objeto en movimiento que, de acuerdo a la gráfica, recorre distancias iguales en tiempos iguales, este comportamiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, velocidad que es positiva debido a que la pendiente de la curva también lo es. Como la velocidad es constante la aceleración será igual a cero.

En el inciso *b)* podemos observar un objeto que se mueve con una velocidad variable porque la pendiente de la gráfica varía, es decir; la velocidad cambia con el tiempo. La pendiente de esta curva siempre se incrementa al aumentar el tiempo, esto significa que la velocidad aumenta conforme pasa el tiempo. Por lo tanto,  $\frac{dv}{dt}$  será siempre positiva, y por consiguiente, también la aceleración.

En el inciso *c)* podemos observar un objeto que se mueve con una velocidad variable porque la pendiente de la gráfica varía. La pendiente de esta curva siempre disminuye al aumentar el tiempo esto significa que la velocidad decrece conforme pasa el tiempo. Por lo tanto,  $\frac{dv}{dt}$  será siempre negativa y en consecuencia, también la aceleración.

En el inciso *d)* podemos observar un objeto en movimiento que, de acuerdo a la gráfi-

ca, recorre distancias iguales en tiempos iguales, este comportamiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, velocidad que es negativa debido a que la pendiente de la curva también lo es. Como la velocidad es constante la aceleración será igual a cero.

**5-9.-** ¿Qué distancia cubrirá un corredor en 16 s tomando en cuenta la siguiente gráfica de velocidad contra tiempo (Fig. 5.9)?

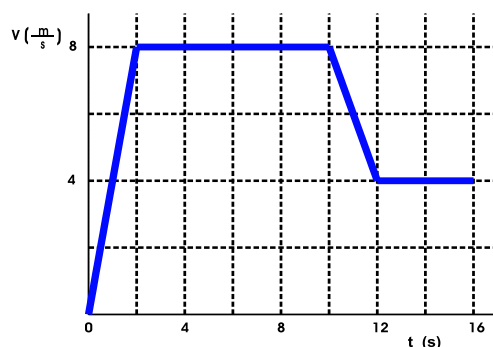


Figura 5.9: Gráfica de velocidad vs tiempo de un corredor.

**Sol:**

Para determinar la distancia recorrida  $\Delta x$  por el corredor tenemos que determinar el área debajo de la curva de velocidad como función del tiempo de acuerdo a la siguiente relación:

$$\Delta x(ti \rightarrow tf) = \text{Área}[v(ti \rightarrow tf)]. \quad (5.19)$$

De acuerdo con la siguiente gráfica (Fig. 5.10) el área de la región I es igual a:

$$\text{Área}_I = \frac{1}{2} \left( 8 \frac{m}{s} \right) (2 s) = 8 m,$$

el área de la región II es igual a:

$$\text{Área}_{II} = \left( 8 \frac{m}{s} \right) (8 s) = 64 m,$$

el área de la región III es igual a:

$$\text{Área}_{III} = \left( 4 \frac{m}{s} \right) (2 s) + \frac{1}{2} \left( 8 \frac{m}{s} - 4 \frac{m}{s} \right) (2 s) = 12 m,$$

y el área de la región IV es igual a:

$$\text{Área}_{IV} = \left( 4 \frac{m}{s} \right) (4 s) = 16 m,$$

por lo tanto, la distancia recorrida por el atleta será:

$$\Delta x = \sum_{i=I}^{IV} \text{Área}_i = (8 + 64 + 12 + 16) \text{ m} = 100 \text{ m}.$$

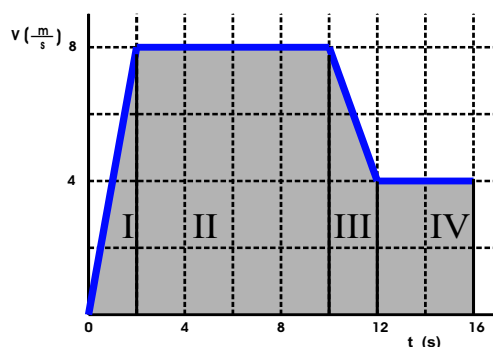


Figura 5.10: **Gráfica de la distancia recorrida por un corredor.**

También podemos resolver este problema de forma analítica, en la gráfica de la figura 5.9 podemos identificar que el movimiento realizado por el corredor tiene una aceleración constante en cada uno de los intervalos de tiempo, hay que recordar que, en una gráfica de velocidad contra tiempo, en cualquier punto de la curva la aceleración estará dada por la pendiente de la recta tangente a ese punto. Sabemos que la distancia recorrida  $\Delta x$  por un cuerpo que tiene aceleración constante en un intervalo de tiempo  $t_i \rightarrow t_f$ , viene dada por:

$$\Delta x(t_i \rightarrow t_f) = v_0(t_f - t_i) + \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2, \quad (5.20)$$

en donde  $v_0$  es la velocidad inicial del cuerpo,  $t_i$  y  $t_f$  son los tiempos inicial y final del recorrido, respectivamente. De esta forma la distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región I de la gráfica anterior (Fig. 5.10) será:

$$\begin{aligned} \Delta x_I(t_i = 0 \rightarrow t_f = 2) &= \left(0 \frac{m}{s}\right) (2 \text{ s} - 0 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(4 \frac{m}{s^2}\right) (2 \text{ s} - 0 \text{ s})^2 = 0 + \frac{16}{2} \text{ m} = \\ &= 8 \text{ m}, \end{aligned}$$

porque en esta región la velocidad inicial del corredor es  $0 \frac{m}{s}$  y la aceleración es de  $4 \frac{m}{s^2}$ .

La distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región II de la gráfica (Fig. 5.10) será:

$$\begin{aligned} \Delta x_{II}(t_i = 2 \text{ s} \rightarrow t_f = 10 \text{ s}) &= \left(8 \frac{m}{s}\right) (10 \text{ s} - 2 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(0 \frac{m}{s^2}\right) (10 \text{ s} - 2 \text{ s})^2 = \\ &= 64 \text{ m} + 0 = 64 \text{ m}, \end{aligned}$$

porque en esta región la aceleración del corredor es  $0 \frac{m}{s^2}$  y la velocidad constante es de  $8 \frac{m}{s}$ .

La distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región III de la gráfica (Fig. 5.10) será:

$$\begin{aligned}\Delta x_{III}(t_i = 10s \rightarrow t_f = 12s) &= \left(8 \frac{m}{s}\right) (12 s - 10 s) + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{m}{s^2}\right) (12 s - 10 s)^2 = \\ &= 16 m - 4 m = 12 m,\end{aligned}$$

porque en esta región la aceleración del corredor es  $-2 \frac{m}{s^2}$  y la velocidad inicial es de  $8 \frac{m}{s}$ .

Finalmente la distancia recorrida en el intervalo de tiempo comprendido en la región IV de la gráfica (Fig. 5.10) será:

$$\begin{aligned}\Delta x_{IV}(t_i = 12s \rightarrow t_f = 16s) &= \left(4 \frac{m}{s}\right) (16 s - 12 s) + \frac{1}{2} \left(0 \frac{m}{s^2}\right) (16 s - 12 s)^2 \\ &= 16 m,\end{aligned}$$

porque en esta región la aceleración del corredor es  $0 \frac{m}{s^2}$  y la velocidad constante es de  $4 \frac{m}{s}$ , por lo que, la distancia recorrida por el atleta será:

$$\Delta x = \sum_{i=I}^{IV} \Delta x_i = (8 + 64 + 12 + 16) m = 100 m.$$

**5-10.-** Se deja caer una pelota  $A$  desde la parte superior de un edificio que tiene una altura  $h$ , en el mismo instante desde el suelo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_{B_0}$  una segunda pelota  $B$ . En el momento en que las pelotas chocan, se encuentran desplazándose en sentidos opuestos y la rapidez que lleva la pelota  $A$  es el doble de la rapidez de la pelota  $B$  (Fig. 5.11).

¿A qué altura se encuentran las pelotas? Expresé esta altura en términos de la altura total del edificio.

**Sol:**

Analicemos cuidadosamente la situación física: se tienen dos pelotas  $A$  y  $B$ , inicialmente, si escogemos como origen de referencia la base del edificio, la pelota  $A$  se encuentra en una posición  $y_{A_0} = h$  y la pelota  $B$  se encuentra en una posición  $y_{B_0} = 0$ .

El movimiento que ambas pelotas realizarán hasta que se encuentren será un movimiento con aceleración constante (  $a = -g = -9.8 \frac{m}{s^2}$  ), la pelota  $A$  describirá una caída libre, mientras que la pelota  $B$  realizará un ascenso con aceleración negativa (Fig. 5.12).

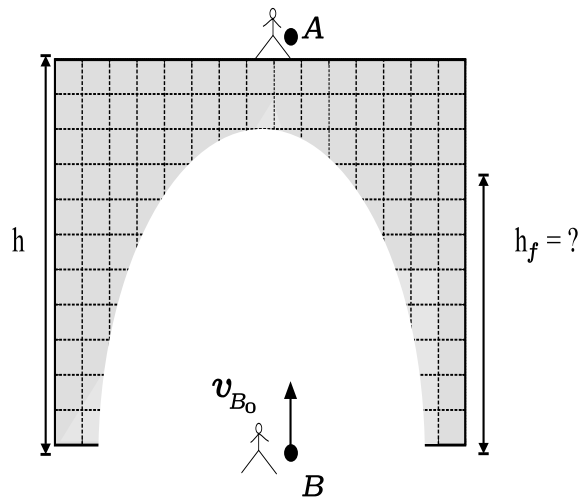


Figura 5.11: Diagrama de dos pelotas desplazándose verticalmente en sentidos opuestos.

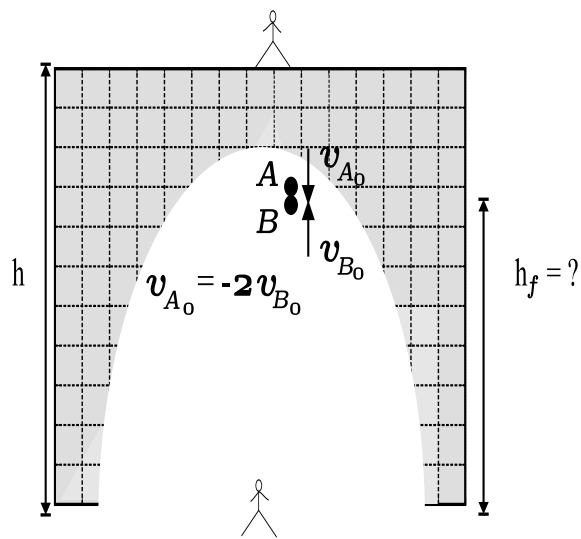


Figura 5.12: Velocidades de las pelotas A y B en direcciones opuestas y con una aceleración negativa.

De esta manera la posición vertical de las pelotas A y B en función del tiempo estará dada por:

$$\begin{aligned}
 y_A(t) &= y_{A_0} + v_{A_0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
 y_B(t) &= y_{B_0} + v_{B_0}t - \frac{1}{2}gt^2,
 \end{aligned}$$

sustituyendo en estas ecuaciones  $y_{A_0} = h$ ,  $y_{B_0} = 0$ ,  $v_{A_0} = 0$  (ya que la velocidad inicial de la pelota  $A$  es cero), y  $v_{B_0}$  un cierto valor fijo de la velocidad de la pelota  $B$  en el tiempo  $t = 0$ , obtendremos:

$$\begin{aligned}
 y_A(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\
 y_B(t) &= v_{B_0}t - \frac{1}{2}gt^2,
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

de igual forma la velocidad de las pelotas  $A$  y  $B$  estará dada por:

$$\begin{aligned}
 v_A(t) &= v_{A_0} - gt \\
 v_B(t) &= v_{B_0} - gt,
 \end{aligned}$$

y al sustituir la información inicial obtenemos:

$$\begin{aligned}
 v_A(t) &= -gt \\
 v_B(t) &= v_{B_0} - gt.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Como sabemos que al chocar las pelotas ( en  $t = t^*$  ), se desplazan en sentidos opuestos y que la rapidez de la pelota  $A$  es el doble de la rapidez que lleva la pelota  $B$ , tenemos que:

$$|v_A(t^*)| = 2 |v_B(t^*)|,$$

y como el signo de  $v_B(t^*)$  es opuesto al signo de  $v_A(t^*)$ , finalmente obtenemos que:

$$v_A(t^*) = -2v_B(t^*), \tag{5.23}$$

y sustituyendo en esta última ecuación las relaciones (5.22) para las velocidades de las pelotas  $A$  y  $B$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
 v_A(t^*) &= -2v_B(t^*) \\
 \implies \\
 -gt^* &= -2(v_{B_0} - gt^*) \\
 \implies \\
 t^* &= \frac{2v_{B_0}}{3g}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Con el valor anterior correspondiente al tiempo de vuelo de las pelotas hasta que se encuentran ( $t = t^*$ ), podemos conocer la altura a la que sucede la colisión, sustituyendo  $t^*$  en las relaciones (5.21) obtenemos para la altura a la que sucede el choque  $h_f$ , las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 h_f = y_A(t^*) &= h - \frac{1}{2}g(t^*)^2 = \\
 &= h - \frac{1}{2}g\left(\frac{2v_{B_0}}{3g}\right)^2 = h - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} \\
 &\implies \\
 h_f &= h - \frac{2v_{B_0}^2}{9g}. \\
 \\
 h_f = y_B(t^*) &= v_{B_0}t^* - \frac{1}{2}g(t^*)^2 = \\
 &= v_{B_0}\left(\frac{2v_{B_0}}{3g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{2v_{B_0}}{3g}\right)^2 = \\
 &= \frac{2v_{B_0}^2}{3g} - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} = \frac{4v_{B_0}^2}{9g} \\
 &\implies \\
 h_f &= \frac{4v_{B_0}^2}{9g}. \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

Igualando las relaciones obtenidas para  $h_f$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
 h_f &= h - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} = \frac{4v_{B_0}^2}{9g} = h_f \\
 &\implies \\
 h - \frac{2v_{B_0}^2}{9g} &= \frac{4v_{B_0}^2}{9g} \\
 &\implies \\
 h &= \frac{2v_{B_0}^2}{3g} \\
 &\implies \\
 \frac{v_{B_0}^2}{g} &= \frac{3}{2}h. \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Conociendo el valor de  $\frac{v_{B_0}^2}{g}$  podemos expresar la altura del choque  $h_f$  en términos de la altura  $h$  desde la cual se deja caer la pelota  $A$ , así:

$$h_f = \frac{4}{9}\left(\frac{v_{B_0}^2}{g}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}h\right) = \frac{2}{3}h, \tag{5.27}$$

por lo tanto, la altura a la que sucede el choque entre las pelotas  $A$  y  $B$  ( $h_f = \frac{2}{3}h$ ), es igual a las dos terceras partes de la altura total del edificio  $h$ .

**5-11.-** Un deportista lanza una pelota hacia una pared con una rapidez de  $20 \frac{m}{s}$  y con un ángulo de  $35^\circ$  sobre la horizontal (Fig. 5.13).

- ¿A qué distancia por arriba del punto de lanzamiento se impacta la pelota en la pared ?
- ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad cuando la pelota se impacta contra la pared?
- ¿Ha pasado la pelota el punto más alto de su trayectoria cuando golpea la pared?

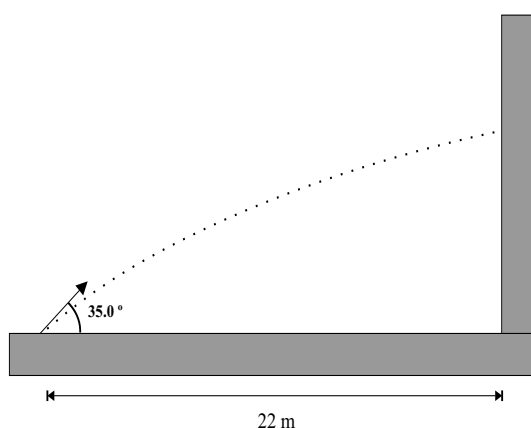


Figura 5.13: Movimiento parabólico de una pelota.

**Sol:**

a) Recordemos las ecuaciones generales del movimiento parabólico:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{gt^2}{2} \\ x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta t \\ v_y(t) &= v_0 \operatorname{sen} \theta - gt \\ v_x(t) &= v_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.28)$$

despejando el tiempo  $t$  en  $x(t)$  de la ecuación anterior y sustituyendo en la ecuación para  $y(t)$ , obtenemos (suponiendo que nuestro sistema de referencia se encuentra en el punto de lanzamiento de la pelota; en donde  $x_0 = 0$  y  $y_0 = 0$ ):

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}, \quad (5.29)$$

y al sustituir en la ecuación (5.29)  $x = 22 \text{ m}$ ,  $\theta = 35^\circ$ ,  $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , obtenemos:

$$y = 22 \operatorname{tg} 35 - \frac{9.8(22)^2}{2(20)^2 \cos^2 35} = 6.57 \text{ m.} \quad (5.30)$$

b) Despejando el tiempo  $t$  en  $x(t)$  de la ecuación (5.28) y sustituyendo el resultado en la ecuación para  $v_y(t)$  obtenemos:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta}, \quad (5.31)$$

y al sustituir en la ecuación (5.31)  $x = 22 \text{ m}$ ,  $\theta = 35^\circ$ ,  $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , obtenemos:

$$v_y = 20 \operatorname{sen} 35 - \frac{(9.8)(22)}{20 \cos 35} = -1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (5.32)$$

y

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta = 20 \cos 35 = 18.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (5.33)$$

por lo tanto, la componente horizontal de la velocidad es igual a  $18.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , mientras que la componente vertical es igual a  $-1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

c) En el momento en que la pelota golpea la pared si la velocidad vertical es negativa ( $v_y = -1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  cuando  $x = 22.0 \text{ m}$ ) significa que la pelota ya ha pasado el punto más alto de su trayectoria, ya que en este momento la velocidad vertical de la pelota es igual a cero ( $v_y = 0$ ).

**5-12.-** En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante a lo largo de una circunferencia que tiene  $5 \text{ m}$  de radio. Si el tiempo que les toma dar una vuelta completa es de  $4 \text{ s}$ , ¿qué aceleración sufren los pasajeros y en qué dirección?

**Sol:**

En este problema el tipo de movimiento que tenemos corresponde a un movimiento circular uniforme que tiene un periodo  $T = 4 \text{ s}$  y un radio  $R = 5 \text{ m}$ , de manera que la rapidez con la que viajan los pasajeros a lo largo de la trayectoria circular será:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5)}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7.854 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

por lo tanto, la aceleración que sufren los pasajeros será radial dirigida al centro de la circunferencia, esta es una característica general del movimiento circular uniforme, en donde sólo está presente la aceleración centrípeta y cuya magnitud es:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.854)^2}{5} \frac{m}{s^2} = 12.337 \frac{m}{s^2}.$$

# Parte III. Leyes de Newton y teorema trabajo-energía

La descripción del movimiento de una partícula puede efectuarse con la ayuda de la cinemática considerada en los capítulos anteriores. Esta manera de describir el movimiento de un objeto funciona muy bien una vez que conocemos la aceleración instantánea a la que se encuentra sujeta una partícula en todo instante de tiempo. Sin embargo, si no conocemos la aceleración instantánea poco se puede decir del movimiento que realizará un objeto, por lo que es necesario obtener una descripción basada en principios físicos más generales que nos permitan determinar el movimiento de un cuerpo.

En los dos siguientes capítulos se analizarán algunos problemas relacionados con las leyes fundamentales de toda la mecánica: las leyes de Newton. La descripción dinámica no sólo nos permitirá obtener la aceleración instantánea de un objeto, sino también nos permitirá identificar a los agentes externos (las fuerzas externas) que originan y determinan el tipo de movimiento que realizará un objeto.

Se ha buscado que estos problemas permitan a los estudiantes entender y aplicar correctamente el contenido físico de las leyes de Newton y que puedan profundizar más en el manejo algebraico de las relaciones matemáticas que resultan de las leyes de la dinámica. Siempre que ha sido posible, en los problemas se ha utilizado la formulación vectorial de las leyes de la dinámica.

Se abordan uno o dos problemas sobre los sistemas de referencia no inerciales en donde el planteamiento de las leyes de movimiento debe realizarse cuidadosamente para poder tomar en cuenta los efectos de la aceleración del sistema de referencia.

El libro no pretende dar el mensaje erróneo de que la resolución de un problema mecánico se reduce a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas o una ecuación cuadrática. Por el contrario, se busca que al resolver los problemas, el estudiante entienda que la aplicación correcta de las leyes de la dinámica constituye la parte fundamental de la solución de un problema mecánico.

También se plantean algunos problemas sobre el teorema trabajo-energía, en los cuales es necesario determinar el trabajo mecánico realizado por las fuerzas externas para posteriormente encontrar el desplazamiento o el cambio en la rapidez de un objeto debido a la acción de estas fuerzas. Además se han considerado problemas en donde interviene la fuerza de fricción, esta fuerza siempre realiza trabajo mecánico negativo

sobre un cuerpo, disminuyendo su rapidez.

Como en los capítulos anteriores, en esta parte se utilizan conceptos básicos del cálculo diferencial e integral, herramientas fundamentales para profundizar en algunas ideas sobre el trabajo mecánico y para escribir en su forma más general la segunda ley de Newton.

# Capítulo 6

## Leyes de Newton

6-1.- ¿En qué dirección se acelerará un objeto si varias fuerzas con diferentes magnitudes y direcciones actúan sobre el?

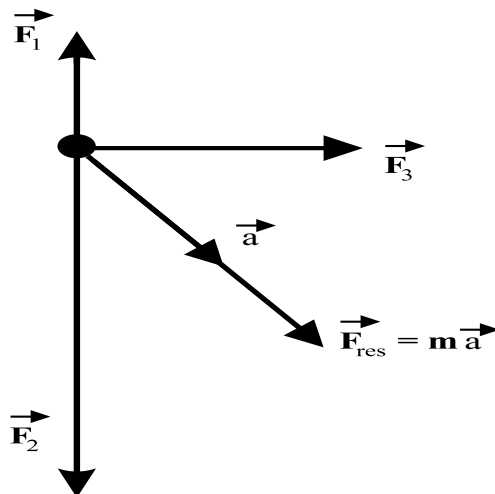


Figura 6.1: Diagrama de cuerpo libre para un objeto sometido a tres fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , la fuerza resultante  $\vec{F}_{res}$  corresponde a la suma vectorial de estas fuerzas, en el diagrama también se muestra el vector aceleración  $\vec{a}$ .

Sol:

De la segunda ley de Newton sabemos que:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{res}, \quad (6.1)$$

en donde  $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$  está dado por:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = \sum_i^N \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (6.2)$$

en donde  $\sum_i^N \vec{\mathbf{F}}_i$  es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto, como se muestra en el diagrama anterior (Fig. 6.1), para el caso de  $N = 3$ .

De acuerdo con la ecuación (6.1) el vector aceleración está dado por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}}{m}. \quad (6.3)$$

Por lo tanto, la dirección del vector aceleración ( $\vec{\mathbf{a}}$ ) es siempre la dirección de la fuerza resultante ( $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$ ), y tiene una magnitud  $|\vec{\mathbf{a}}| = \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}|}{m}$ .

**6-2.-** Un coche primero acelera en una proporción de  $3 \frac{m}{s^2}$ . Si este coche después remolca a otro coche de las mismas características, ¿cuál será la aceleración de ambos coches, si la fuerza es la misma antes y después?

**Sol:**

De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$m_{\text{original}} \vec{\mathbf{a}}_{\text{original}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}, \quad (6.4)$$

en donde la magnitud de la aceleración estará dada por:

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{a}}_{\text{original}}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}|}{m_{\text{original}}} \\ &= 3 \frac{m}{s^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Si la masa del cuerpo se duplica  $m_{\text{nueva}} = 2m_{\text{original}}$ , la segunda ley de Newton quedará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m_{\text{nueva}} \vec{\mathbf{a}}_{\text{nueva}} &= 2m_{\text{original}} \vec{\mathbf{a}}_{\text{nueva}} \\ &= \vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

porque la fuerza resultante  $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}$  que actúa sobre los dos coches no ha cambiado, pero si ha cambiado la masa del objeto, por lo tanto, la magnitud de la nueva aceleración estará dada por:

$$\begin{aligned}
 |\vec{\mathbf{a}}_{nueva}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{res}|}{m_{nueva}} \\
 \frac{1}{2} \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{res}|}{m_{original}} &= \frac{1}{2} |\vec{\mathbf{a}}_{original}| \\
 &= \frac{3m}{2s^2},
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

esto significa que cuando los dos coches están unidos la aceleración resultante ( $\vec{\mathbf{a}}_{nueva}$ ) será la mitad de la aceleración original ( $\vec{\mathbf{a}}_{original}$ ).

**6-3.-** Una fuerza dada  $\vec{\mathbf{F}}_0$  actúa sobre dos objetos por separado; el primero experimenta una aceleración de  $4 \frac{m}{s^2}$ , mientras el segundo experimenta una aceleración de  $8 \frac{m}{s^2}$ .

- ¿Cuál será la aceleración del primer objeto si se duplica la fuerza?
- ¿Cuál es el cociente de las masas de los dos objetos?
- Si ambos objetos se unen entre sí ¿qué aceleración producirá la fuerza  $\vec{\mathbf{F}}_0$ ?

**Sol:**

a) De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$m \vec{\mathbf{a}}_{original} = \vec{\mathbf{F}}_0, \tag{6.8}$$

en donde la magnitud de la aceleración estará dada por:

$$|\vec{\mathbf{a}}_{original}| = \frac{|\vec{\mathbf{F}}_0|}{m} = 4 \frac{m}{s^2}. \tag{6.9}$$

Si se duplica la fuerza resultante ( $\vec{\mathbf{F}}_{res} = 2\vec{\mathbf{F}}_0$ ), la segunda ley de Newton queda de la siguiente manera:

$$m \vec{\mathbf{a}}_{nueva} = \vec{\mathbf{F}}_{res} = 2\vec{\mathbf{F}}_0, \tag{6.10}$$

y la magnitud de la aceleración resultante será:

$$\begin{aligned}
 |\vec{\mathbf{a}}_{nueva}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_{res}|}{m} \\
 &= \frac{2|\vec{\mathbf{F}}_0|}{m} = 2 \frac{|\vec{\mathbf{F}}_0|}{m} \\
 &= 2|\vec{\mathbf{a}}_{original}| = 8 \frac{m}{s^2},
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

esto significa que la magnitud de la aceleración resultante será el doble respecto a la magnitud de la aceleración original.

b) De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= 2\vec{\mathbf{a}}_{original} \\ &= 2\frac{\vec{\mathbf{F}}_0}{m} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_0}{\frac{m}{2}} \\ &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_0}{M},\end{aligned}\tag{6.12}$$

en donde  $M$  es la masa del segundo objeto sobre el que actúa la misma fuerza de magnitud  $F_0$ , con  $M = \frac{m}{2}$ . De esta manera el cociente de la masa del segundo objeto cuya aceleración es de  $8 \frac{m}{s^2}$  entre la masa del primer objeto cuya aceleración es de  $4 \frac{m}{s^2}$  es:

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{1}{2}.\tag{6.13}$$

c) Si los dos objetos se unen entre sí, la segunda ley de Newton nos dice:

$$\begin{aligned}(m + M)\vec{\mathbf{a}}_{resultante} &= \vec{\mathbf{F}}_0 \Rightarrow \\ \left(m + \frac{m}{2}\right)\vec{\mathbf{a}}_{resultante} &= \vec{\mathbf{F}}_0 \\ \left(\frac{3m}{2}\right)\vec{\mathbf{a}}_{resultante} &= \vec{\mathbf{F}}_0 \Rightarrow \\ |\vec{\mathbf{a}}_{resultante}| &= \frac{|\vec{\mathbf{F}}_0|}{\frac{3m}{2}} \\ |\vec{\mathbf{a}}_{resultante}| &= \frac{2|\vec{\mathbf{F}}_0|}{3m} = \frac{2}{3}\left(4\frac{m}{s^2}\right) = \frac{8}{3}\frac{m}{s^2}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Por lo tanto, la magnitud de la aceleración del sistema unido será  $|\vec{\mathbf{a}}_{resultante}| = \frac{8}{3}\frac{m}{s^2}$ .

**6-4.-** Su auto deportivo se descompone y usted comienza a empujarlo hacia el taller más cercano. ¿Cómo es la fuerza que usted ejerce sobre el auto en comparación con la que éste ejerce sobre usted cuando el vehículo empieza a moverse y cuando ya tiene una velocidad constante? Explique sus respuestas.

**Sol:**

Para responder esta pregunta debemos recordar la forma correcta en que debe aplicarse la tercera ley de Newton.

- La fuerza que una persona ejerce sobre un objeto es exactamente igual en magnitud pero con dirección contraria a la que el objeto ejerce sobre la persona, ya sea que el objeto se mueva con velocidad constante o se encuentre en reposo, o inclusive si el objeto se mueve con una aceleración diferente de cero.

Por lo tanto, y de acuerdo con esta ley, en todas las situaciones descritas en el problema, la fuerza que la persona ejerce sobre el automóvil es de igual magnitud que la fuerza que el automóvil ejerce sobre la persona, pero en direcciones opuestas.

De acuerdo con la primera ley de Newton si el automóvil se encuentra en reposo o se mueve con una velocidad constante, la fuerza resultante que actúa sobre el vehículo será igual a cero y por lo tanto también su aceleración, esto no significa que no haya fuerzas actuando sobre el automóvil, sino que la suma vectorial de las mismas es igual a cero.

**No debemos perder de vista**, que la pregunta del problema se refiere a la relación que existe entre la fuerza ejercida por la persona sobre el automóvil y la fuerza ejercida por el automóvil sobre la persona y que de acuerdo con la tercera ley de Newton las magnitudes de las dos fuerzas serán iguales en ambas situaciones, pero en direcciones opuestas.

**6-5.-** Un objeto de  $10\text{ kg}$  está sometido a las fuerzas  $\vec{\mathbf{F}}_1$  y  $\vec{\mathbf{F}}_2$  como se indica gráficamente (Fig. 6.2).

- Determinar la aceleración  $\vec{\mathbf{a}}$  del objeto.
- Una tercera fuerza  $\vec{\mathbf{F}}_3$  se aplica de modo que el objeto está en equilibrio estático. Determinar  $\vec{\mathbf{F}}_3$ .

**Sol:**

a) Para determinar la aceleración del objeto debemos utilizar la segunda ley de Newton:

$$m \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2, \quad (6.15)$$

que en su forma de componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{\text{res}_x} = F_{1_x} + F_{2_x} \\ ma_y &= F_{\text{res}_y} = F_{1_y} + F_{2_y}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Para aplicar la ecuación anterior (6.16) a nuestro problema, es necesario obtener el diagrama de cuerpo libre del bloque de masa  $m = 10\text{ kg}$  (Fig. 6.3), de donde se obtiene:

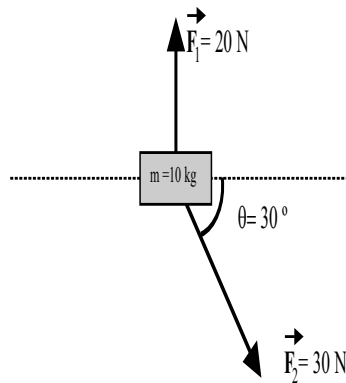


Figura 6.2: Diagrama de un objeto sometido a las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ .

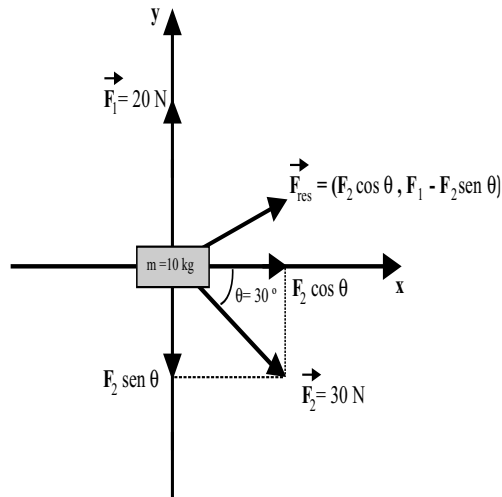


Figura 6.3: Diagrama de cuerpo libre de un objeto sometido a las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  donde se muestra también la fuerza resultante.

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{\text{res}x} = F_2 \cos \theta \\ ma_y &= F_{\text{res}y} = F_1 - F_2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.17)$$

de esta ecuación obtenemos para la fuerza resultante  $\vec{F}_{\text{res}}$ :

$$\vec{F}_{\text{res}} = (F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta), \quad (6.18)$$

si sustituimos los valores numéricos del problema obtenemos para  $\vec{F}_{\text{res}}$ :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} &= (F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta) = \\ &= (26, 5) N.\end{aligned}\quad (6.19)$$

La aceleración del cuerpo estará dada entonces por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}}{m} = \\ &= \left( \frac{F_2 \cos(\theta)}{m}, \frac{F_1 - F_2 \sin(\theta)}{m} \right).\end{aligned}\quad (6.20)$$

Finalmente, si sustituimos los valores numéricos del problema tendremos que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}} &= \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}}}{10} \frac{m}{s^2} = \\ &= (2.6, 0.5) \frac{m}{s^2}.\end{aligned}\quad (6.21)$$

b) Si se requiere que la fuerza resultante sea cero ( $\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = 0$ ), con la adición de una tercera fuerza  $\vec{\mathbf{F}}_3$ , tenemos que:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{res}} = (F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta) + \vec{\mathbf{F}}_3 = 0.\quad (6.22)$$

Entonces despejando  $\vec{\mathbf{F}}_3$  de la ecuación (6.22) obtenemos:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = -(F_2 \cos \theta, F_1 - F_2 \sin \theta),\quad (6.23)$$

finalmente, si sustituimos los valores numéricos del problema tendremos que:

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = (-26, -5) N.\quad (6.24)$$

**6-6.-** Un cuerpo que tiene una masa  $m$  se mantiene en equilibrio mediante un cable a lo largo de un plano inclinado sin fricción (Fig. 6.4).

a) Si  $\theta = 60^\circ$  y  $m = 50 \text{ kg}$ , determinar la tensión del cable y la fuerza normal ejercida por el plano inclinado.

b) Determinar la tensión en función de  $\theta$  y  $m$  y comprobar el resultado para  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$ .

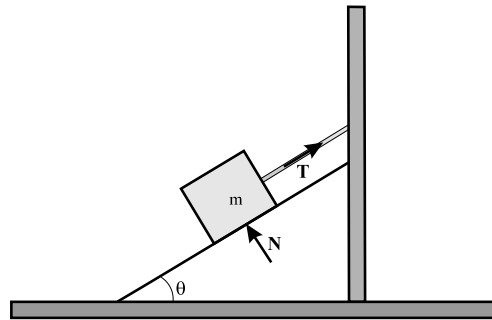


Figura 6.4: Tensión de un cable en función del ángulo de inclinación  $\theta$ .

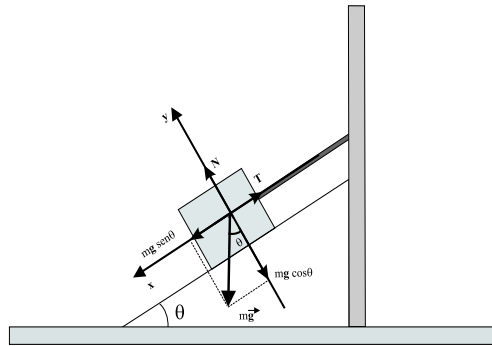


Figura 6.5: Diagrama de cuerpo libre de un bloque que se mantiene en equilibrio.

**Sol:**

a) Si nos colocamos en un sistema de referencia inercial como el que se muestra en el diagrama de la figura 6.5, la ecuación de movimiento estará dada por:

$$m \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{F}}_{tot.} = \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{T}} + m \vec{\mathbf{g}} = 0, \quad (6.25)$$

que en términos de sus componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 = T - mg \operatorname{sen} \theta \\ m\ddot{y} &= 0 = N - mg \operatorname{cos} \theta, \end{aligned}$$

de la primera ecuación resulta que:

$$T = mg \operatorname{sen} \theta,$$

si sustituimos los valores de  $g$  ( $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ ),  $m$  y  $\theta$  obtenemos que:

$$T = (50 \text{ kg})(9.8 \frac{m}{s^2}) \operatorname{sen} 60 = 424.35 \text{ N} \quad (6.26)$$

b) Hemos encontrado que en general la tensión como función de  $m$  y  $\theta$  está dada por:

$$T(m, \theta) = mg \operatorname{sen} \theta,$$

y en particular para  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$  se obtiene:

$$\begin{aligned} T(m = 50 \text{ kg}, \theta = 0^\circ) &= (50)(9.8) \operatorname{sen} 0 \text{ kg} \frac{m}{s^2} = 0 \text{ N} \\ T(m = 50 \text{ kg}, \theta = 90^\circ) &= mg \operatorname{sen} 90 = \\ &= (50)(9.8)(1) \text{ kg} \frac{m}{s^2} = 490 \text{ N}, \end{aligned}$$

este resultado era de esperarse, porque cuando  $\theta = 0^\circ$  la tensión de la cuerda debe ser igual a cero, mientras que cuando  $\theta = 90^\circ$ , la tensión debe ser igual al peso del bloque ( $T = mg = 490 \text{ N}$ ).

**6-7.-** Los bloques  $A$ ,  $B$  y  $C$  se colocan como se muestra en la figura 6.6 y se conectan con unos cables que tienen una masa despreciable. Los bloques  $A$  y  $B$  pesan  $25 \text{ N}$  cada uno y el coeficiente de fricción cinética entre las superficies de contacto es  $\mu_C = 0.35$ . Suponiendo que el bloque  $C$  desciende con una velocidad constante:

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre para  $A$  y otro para  $B$ .
- Calcule la tensión que se genera en el cable que une a los bloques  $A$  y  $B$ .
- Calcule el peso del bloque  $C$ .
- Si se cortara el cable que une  $A$  y  $B$ , ¿qué aceleración tendría  $C$ ?

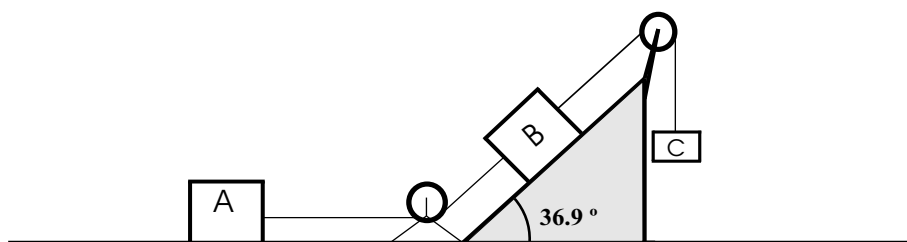


Figura 6.6: Peso del bloque  $C$  en función de las tensiones de los cables que unen los cuerpos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para el caso del equilibrio de fuerzas.

**Sol:**

- Los diagramas de cuerpo libre de los bloques  $A$ ,  $B$  y  $C$  se muestran en la figura 6.7.
- Como el sistema de los bloques  $A$  y  $B$  está sujeto mediante un cable inextensible al bloque  $C$  y tomando en cuenta que este bloque desciende con una velocidad constante, todo el sistema se desplazará también con una velocidad constante, es decir:

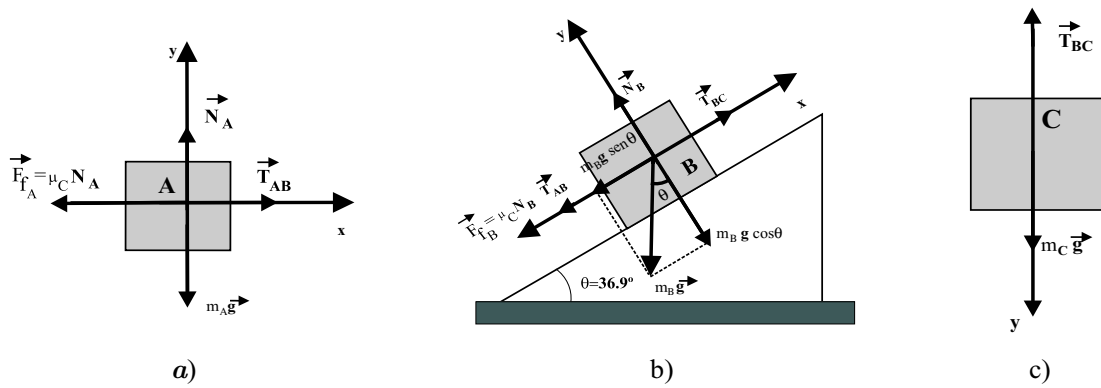


Figura 6.7: Diagrama de cuerpo libre de los bloques A, B y C.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}}_A &= 0 \\ \vec{\mathbf{a}}_B &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando la segunda ley de Newton al bloque A obtenemos:

$$m_A \vec{\mathbf{a}}_A = 0 = \vec{\mathbf{F}}_{res_A} = \vec{\mathbf{N}}_A + m_A \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}}_{AB} + \vec{\mathbf{F}}_{f_A},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned}m_A a_{Ax} &= 0 = T_{AB} - F_f = T_{AB} - \mu_C N_A \\ m_A a_{Ay} &= 0 = N_A - m_A g,\end{aligned}$$

y de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}N_A &= m_A g \\ T_{AB} = \mu_C N_A &= \mu_C m_A g = 0.35 \cdot 25 \text{ N} = 8.75 \text{ N}.\end{aligned}\tag{6.27}$$

De igual forma, aplicando la segunda ley de Newton al bloque B obtenemos:

$$m_B \vec{\mathbf{a}}_B = 0 = \vec{\mathbf{F}}_{res_B} = \vec{\mathbf{N}}_B + m_B \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}}_{BC} + \vec{\mathbf{T}}_{AB} + \vec{\mathbf{F}}_{f_B},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned}m_B a_{Bx} &= 0 = -m_B g \sin \theta - T_{AB} - \mu_C N_B + T_{BC} \\ m_B a_{By} &= 0 = N_B - m_B g \cos \theta,\end{aligned}$$

y de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned} N_B &= m_B g \cos \theta \\ T_{BC} &= \mu_C N_B + T_{AB} + m_B g \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.28)$$

combinando las ecuaciones (6.27) y (6.28) podemos obtener la tensión de la cuerda que une los bloques  $B$  y  $C$ :

$$\begin{aligned} T_{BC} &= \mu_C m_A g + \mu_C m_B g \cos \theta + m_B g \sin \theta \\ &= m_A g (\mu_C + \mu_C \cos \theta + \sin \theta) = \\ &= 25 (0.35 + 0.35 \cdot \cos 36.9 + \sin 36.9) N = 30.76 N, \end{aligned} \quad (6.29)$$

en donde hemos tomado en cuenta que los bloques  $A$  y  $B$  tienen el mismo peso ( $m_A g = m_B g = 25 N$ ).

c) Aplicando la segunda ley de Newton al bloque  $C$  ( $\vec{\mathbf{a}}_C = 0$ ) obtenemos:

$$m_C \vec{\mathbf{a}}_C = 0 = \vec{\mathbf{F}}_{resC} = \vec{\mathbf{T}}_{BC} + m_C \vec{\mathbf{g}},$$

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$m_C a_{C_y} = 0 = T_{BC} - m_C g,$$

de donde podemos despejar el peso del bloque  $C$  en términos de la tensión  $T_{BC}$  dada por la ecuación (6.29), obteniendo finalmente:

$$m_C g = W_C = T_{BC} = 30.76 N. \quad (6.30)$$

d) En la figura 6.8 podemos observar los diagramas de cuerpo libre de los bloques  $B$  y  $C$  una vez que hemos eliminado el bloque  $A$  del sistema físico.

Debido a que los bloques  $B$  y  $C$  se encuentran unidos mediante un cable inextensible, la aceleración con la que el bloque  $C$  desciende verticalmente será la misma con la que el bloque  $B$  asciende a lo largo del plano inclinado, i.e:

$$|\vec{\mathbf{a}}_B| = |\vec{\mathbf{a}}_C| = a,$$

aplicando la segunda ley de Newton al bloque  $B$  obtenemos:

$$m_B \vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{F}}_{resB} = \vec{\mathbf{N}}_B + m_B \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}}_{BC} + \vec{\mathbf{F}}_{fB},$$

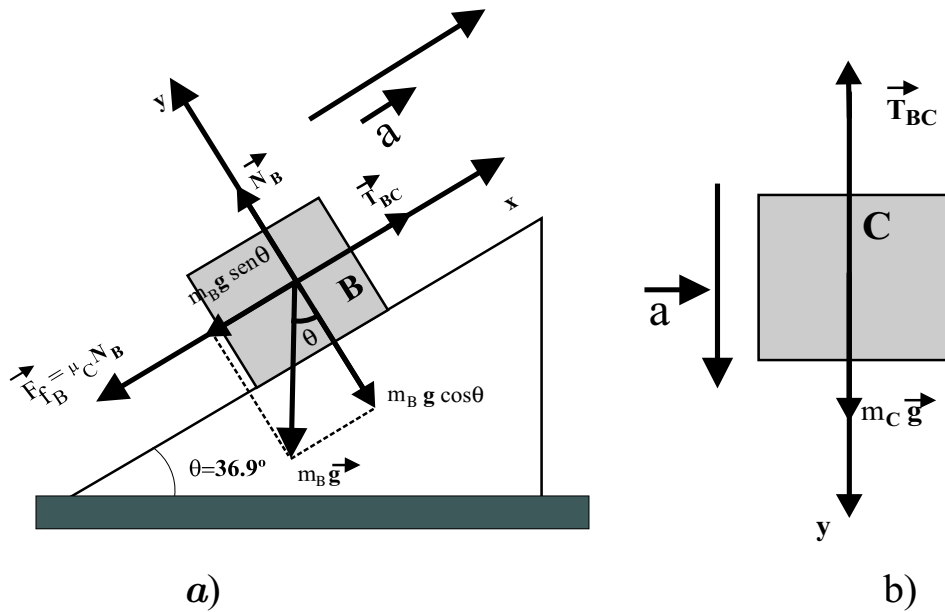


Figura 6.8: Diagrama de cuerpo libre de los bloques B y C.

que en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned}
 0 &= N_B - m_B g \cos \theta \implies N_B = m_B g \cos \theta \\
 m_B a &= T_{BC} - \mu_C N_B - m_B g \sin \theta = T_{BC} - \mu_C m_B g \cos \theta - m_B g \sin \theta \\
 \implies \\
 m_B a &= T_{BC} - \mu_C m_B g \cos \theta - m_B g \sin \theta, \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

de igual forma, aplicando la segunda ley de Newton al bloque C obtenemos:

$$\begin{aligned}
 m_C \vec{a}_C &= \vec{F}_{resC} = m_C \vec{g} + \vec{T}_{BC} \\
 \implies \\
 m_C a &= m_C g - T_{BC}. \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones (6.31) y (6.32) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (m_B + m_C) a &= m_C g - m_B g (\mu_C \cos \theta + \sin \theta) \\
 \implies \\
 a &= \frac{g(m_C - m_B (\mu_C \cos \theta + \sin \theta))}{m_B + m_C} = 1.54 \frac{m}{s^2}. \tag{6.33}
 \end{aligned}$$

Para llegar a este resultado hemos utilizado el valor obtenido para  $m_C g$  dado por la ecuación (6.30).

**6-8.-** Dos cajas están conectadas por una cuerda y se encuentran sobre una superficie horizontal (Fig. 6.9). La caja  $A$  tiene una masa  $m_A$ , la caja  $B$  tiene una masa  $m_B$ , el coeficiente de fricción cinética entre las cajas y la superficie es  $\mu_C$  y una fuerza horizontal  $\vec{F}$  tira de las cajas hacia la derecha con velocidad constante.

a) Calcule la magnitud de  $\vec{F}$  en términos de  $m_A$ ,  $m_B$  y  $\mu_C$ .

b) Calcule la tensión en la cuerda que une los bloques en términos de  $m_A$ ,  $m_B$  y  $\mu_C$ .

Incluya el o los diagramas de cuerpo libre necesarios para plantear la solución del problema.

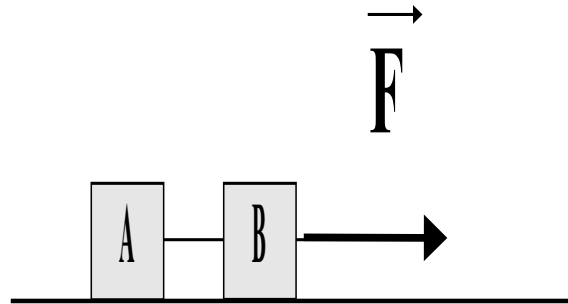


Figura 6.9: Dos cajas conectadas por una cuerda bajo la acción de una fuerza  $\vec{F}$  sobre una superficie con fricción.

**Sol:**

a) Los diagramas de cuerpo libre de los bloques  $A$  y  $B$  se muestran en la figura 6.10, si aplicamos la segunda ley de Newton al cuerpo  $A$  y tomamos en cuenta que la aceleración de ambos bloques es igual a cero, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 m_A a_{Ax} &= 0 = F_{res_A} = T_{AB} - \mu_C N_A \\
 m_A a_{Ay} &= 0 = N_A - m_A g \\
 &\implies \\
 N_A &= m_A g \\
 T_{AB} &= \mu_C m_A g,
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

mientras que para el bloque  $B$  obtenemos:

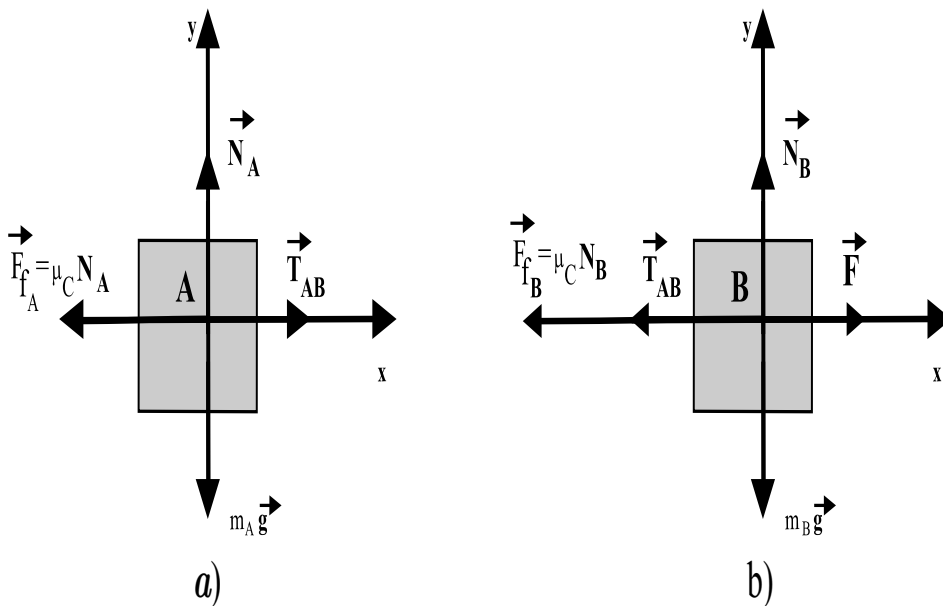


Figura 6.10: Diagrama de cuerpo libre para los bloques A y B.

$$\begin{aligned}
 m_B a_{B_x} &= 0 = F_{res_B} = F - T_{AB} - \mu_C N_B \\
 m_B a_{B_y} &= 0 = N_B - m_B g \\
 \implies \\
 N_B &= m_B g \\
 F &= T_{AB} + \mu_C m_B g = \mu_C m_A g + \mu_C m_B g = \mu_C (m_A + m_B) g, \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

en donde  $F$  es la magnitud de la fuerza externa  $\vec{F}$  que se ejerce sobre los bloques A y B.

b) De la ecuación (6.34) podemos expresar la tensión que existe en la cuerda que une a los bloques A y B ( $T_{AB}$ ) en términos de  $m_A$ ,  $m_B$  y  $\mu_C$ , obteniendo finalmente que:

$$T_{AB} = \mu_C m_A g.$$

**6-9.-** Una caja de 3 kg que descansa sobre una mesa horizontal está conectada a otra caja de 2 kg por medio de una cuerda, como se muestra en el siguiente diagrama (Fig. 6.11).

a) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática  $\mu_S$  que permite que las dos cajas permanezcan en reposo?

b) Si el coeficiente de fricción estática es menor que el determinado en el inciso a) y el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la mesa es  $\mu_C = 0.3$ , calcule el tiempo que tardará la masa de  $2 \text{ kg}$  en recorrer los  $2 \text{ m}$  que le separan del suelo, suponiendo que el sistema parte del reposo.

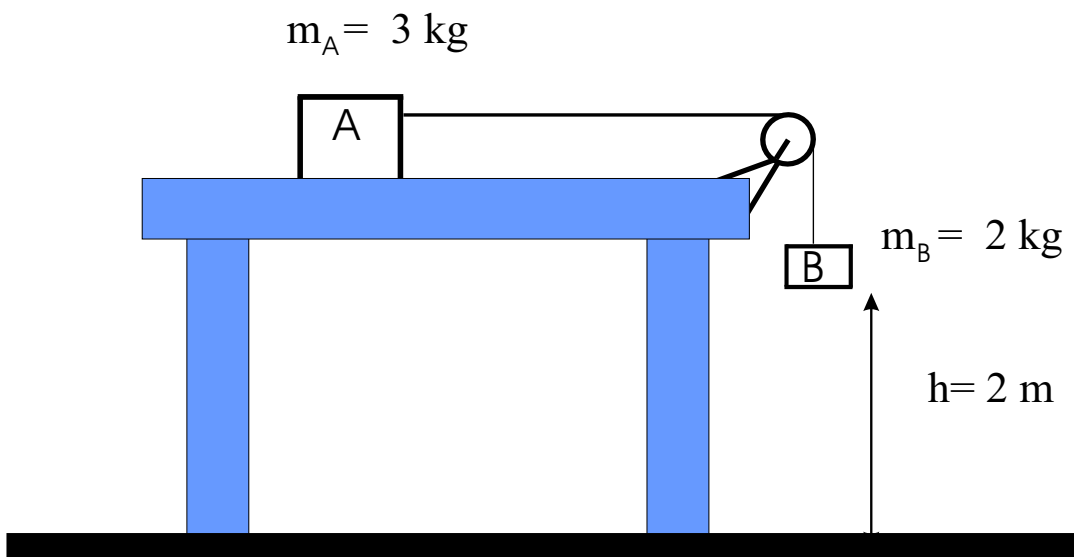


Figura 6.11: Diagrama de dos cajas conectadas por una cuerda que pasa por una polea.

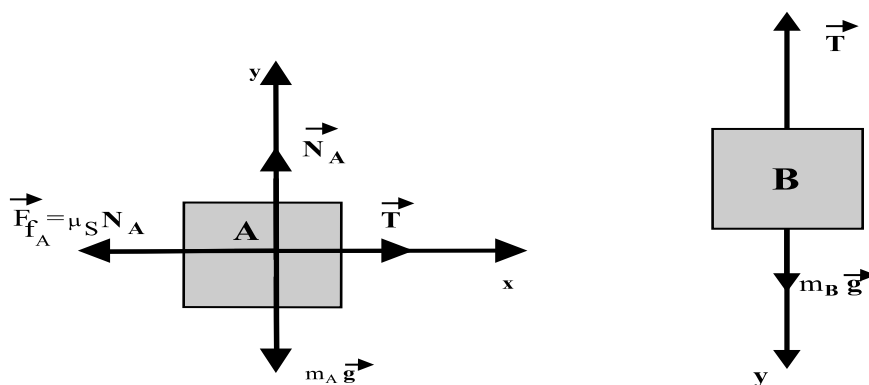


Figura 6.12: Diagrama de cuerpo libre de los bloques de masas  $m_A$  y  $m_B$  del inciso a).

**Sol:**

a) El primer paso para la solución del problema es plantear correctamente el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos que constituyen el sistema físico. En este caso está formado por dos bloques de masas  $m_A$  y  $m_B$  considerando que no es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre para la cuerda porque además de ser inextensible posee una masa despreciable.

Los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa  $m_A$  y  $m_B$  se muestran en la figura 6.12. De acuerdo con estos diagramas y recordando que ambos bloques se mueven con una velocidad constante, la segunda ley de Newton para el cuerpo  $A$  toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_S N_A = 0 \\ \Sigma F_{y_A} &= N - m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.36}$$

mientras que para el bloque  $B$  toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T = 0,\end{aligned}\tag{6.37}$$

de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}N_A &= m_A g \\ T &= \mu_S m_A g \\ T &= m_B g,\end{aligned}\tag{6.38}$$

si igualamos las dos últimas ecuaciones que expresan el valor de  $T$  y eliminamos el factor común  $g$ , obtenemos que la relación entre las masas y el coeficiente de fricción  $\mu_S$  es:

$$\begin{aligned}m_B &= \mu_S m_A \\ \mu_S &= \frac{m_B}{m_A} = \frac{2}{3} = 0.66.\end{aligned}\tag{6.39}$$

b) En este caso el sistema se acelerará en dirección del suelo y el coeficiente de fricción cinética está dado por  $\mu_C = 0.3$ . Los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa  $m_A$  y  $m_B$  se muestran en la figura 6.13, en los que, adicionalmente a las fuerzas que actúan sobre cada bloque, se ha señalado la dirección de la aceleración de cada uno de ellos, recordando que, al ser la cuerda inextensible, la aceleración de los dos bloques es la misma  $a_{A_x} = a_{B_y} = a$ .

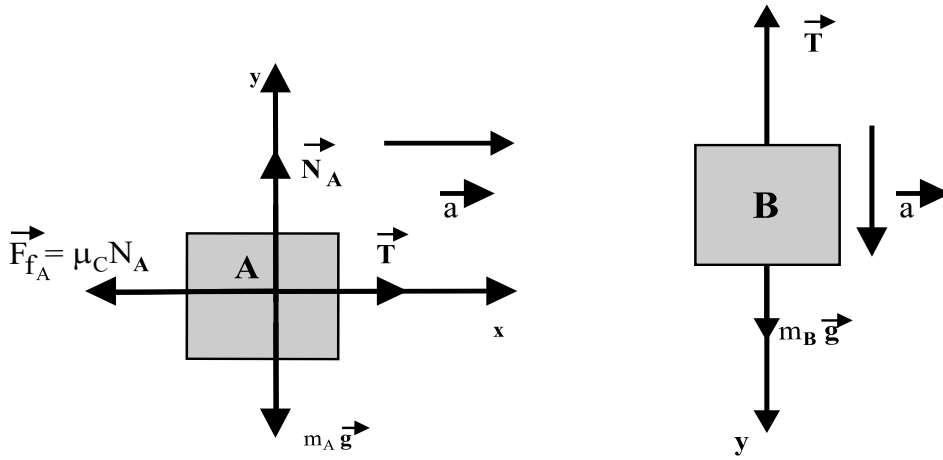


Figura 6.13: Diagrama de cuerpo libre de los cuerpos de masas  $m_A$  y  $m_B$  del inciso b).

Por lo tanto, la segunda ley de Newton para el cuerpo  $A$  toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_C N_A = m_A a_{Ax} = m_A a \\ \Sigma F_{y_A} &= N - m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.40}$$

mientras que para el bloque  $B$  toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T \\ &= m_B a_{By} = m_B a,\end{aligned}\tag{6.41}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}m_A a &= T - \mu_C N_A \\ m_B a &= m_B g - T, \quad \text{con} \\ N_A &= m_A g,\end{aligned}\tag{6.42}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}m_A a &= T - \mu_C m_A g \\ m_B a &= m_B g - T,\end{aligned}\tag{6.43}$$

por lo tanto, al sumar las dos últimas ecuaciones obtenemos para la aceleración:

$$(m_A + m_B) a = m_B g - \mu_C m_A g, \quad (6.44)$$

en donde:

$$\mu_C = 0.3,$$

y finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} (m_A + m_B) a &= (m_B - 0.3m_A) g \\ \Rightarrow \\ a &= \left( \frac{m_B - 0.3m_A}{m_A + m_B} \right) g = 2.156 \frac{m}{s^2}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Por lo tanto, la aceleración de los bloques será:

$$a = 2.156 \frac{m}{s^2}.$$

Una vez que hemos determinado el valor de la aceleración con la que se mueven los bloques, para calcular ahora el tiempo  $t$  que el bloque  $B$  tarda en descender una distancia de  $2 m$ , aplicamos las formulas de la cinemática en una dimensión:

$$h = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

en donde la aceleración está dada por la ecuación (6.45),  $y_0 = 0$ ,  $h = 2 m$ ,  $v_0 = 0$ , por consiguiente, el tiempo  $t$  estará determinado por:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1.362 s.$$

**6-10.-** Un sistema compuesto por dos bloques se encuentra en equilibrio como podemos observar en la figura 6.14. El bloque  $A$  tiene un peso de  $60 N$  y se encuentra sobre una superficie en donde el coeficiente de fricción estática entre ambos es de  $0.25$ ; mientras que el bloque  $B$  tiene un peso de  $12 N$ .

- Calcule la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque  $A$ .
- Determine el peso máximo de  $B$  con el cual el sistema permanecerá en equilibrio.

**Sol:**

a) Para resolver este problema tenemos que determinar la magnitud de la tensión ejercida por la cuerda sujeta al bloque  $A$  ( $T_A$ ) en términos del peso del bloque  $B$ , para esto haremos uso de las implicaciones que trae consigo la presencia de la cuerda que tiene

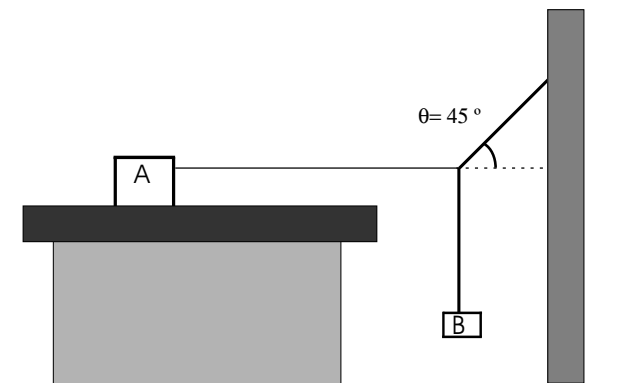


Figura 6.14: Sistema de dos bloques y tres cuerdas en equilibrio.

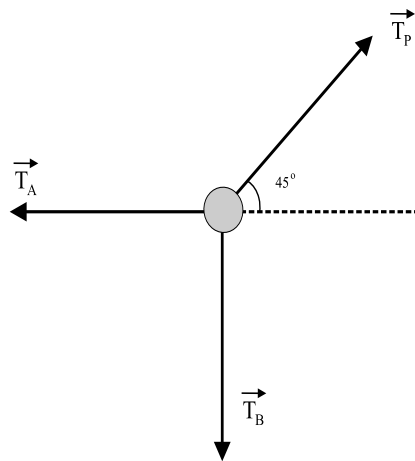


Figura 6.15: Diagrama de fuerzas para el punto de unión de tres cuerdas en equilibrio.

una inclinación de  $45^\circ$  y que une la cuerda sujeta al bloque  $A$  con la cuerda sujeta al bloque  $B$ .

De acuerdo al diagrama de fuerzas en equilibrio para el punto de unión de las tres cuerdas (Fig. 6.15), tenemos que:

$$\vec{\mathbf{T}}_P + \vec{\mathbf{T}}_A + \vec{\mathbf{T}}_B = 0, \quad (6.46)$$

en donde  $\vec{\mathbf{T}}_P$  representa la tensión de la cuerda que está sujeta a la pared. La condición dada por la ecuación (6.46) corresponde al hecho de que el punto de unión de las cuerdas permanece en reposo en tanto el sistema físico también lo esté.

De esta manera la ecuación (6.46) en sus componentes cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= T_P \cos 45 - T_A \\ 0 &= T_P \sin 45 - T_B, \end{aligned}$$

y como  $\cos 45 = \sin 45$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} T_A &= T_P \cos 45 = T_P \sin 45 = T_B \\ \implies \\ T_A &= T_B, \end{aligned} \tag{6.47}$$

es decir, dado que las proyecciones horizontal y vertical de la tensión de la cuerda que está sujeta a la pared son iguales, la tensión de la cuerda que sujeta al bloque  $B$  ( $T_B$ ) será igual a la tensión en la cuerda que sujeta al bloque  $A$ .

Ahora bien, considerando los diagramas de cuerpo libre de los bloques  $A$  y  $B$  que se muestran a continuación (Fig. 6.16), podemos escribir la segunda ley de Newton para cada bloque de la siguiente forma:

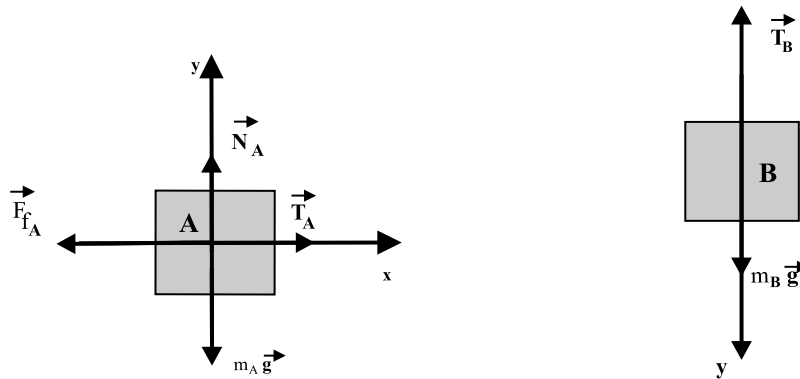


Figura 6.16: Diagrama de cuerpo libre de los cuerpos de masas  $m_A$  y  $m_B$ .

$$\begin{aligned} m_A a_A &= 0 = T_A - F_f \\ 0 &= N_A - m_A g \\ \implies \\ N_A &= m_A g \\ F_f &= T_A = T_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_B a_B &= 0 = T_B - m_B g \\
 &\implies \\
 T_B &= m_B g \\
 &\implies \\
 F_f &= T_B = m_B g = 12 \text{ N}.
 \end{aligned}
 \tag{6.48}$$

El resultado anterior muestra que, aún cuando el sistema se encuentra en equilibrio, la fuerza de fricción  $F_f$  que actúa sobre el bloque  $A$  es menor que  $\mu_S N_A = \mu_S m_A g = 15 \text{ N}$ .

b) El peso máximo que el bloque  $B$  puede tener está determinado por la condición de que la tensión en la cuerda que sujeta al bloque  $A$  iguale el máximo valor de la fuerza de fricción estática  $F_{f_{max}} = \mu_S m_A g = 15 \text{ N}$ . El valor de esta tensión ( $T_A$ ), según la relación (6.47), es igual a la tensión en la cuerda que sujeta al bloque  $B$  ( $T_B$ ), y al utilizar la relación (6.48) obtenemos que  $T_B$  es igual al peso máximo ( $W_{B_{max}}$ ) que puede tener el bloque  $B$ , es decir:

$$W_{B_{max}} = F_{f_{max}} = \mu_S m_A g = 15 \text{ N}. \tag{6.49}$$

**6-11.-** Un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural cero se fija de un extremo al techo del vagón de un tren y en el otro extremo del resorte se sujeta un balón de masa  $m$  (Fig. 6.17). El tren se desplaza con una aceleración  $\vec{a}$  en la dirección positiva del eje de las  $x$ . Un pasajero que viaja en el vagón observa que el resorte se estira una longitud  $l$  y se desvía un ángulo  $\theta_0$  respecto a la vertical.

a) Determine la aceleración del tren en términos de  $\theta_0$ , la aceleración de la gravedad  $g$ , y si es necesario, la longitud  $l$ .

b) ¿Por qué no es válido escribir la segunda ley de Newton en un sistema de referencia como el que se encuentra colocado en el vagón del tren? Explique lo más claramente posible su respuesta.

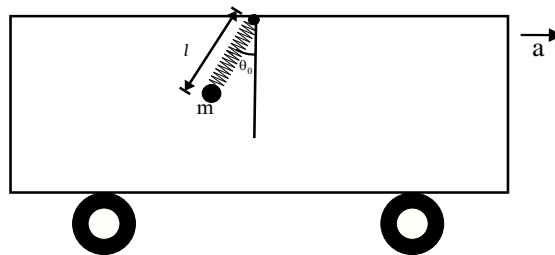


Figura 6.17: Diagrama de un resorte sujeto al techo del vagón de un tren en movimiento con aceleración  $\vec{a}$ .

**Sol:**

a) Para resolver este problema nos conviene montar el sistema de referencia de tal forma que el eje horizontal sea paralelo a la dirección de la aceleración y que el eje vertical tenga la misma dirección que el peso del balón pero con el sentido positivo de este eje apuntando hacia arriba.

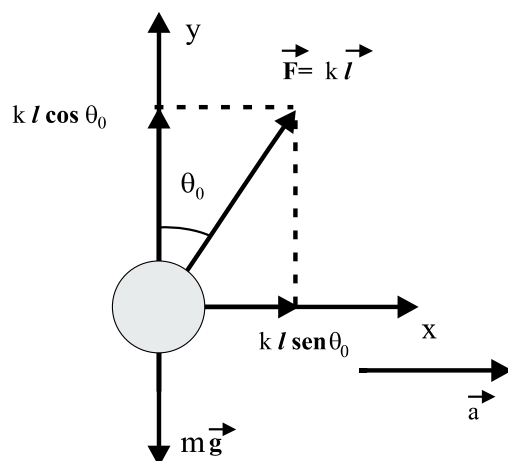


Figura 6.18: Diagrama de cuerpo libre de un balón sujeto al techo del vagón de un tren que avanza con aceleración  $\vec{a}$ .

Un observador en reposo que esté situado fuera del vagón verá un diagrama de cuerpo libre como el que se muestra en la figura 6.18, partiendo de este diagrama podemos escribir la segunda ley de Newton para el balón de masa  $m$ , obteniendo:

$$m\vec{a} = k\vec{l} + m\vec{g}, \quad (6.50)$$

en donde el vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = (a, 0), \quad (6.51)$$

así, la ecuación (6.50) en sus componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} ma &= kl \operatorname{sen} \theta_0 \\ 0 &= kl \operatorname{cos} \theta_0 - mg, \end{aligned} \quad (6.52)$$

de donde obtenemos que:

$$kl = \frac{mg}{\operatorname{cos} \theta_0}, \quad (6.53)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 ma &= \left( \frac{mg}{\cos \theta_0} \right) \sin \theta_0 = mg \operatorname{tg} \theta_0 \\
 &\implies \\
 a &= g \operatorname{tg} \theta_0.
 \end{aligned}
 \tag{6.54}$$

b) No es posible escribir la segunda ley de Newton en un sistema de referencia fijo al vagón, ya que este sistema tendrá una aceleración constante y por lo tanto, será un sistema de referencia no inercial en donde las leyes de Newton deben corregirse tomando en cuenta la aceleración del sistema.

**6-12.-** Una auto avanza por un camino húmedo peraltado cuyo radio de curvatura es  $R = 50 \text{ m}$  (Fig. 6.19). Entre los neumáticos y el pavimento existe un coeficiente de fricción estática  $\mu_S = 0.30$  y un coeficiente de fricción cinética  $\mu_C = 0.25$ .

- Si el ángulo de peralte es  $\alpha = 25^\circ$ , ¿cuál es rapidez máxima que puede tener el coche antes de resbalar peralte arriba?
- ¿Cuál es la rapidez mínima que debe tener para no resbalar peralte abajo?

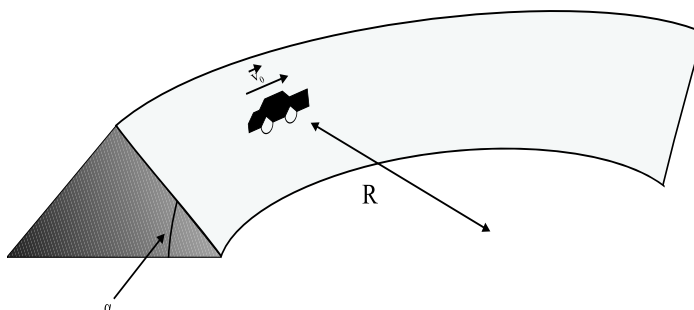


Figura 6.19: Un automóvil se desplaza a lo largo de una curva peraltada.

**Sol:**

a) Para resolver este problema nos conviene montar el sistema de referencia de tal forma que el eje horizontal apunte al centro de la circunferencia de la curva peraltada y que el eje vertical tenga la misma dirección que el peso del automóvil pero con el sentido positivo de este eje apuntando hacia arriba, tal como se muestra en la figura 6.20.

En el instante en que el automóvil alcance la velocidad máxima, antes de que se deslice peralte arriba, la fuerza de fricción estática apuntará hacia abajo de la curva

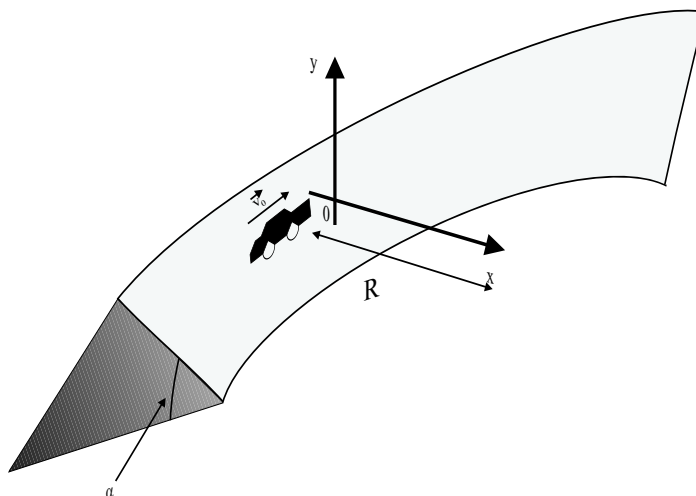


Figura 6.20: Sistema de referencia elegido para el planteamiento del diagrama de cuerpo libre.

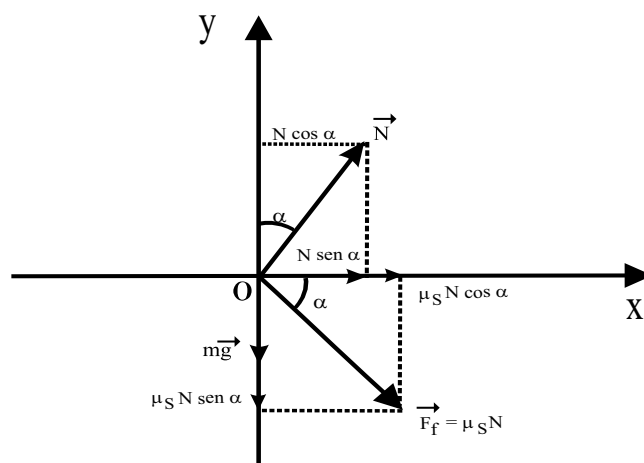


Figura 6.21: Diagrama de cuerpo libre de un automóvil sobre una curva peraltada para el caso de su rapidez máxima antes de que deslice peralte arriba.

peraltada, como podemos observar en el diagrama de cuerpo libre (Fig.6.21). Partiendo de este diagrama podemos escribir la segunda ley de Newton para el automóvil de masa  $m$ , y así obtener:

$$m \vec{a} = \vec{F}_f + m \vec{g} + \vec{N}, \tag{6.55}$$

en donde el vector aceleración está dado por:

$$\vec{\mathbf{a}} = \left( \frac{v^2}{R}, 0 \right), \quad (6.56)$$

que corresponde a la aceleración centrípeta, de manera que la ecuación (6.55) en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= N \operatorname{sen} \alpha + \mu_S N \cos \alpha \\ 0 &= N \cos \alpha - \mu_S N \operatorname{sen} \alpha - mg, \end{aligned} \quad (6.57)$$

de donde obtenemos que:

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha}, \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= [\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha] N = \\ &= [\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha] \frac{mg}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} = \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg, \end{aligned} \quad (6.59)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg \\ &\implies \\ \frac{v^2}{R} &= \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] g \\ &\implies \\ v &= \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

esto significa que la rapidez máxima que puede alcanzar el automóvil antes de que se deslice peralte arriba, si  $\mu_S = 0.30$ ,  $R = 50 \text{ m}$ ,  $\alpha = 25^\circ$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , estará dada por:

$$v = \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha + \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR} = 20.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.61)$$

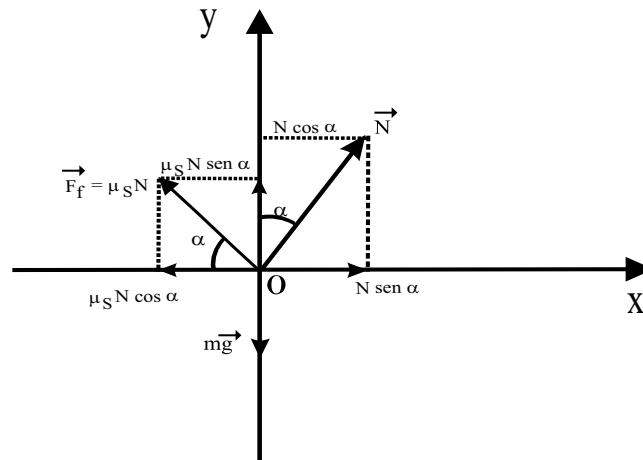


Figura 6.22: Diagrama de cuerpo libre de un automóvil sobre una curva peraltada para el caso de su rapidez mínima antes de que deslice peralte abajo.

b) En el instante en que el automóvil alcance la velocidad mínima antes de que se deslice peralte abajo, la fuerza de fricción estática apuntará hacia arriba de la curva peraltada, como podemos observar en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.22.

Partiendo de este diagrama podemos escribir la segunda ley de Newton para el automóvil de masa  $m$ , obteniendo:

$$m \vec{a} = \vec{F}_f + m \vec{g} + \vec{N}, \quad (6.62)$$

en donde el vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = \left( \frac{v^2}{R}, 0 \right), \quad (6.63)$$

que corresponde a la aceleración centrípeta, de manera que la ecuación (6.62) en componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= N \cos \alpha - \mu_S N \sin \alpha \\ 0 &= N \sin \alpha + \mu_S N \cos \alpha - mg, \end{aligned} \quad (6.64)$$

de donde obtenemos que:

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha}, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= [\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha] N = \\ &= [\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha] \frac{mg}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} = \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg, \end{aligned} \quad (6.66)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{R} &= \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] mg \\ &\implies \\ \frac{v^2}{R} &= \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] g \\ &\implies \\ v &= \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR}, \end{aligned} \quad (6.67)$$

esto significa que la rapidez mínima que puede alcanzar el automóvil antes de que se deslice peralte abajo, si  $\mu_S = 0.30$ ,  $R = 50 \text{ m}$ ,  $\alpha = 25^\circ$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , estará dada por:

$$v = \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu_S \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_S \operatorname{sen} \alpha} \right] gR} = 8.45 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.68)$$

**6-13.-** Un cuerpo de  $2 \text{ kg}$  descansa sobre un plano inclinado que tiene una aceleración  $\vec{\mathbf{a}}$  hacia la derecha y un ángulo de inclinación de  $60^\circ$ , tal y como se muestra en la figura 6.23. El cuerpo de  $2 \text{ kg}$  permanece en reposo con relación al plano inclinado.

a) Determinar  $\vec{\mathbf{a}}$ .

b) ¿Qué ocurriría si la aceleración del plano fuera mayor?

**Sol:**

a) Para escribir la ecuación de movimiento del bloque de masa  $m$  respecto a la plataforma que se mueve con aceleración  $\vec{\mathbf{a}}$  en la dirección horizontal, debemos recordar la forma que toma la segunda ley de Newton para los sistemas de referencia acelerados:

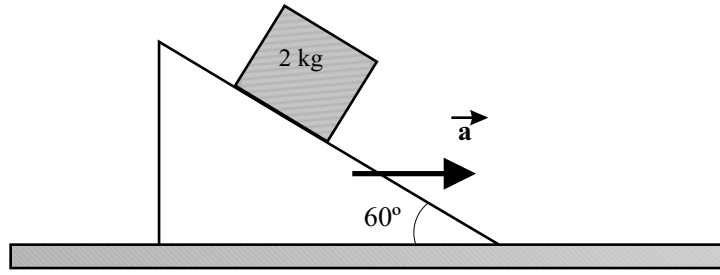


Figura 6.23: Un bloque de 2 kg permanece en reposo sobre un plano inclinado que se mueve con aceleración  $\vec{a}$ .

$$m \ddot{\vec{r}} = -m \vec{a} + \vec{F}_{reales}, \quad (6.69)$$

en donde  $\vec{a}$  corresponde a la aceleración que posee el sistema de referencia acelerado, en este caso el plano inclinado,  $\ddot{\vec{r}}$  es la aceleración de la partícula respecto al sistema de referencia acelerado situado sobre el plano inclinado y  $\vec{F}_{reales}$  representa la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el bloque de masa  $m$ .

Para resolver este problema tomamos la dirección de los ejes del sistema de referencia acelerado de manera que:

$$-\vec{a} = a(-\cos \theta, -\sin \theta) = -a \cos \theta \hat{e}_x - a \sin \theta \hat{e}_y, \quad (6.70)$$

como se muestra en el siguiente diagrama de cuerpo libre (Fig.6.24). Además, si  $\vec{F}_{reales} = \vec{N} + m\vec{g}$ , en donde  $\vec{N}$  es la fuerza normal que la plataforma ejerce sobre el bloque y  $m\vec{g}$  es el peso del bloque; en términos de sus componentes cartesianas, estas fuerzas en el sistema de referencia acelerado están dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= N(0, 1) = N\hat{e}_y \\ m\vec{g} &= mg(\sin \theta, -\cos \theta) = mg \sin \theta \hat{e}_x - mg \cos \theta \hat{e}_y, \end{aligned} \quad (6.71)$$

de esta forma la ecuación de movimiento (6.69), en sus componentes cartesianas toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \theta - ma \cos \theta = 0 \\ m\ddot{y} &= -ma \sin \theta - mg \cos \theta + N = 0. \end{aligned} \quad (6.72)$$

La condición que debe cumplirse para evitar el deslizamiento del cuerpo es que la aceleración  $\ddot{\vec{r}}$  del bloque respecto a la plataforma debe ser igual a cero ( $\ddot{x} = 0$  y  $\ddot{y} = 0$ ). De

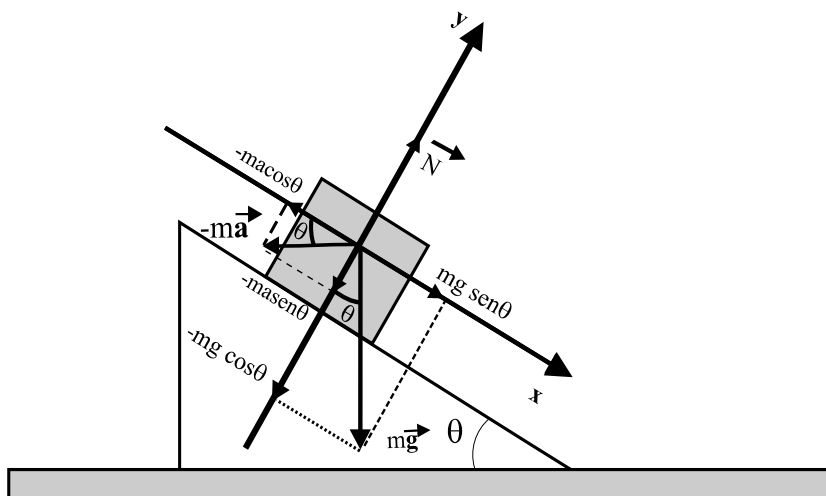


Figura 6.24: Sistema de referencia seleccionado para el diagrama de cuerpo libre de un bloque.

esta forma, para que el cuerpo permanezca en reposo con relación al plano inclinado, podemos despejar la magnitud de la aceleración  $\vec{a}$  de la ecuación (6.72) y así poder encontrar el valor de la normal  $N$ :

$$\begin{aligned}
 a &= g \operatorname{tg} \theta \\
 N &= ma \operatorname{sen} \theta + mg \cos \theta = mg \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \theta + mg \cos \theta \\
 &= mg \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \right) = mg \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) \\
 &= \frac{mg}{\cos \theta}, \tag{6.73}
 \end{aligned}$$

por lo tanto, el bloque tendrá una aceleración paralela a la horizontal en la que descansa el plano inclinado dada por:

$$\vec{a} = (a, 0),$$

en donde:

$$a = g \operatorname{tg} \theta,$$

y como  $\theta = 60^\circ$  y  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ , finalmente obtenemos que:

$$a = g \operatorname{tg} \theta = 16.97 \frac{m}{s^2}.$$

b) Si la aceleración del plano inclinado fuera mayor:  $a' = a + \epsilon = g \operatorname{tg} \theta + \epsilon$ , con  $\epsilon > 0$ , entonces la ecuación de movimiento (6.72) tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= mg \operatorname{sen} \theta - ma' \cos \theta \\
 m\ddot{y} &= -ma' \operatorname{sen} \theta - mg \cos \theta + N = 0 \\
 &\implies \\
 m\ddot{x} &= mg \operatorname{sen} \theta - m(g \operatorname{tg} \theta + \epsilon) \cos \theta = \\
 &= mg \operatorname{sen} \theta - mg \operatorname{sen} \theta - m\epsilon \cos \theta = -m\epsilon \cos \theta \\
 m\ddot{y} &= -m(g \operatorname{tg} \theta + \epsilon) \operatorname{sen} \theta - mg \cos \theta + N = \\
 &= -\frac{mg}{\cos \theta} + N - m\epsilon \operatorname{sen} \theta = 0,
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

en donde  $\ddot{y} = 0$  es la condición para que el bloque permanezca en contacto con el plano inclinado, de esta condición encontramos para la normal:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta} + m\epsilon \operatorname{sen} \theta,$$

de acuerdo con la ecuación (6.74), la aceleración que tendrá el bloque respecto al plano inclinado, estará dada por:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -m\epsilon \cos \theta \\
 &\implies \\
 \ddot{x} &= -\epsilon \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{6.75}$$

esto significa que el bloque se desplazará ascendiendo sobre el plano inclinado con una aceleración de magnitud  $\epsilon \cos \theta$ .

**6-14.-** Un cuerpo está en reposo apoyado sobre un plano inclinado como se muestra en la figura 6.25. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es  $\mu_0$ .

a) Aislar e indicar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y encontrar el valor del coeficiente de rozamiento  $\mu_0$  si el ángulo de inclinación es  $\theta$ .

b) ¿A partir de qué valor de  $\theta'$  el cuerpo empezará a deslizarse hacia abajo del plano?

**Sol:**

a) Seleccionemos un sistema de referencia cartesiano paralelo al plano inclinado como el que se muestra a continuación (Fig. 6.26).

El diagrama de cuerpo libre que resulta se muestra en la figura 6.27. Para encontrar la condición en la que el cuerpo empezará a deslizarse hacia abajo del plano inclinado, utilizamos la segunda ley de Newton:

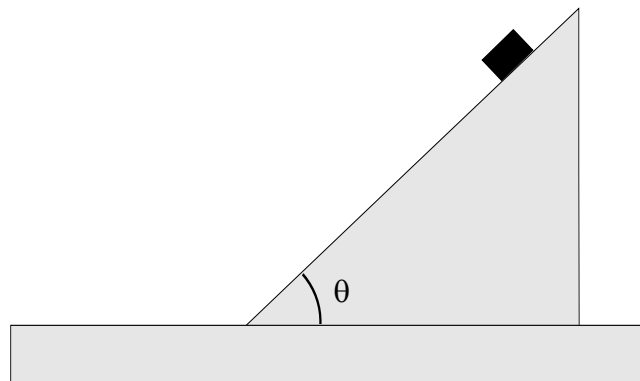


Figura 6.25: Diagrama de un cuerpo en reposo apoyado sobre un plano inclinado.

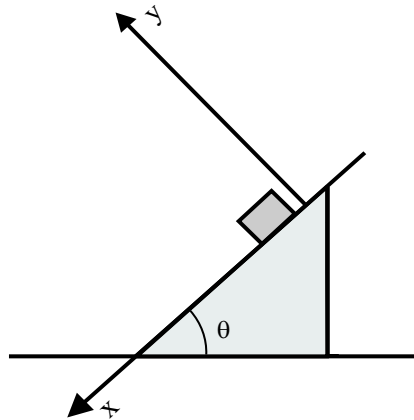


Figura 6.26: Sistema de referencia escogido.

$$m\vec{a} = \vec{F}_{tot.} = 0, \quad (6.76)$$

que de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre (Fig. 6.27) resulta en las siguientes ecuaciones para sus componentes  $x$  y  $y$ :

$$\begin{aligned} ma_x &= mg \operatorname{sen} \theta - \mu_0 N = 0 \\ ma_y &= N - mg \operatorname{cos} \theta = 0, \end{aligned} \quad (6.77)$$

de donde obtenemos que:

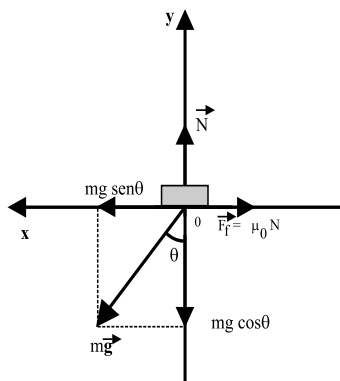


Figura 6.27: Diagrama de cuerpo libre para un bloque en reposo apoyado sobre un plano inclinado.

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \theta \\ \mu_0 N &= mg \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mu_0 mg \cos \theta &= mg \operatorname{sen} \theta \\ \implies \\ \mu_0 &= \operatorname{tg} \theta, \end{aligned}$$

esto significa que el coeficiente de fricción  $\mu_0$  estará dado por  $\mu_0 = \operatorname{tg} \theta$ .

b) El bloque deslizará para ángulos  $\theta' > \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu_0$ .

**6-15.-** Una pintora que tiene una masa de  $60 \text{ kg}$  se encuentra de pie sobre un montacargas de aluminio de  $15 \text{ kg}$  para pintar la fachada de una casa. El montacargas está sujeto por una cuerda que pasa a través de una polea colocada en el techo de la casa y que permite que la pintora se desplace verticalmente (Fig. 6.28).

a) Después de que comienza a jalar la cuerda el montacargas y la pintora ascienden con una aceleración de  $0.8 \frac{m}{s^2}$ . Determine la magnitud de fuerza  $\vec{F}$  que la pintora utilizó para jalar la cuerda

b) Determine la fuerza que ejerce la pintora sobre la cuerda cuando el montacargas asciende con una velocidad constante de  $1 \frac{m}{s}$ . Ignorar la masa de la cuerda

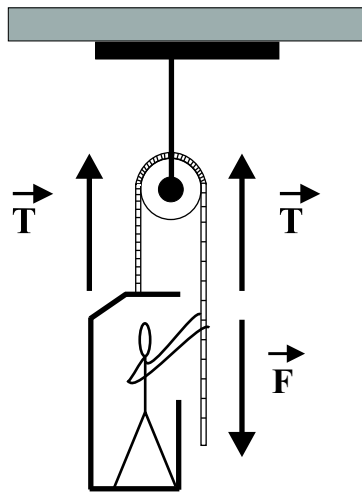


Figura 6.28: Diagrama de un montacargas que es elevado por una polea mediante una cuerda jalada por una pintora.

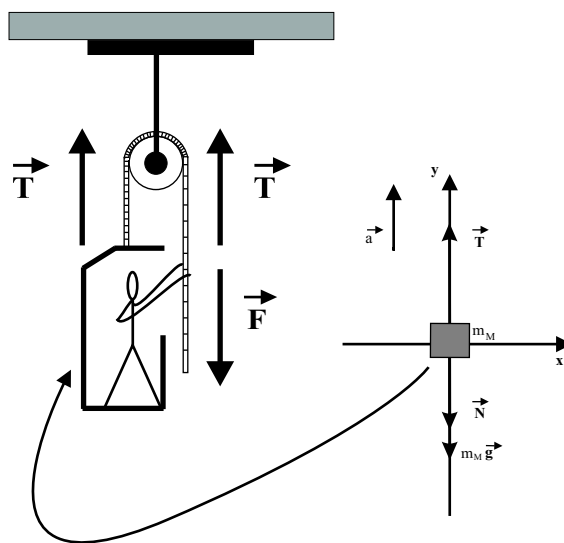


Figura 6.29: Diagrama de cuerpo libre de un montacargas.

**Sol:**

a) Para poder encontrar la fuerza  $\vec{F}$  es necesario que identifiquemos que en todo momento del movimiento del sistema, formado por la pintora y el montacargas, se cumple que la tensión en la cuerda es igual a la fuerza con la que la pintora levanta el montacargas

y a ella misma, es decir:

$$\vec{T} = \vec{F}.$$

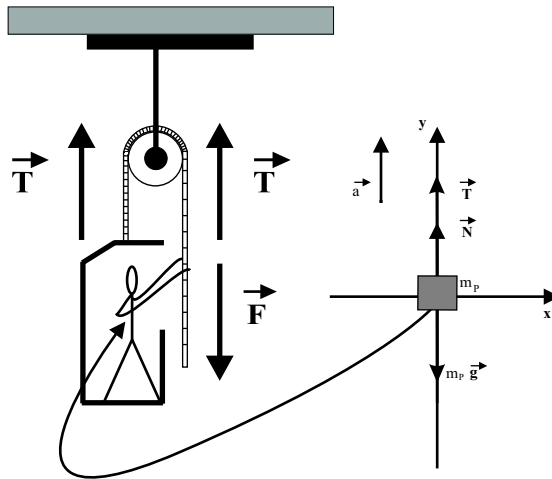


Figura 6.30: Diagrama de cuerpo libre de una pintora.

Partiendo de los diagramas de cuerpo libre del montacargas (Fig. 6.29) y de la pintora (Fig. 6.30), podemos escribir la segunda ley de Newton para cada uno de los componentes del sistema. Para el caso del montacargas que tiene una masa  $m_M$  obtenemos:

$$m_M \vec{a} = \vec{T} + m_M \vec{g} - \vec{N}, \quad (6.78)$$

en donde  $\vec{N}$  es la fuerza normal dirigida hacia abajo y ejercida por la pintora sobre el montacargas, de manera que, en forma de componentes cartesianas, la ecuación vectorial (6.78) tomará la siguiente forma:

$$m_M a_x = 0 \quad (6.79)$$

$$m_M a_y = m_M a = T - m_M g - N, \quad (6.80)$$

de la misma manera, para la pintora de masa  $m_P$  de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.30 tenemos que:

$$m_P \vec{a} = \vec{T} + m_P \vec{g} + \vec{N}, \quad (6.81)$$

en donde  $\vec{N}$  ahora es la fuerza normal dirigida hacia arriba y ejercida por el montacargas sobre la pintora (formando un par de fuerzas que actúan sobre diferentes cuerpos), de

manera que, en forma de componentes cartesianas, la ecuación vectorial (6.81) tomará la forma:

$$m_P a_x = 0 \quad (6.82)$$

$$m_P a_y = m_P a = T - m_P g + N, \quad (6.83)$$

si sumamos las ecuaciones (6.80) y (6.83) obtenemos que:

$$(m_P + m_M) a = 2T - (m_P + m_M) g, \quad (6.84)$$

de donde fácilmente podemos despejar la tensión  $T$ :

$$T = \frac{(m_P + m_M)(a + g)}{2}, \quad (6.85)$$

y si sustituimos los valores numéricos dados para este problema encontramos que:

$$T = 397.5 \text{ N}, \quad (6.86)$$

esto significa que la fuerza con la que la pintora tira de la cuerda es de:

$$F = T = 397.5 \text{ N}.$$

b) Cuando el sistema alcanza una velocidad de  $1.0 \frac{m}{s}$ , la pintora ejerce una fuerza tal que ella y el montacargas suben a una velocidad constante, por lo tanto, la aceleración del sistema es igual a cero ( $\vec{a} = 0$ ); de esta manera la fuerza que la pintora ejerce estará dada por:

$$F = T = \frac{(m_P + m_M)(g)}{2}, \quad (6.87)$$

si sustituimos los valores numéricos dados para este problema encontramos que la fuerza con que la pintora tira de la cuerda es:

$$F = 367.5 \text{ N}. \quad (6.88)$$

**6-16.-** Una pequeña tuerca que tiene una masa de  $100 \text{ g}$  se desliza a lo largo de un alambre semicircular cuyo radio es de  $10 \text{ cm}$  y que gira alrededor de un eje vertical a razón de 2 vueltas por segundo (Fig. 6.31). Determinar los valores de  $\theta$  para los cuales la tuerca permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

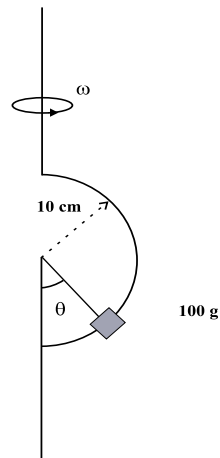


Figura 6.31: Diagrama de una tuerca que se desliza por un alambre semicircular giratorio.

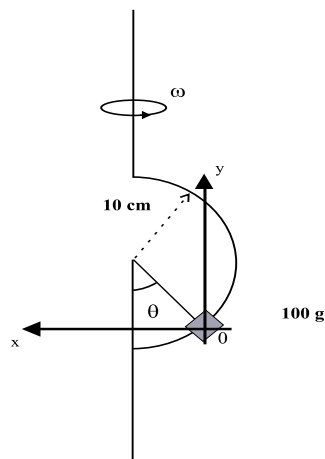


Figura 6.32: Sistema de referencia elegido para la descripción del movimiento de una tuerca en un alambre semicircular giratorio.

**Sol:**

Para resolver este problema nos conviene montar el sistema de referencia de tal forma que: el eje horizontal apunte hacia el eje de giro del anillo circular en el cual se desliza la tuerca describiendo una trayectoria circular respecto a este eje y que el eje vertical apunte en la misma dirección que el peso de la tuerca, pero con el sentido positivo dirigido hacia arriba (Fig. 6.32).

En la figura 6.33 podemos observar el diagrama de cuerpo libre para el caso del ángulo  $\theta$  en el cual la tuerca permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

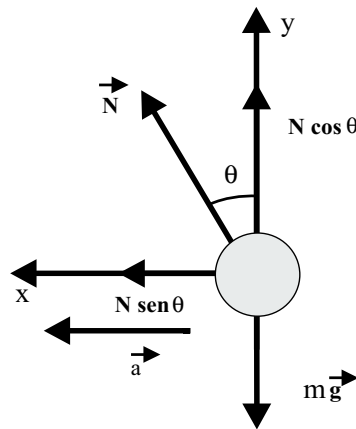


Figura 6.33: Diagrama de cuerpo libre para la tuerca que gira sujeta a un alambre semicircular.

Partiendo del anterior diagrama de cuerpo libre (Fig. 6.33), podemos escribir la segunda ley de Newton para la tuerca de masa  $m$ , obteniendo:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}, \quad (6.89)$$

en donde  $\vec{N}$  es la fuerza normal que el anillo ejerce sobre la tuerca y el vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = \left( \frac{v^2}{R \operatorname{sen} \theta}, 0 \right) = (\omega^2 R \operatorname{sen} \theta, 0), \quad (6.90)$$

que corresponde a la aceleración centrípeta de un objeto que gira alrededor de un eje con una rapidez angular  $\omega$ , a una distancia del centro de giro  $R \operatorname{sen} \theta$ ; en donde  $R$  es el radio del anillo, de esta manera la ecuación (6.89) en componentes cartesianas tomará la forma:

$$\begin{aligned} m\omega^2 R \operatorname{sen} \theta &= N \operatorname{sen} \theta \\ 0 &= N \cos \theta - mg, \end{aligned} \quad (6.91)$$

de donde obtenemos que:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}, \quad (6.92)$$

por lo tanto:

$$m\omega^2 R \operatorname{sen} \theta = \left( \frac{mg}{\cos \theta} \right) \operatorname{sen} \theta = mg \operatorname{tg} \theta$$

$$\implies \omega^2 R = \frac{g}{\cos \theta} \quad (6.93)$$

$$\implies \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}, \quad (6.94)$$

esto significa que el valor de  $\theta$  en el cual la tuerca permanece estacionaria respecto al alambre giratorio está dado por:

$$\theta = \arccos \left( \frac{g}{\omega^2 R} \right), \quad (6.95)$$

si  $\omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ :

$$\theta = \arccos \left[ \frac{9.8}{0.1(4\pi)^2} \right] = 51.64^\circ. \quad (6.96)$$

- 6-17.-** Un bloque se encuentra apoyado sobre una plataforma que se mueve con una aceleración constante igual a  $\frac{g}{4}$  y en la dirección que se indica en la figura 6.34. ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto para evitar que el cuerpo se deslice sobre la plataforma?

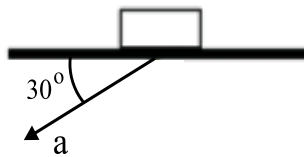


Figura 6.34: Movimiento relativo de un bloque respecto a una plataforma acelerada.

**Sol:**

Para escribir la ecuación de movimiento del bloque de masa  $m$  respecto a la plataforma que se mueve con aceleración  $\vec{a}$  y en una dirección de  $30^\circ$  por debajo de la horizontal,

debemos recordar la forma que toma la segunda ley de Newton para los sistemas de referencia acelerados:

$$m \vec{\ddot{\mathbf{r}}} = -m \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{F}}_{reales}, \quad (6.97)$$

en donde  $\vec{\mathbf{a}}$  corresponde a la aceleración que tiene el sistema de referencia acelerado,  $\vec{\ddot{\mathbf{r}}}$  es la aceleración de la partícula respecto a este sistema y  $\vec{\mathbf{F}}_{reales}$  corresponde a la fuerza total “real” que actúa sobre la partícula de masa  $m$ .

Para este problema escogemos la dirección de los ejes del sistema de referencia acelerado, de manera que:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{g}{4}(\cos 30, -\sin 30) = \frac{g}{4} \cos 30 \hat{e}_x - \frac{g}{4} \sin 30 \hat{e}_y, \quad (6.98)$$

además,  $\vec{\mathbf{F}}_{reales} = \vec{\mathbf{N}} + m \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{F}}_f$ , en donde  $\vec{\mathbf{N}}$  es la fuerza normal que la plataforma ejerce sobre el bloque,  $\vec{\mathbf{F}}_f$  es la fuerza de rozamiento entre el bloque y la plataforma con un coeficiente de rozamiento estático  $\mu_S$  y  $m \vec{\mathbf{g}}$  es el peso del bloque, en términos de sus componentes cartesianas estas fuerzas en el sistema de referencia acelerado están dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}} &= (0, N) = N \hat{e}_y \\ m \vec{\mathbf{g}} &= (0, -mg) = -mg \hat{e}_y \\ \vec{\mathbf{F}}_f &= (\mu_S N, 0) = \mu_S N \hat{e}_x, \end{aligned} \quad (6.99)$$

en donde para la fuerza de rozamiento, que siempre se opone al movimiento, hemos escrito  $\vec{\mathbf{F}}_f = \mu_S N \hat{e}_x$ , porque el movimiento del bloque en la dirección  $x$  sería hacia la derecha en ausencia de esta fuerza, dirección que escogimos como la dirección negativa de las  $x$  (Fig. 6.35). Por lo tanto, la ecuación de movimiento (6.97) en sus componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -\frac{mg}{4} \cos 30 + \mu_S N \\ m \ddot{y} &= \frac{mg}{4} \sin 30 + N - mg. \end{aligned} \quad (6.100)$$

La condición necesaria para evitar que el cuerpo deslice sobre la plataforma es que las aceleraciones  $\ddot{x}$  y  $\ddot{y}$  del bloque respecto a la plataforma deben ser iguales a cero ( $\ddot{x} = 0$  y  $\ddot{y} = 0$ ). De esta forma, si sustituimos estos valores en la ecuación anterior podemos determinar el valor del coeficiente de rozamiento resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{mg}{4} \cos 30 + \mu_S N \\ 0 &= \frac{mg}{4} \sin 30 + N - mg, \end{aligned} \quad (6.101)$$

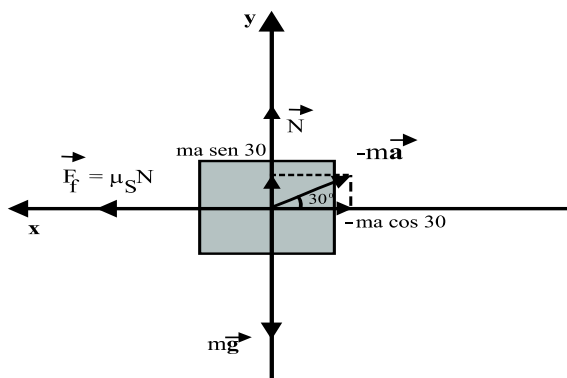


Figura 6.35: Diagrama de cuerpo libre considerado para el planteamiento de la segunda ley de Newton.

de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 N &= -\frac{mg}{4} \operatorname{sen} 30 + mg = \frac{7}{8}mg \\
 \mu_S &= \frac{\frac{mg}{4} \cos 30}{\frac{7}{8}mg} = \frac{\sqrt{3}}{7},
 \end{aligned} \tag{6.102}$$

es decir, para evitar que el cuerpo se deslice sobre la plataforma, el coeficiente de rozamiento entre ambos debe ser de  $\mu_S = \frac{\sqrt{3}}{7}$ .

- 6-18.-** Una fuerza  $\vec{F}$  que tiene una magnitud de  $15\text{ N}$  y una orientación de  $15^\circ$  por debajo de la horizontal, actúa sobre un bloque de  $3.5\text{ kg}$  a través del piso, tal y como se muestra en la figura 6.36. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el piso es de  $0.25$ . Calcule las magnitudes de la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre el bloque y de la aceleración del bloque.

**Sol:**

Para resolver este problema es necesario que en el sistema de referencia que se elija el eje horizontal apunte en dirección paralela a la superficie horizontal con el sentido positivo hacia la derecha del bloque y que el eje vertical apunte con el sentido positivo dirigido hacia arriba, tal como se muestra en la figura 6.37.

Partiendo del diagrama de cuerpo libre de la figura 6.37, podemos escribir la segunda ley de Newton para el bloque de masa  $m$ , obteniendo:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f, \tag{6.103}$$

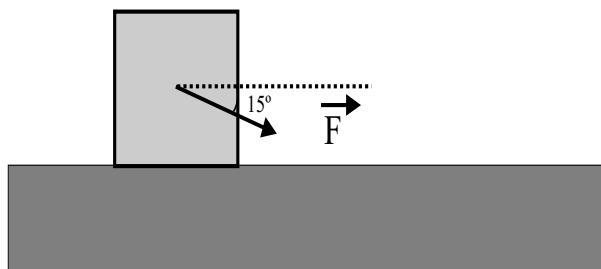


Figura 6.36: Movimiento de un bloque sobre una superficie con fricción bajo la acción de una fuerza  $\vec{F}$  dirigida a  $15^\circ$  por debajo de la horizontal.

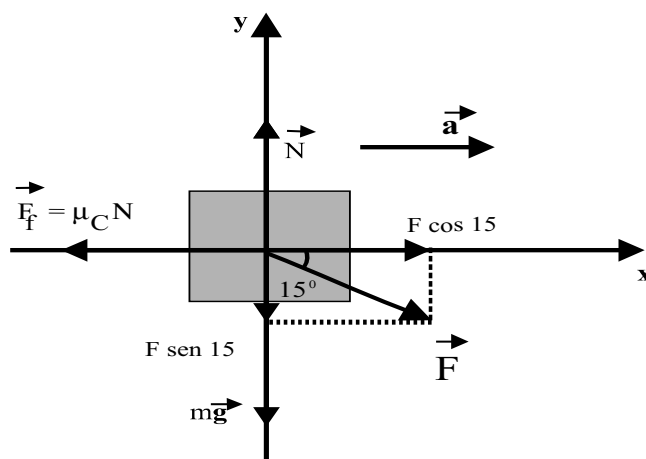


Figura 6.37: Diagrama de cuerpo libre para un bloque que se desplaza sobre una superficie con fricción bajo la acción de una fuerza  $\vec{F}$  dirigida a  $15^\circ$  por debajo de la horizontal.

en donde  $\vec{N}$  es la fuerza normal que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque,  $\vec{F}_f$  es la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie horizontal,  $m\vec{g}$  es el peso del bloque y  $\vec{F}$  es la fuerza que externa que actúa sobre el bloque. El vector aceleración está dado por:

$$\vec{a} = (a, 0), \quad (6.104)$$

de manera que, en componentes cartesianas la ecuación (6.103) se escribe como:

$$\begin{aligned} ma &= F \cos 15 - \mu_C N \\ 0 &= N - F \sin 15 - mg, \end{aligned} \quad (6.105)$$

de donde obtenemos que:

$$N = mg + F \operatorname{sen} 15, \quad (6.106)$$

por lo tanto:

$$ma = F [\cos 15 - \mu_C \operatorname{sen} 15] - \mu_C mg, \quad (6.107)$$

finalmente se encuentra que:

$$a = \frac{F}{m} [\cos 15 - \mu_C \operatorname{sen} 15] - \mu_C g, \quad (6.108)$$

y como  $\mu_C = 0.25$ ,  $F = 15 \text{ N}$ ,  $m = 3.5 \text{ kg}$  y  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  obtenemos:

$$a = \frac{F}{m} [\cos 15 - \mu_C \operatorname{sen} 15] - \mu_C g = 1.41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (6.109)$$

y la fuerza de fricción estará dada por:

$$F_f = \mu_C N = \mu_C [mg + F \operatorname{sen} 15] = 9.55 \text{ N}. \quad (6.110)$$

**6-19.-** Un bloque de masa  $m_1$  se coloca sobre un plano inclinado que tiene un ángulo  $\alpha$  y que está conectado a otro bloque de masa  $m_2$  que cuelga de un cordel que pasa por una polea sin fricción (Fig. 6.38). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa  $m_1$  y el plano inclinado es  $\mu_c$ . Determine el valor de la masa  $m_2$  cuando el bloque de masa  $m_1$ :

- a) Sube por el plano inclinado con una aceleración  $\vec{a}$ .
- b) Baja por el plano inclinado con una aceleración  $\vec{a}$ .

**Sol:**

a) Si el bloque de masa  $m_1$  sube por el plano inclinado, de acuerdo al siguiente diagrama de cuerpo libre (Fig. 6.39), la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m_1 a_{1x} &= F_{res_{1x}} = T - \mu_c N - m_1 g \operatorname{sen} \alpha \\ m_1 a_{1y} &= F_{res_{1y}} = N - m_1 g \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.111)$$

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre para el bloque de masa  $m_2$  (Fig. 6.40), la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas toma la forma:

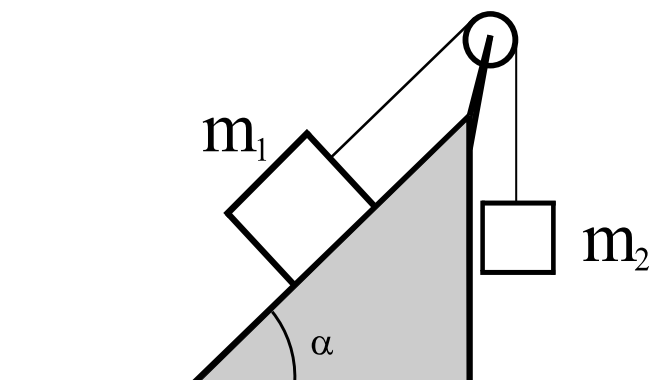


Figura 6.38: Sistema de dos bloques conectados a través de un cordel que pasa por una polea sin fricción.

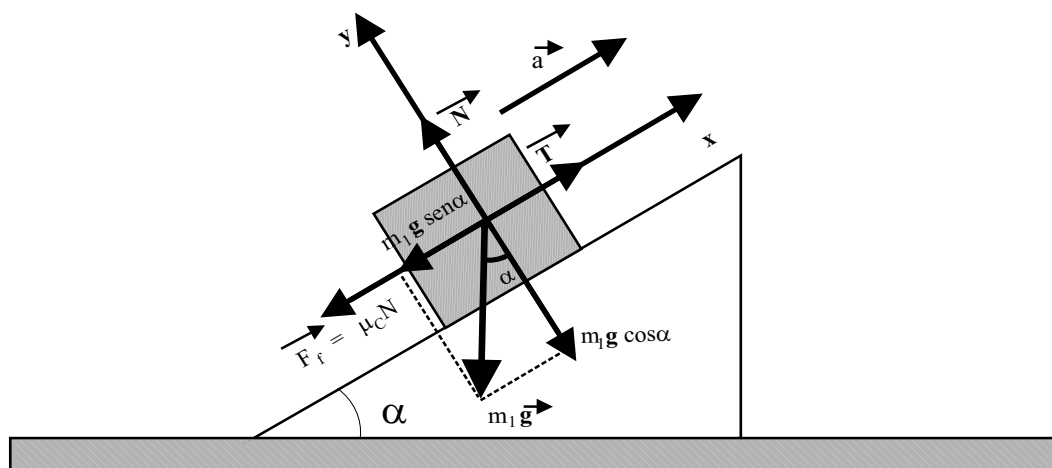


Figura 6.39: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa  $m_1$ .

$$\begin{aligned} m_2 a_{2x} &= F_{res_{2x}} = 0 \\ m_2 a_{2y} &= F_{res_{2y}} = m_2 g - T. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Ahora, si combinamos las relaciones para las coordenadas  $x$  y  $y$  de la ecuación (6.111) con la de la coordenada  $y$  de la ecuación (6.112), obtenemos, considerando adicionalmente que  $a_{1x} = a_{2y} = a$ , ya que la cuerda que une ambos cuerpos es inextensible:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{res_{1x}} = T - \mu_C m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha \\ m_2 a &= F_{res_{2y}} = m_2 g - T, \end{aligned} \quad (6.113)$$

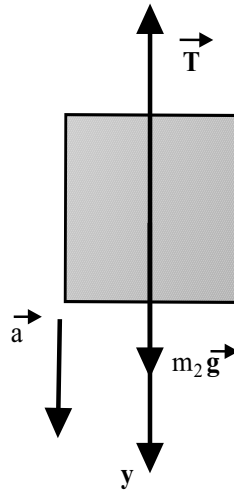


Figura 6.40: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa  $m_2$ .

al sumar estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$(m_1 + m_2)a = m_2g - \mu_C m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha, \quad (6.114)$$

si de esta ecuación despejamos  $m_2$ , finalmente obtenemos el valor de  $m_2$  para el caso en el que el bloque de masa  $m_1$  sube por el plano inclinado:

$$m_2 = \frac{m_1 [a + g(\mu_C \cos \alpha + \sin \alpha)]}{g - a}. \quad (6.115)$$

b) Si ahora el bloque de masa  $m_1$  desciende por el plano inclinado, de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la figura 6.41, para el bloque de masa  $m_1$  la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas se escribe como:

$$\begin{aligned} m_1 a_{1x} &= F_{res1x} = m_1 g \sin \alpha - T - \mu_C N \\ m_1 a_{1y} &= F_{res1y} = N - m_1 g \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.116)$$

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre del bloque de masa  $m_2$  (Fig. 6.42), la segunda ley de Newton en su forma de componentes cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} m_2 a_{2x} &= F_{res2x} = 0 \\ m_2 a_{2y} &= F_{res2y} = T - m_2 g. \end{aligned} \quad (6.117)$$

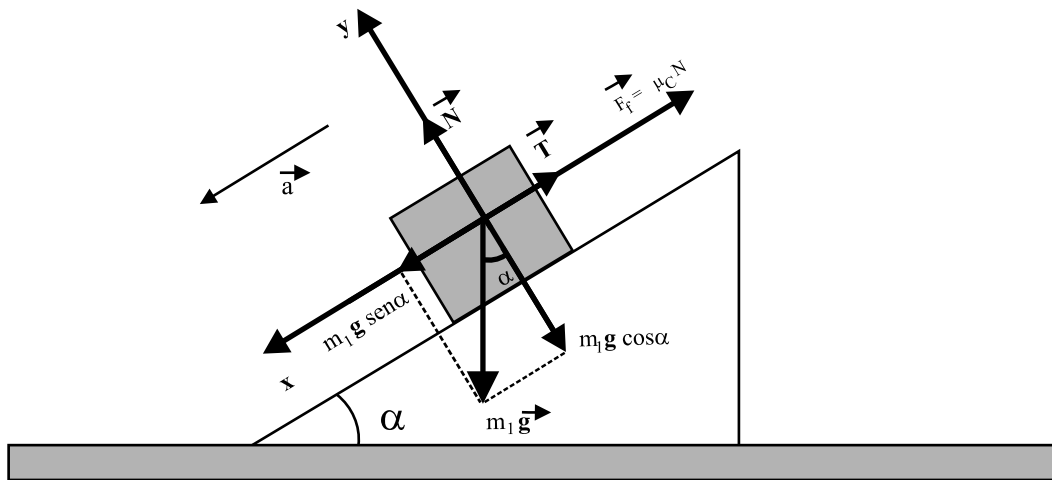


Figura 6.41: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa  $m_1$ .

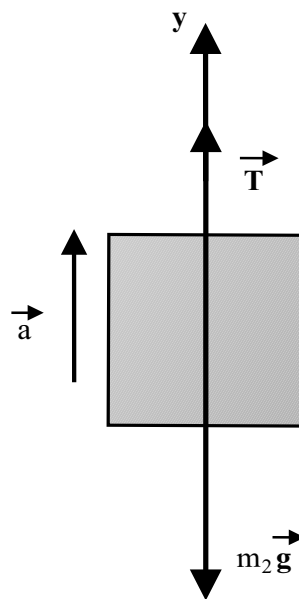


Figura 6.42: Diagrama de cuerpo libre de un bloque con una masa  $m_2$ .

Ahora, si combinamos las relaciones para las coordenadas  $x$  y  $y$  de la ecuación (6.116) con la de la coordenada  $y$  de la ecuación (6.117), obtenemos, considerando adicionalmente que  $a_{1x} = a_{2y} = a$ , ya que la cuerda que une ambos cuerpos es inextensible:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{res1x} = m_1 g \sin \alpha - T - \mu_C m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a &= F_{res2y} = T - m_2 g, \end{aligned} \quad (6.118)$$

al sumar estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g \sin \alpha - m_2 g - \mu_C m_1 g \cos \alpha, \quad (6.119)$$

si de esta ecuación despejamos  $m_2$ , finalmente obtenemos el valor de  $m_2$  para el caso en el que el bloque de masa  $m_1$  baja por el plano inclinado:

$$m_2 = \frac{m_1 [g(\sin \alpha - \mu_C \cos \alpha) - a]}{g + a}. \quad (6.120)$$

**6-20.-** Considere el sistema de la siguiente figura (Fig. 6.43) en donde el bloque  $A$  tiene una masa  $m_A$  y el bloque  $B$  tiene una masa  $m_B$ . Una vez que el bloque  $B$  se pone en movimiento desciende con rapidez constante.

a) Calcule el coeficiente de fricción cinética  $\mu_C$  entre el bloque  $A$  y la superficie de la mesa.

b) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración del sistema, si ahora un gato, también de masa  $m_A$ , se queda dormido sobre el bloque  $A$ . Inicialmente el sistema está en movimiento con el bloque  $B$  descendiendo.

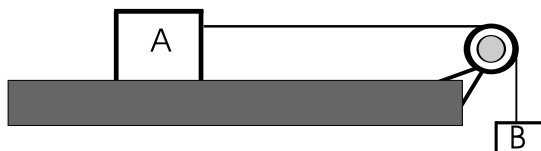


Figura 6.43: Sistema de dos bloques unidos por una cuerda que pasa por una polea sin fricción.

**Sol:**

a) Para resolver cualquier problema en el que se aplican las leyes de Newton es necesario hacer el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos que constituyen el sistema físico en cuestión. Que en este caso está formado por dos bloques de masas  $m_A$  y  $m_B$ , cuyos diagramas de cuerpo libre pueden observarse en la figura 6.44. En este problema no es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre para la cuerda ya que es inextensible y posee una masa despreciable.

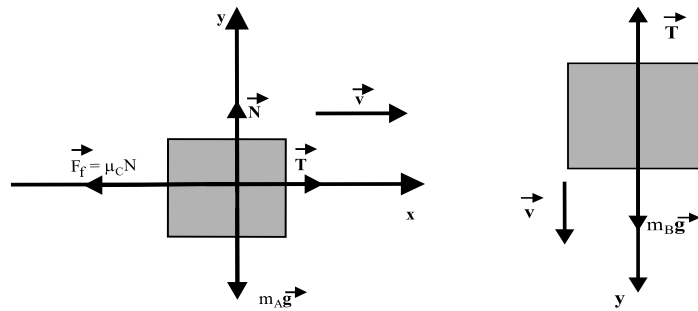


Figura 6.44: Diagrama de cuerpo libre de los cuerpos de masa  $m_A$  y  $m_B$ .

En los diagramas, además de señalar las fuerzas que actúan sobre cada bloque, también se señala la dirección de la velocidad constante que posee cada bloque.

De acuerdo con estos diagramas, la segunda ley de Newton para el cuerpo  $A$  toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_C N = 0 \\ \Sigma F_{y_A} &= N - m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.121}$$

y para el bloque  $B$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T = 0,\end{aligned}\tag{6.122}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}N &= m_A g \\ T &= \mu_C m_A g \\ T &= m_B g,\end{aligned}\tag{6.123}$$

por consiguiente, el coeficiente de fricción cinética  $\mu_C$  entre el bloque  $A$  y la superficie estará dado por:

$$\begin{aligned}m_B &= \mu_C m_A \\ \Rightarrow \\ \mu_C &= \frac{m_B}{m_A}.\end{aligned}\tag{6.124}$$

b) En este caso el sistema se acelerará en una dirección desconocida y el coeficiente de fricción cinética está dado por  $\mu_C = \frac{m_B}{m_A}$ , porque aún cuando hay una aceleración  $\vec{a}$ , las propiedades de la superficie no cambian y por lo tanto, el coeficiente de fricción sigue teniendo el valor encontrado en el inciso anterior. Por otra parte, al estar el gato encima del bloque  $A$  y tener la misma masa que éste, el conjunto bloque más gato forma un nuevo objeto de masa  $2m_A$ .

En los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa  $2m_A$  y  $m_B$  (Fig. 6.45), se señalan, además de las fuerzas que actúan sobre cada bloque, una dirección para la aceleración de cada bloque hipotéticamente correcta, por otra parte, como la cuerda es inextensible la aceleración de los dos bloques es la misma ( $a_{Ax} = a_{By} = a$ ).

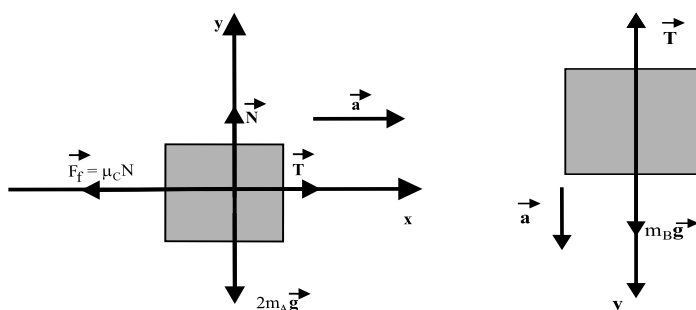


Figura 6.45: Diagrama de cuerpo libre de los bloques de masa  $2m_A$  y  $m_B$ .

De acuerdo con estos diagramas de cuerpo libre (Fig. 6.45), la segunda ley de Newton para el cuerpo  $A$  de masa  $2m_A$  toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_A} &= T - \mu_C N = 2m_A a_{Ax} = 2m_A a \\ \Sigma F_{y_A} &= N - 2m_A g = 0,\end{aligned}\tag{6.125}$$

y para el bloque  $B$  toma la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= m_B g - T \\ &= m_B a_{By} = m_B a,\end{aligned}\tag{6.126}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}2m_A a &= T - \mu_C N \\ m_B a &= m_B g - T, \\ N &= 2m_A g,\end{aligned}\tag{6.127}$$

de donde encontramos:

$$\begin{aligned} 2m_A a &= T - 2\mu_C m_A g \\ m_B a &= m_B g - T, \end{aligned} \quad (6.128)$$

ahora, al sumar estas dos últimas ecuaciones obtenemos para la aceleración:

$$(2m_A + m_B) a = m_B g - 2\mu_C m_A g, \quad (6.129)$$

donde:

$$\mu_C = \frac{m_B}{m_A},$$

y finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} (2m_A + m_B) a &= m_B g - 2 \left( \frac{m_B}{m_A} m_A \right) g \\ &\Rightarrow \\ (2m_A + m_B) a &= m_B g - 2m_B g = -m_B g \\ &\Rightarrow \\ a &= \frac{-m_B g}{2m_A + m_B}. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Por lo tanto, la aceleración de los bloques será:

$$a = -\frac{m_B g}{2m_A + m_B}. \quad (6.131)$$

Este resultado muestra que la aceleración en realidad tiene una dirección contraria a la planteada inicialmente, por lo que si el bloque  $B$  desciende, en algún momento, se detendrá debido a la aceleración negativa encontrada en la ecuación (6.131).

- 6-21.-** Una de las atracciones de una feria es el “columpio gigante”, el cual está formado por un eje vertical central y de cuya parte superior se desprenden horizontalmente varios brazos (Fig. 6.46). Cada brazo sostiene un asiento de masa arbitraria ( $m_C$ ) suspendido de un cable de  $5 m$  sujeto al brazo en un punto a  $3 m$  del eje vertical. Calcule el tiempo de una revolución del columpio tomando en cuenta que el cable forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical.

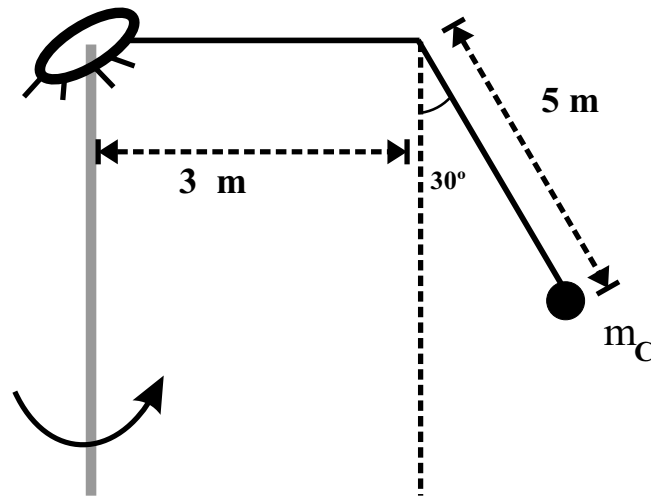


Figura 6.46: Diagrama de un columpio.

**Sol:**

En este problema el columpio describe un movimiento circular uniforme sobre un plano horizontal perpendicular a su propio eje de giro, la rapidez del columpio será constante en todo punto de la trayectoria circular y por lo tanto, la aceleración para el cuerpo estará dada por:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{v^2}{R} = \frac{\frac{(2\pi R)^2}{(\tau)^2}}{R} = \\
 &= \frac{4\pi^2 R}{\tau^2},
 \end{aligned}
 \tag{6.132}$$

en donde  $R$  es el radio de giro de la partícula y  $\tau$  es el periodo del movimiento circular.

Como siempre, debemos plantear el diagrama de cuerpo libre de la partícula moviéndose en una trayectoria circular (Fig. 6.47).

La segunda ley de Newton en este problema toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= T \operatorname{sen} \theta = m_C a \\
 \Sigma F_y &= T \cos \theta - m_C g = 0,
 \end{aligned}
 \tag{6.133}$$

con la aceleración dada por la ecuación (6.132) y  $\theta = 30^\circ$ , despejando la tensión de la última ecuación (6.133) y si la sustituimos en la primera obtenemos:

$$a = g \operatorname{tg} \theta,
 \tag{6.134}$$

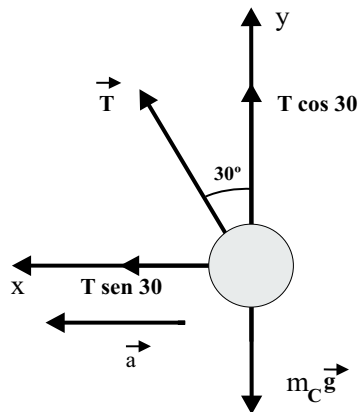


Figura 6.47: Diagrama de cuerpo libre para el columpio.

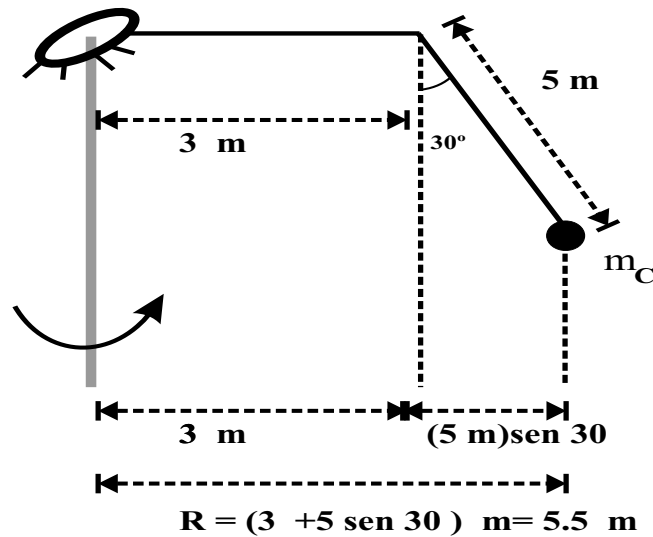


Figura 6.48: Determinación del radio de la circunferencia que describe el columpio.

y si sustituimos la aceleración en la ecuación (6.132) obtenemos:

$$\frac{4\pi^2 R}{\tau^2} = g \operatorname{tg} \theta,$$

ahora, para obtener el valor del periodo  $\tau$  necesitamos conocer el radio de giro del

columpio, que de acuerdo con la figura 6.48,  $R$  está dado por:

$$\begin{aligned} R &= (3 + 5 \operatorname{sen} \theta) m \\ &\Rightarrow \\ R &= 5.50 m. \end{aligned}$$

De esta manera el periodo del movimiento estará dado por:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4\pi^2 (3 + 5 \operatorname{sen} \theta)}{g \operatorname{tg} \theta} \\ &\Rightarrow \\ \tau &= \sqrt{\frac{4\pi^2 (3 + 5 \operatorname{sen} \theta)}{g \operatorname{tg} \theta}}, \end{aligned} \quad (6.135)$$

si tomamos los valores numéricos del problema  $\theta = 30^\circ$  y  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ , el tiempo que dura cada revolución del columpio será:

$$\tau = 6.19 s.$$

**6-22.-** Dos bloques cuyos pesos son  $w_A$  y  $w_B$  están sostenidos sobre un plano inclinado por medio de un cable (Fig. 6.49), sin que exista fricción entre éstos y la superficie del plano.

- Calcule la tensión en la cuerda que conecta los bloques, en términos de  $w_A$ ,  $w_B$  y del ángulo  $\alpha$ .
- Calcule la tensión en la cuerda que conecta el bloque  $B$  a la pared.
- Calcule la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre cada bloque.
- Interprete sus respuestas para los casos en que  $\alpha = 0^\circ$  y  $\alpha = 90^\circ$ .

**Sol:**

Para resolver los incisos  $a)$ ,  $b)$  y  $c)$  de este problema, debemos plantear el diagrama de cuerpo libre del bloque A que tiene una masa  $m_A = \frac{w_A}{g}$  (Fig. 6.50) y del bloque B que tiene una masa  $m_B = \frac{w_B}{g}$  (Fig. 6.51).

De acuerdo con estos diagramas de cuerpo libre, la segunda ley de Newton para el cuerpo A toma la forma:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{x_A} &= T_1 - m_A g \operatorname{sen} \alpha = 0 \\ \Sigma F_{y_A} &= N_A - m_A g \cos \alpha = 0, \end{aligned} \quad (6.136)$$

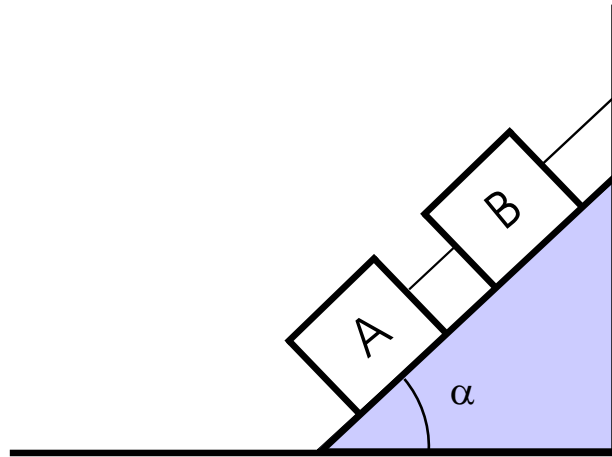


Figura 6.49: Diagrama de un sistema de bloques sobre un plano inclinado sin fricción.

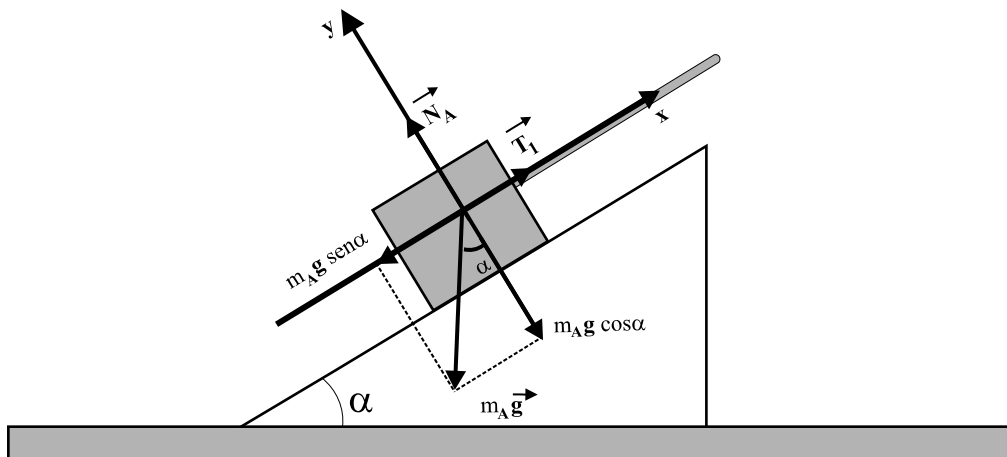


Figura 6.50: Diagrama de cuerpo libre del bloque A.

y para el bloque  $B$ , tomará la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_B} &= T_2 - T_1 - m_B g \sin \alpha = 0 \\ \Sigma F_{y_B} &= N_B - m_B g \cos \alpha = 0,\end{aligned}\tag{6.137}$$

en donde  $T_1$  es la tensión en la cuerda que conecta los bloques,  $T_2$  es la tensión en la cuerda que conecta el bloque  $B$  a la pared,  $N_A$  es la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el bloque  $A$  y  $N_B$  es la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el bloque  $B$ , si despejamos cada una de estas fuerzas de las relaciones (6.136) y (6.137) obtenemos que:

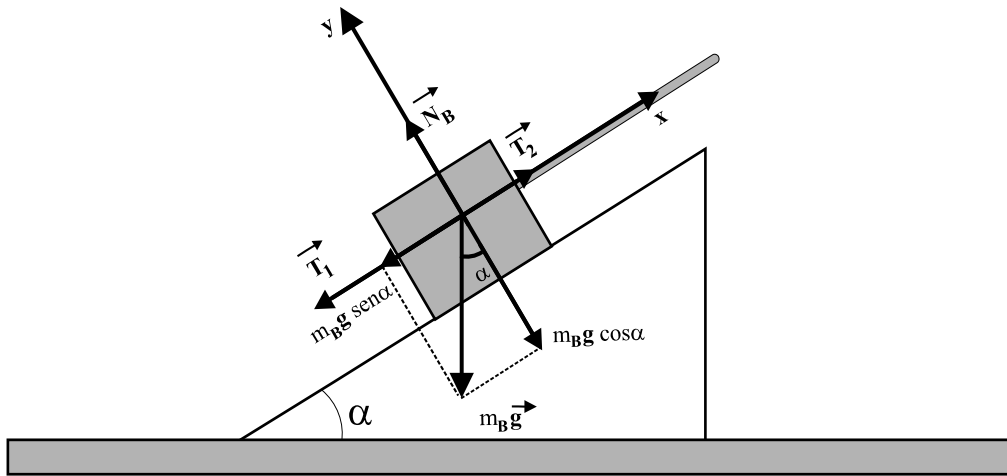


Figura 6.51: Diagrama de cuerpo libre del bloque B.

$$\begin{aligned}
 T_1 &= m_A g \operatorname{sen} \alpha \\
 T_2 &= T_1 + m_B g \operatorname{sen} \alpha = m_A g \operatorname{sen} \alpha + m_B g \operatorname{sen} \alpha \\
 &= g \operatorname{sen} \alpha (m_A + m_B) \\
 N_A &= m_A g \cos \alpha \\
 N_B &= m_B g \cos \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{6.138}$$

d) Los resultados anteriores se pueden fácilmente interpretar para el caso en que  $\alpha = 0^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= m_A g \operatorname{sen} \alpha = 0 \\
 T_2 &= (m_A + m_B) g \operatorname{sen} \alpha = 0 \\
 N_A &= m_A g \cos \alpha = m_A g \\
 N_B &= m_B g \cos \alpha = m_B g,
 \end{aligned}
 \tag{6.139}$$

es decir, cuando  $\alpha = 0^\circ$  las tensiones en las cuerdas se anulan ya que éstas no necesitan equilibrarse con otra fuerza y las normales ejercidas sobre cada bloque son iguales a los pesos de los bloques correspondientes.

Ahora, para el caso en que  $\alpha = 90^\circ$ , los resultados también se pueden interpretar fácilmente:

$$\begin{aligned}T_1 &= m_A g \operatorname{sen} \alpha = m_A g \\T_2 &= (m_A + m_B) g \operatorname{sen} \alpha = \\&= (m_A + m_B) g \\N_A &= m_A g \cos \alpha = 0 \\N_B &= m_B g \cos \alpha = 0,\end{aligned}\tag{6.140}$$

es decir, cuando  $\alpha = 90^\circ$  las normales ejercidas sobre cada bloque se anulan ya que éstas no necesitan equilibrarse con otra fuerza que se este ejerciendo sobre los bloques en la dirección perpendicular al plano, que ya no es inclinado sino que ahora es una pared vertical, así, la tensión  $T_1$  es igual al peso del bloque  $A$  y la tensión  $T_2$  es igual a la suma de los pesos de los bloques  $A$  y  $B$ , la tensión en la cuerda superior sujeta al techo, debe equilibrar el peso de los dos bloques que cuelgan de ella.

# Capítulo 7

## Trabajo y energía cinética

7-1.- Una bala de 10 g viaja con una velocidad de  $1200 \frac{m}{s}$ .

- a) Determine la energía cinética en Joules.
- b) Si la masa se reduce a la mitad, ¿cuál será su energía cinética?
- c) Si la velocidad se duplica, ¿cuál será su energía cinética?

**Sol:**

a) La energía cinética de la bala está dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (7.1)$$

en donde:

$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg} \\ v &= 1200 \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

por lo tanto, la energía cinética expresada en Joules será:

$$K = \frac{1}{2}(0.01 \text{ kg})\left(1200 \frac{m}{s}\right)^2 = 7200 \left(\text{kg} \frac{m^2}{s^2}\right) = 7200 \text{ J} = K_{original} \quad (7.3)$$

b) Si la masa de la bala se reduce a la mitad, es decir:

$$M = \frac{m}{2}, \quad (7.4)$$

la energía cinética de la bala estará dada por:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{2} \right) v^2 \\
 &= \frac{1}{2} K_{original} = 3600 \text{ J},
 \end{aligned}$$

esto significa que la nueva energía cinética de la bala será ahora la mitad de la energía cinética original.

c) Si la velocidad de la bala se duplica, es decir:

$$v' = 2v,$$

sin cambiar la masa original de la bala, la energía cinética estará dada por:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} m (v')^2 = \frac{1}{2} m (2v)^2 = 4 \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \\
 &= 28800 \text{ J} = 4K_{original},
 \end{aligned}$$

es decir, la energía cinética será cuatro veces mayor que la energía cinética original.

**7-2.-** Una niña aplica una fuerza  $F_x$  paralela al eje  $x$  sobre un trineo de  $10 \text{ kg}$  que se mueve sobre la superficie congelada de un estanque. La niña controla la fuerza que aplica sobre el trineo y la componente  $x$  de esta fuerza varía con la coordenada  $x$  del trineo tal y como se muestra en la figura 7.1. Calcule el trabajo efectuado por la fuerza  $F_x$  que aplica la niña cuando el trineo se mueve:

- De  $x = 0 \text{ m}$  a  $x = 8 \text{ m}$ .
- De  $x = 8 \text{ m}$  a  $x = 12 \text{ m}$ .
- De  $x = 0 \text{ m}$  a  $x = 12 \text{ m}$ .

Desprecie los efectos de la fricción entre el trineo y el estanque.

**Sol:**

Al desplazar el trineo de  $A \rightarrow B$  el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas externas ( $F_x$ ), entre estos puntos para el caso unidimensional, estará dado por el área bajo la curva  $F_x$  vs  $x$ , como podemos observar en la figura 7.2.

a) De esta forma el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen  $x = 0 \text{ m}$  hasta  $x = 8 \text{ m}$  estará dado por el área de la región  $I$  que está sombreada en la gráfica de la figura 7.2:

$$W_{x=0 \rightarrow x=8} = A_I,$$

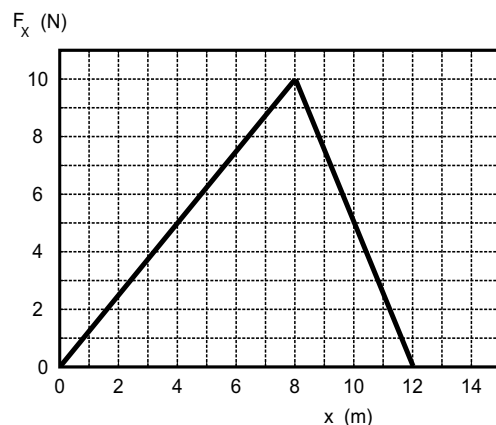


Figura 7.1: Variación de la fuerza  $F_x$  con la distancia cuando es aplicada sobre un trineo.

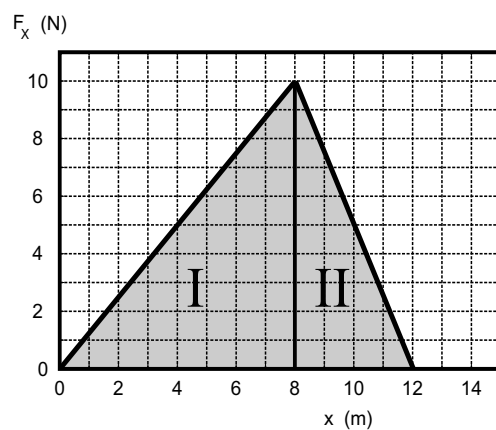


Figura 7.2: Cálculo del área bajo la curva para obtener el trabajo mecánico realizado por la fuerza que se aplica sobre un trineo.

en donde:

$$A_I = \left( \frac{10 \cdot 8}{2} \right) \quad J = 40 \text{ J},$$

y por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=8} = 40 \text{ J}.$$

b) De igual forma, el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde  $x = 8 \text{ m}$  hasta  $x = 12 \text{ m}$  estará dado por el área de la región II que está sombreada en la gráfica

anterior (Fig. 7.2):

$$W_{x=8 \rightarrow x=12} = A_{II} = \left( \frac{10 \cdot 4}{2} \right) \quad J = 20 \text{ J.}$$

c) El trabajo total efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen  $x = 0 \text{ m}$  hasta  $x = 12 \text{ m}$  estará dado por el área total de las regiones  $I$  y  $II$  que están sombreadas en la gráfica anterior (Fig. 7.2):

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=12} &= W_{x=0 \rightarrow x=8} + W_{x=8 \rightarrow x=12} = \\ &= A_I + A_{II} = (40 + 20) \text{ J} = 60 \text{ J.} \end{aligned}$$

**7-3.-** Suponiendo que el trineo del problema anterior está inicialmente en reposo en  $x = 0 \text{ m}$ . Usando el teorema trabajo-energía, determine la rapidez del trineo en:

a)  $x = 8 \text{ m}$ .

b)  $x = 12 \text{ m}$ .

**Sol:**

a) En su forma más general el teorema trabajo-energía cinética establece que el trabajo realizado por la resultante de todas las fuerzas externas que realizan trabajo sobre un objeto físico es igual al cambio en la energía cinética de este objeto, es decir:

$$W_{AB} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

en donde  $A$  y  $B$  son los puntos inicial y final del desplazamiento, respectivamente. Durante este desplazamiento se ha realizado sobre el objeto una cantidad de trabajo  $W_{AB}$ , por lo tanto, si el trineo inicialmente se encontraba en reposo en el punto  $A$  ( $x = 0 \text{ m}$ ) y queremos conocer su rapidez en el punto  $B$  ( $x = 8 \text{ m}$ ) y de acuerdo al resultado del inciso a) del problema anterior:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=8} &= 40 \text{ J} = K_B - K_A \\ &= K_B - 0 = K_B = \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta  $x = 8 \text{ m}$  será:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\left( \frac{2W_{x=0 \rightarrow x=8}}{m} \right) \frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{80}{10}} \frac{m}{s} \\ &= 2.83 \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

b) Ahora, si deseamos determinar la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta  $x = 12 \text{ m}$ , que sería el punto  $C$  del desplazamiento y partiendo desde el origen  $x = 0 \text{ m}$ , de acuerdo al resultado del inciso c) del problema anterior, tendremos:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=12} &= 60 \text{ J} = K_C - K_A \\ &= K_C - 0 = K_C = \frac{1}{2}mv_C^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta  $x = 12 \text{ m}$  será:

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=12}}{m}\right) \frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{120}{10} \frac{m}{s}} \\ &= 3.46 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

7-4.- Un pequeño bloque de  $0.120 \text{ kg}$  está conectado a un cable que pasa por un orificio ubicado en el centro de una superficie horizontal, el cable se desliza a través de ésta sin fricción, tal y como se muestra en la figura 7.3. El bloque está girando a una distancia de  $0.40 \text{ m}$  del centro con una rapidez de  $0.70 \frac{m}{s}$ . Cuando el cable es jalado verticalmente hacia abajo, el radio de la trayectoria del bloque se reduce a  $0.10 \text{ m}$  y la rapidez del bloque se incrementa a  $2.80 \frac{m}{s}$ .

a) ¿Cuál es la tensión que se ejerce sobre el cable en la situación original ( $v = 0.70 \frac{m}{s}$ )?

b) ¿Cuál es la tensión que se ejerce sobre el cable en la situación final ( $v = 2.80 \frac{m}{s}$ )?

c) ¿Cuánto trabajo efectuó la persona que tiró del cordón?

**Sol:**

Para resolver los incisos a) y b) de este problema, el elemento clave para encontrar la tensión cuando ( $v_i = 0.70 \frac{m}{s}$ ) y cuando ( $v_f = 2.80 \frac{m}{s}$ ), es identificar que en ambas situaciones el movimiento que el bloque realiza es un movimiento circular uniforme, por lo tanto, la tensión estará dada por:

$$T = ma_C = \frac{mv^2}{r},$$

de manera que la tensión en la cuerda en la situación inicial estará dada por:

$$\begin{aligned} T_i &= ma_{C_i} = \left[ \frac{0.120 (0.70)^2}{0.40} \right] \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{m} = 0.147 \text{ kg} \frac{m}{s^2} = \\ &= 0.147 \text{ N}, \end{aligned}$$

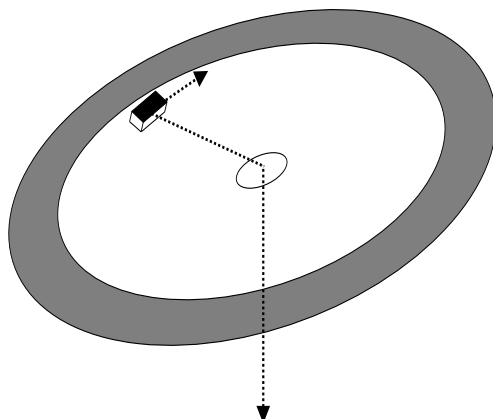


Figura 7.3: Movimiento circular de un bloque sometido al trabajo hecho por una fuerza externa que recorta el radio de giro del bloque.

y en la situación final estará dada por:

$$\begin{aligned} T_f &= ma_{C_f} = \left[ \frac{0.120 (2.80)^2}{0.40} \right] \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{m} = 2.35 \text{ kg} \frac{m}{s^2} = \\ &= 2.35 \text{ N}. \end{aligned}$$

c) De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética el trabajo efectuado por la persona que tiró del cordón, está dado por:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = \\ &= \frac{1}{2} 0.120 [(2.8)^2 - (0.7)^2] \text{ kg} \frac{m^2}{s^2} = 0.441 \text{ J}. \end{aligned}$$

**7-5.-** Un bloque de 2 kg se desliza a través de un piso sin fricción y choca contra un sistema de muelles, como se muestra en la figura 7.4. Cada una de las constantes elásticas de estos muelles tienen un valor de  $1.5 \times 10^3 \frac{N}{m}$ .

Sin tomar en cuenta la masa de los muelles, determine la máxima compresión de los muelles cuando la velocidad inicial del bloque es  $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ .

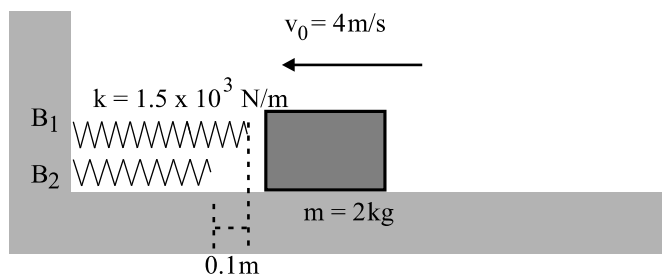


Figura 7.4: Diagrama del choque de un bloque contra un sistema de muelles.

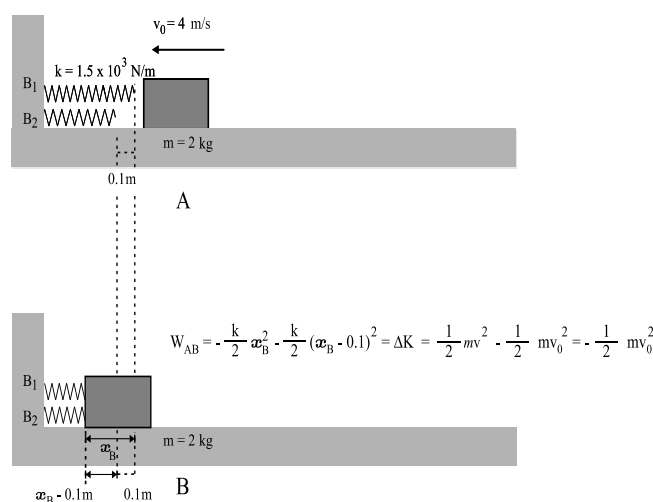


Figura 7.5: Determinación de la compresión máxima de un sistema de muelles.

**Sol:**

Como podemos observar en la situación A de la figura 7.5, inicialmente el bloque se desplaza hacia el sistema de muelles con una energía cinética constante (no hay fuerzas disipativas actuando), la cual está dada por:

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

cuando el bloque choca con el sistema de muelles el trabajo realizado por los resortes sobre el bloque desde que éste entra en contacto con el resorte B<sub>1</sub> hasta que la compresión del resorte es de x<sub>0</sub>, estará dado por:

$$\begin{aligned}
W_{x=0 \rightarrow x=x_0} &= \int_0^{x_0} F_x dx + \int_0^{x_0-0.10(m)} F_x dx = \\
&= \int_0^{x_0} -kx dx + \int_0^{x_0-0.10(m)} -kx dx \\
&= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{x_0} - \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{x_0-0.10(m)} = \\
&= -\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - 0.1)^2,
\end{aligned}$$

en donde hemos tomado en cuenta que el resorte  $B_2$  se encuentra a  $0.1 m$  por detrás del resorte  $B_1$  y por lo tanto, debido a la diferencia en su extensión, la compresión del resorte  $B_2$  será igual a la compresión del resorte  $B_1$  menos  $0.1 m$ , es decir:  $(x_{0B_2} = x_{0B_1} - 0.1 m = x_0 - 0.1 m)$ , por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=x_0} = -\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - 0.1)^2.$$

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, en el punto de máxima compresión  $\mathbf{x}_B$  en donde el bloque se detiene debido a la acción del sistema de muelles, como podemos observar en la figura anterior (Fig. 7.5), estará dado por:

$$\begin{aligned}
W_{x=0 \rightarrow x=\mathbf{x}_B} &= -\frac{1}{2}k\mathbf{x}_B^2 - \frac{1}{2}k(\mathbf{x}_B - 0.1)^2 = \\
&= \Delta K = K_B - K_A = \\
&= \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2}k\mathbf{x}_B^2 + \frac{1}{2}k(\mathbf{x}_B - 0.1)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7.6)$$

De donde se obtiene que:

$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{2} \left[ 0.1 \pm \sqrt{\left( \frac{2mv_0^2}{k} - 0.01 \right)} \right],$$

y en donde  $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ ,  $k = 1.5 \times 10^3 \frac{N}{m}$  y  $m = 2 kg$ , por lo que:

$$\mathbf{x}_B = 0.14 m. \quad (7.7)$$

- 7-6.-** Una máquina de Atwood utiliza dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  que están conectados a una polea sin fricción, tal y como se muestra en la figura 7.6. Partiendo del reposo y después de transcurrido un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la rapidez de las masas es de  $4 \frac{m}{s}$ . En este instante, la energía cinética del sistema es de  $80 J$  y cada una de las masas se ha desplazado una distancia de  $6 m$ . Determinar los valores de  $m_1$  y  $m_2$ .

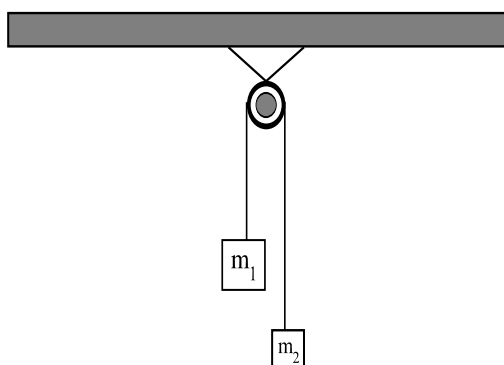


Figura 7.6: Máquina de Atwood cuyas masas  $m_1$  y  $m_2$  se desconocen.

**Sol:**

Cuando los bloques de masa  $m_1$  y  $m_2$  de la máquina de Atwood se han desplazado  $6 m$  respecto a su posición inicial, la energía cinética del sistema  $m_1$  y  $m_2$  es de  $80 J$ , i.e:

$$K_T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 80 J,$$

además las dos masas se encuentran unidas entre sí mediante una cuerda, de manera que  $v_1 = v_2 = v = 4 \frac{m}{s}$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 80 J \\ \implies m_1 + m_2 &= 10 kg. \end{aligned}$$

Por otra parte, de acuerdo al teorema trabajo-energía:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ \implies W &= 80 J, \end{aligned}$$

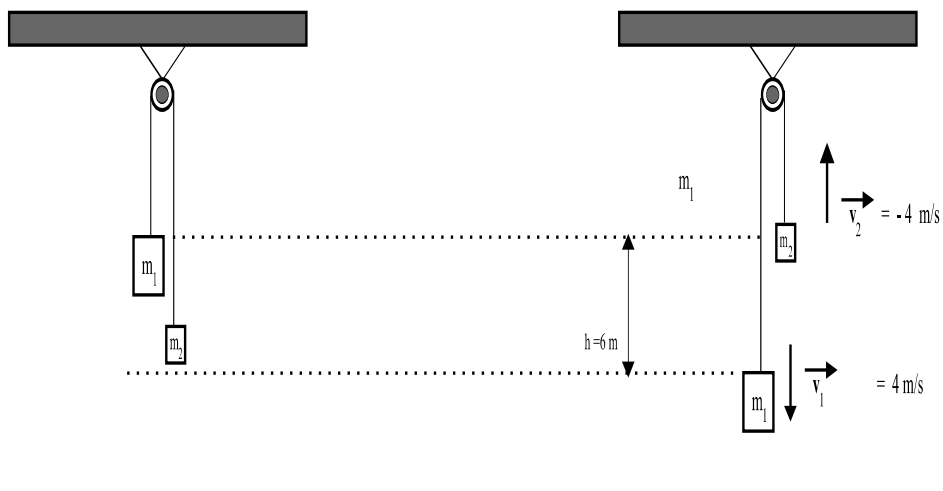


Figura 7.7: Desplazamiento de las masas  $m_1$  y  $m_2$  después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$  en una máquina de Atwood.

donde el movimiento de los bloques se realiza bajo la acción de la fuerza gravitacional, tal y como se muestra en los diagramas anteriores (Fig. 7.7), en donde la masa  $m_1$  desciende una distancia  $h = 6\text{ m}$ , mientras la masa  $m_2$  asciende esta misma distancia. Como la fuerza gravitacional está dirigida hacia abajo, el trabajo realizado por esta fuerza sobre la masa 1 será positivo ( $m_1gh$ ), porque la fuerza y el desplazamiento de la masa  $m_1$  son a lo largo de una recta y en la misma dirección, mientras que el trabajo realizado sobre la masa  $m_2$  será negativo ( $-m_2gh$ ), porque la fuerza y el desplazamiento de la masa  $m_2$  se dan a lo largo de una recta pero en direcciones contrarias, de manera que:

$$W = (m_1 - m_2)gh = 80\text{ J}$$

$$\implies m_1 - m_2 = 1.36\text{ kg}$$

$\implies$

$$m_1 + m_2 = 10\text{ kg}$$

$$m_1 - m_2 = 1.360\text{ kg},$$

de donde se obtiene finalmente que:

$$m_1 = 5.68\text{ kg}$$

$$m_2 = 4.32\text{ kg}.$$

7-7.- Una niña aplica una fuerza  $F_x$  paralela al eje  $x$  sobre un trineo de  $10\text{ kg}$  que se mueve sobre la superficie congelada de un estanque. La componente  $x$  de la fuerza que aplica la niña varía con la coordenada  $x$  del movimiento del trineo, tal y como se muestra en la figura 7.8.

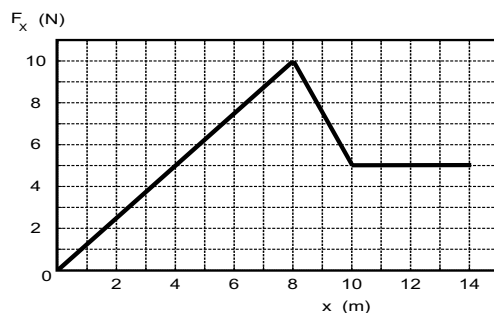


Figura 7.8: Variación de la fuerza  $F_x$  con la distancia cuando es aplicada sobre un trineo.

Calcule el trabajo efectuado por la fuerza que aplica la niña  $F_x$ , cuando el trineo se mueve:

- De  $x = 0\text{ m}$  a  $x = 10\text{ m}$ .
- De  $x = 10\text{ m}$  a  $x = 14\text{ m}$ .
- De  $x = 0\text{ m}$  a  $x = 14\text{ m}$ .

Desprecie la fricción entre el trineo y el estanque.

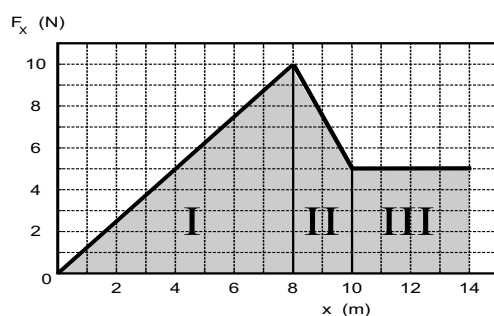


Figura 7.9: El trabajo realizado al empujar el trineo está dado por el área sombreada de la gráfica.

**Sol:**

Cuando se desplaza el trineo de  $A \rightarrow B$  el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas externas  $F_x$ , entre los puntos  $A$  y  $B$ , estará dado por el área bajo la curva  $F_x$  vs  $x$ , tal y como se muestra en la figura 7.9.

a) De esta forma el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen  $x = 0 \text{ m}$  hasta  $x = 10 \text{ m}$  estará dado por el área de las regiones sombreadas  $I$  y  $II$  (Fig.7.9):

$$W_{x=0 \rightarrow x=10} = A_I + A_{II},$$

en donde:

$$A_I = \left( \frac{10 \cdot 8}{2} \right) \quad J = 40 \text{ J}$$

$$A_{II} = \left( 2 \cdot 5 + \frac{2 \cdot (10 - 5)}{2} \right) \quad J = 15 \text{ J},$$

y por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=10} = (40 + 15) \text{ J} = 55 \text{ J}.$$

b) De igual forma, el trabajo efectuado por la niña al desplazar el trineo desde  $x = 10 \text{ m}$  hasta  $x = 14 \text{ m}$  estará dado por el área de la región sombreada  $III$  (Fig. 7.9):

$$W_{x=10 \rightarrow x=14} = A_{III} = (5 \cdot 4) \text{ J} = 20 \text{ J}.$$

c) El trabajo total efectuado por la niña al desplazar el trineo desde el origen  $x = 0 \text{ m}$  hasta  $x = 14 \text{ m}$  estará dado por el área total de las regiones sombreadas  $I$ ,  $II$  y  $III$ :

$$W_{x=0 \rightarrow x=14} = W_{x=0 \rightarrow x=10} + W_{x=10 \rightarrow x=14} =$$

$$= A_I + A_{II} + A_{III} = (55 + 20) \text{ J} = 75 \text{ J}.$$

**7-8.-** Suponiendo que el trineo del problema anterior está inicialmente en reposo, en  $x = 0 \text{ m}$ . Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez del trineo en:

a)  $x = 10 \text{ m}$ .

b)  $x = 14 \text{ m}$ .

Desprecie la fricción entre el trineo y el estanque.

**Sol:**

a) En su forma más general el teorema trabajo-energía cinética establece que el trabajo realizado por la resultante de todas las fuerzas externas que realizan trabajo sobre un objeto físico es igual al cambio en la energía cinética de dicho cuerpo, es decir:

$$W_{A B} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2,$$

en donde  $A$  y  $B$  denotan los puntos inicial y final del desplazamiento respectivamente, por lo tanto, si el trineo inicialmente se encontraba en reposo en el punto  $A$  ( $x = 0 \text{ m}$ ) y queremos conocer su rapidez en el punto  $B$  ( $x = 10 \text{ m}$ ), de acuerdo al resultado del inciso a) del problema anterior, tendremos:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=10} &= 55 \text{ J} = K_B - K_A \\ &= K_B - 0 = K_B = \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta  $x = 10 \text{ m}$  será:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=10}}{m}\right) \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{110}{10}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 3.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

b) Ahora, si deseamos determinar la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta  $x = 14 \text{ m}$ , que sería el punto  $C$  del desplazamiento, partiendo desde el origen  $x = 0 \text{ m}$ , de acuerdo al resultado del inciso c) del problema anterior, tendremos:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=14} &= 75 \text{ J} = K_C - K_A \\ &= K_C - 0 = K_C = \frac{1}{2}mv_C^2, \end{aligned}$$

de donde la rapidez del trineo cuando se ha desplazado hasta  $x = 14 \text{ m}$  será:

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{\left(\frac{2W_{x=0 \rightarrow x=14}}{m}\right) \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{150}{10}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 3.87 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

7-9.- Un bloque de  $5 \text{ kg}$  se mueve con una rapidez inicial  $v_0 = 6 \frac{m}{s}$  sobre una superficie horizontal, en donde no hay fricción y se dirige hacia un resorte que esta sujeto a una pared. El resorte tiene masa despreciable y una constante elástica  $k = 500 \frac{N}{m}$ , tal y como se muestra en la figura 7.10.

- Calcule la distancia máxima que se comprimirá el resorte.
- Si la distancia que se comprime el resorte no debe ser mayor que  $0.150 \text{ m}$  ¿qué valor máximo puede tener  $v_0$ ?

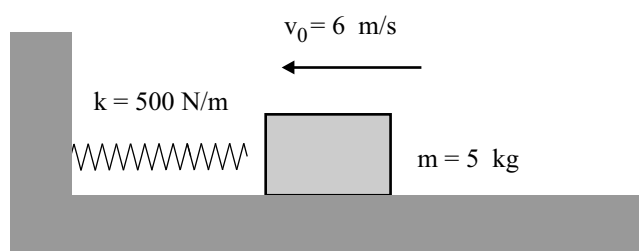


Figura 7.10: Diagrama de un bloque que se dirige hacia un resorte.

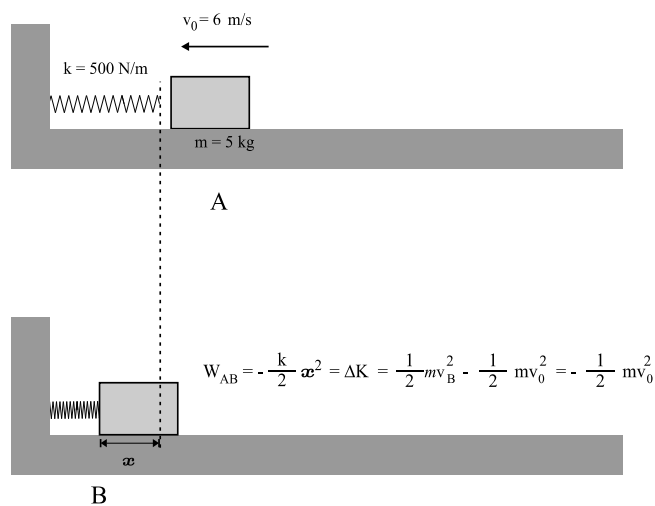


Figura 7.11: El trabajo hecho por el resorte sobre el bloque de masa  $m$  es igual al cambio en la energía cinética ( $\Delta K$ ) del bloque.

**Sol:**

a) Como podemos observar en la situación A (Fig. 7.11), inicialmente el bloque se desplaza hacia el resorte con una energía cinética constante, porque no hay fuerzas disipativas actuando, la cual está dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque desde que entran en contacto hasta que la compresión en el resorte es  $x_0$ , estará dado por:

$$\begin{aligned} W_{x=0 \rightarrow x=x_0} &= \int_0^{x_0} F_x dx = \int_0^{x_0} -kx dx \\ &= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^{x_0} = -\frac{1}{2}kx_0^2, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$W_{x=0 \rightarrow x=x_0} = -\frac{1}{2}kx_0^2.$$

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, en el punto de máxima compresión  $\mathbf{x}$ , situación B del diagrama anterior (Fig. 7.11), el bloque se detiene debido a la acción del resorte, de manera que  $\mathbf{x}$  puede determinarse de la relación:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2}k\mathbf{x}^2 = \Delta K \\ &= K_B - K_A = \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2}k\mathbf{x}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7.8)$$

De donde se obtiene que:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} = 0.60 \text{ m}.$$

b) Ahora, si sabemos que la máxima compresión del resorte está dada por  $\mathbf{x} = 0.150 \text{ m}$ , con base en la ecuación (7.8), el valor máximo que puede tener  $v_0$  será:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k\mathbf{x}^2}{m}} = 1.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- 7-10.-** De una altura  $h = 4\text{ m}$  un bloque de  $5\text{ kg}$  que parte del reposo ( $v_0 = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) se desliza sobre una superficie sin fricción a lo largo de un plano inclinado, como se muestra en la figura 7.12. Determinar la rapidez  $v_f$  del bloque cuando éste termina de descender sobre el plano inclinado.

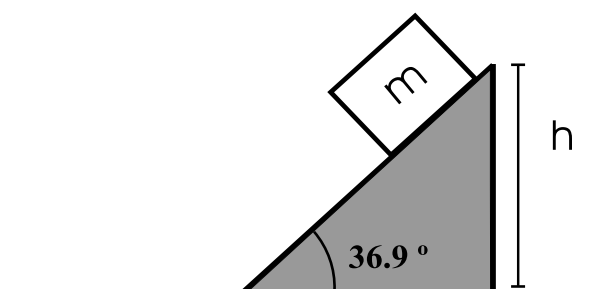


Figura 7.12: Diagrama de un bloque que desliza sobre un plano inclinado.

**Sol:**

Nuevamente debemos aplicar el teorema trabajo-energía cinética; como podemos observar en la situación A del siguiente diagrama (Fig. 7.13), el valor de  $v_A$  y de  $K_A$  para el bloque en la altura inicial  $h$  es igual a cero, además, la única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque es la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado ya que no hay fuerza de fricción entre el bloque y el plano inclinado.

De acuerdo con el correspondiente diagrama de cuerpo libre (Fig. 7.13), la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado está dada por:

$$F_{\parallel} = (m\vec{g})_{\parallel} = mg \sen \theta,$$

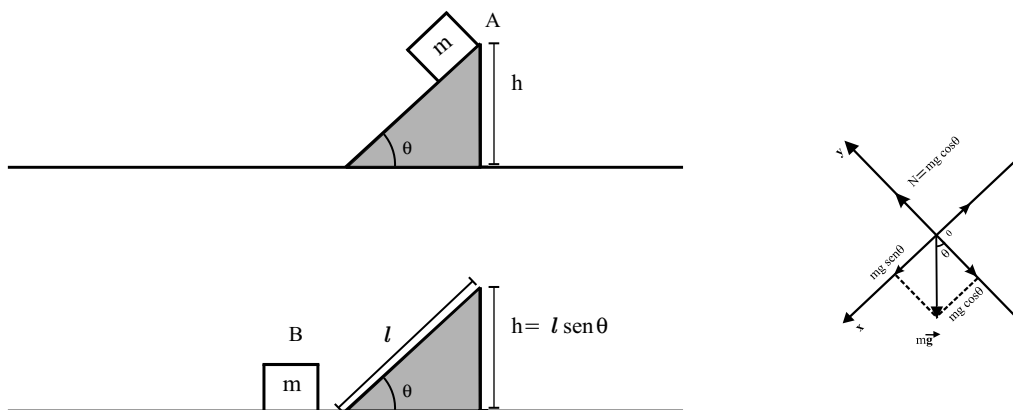
y por lo tanto, el trabajo realizado por las fuerzas externas mientras el bloque desciende por el plano inclinado hasta llegar a la superficie horizontal, tal y como podemos ver en la situación B del diagrama (Fig. 7.13), será:

$$W_{AB} = F_{\parallel} \cdot l = mgl \sen \theta = mgh,$$

en donde  $l$  es la longitud total que el bloque recorre sobre el plano inclinado hasta alcanzar la superficie horizontal.

Al llegar a la superficie horizontal el bloque llega con una rapidez  $v_B$  que de acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética satisface que:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= mgh = \Delta K = \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned}$$



$$W_{AB} = mg l \sin \theta = mgh = \Delta K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 = mgh$$

Figura 7.13: El trabajo  $W_{AB} = mgh$  que la fuerza de gravedad (el peso del bloque) realiza mientras el bloque se desliza por el plano inclinado es igual al incremento en la energía cinética del bloque  $\Delta K = \frac{1}{2} m v_B^2$ .

de donde la rapidez final ( $v_B$ ) cuando el bloque termina el descenso está dada por:

$$v_B = \sqrt{2gh} = 8.85 \frac{m}{s}$$

## Parte IV. Teoremas de conservación

En la última parte de esta obra de problemas resueltos se aborda uno de los temas más importantes en el estudio de la física: los principios de conservación. En particular se consideran el de la energía mecánica total y el de la cantidad movimiento de un sistema de partículas.

Al tratar los problemas relacionados con estos principios de conservación se busca que el estudiante entienda que la aplicación correcta de los mismos le permitirán determinar de manera práctica ciertas cantidades físicas relacionadas con el movimiento de un objeto.

En los problemas que a continuación se presentan se ha puesto especial atención en el concepto de la energía potencial que adquiere un cuerpo bajo la acción de una fuerza externa.

Uno de los aspectos centrales que se han tratado es el que se refiere al manejo del punto cero de la energía potencial, ya que en muchos casos una elección adecuada del nivel cero de esta energía simplifica considerablemente las manipulaciones algebraicas necesarias para encontrar la información mecánica requerida.

También se han abordado algunos problemas en donde interviene la fuerza de fricción, sumamente importantes, ya que esta fuerza hace que la energía mecánica no sea una constante, lo que da como resultado una disminución de la energía durante el movimiento.

De igual forma se han planteado varios problemas sobre el principio de conservación de la cantidad de movimiento, principio que si es aplicado correctamente nos permite determinar, entre otras cantidades físicas, la velocidad o la masa de un cuerpo antes o después de una colisión, o si durante una colisión la energía cinética total del sistema se conserva o no se conserva, condición que define los diferentes tipos de colisión que existen: elásticas e inelásticas. Para resolver estos problemas, siempre que fue necesario se utilizó la formulación vectorial del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

## Capítulo 8

# Energía potencial y principio de conservación de la energía

8-1.- Un resorte que tiene una masa despreciable y una constante elástica de  $k = 400 \frac{N}{m}$ , se comprime  $0.220 \text{ m}$  debido a la presión que ejerce un bloque de  $2 \text{ kg}$ . Cuando el bloque se suelta desliza primero por una superficie horizontal sin fricción, y después a través de un plano inclinado que tiene un ángulo de  $36.9^\circ$ , tal y como se muestra en la figura 8.1.

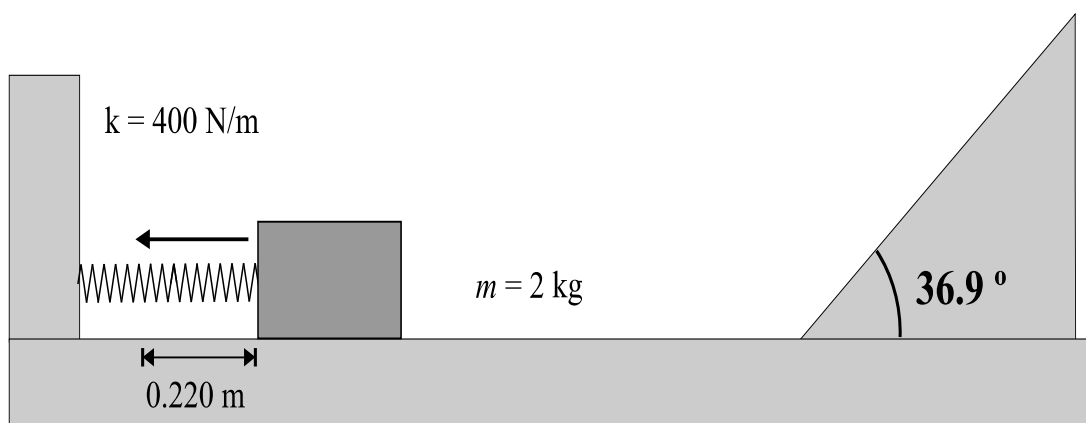


Figura 8.1: Diagrama de un bloque que comprime a un resorte y que posteriormente se desplaza hacia un plano inclinado.

- ¿Qué rapidez tiene el bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal?
- ¿Qué altura alcanza el bloque antes de pararse e iniciar el descenso?

c) ¿Qué longitud máxima recorre el bloque sobre el plano inclinado antes de pararse e iniciar el descenso?

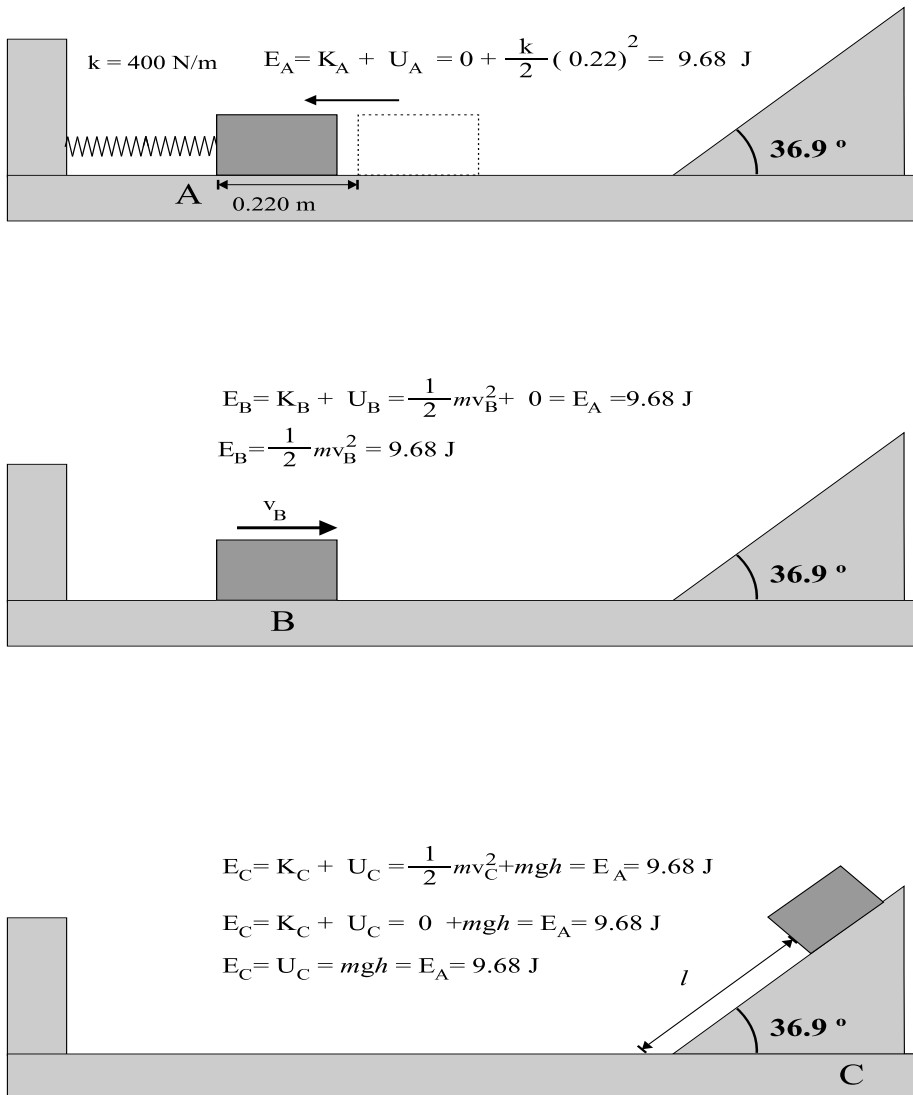


Figura 8.2: Etapas A, B y C del movimiento de un bloque.

**Sol:**

a) En este problema, durante el movimiento del bloque desde la posición en donde se ha comprimido el resorte  $0.220 \text{ m}$  hasta el punto de máxima altura sobre el plano inclinado, la energía mecánica total del sistema se conserva debido a la ausencia de fuerzas disipativas que den lugar a pérdidas de energía, como por ejemplo la fuerza de fricción.

Como podemos observar en la situación *A* del diagrama anterior (Fig. 8.2), si inicialmente el resorte está comprimido  $0.220\text{ m}$ , la cantidad de energía almacenada en el sistema estará dada por:

$$E_A = K_A + U_A = 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \left( 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (0.220\text{ m})^2 = 9.68\text{ N m} = 9.68\text{ J},$$

como podemos ver en la situación *B* (Fig. 8.2), mientras el bloque recorre la superficie horizontal esta cantidad de energía se transforma en energía cinética, de manera que:

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = E_A = 9.68\text{ J},$$

de donde podemos obtener la rapidez  $v_B$  del bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal:

$$v_B = \sqrt{\frac{2E_A}{m}} = 3.11 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Cuando el bloque asciende por el plano inclinado su energía cinética se irá transformando en energía potencial gravitacional hasta que se detenga a una altura  $h$  respecto a la superficie horizontal, tal y como podemos ver en la situación *C* (Fig. 8.2), en donde el bloque ha transformado totalmente su energía cinética en pura energía potencial gravitacional, i.e:

$$E_C = K_C + U_C = 0 + mgh = E_A = 9.68\text{ J},$$

de donde podemos obtener la altura máxima a la que asciende el bloque por el plano inclinado:

$$h = \frac{E_A}{mg} = 0.49\text{ m}.$$

c) Una vez que hemos determinado la altura máxima  $h$ , fácilmente podemos obtener la longitud  $l$  que el bloque recorre sobre el plano inclinado antes de detenerse e iniciar el descenso ya, que la longitud está relacionada con la altura  $h$ , de acuerdo a la siguiente relación:

$$\frac{h}{l} = \text{sen } \theta,$$

si  $\theta = 36.9^\circ$ , entonces la longitud máxima que el bloque recorre sobre el plano inclinado estará dada por:

$$l = \frac{h}{\text{sen } \theta} = 0.82\text{ m}.$$

- 8-2.-** Un sistema formado por dos cubetas de pintura que están conectadas por una cuerda que pasa por una polea, tal y como se muestra en la figura 8.3, parte del reposo con una cubeta de  $12\text{ kg}$  situada a  $2\text{ m}$  sobre el piso. Usando el principio de conservación de la energía, calcule la rapidez con que la cubeta golpea el piso. Haga caso omiso de la fricción y de la masa de la polea.

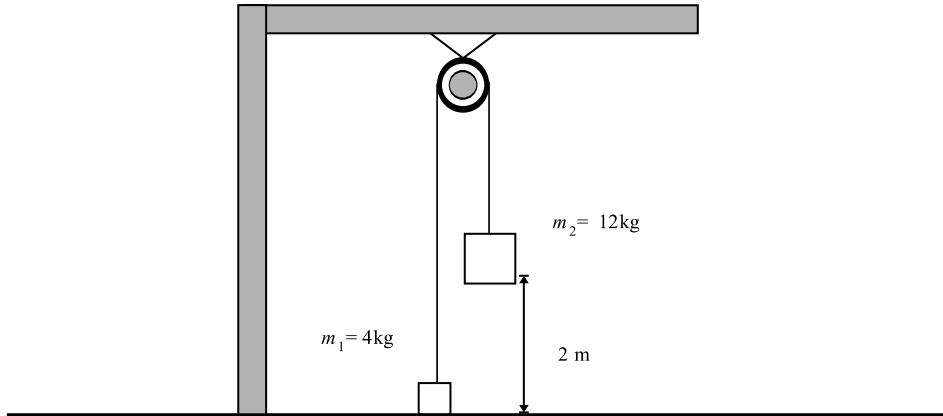


Figura 8.3: Durante el movimiento de dos cubetas unidas por una cuerda a través de una polea, la energía mecánica total del sistema se transforma de energía potencial en una mezcla de energía potencial más energía cinética.

**Sol:**

En el movimiento de este sistema, como no hay fricción entre la cuerda que une las cubetas y la polea, la energía mecánica total se conserva, por lo tanto, cuando las cubetas se encuentran en reposo y la cubeta más pesada está a una altura  $h = 2\text{ m}$  por encima del suelo, la energía del sistema estará dada por:

$$E_i = U_{1i} + U_{2i} = m_1g(0) + m_2gh = 235.2\text{ J},$$

al soltarse el sistema la cubeta más pesada desciende, mientras que la menos pesada asciende hasta llegar a una altura de  $h = 2\text{ m}$ , en este momento la energía  $E_i$  se transforma en energía cinética de ambas cubetas, más energía potencial de la cubeta menos pesada, es decir:

$$\begin{aligned} E_f &= K_{1f} + U_{1f} + K_{2f} = \frac{1}{2}m_1v_f^2 + m_1gh + \frac{1}{2}m_2v_f^2 \\ &= (4\text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (2\text{ m}) + \frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + 78.4\text{ J}, \end{aligned}$$

ya que las cubetas están unidas por una cuerda inextensible ( $v_{1f} = v_{2f} = v_f$ ), y como la energía mecánica total se conserva ( $E_f = E_i$ ), obtenemos que:

$$\begin{aligned} E_f &= 78.4 J + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = 235.2 J = E_i \\ \implies \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 &= 235.2 J - 78.4 J = 156.8 J \\ \implies \\ v_f &= \sqrt{\frac{2(156.8 J)}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{2(156.8 J)}{16 kg}} = 4.43 \frac{m}{s}, \end{aligned}$$

por lo que la cubeta de 12 kg golpea el suelo con una rapidez  $v_f$  de 4.43  $\frac{m}{s}$ .

**8-3.-** En el estudio del tiro parabólico se deduce la siguiente expresión para la altura máxima  $h$  de un proyectil lanzado con rapidez inicial  $v_0$  y a un ángulo  $\alpha_0$ :

$$h = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \alpha_0}{2g}.$$

Deduzca esta expresión empleando consideraciones de energía.

**Sol:**

Ya que en el movimiento parabólico la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el proyectil en la dirección horizontal es igual a cero, la componente en esta dirección de la velocidad  $v_x$  permanece constante durante todo el movimiento. De esta forma la velocidad horizontal del proyectil permanecerá constante desde su lanzamiento ( $v_{xL}$ ), hasta el punto de máxima elevación ( $v_{x_{h\text{máx}}}$ ), es decir:

$$v_{xL} = v_{x_{h\text{máx}}},$$

y como en el tiro parabólico la energía mecánica total se conserva, si no se consideran los efectos de las fuerzas disipativas, por lo que:

$$\begin{aligned} E_f &= E_i \\ \implies \\ mgh_{\text{máx}} + \frac{1}{2}m(v_{x_{h\text{máx}}}^2 + v_{y_{h\text{máx}}}^2) &= \frac{1}{2}m(\vec{v})^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m((v_{yL})^2 + (v_{xL})^2) \\ \implies \\ mgh_{\text{máx}} + \frac{1}{2}m(v_{x_{h\text{máx}}}^2) &= \frac{1}{2}m((v_{yL})^2 + (v_{xL})^2) \\ \implies \\ mgh_{\text{máx}} &= \frac{1}{2}m(v_{yL})^2, \end{aligned}$$

ya que inicialmente el proyectil sólo tiene energía cinética ( $\frac{1}{2}mv_0^2$ ) y en la altura máxima la componente vertical de la velocidad es igual a cero ( $v_{y_{h\text{máx}}} = 0$ ), por lo tanto, la altura máxima que alcanza el proyectil será:

$$h_{\text{máx}} = \frac{(v_{y_L})^2}{2g},$$

por otra parte, si el proyectil se lanza con una inclinación  $\alpha_0$  la componente vertical de la velocidad estará dada por:

$$v_{y_L} = v_0 \text{sen} \alpha_0,$$

por lo que:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \alpha_0}{2g},$$

resultado al cual ya se había llegado a través de la cinemática del movimiento parabólico. Sin embargo, ahora este mismo resultado lo hemos encontrado a partir de un principio físico más general como es la conservación de la energía mecánica total.

8-4.- En una oficina de correos un paquete de  $0.200 \text{ kg}$  parte del reposo en el punto  $A$  de una rampa que forma un cuarto de círculo y cuyo radio es de  $1.60 \text{ m}$ , tal y como se observa en la figura 8.4. El paquete es tan pequeño que puede tratarse como una partícula que se desliza primero por la rampa hasta llegar al punto  $B$  con una rapidez de  $4.80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . A partir de ahí, el paquete se desliza  $3 \text{ m}$  sobre una superficie horizontal hasta el punto  $C$  en donde se detiene.

- ¿Qué coeficiente de fricción cinética tiene la superficie horizontal?
- ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre el paquete al deslizarse por el arco circular entre los puntos  $A$  y  $B$ ?

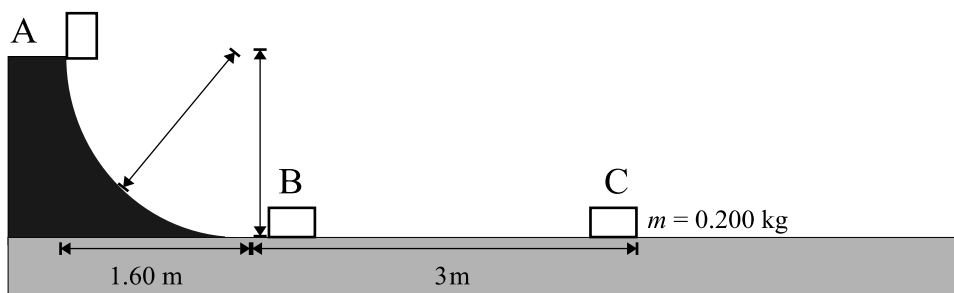


Figura 8.4: Diagrama del movimiento de un paquete.

**Sol:**

a) Para resolver este problema es necesario extender el principio de conservación de la energía mecánica total para tomar en consideración las pérdidas de energía que se producen por la presencia de fuerzas no conservativas, en nuestro caso la fricción existente entre el bloque y las superficies curva y horizontal. El primer paso será fijar la altura correspondiente al cero de energía potencial gravitacional. En el presente caso escogemos dicha altura como aquella a la que se encuentra la superficie horizontal con un coeficiente de fricción  $\mu_C$ .

Para determinar el coeficiente de fricción cinética ( $\mu_C$ ) de la superficie horizontal, debemos considerar la pérdida de energía por disipación, agregando el trabajo negativo  $W_{B \rightarrow C}$  realizado por la fuerza de fricción en el recorrido del paquete desde el punto  $B$  ( $v_B = 4.80 \frac{m}{s}$ ) hasta el punto  $C$  en donde se detiene el bloque ( $E_C = 0$ ). De esta manera la energía en  $C$  será igual a la suma de la energía que el bloque tenía inicialmente en  $B$  mas  $W_{B \rightarrow C}$ , es decir:

$$\begin{aligned} K_B + U_B + W_{B \rightarrow C} &= E_C = K_C + U_C = 0 \\ &\implies \\ K_B + U_B + W_{B \rightarrow C} &= K_B + W_{B \rightarrow C} = 0 \\ &\implies \\ K_B &= -W_{B \rightarrow C}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

en donde hemos considerado que la energía potencial gravitacional es cero a la altura del punto  $B$ , por lo que  $U_B = 0$ , además tenemos que  $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$ ,  $W_{B \rightarrow C} = -\mu Nl = -\mu_C mgl$  y  $l = 3 \text{ m}$ , por lo tanto la ecuación (8.1) tomará la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = -(-\mu_C mgl) = \mu_C mgl,$$

de donde finalmente obtenemos el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_C = \frac{v_B^2}{2gl} = 0.39.$$

b) Para determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el paquete al deslizarse por el arco circular entre los puntos  $A$  y  $B$  ( $W_{A \rightarrow B}$ ) podemos aplicar la misma idea que utilizamos anteriormente para obtener el trabajo realizado por la fuerza de fricción cuando el bloque se desliza del punto  $B$  al punto  $C$  (ecuación (8.1)), es decir,

para el caso del arco circular tenemos que:

$$\begin{aligned}
 K_A + U_A + W_{A \rightarrow B} &= E_B = K_B + U_B = K_B \\
 &\implies \\
 U_A + W_{A \rightarrow B} &= K_B \\
 &\implies \\
 K_B - U_A &= W_{A \rightarrow B}, \tag{8.2}
 \end{aligned}$$

en donde  $K_A = 0$ ,  $U_A = mgh$  y  $h = 1.60 \text{ m}$ , que corresponde al radio de la circunferencia por la que el bloque se desliza, de este resultado obtenemos que el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el paquete al deslizarse por el arco circular entre  $A$  y  $B$  ( $W_{A \rightarrow B}$ ) es:

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -0.832 \text{ J}.$$

- 8-5.-** Un bloque de  $0.50 \text{ kg}$  se empuja contra un resorte horizontal, el cual tiene una masa despreciable, comprimiéndolo  $0.20 \text{ m}$ , tal y como se muestra en la figura 8.5. La fuerza ejercida por el resorte hace que el bloque recorra sobre la superficie horizontal una distancia de  $1 \text{ m}$  antes de detenerse. La constante elástica del resorte es  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Calcule el coeficiente de fricción cinética  $\mu_C$  entre el bloque y la superficie horizontal.

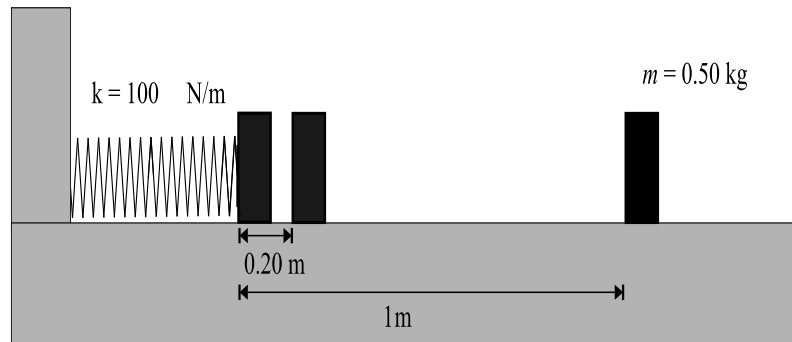


Figura 8.5: Determinación del coeficiente de fricción cinética ( $\mu_C$ ) de una superficie horizontal rugosa.

**Sol:**

Como podemos observar en la situación  $A$  de la siguiente figura (Fig. 8.6), cuando la compresión del resorte es igual a  $0.20 \text{ m}$ , en éste se encuentra almacenada, en forma de energía potencial elástica, una cantidad de energía inicial dada por:

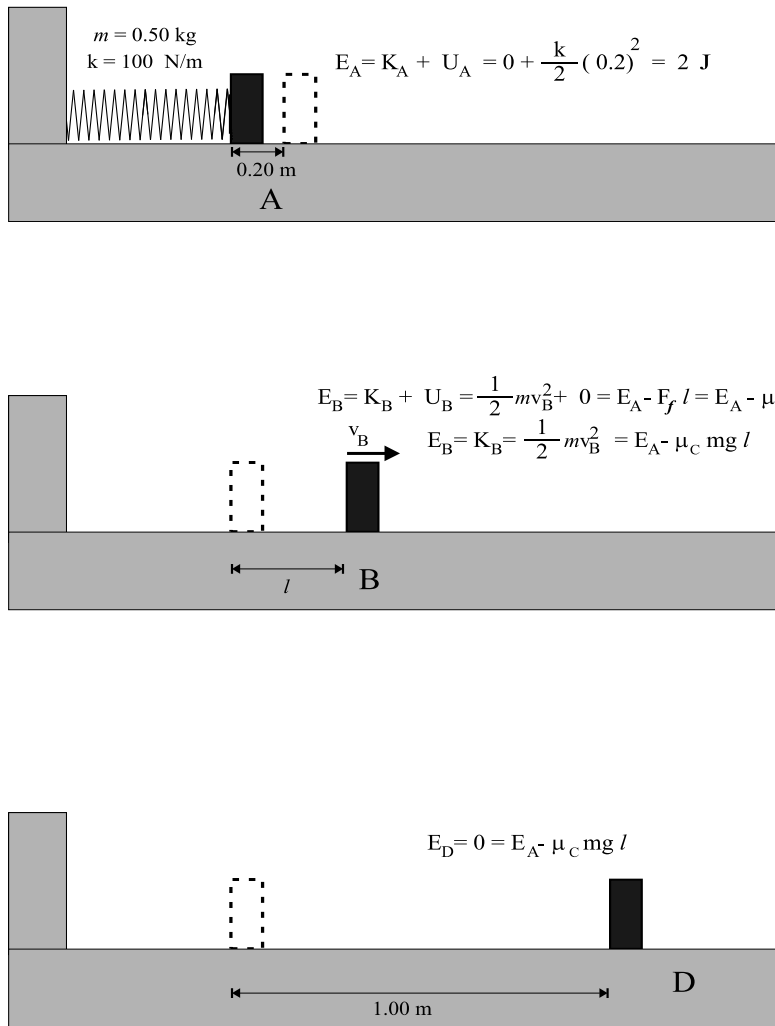


Figura 8.6: Tres diferentes etapas del movimiento de un bloque a lo largo de una superficie con fricción.

$$E_A = \frac{1}{2} k x^2 = \left[ \frac{1}{2} 100 (0.2)^2 \right] \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{m}^2 = 2 \text{ J},$$

esta energía se transforma en energía cinética, la cual se irá perdiendo por disipación debido a la fuerza de fricción que existe entre el bloque y la superficie horizontal. De esta manera, cuando el bloque se detenga, como podemos observar en la situación *D* de la figura anterior (Fig. 8.6), toda la energía  $E_A$  que inicialmente se tenía se habrá perdido debido al trabajo negativo  $W_{\text{otras}}$  efectuado por la fuerza de fricción, si este hecho lo expresamos algebraicamente para el punto en donde el bloque se detiene obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E_A + W_{otras} &= 0 = E_D \\
 &\implies \\
 E_A &= -W_{otras} \\
 &\implies \\
 E_A &= -(-\mu_C mgl) = \mu_C mgl \\
 &\implies \\
 E_A &= \mu_C mgl, \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

en donde hemos puesto el trabajo realizado por la fuerza de fricción como el producto de esta fuerza ( $F_f = -\mu_C mg$ ) por la longitud  $l$  que recorre el bloque antes de detenerse.

De la ecuación (8.3) podemos obtener el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_C = \frac{E_A}{mgl} = 0.408.$$

El proceso de pérdida de energía debido a la fricción se muestra en la figura 8.6, en la cual hemos señalado para cada etapa del movimiento la forma en que la energía mecánica del sistema se va perdiendo debido a la fricción que siempre está realizando trabajo negativo sobre el bloque.

**8-6.-** Consideremos el sistema físico de la figura 8.7, en donde partiendo del reposo un bloque de  $12 \text{ kg}$  se desliza sin fricción sobre un plano, el cual tiene una inclinación de  $30^\circ$ , hacia un resorte que puede ser comprimido  $0.020 \text{ m}$  por una fuerza de  $270 \text{ N}$ . Si el bloque se detiene momentáneamente cuando la compresión del resorte es igual a  $0.055 \text{ m}$  respecto a su longitud natural:

a) ¿Cuál es la distancia que el bloque recorre desde que se encuentra en reposo hasta que se detiene por la acción del resorte?

b) ¿Cuál es la rapidez que lleva el bloque en el momento en que hace contacto con el resorte?

**Sol:**

a) Nuevamente, para resolver este problema es necesario fijar la altura en donde el valor de la energía potencial gravitacional es igual a cero; que en este caso corresponderá al punto en donde la compresión del resorte es máxima, tal y como se muestra en la figura 8.8.

Desde esta referencia para la energía potencial gravitacional, el bloque en reposo, situación A (Fig. 8.8), tendrá una energía potencial dada por:

$$E_A = U_A = mgh_i.$$

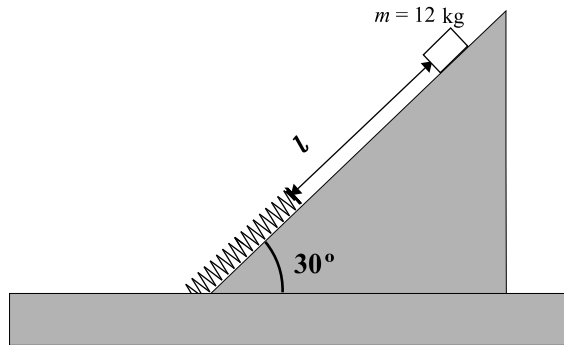


Figura 8.7: Diagrama de un bloque que desliza sobre un plano inclinado y que es detenido por un resorte.

La longitud que recorre el bloque a lo largo del plano inclinado, desde el punto en que se encuentra en reposo hasta el punto en donde se detiene por la acción del resorte, puede obtenerse aplicando el principio de conservación de la energía mecánica total, ya que la energía potencial gravitacional que inicialmente tenía el bloque se transformará totalmente en energía potencial elástica, la cual se encuentra almacenada en el resorte en el momento en que el bloque se detiene; como podemos observar en la situación  $C$  (Fig. 8.8), por lo que:

$$E_A = mgh_i = E_C = \frac{1}{2}kx^2, \quad (8.4)$$

en donde  $h_i$  es la altura inicial que desconocemos. Por lo tanto, de la ecuación (8.4) obtenemos para la altura  $h_i$ :

$$h_i = \frac{kx^2}{2mg},$$

en donde  $x = 0.055 \text{ m}$  es la máxima compresión del resorte y  $m = 12 \text{ kg}$  es la masa del bloque. Ahora bien, el valor de  $k$  lo podemos obtener partiendo del hecho de que una compresión  $x_0 = 0.020 \text{ m}$  da como resultado una fuerza ejercida por el resorte de  $F = 270 \text{ N}$ , por lo tanto:

$$k = \frac{F}{x_0} = 13500 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

y finalmente obtenemos el valor de la altura desde donde parte el bloque:

$$h_i = 0.173 \text{ m},$$

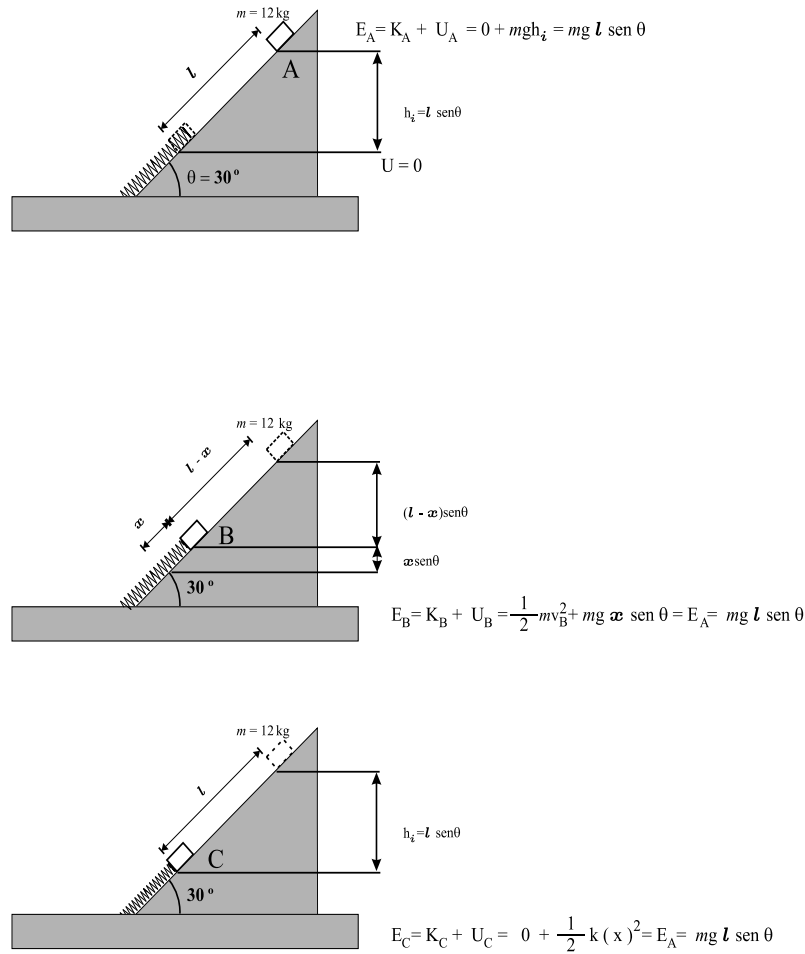


Figura 8.8: La energía mecánica total de un bloque deslizándose sobre un plano inclinado sin fricción, que inicialmente se encuentra en forma de energía potencial gravitacional (situación A), se convierte a energía potencial elástica (situación C).

conociendo la altura podemos obtener la longitud  $l$  que el bloque recorre sobre el plano inclinado mediante la siguiente relación:

$$l \text{ sen } \theta = h_i,$$

si  $\theta = 30^\circ$ , la distancia recorrida por el bloque es:

$$l = \frac{h_i}{\text{sen } \theta} = 0.346 \text{ m.}$$

b) Para determinar la rapidez  $v_B$  del bloque justo en el momento en que entra en contacto con el resorte, situación  $B$  (Fig. 8.8), aplicamos nuevamente el principio de la conservación de la energía mecánica total, en este caso la energía potencial inicial  $U_A$  se transforma parcialmente en energía cinética  $K_B$ , mientras el resto se mantiene como energía potencial gravitacional  $U_B$ .

En el momento en que el resorte entra en contacto con el bloque, éste se encuentra a una altura  $h_B$  respecto al cero de energía potencial, la cual estará dada por:

$$h_B = x \operatorname{sen} \theta,$$

en donde  $\theta = 30^\circ$  es el ángulo de inclinación del plano inclinado y  $x$  es la compresión máxima del resorte  $x = 0.055 \text{ m}$ , de manera que al aplicar el principio de conservación de la energía mecánica total obtenemos:

$$\begin{aligned} E_A = U_A = mgh_i &= E_B = K_B + U_B \\ \implies \\ mgh_i &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \\ \implies \\ v_B &= \sqrt{2g(h_i - h_B)} \\ \implies \\ v_B &= \sqrt{2g \operatorname{sen} \theta (l - x)} = 1.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

**8-7.-** Un *bungee* que tiene una longitud natural de  $30 \text{ m}$  ejerce una fuerza restauradora de magnitud  $kx$  al estirarse una distancia  $(30 + x) \text{ m}$ . Imagine que su suegro, cuya masa es de  $95 \text{ kg}$ , está parado sobre un puente a  $45 \text{ m}$  del suelo con un extremo del *bungee* atado firmemente a su tobillo y el otro extremo atado al puente. Usted tenía varios *bungees* para escoger y los probó atando un extremo a un árbol y ejerciendo una fuerza de  $380 \text{ N}$  en el otro extremo; por lo que ha prometido a su suegro que la distancia que recorrerá al tirarse será de  $41 \text{ m}$  antes de que el *bungee* lo detenga. Durante las pruebas ¿qué distancia debió estirarse el *bungee* para que usted pueda cumplir con su promesa?

**Sol:**

Este problema puede resolverse aplicando el principio de conservación de la energía mecánica total para encontrar la constante elástica y posteriormente determinar la distancia que debe estirarse el *bungee* que tenemos que seleccionar.

Como en esta situación física la energía potencial gravitacional juega un papel central, resulta indispensable escoger el punto en donde esta energía es igual a cero. Para

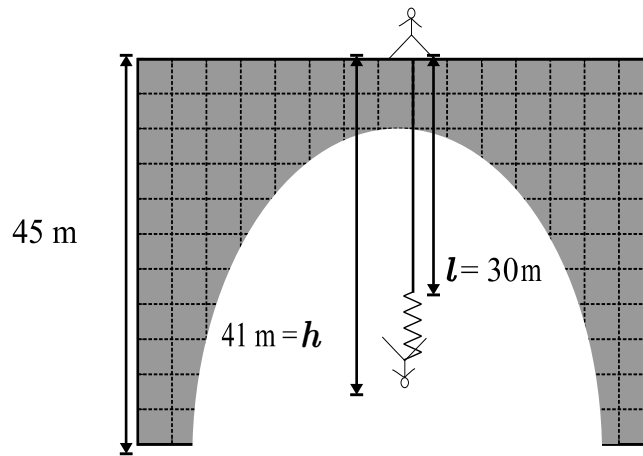


Figura 8.9: Esquema del movimiento realizado por una persona al saltar en un *bungee*.

nuestro problema el cero de energía potencial se elige sobre la superficie horizontal del puente desde donde se realizan los saltos, tal y como se muestra en la figura 8.9.

En el punto desde donde se realizan los saltos, la energía mecánica total es igual a cero porque el resorte del *bungee* no se ha estirado más allá de su longitud natural. Por otra parte, en el punto en donde el *bungee* se detendrá a una altura  $h = 41 \text{ m}$  por debajo del puente, además de energía cinética  $K_2 = 0$ , se tendrá energía potencial gravitacional  $U_{2g} = -mgh$  y energía potencial elástica  $U_{2el} = \frac{1}{2}k(h - l)^2$ , la cual está almacenada en el *bungee*, en donde  $l = 30 \text{ m}$  es la longitud natural del *bungee*; por lo que si aplicamos el principio de conservación de la energía obtendremos:

$$K_1 + U_1 = 0 = K_2 + U_{2g} + U_{2el}, \quad (8.5)$$

que para el presente problema puede escribirse de la siguiente forma:

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}k(h - l)^2,$$

y de donde podemos despejar la constante elástica del *bungee*:

$$k = 2 \frac{mgh}{(h - l)^2} = 630.93 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Por otra parte, si durante las pruebas se aplica una fuerza  $F = 380 \text{ N}$ , el *bungee* indicado para este salto es aquél cuya longitud  $x$  al momento de estirarse sea igual a:

$$x = \frac{F}{k} = 0.602 \text{ m}.$$

- 8-8.- Un paquete de  $2 \text{ kg}$  desliza sobre una pendiente que tiene una inclinación de  $53.1^\circ$ . Inicialmente el bloque se encuentra a una distancia de  $4 \text{ m}$  de un resorte de masa despreciable, cuya constante elástica es de  $120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  y que está sujeto a la base de la pendiente, tal y como se muestra en la figura 8.10.

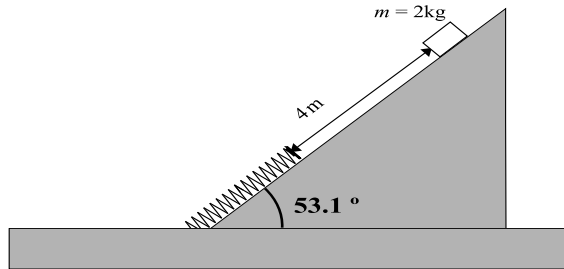


Figura 8.10: **Diagrama de un bloque comprimiendo a un resorte bajo la acción de la fuerza de fricción.**

Si el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la pendiente es  $\mu_C=0.20$ , determine:

- ¿Qué rapidez lleva el paquete justo en el momento en que entra en contacto con el resorte?
- ¿Cuál es la compresión máxima del resorte?
- Al rebotar, ¿qué longitud asciende el paquete antes de detenerse nuevamente?

**Sol:**

a) Para aplicar el principio de conservación de la energía mecánica total en este problema es necesario tomar en consideración las pérdidas de energía debido a la presencia de fuerzas no conservativas, como es el caso de la fricción presente entre el bloque y la superficie de la pendiente. Como siempre es indispensable fijar la altura en donde la energía potencial gravitacional es igual a cero; que en este caso será aquella en la que inicialmente se encuentra el extremo libre del resorte sin comprimir, tal y como se muestra en el inciso a) de la figura 8.11.

Por otra parte, para determinar la rapidez que tiene el paquete justo antes de llegar al resorte debemos aplicar el principio de la conservación de la energía considerando las pérdidas por disipación, agregando el trabajo negativo realizado por estas fuerzas  $W_{otras}$  en el recorrido del paquete, desde el punto inicial de su recorrido hasta el momento en que el bloque se detiene, es decir:

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2, \quad (8.6)$$

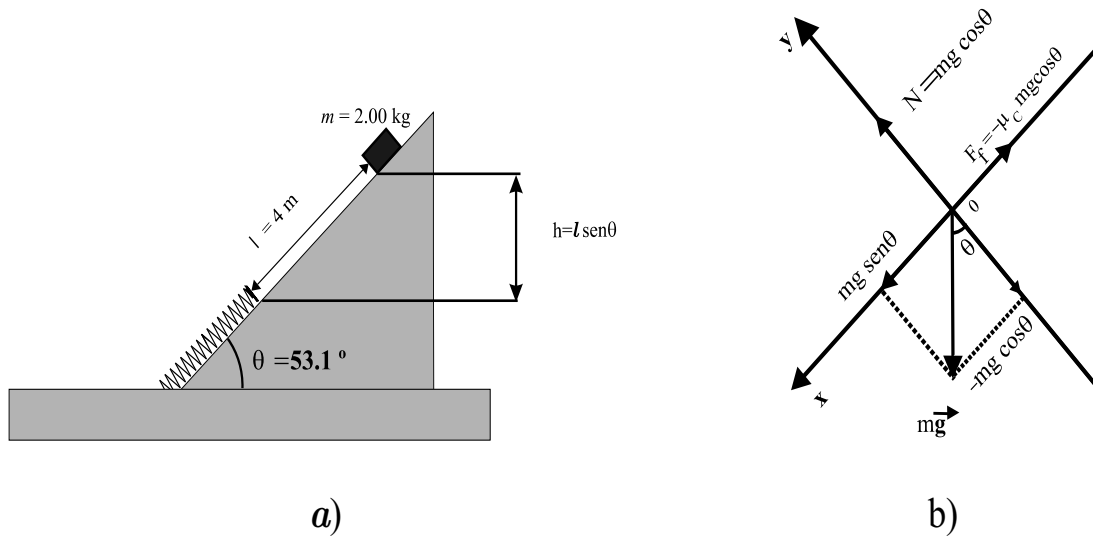


Figura 8.11: a) Elección del punto cero de energía potencial gravitacional. b) Diagrama de cuerpo libre para un bloque que desciende sobre un plano inclinado con fricción.

el subíndice 1 se refiere al punto desde donde el paquete inicia su movimiento sobre el plano inclinado y en donde  $v_1 = 0$ ,  $K_1 = 0$ ,  $U_1 = mgh$ ,  $h = l \text{sen} \theta$  y en donde  $l = 4 \text{ m}$  es la distancia original entre el paquete y el resorte y  $\theta = 53.1^\circ$  es el ángulo de inclinación del plano. El subíndice 2 corresponde al punto en donde el bloque está por entrar en contacto con el resorte y en el cual, por la manera en que se ha seleccionado el punto donde la energía potencial gravitacional es igual a cero,  $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ ,  $U_2 = 0$  y  $W_{\text{otras}} = F_f \cdot l$ , que de acuerdo con el inciso b) de la figura 8.11,  $F_f = -\mu_C mg \cos \theta$  de manera que  $W_{\text{otras}} = -\mu_C mgl \cos \theta$ , por lo tanto, la ecuación (8.6) tomará la siguiente forma:

$$mgh - \mu_C mgl \cos \theta = mgl(\text{sen} \theta - \mu_C \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_2^2, \quad (8.7)$$

de donde la rapidez que tiene el paquete justo antes de llegar al resorte está dada por:

$$v_2 = \sqrt{2gl(\text{sen} \theta - \mu_C \cos \theta)} = 7.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

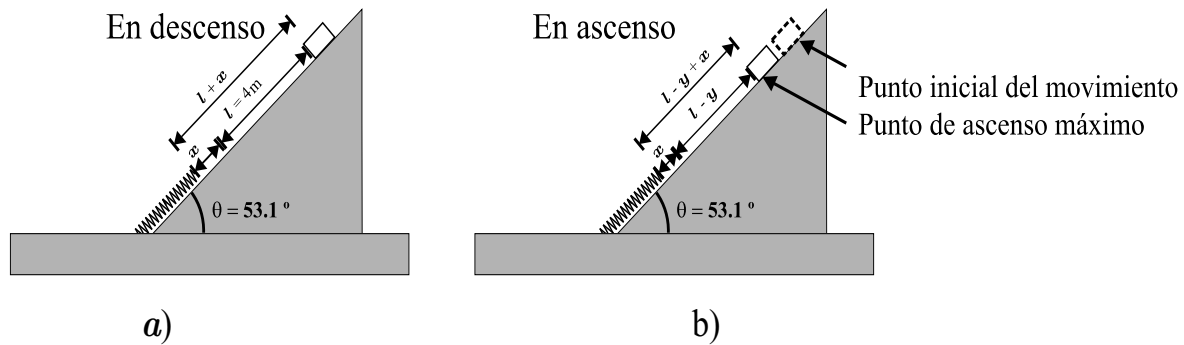


Figura 8.12: a) Diagrama de la altura inicial desde la cual el paquete inicia su movimiento hacia el resorte y b) determinación de la altura máxima que alcanza el paquete en su movimiento de ascenso tomando en consideración las pérdidas de energía debidas a la fricción.

b) Para determinar ahora la longitud  $x$  correspondiente a la compresión del resorte aplicamos la misma idea del inciso anterior:

$$K_2 + U_2 + W_{\text{o}t\text{r}as\ 2 \rightarrow 3} = K_3 + U_3, \quad (8.8)$$

el subíndice 3 representa el punto de máxima compresión del resorte en donde  $v_3 = 0$ ,  $K_3 = 0$ ,  $U_3 = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \sin \theta$  es la combinación de energía potencial elástica y energía potencial gravitacional y  $W_{\text{o}t\text{r}as\ 2 \rightarrow 3} = -\mu_C mgx \cos \theta$  es la cantidad de energía perdida por la fricción durante la compresión del resorte.

De esta manera, la ecuación (8.8) toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \mu_C mgx \cos \theta = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \sin \theta, \quad (8.9)$$

y si sustituimos:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgl(\sin \theta - \mu_C \cos \theta),$$

en la ecuación (8.9) obtenemos:

$$mgl(\sin \theta - \mu_C \cos \theta) + mgx(\sin \theta - \mu_C \cos \theta) = \frac{1}{2}kx^2,$$

o equivalentemente:

$$\frac{kx^2}{2mg(\sin \theta - \mu_C \cos \theta)} = l + x,$$

ahora bien, tomando los valores numéricos del problema obtenemos que:

$$4.504 x^2 - x - 4 = 0,$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(4.504)(-4)}}{2(4.504)} \\ &= 1.06 \text{ m.} \end{aligned} \quad (8.10)$$

c) Nuevamente, para obtener la longitud máxima que el bloque recorre en su ascenso podemos aplicar la misma idea que en los incisos anteriores:

$$K_1 + U_1 + W_{otras\ 1 \rightarrow 4} = K_4 + U_4, \quad (8.11)$$

el subíndice 4 se refiere al punto de máximo ascenso del paquete, tal y como se muestra en el inciso b) de la figura 8.12, en donde  $K_1 = 0$ ,  $U_1 = mgl \sin \theta$ , como vimos en el inciso a),  $K_4 = 0$  porque este es el punto en donde el bloque se detiene durante su ascenso,  $U_4 = mg(l - y) \sin \theta$  en donde  $(l - y)$  es la longitud máxima que asciende el paquete más allá del punto en donde el resorte se encuentra en equilibrio,  $W_{otras\ 1 \rightarrow 4}$  está dado por la fuerza de fricción ( $F_f = -\mu_C mg \cos \theta$ ) multiplicada por la longitud total que el bloque recorre en su movimiento de descenso y ascenso, la cual está dada por:  $(l + x) + (l + x - y) = 2(l + x) - y$ , en donde  $x$  es la compresión máxima del resorte calculada en el inciso anterior, por lo tanto tenemos que:

$$W_{otras\ 1 \rightarrow 4} = -\mu_C mg \cos \theta (2l + 2x - y),$$

por lo que finalmente se obtiene:

$$mgl \sin \theta - \mu_C mg \cos \theta (2l + 2x - y) = mg(l - y) \sin \theta,$$

y despejando  $y$  de esta última ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2\mu_C \cos \theta (l + x)}{\sin \theta + \mu_C \cos \theta} = \\ &= \frac{2\mu_C (l + x)}{\operatorname{tg} \theta + \mu_C} = 1.32 \text{ m,} \end{aligned} \quad (8.12)$$

por lo que la longitud que asciende el paquete más allá del punto en donde el resorte se encuentra en equilibrio será:

$$l - y = 2.68 \text{ m.} \quad (8.13)$$

**8-9.-** Un bloque de  $0.50 \text{ kg}$  que está en reposo en el punto  $A$ , se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción y está unido a un resorte que tiene una longitud natural de  $0.60 \text{ m}$ , una constante elástica  $40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  y masa despreciable, tal y como se muestra en la figura 8.13.

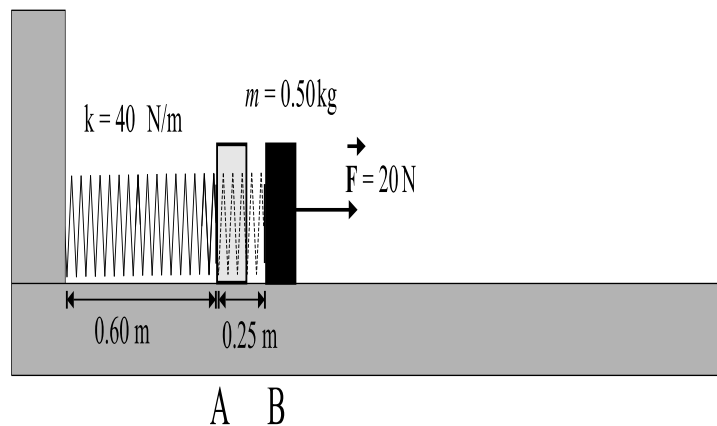


Figura 8.13: Diagrama de un bloque sujeto a un resorte bajo la acción de una fuerza externa  $\vec{F}$ .

Si ejercemos una fuerza horizontal constante hacia la derecha de  $20 \text{ N}$  sobre el bloque:

- ¿Qué rapidez tendrá cuando llegue al punto  $B$ , el cual está localizado a  $0.25 \text{ m}$  a la derecha del punto  $A$ ?
- En el punto  $B$  se suelta el bloque. En el movimiento subsecuente, ¿qué tanto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

**Sol:**

a) En este problema no hay fuerzas disipativas, sin embargo, cuando el bloque se desplaza del punto  $A$  al punto  $B$ , la energía mecánica total del sistema se incrementa debido a la acción de la fuerza externa  $\vec{F}$ , tal y como se muestra en la figura 8.14, el trabajo hecho por esta fuerza durante este recorrido está dado por:

$$W = F \cdot (x - l), \quad (8.14)$$

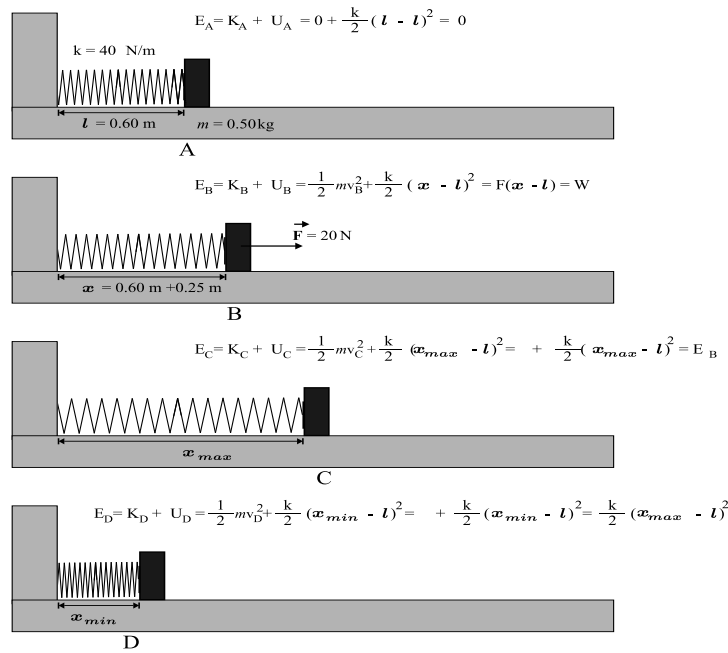


Figura 8.14: **Movimiento de un bloque sujeto a un resorte.** En el punto **A**, inicialmente el bloque está en reposo y adquiere energía debido al trabajo realizado por la fuerza externa  $\vec{F}$ .

en donde  $x$  es la posición del bloque respecto a la pared en el punto **B** ( $x = 0.85 \text{ m}$ ),  $l$  es la longitud natural del resorte y  $F$  es la magnitud de la fuerza  $\vec{F}$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E_B &= E_A + W \\
 K_B + U_B &= K_A + U_A + W = 0 + \frac{1}{2}k(l - l)^2 + F(x - l) = \\
 &= F(x - l),
 \end{aligned}$$

de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 K_B + U_B &= F(x - l) \\
 \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}k(x - l)^2 &= F(x - l),
 \end{aligned}$$

de esta última ecuación podemos despejar la rapidez  $v_B$  cuando el bloque está a  $0.25 \text{ m}$  a la derecha del punto **A** obteniendo:

$$\begin{aligned}
 v_B &= \sqrt{\frac{2}{m} \left[ F(x-l) - \frac{1}{2}k(x-l)^2 \right]} \\
 &= 3.87 \frac{m}{s}.
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

b) Durante el desplazamiento que el bloque realiza del punto  $B$  al punto  $C$  (Fig. 8.14) la energía mecánica total del sistema se conserva, es decir:

$$\begin{aligned}
 E_B &= E_C \\
 K_B + U_B &= F(x-l) = K_C + U_C = \\
 &= 0 + \frac{1}{2}k(x_{max} - l)^2,
 \end{aligned}
 \tag{8.16}$$

por lo que:

$$x_{max} = l + \sqrt{\frac{2F(x-l)}{k}} = (0.60 + 0.50) m = 1.10 m,
 \tag{8.17}$$

y finalmente se obtiene que:

$$x_{max} = 1.10 m.
 \tag{8.18}$$

Por otra parte, desconocemos  $x_{min}$  pero sabemos que esta distancia guarda una posición simétrica respecto a la longitud natural del resorte, por lo tanto, si  $x_{max}$  está a  $0.50 m$  hacia la derecha de la posición de equilibrio del resorte,  $x_{min}$  estará a  $0.50 m$  a la izquierda de la posición de equilibrio del resorte, por lo que:

$$x_{min} = l - 0.50 m = 0.60 m - 0.50 m = 0.10 m.
 \tag{8.19}$$

Este resultado se puede comprobar directamente de la condición de la conservación de la energía mecánica total, tal y como podemos observar en la situación  $D$  (Fig. 8.14). Aplicando esta condición obtenemos:

$$E_B = E_D = K_D + U_D = 0 + \frac{1}{2}k(x_{min} - l)^2,
 \tag{8.20}$$

de donde:

$$\begin{aligned} (x_{min} - l) &= -\sqrt{\frac{2}{k} (F (x - l))} \\ \implies \\ x_{min} &= (0.60 - 0.50) \text{ m} = 0.10 \text{ m}, \end{aligned}$$

es decir:

$$x_{min} = 0.10 \text{ m}. \quad (8.21)$$

Por lo tanto, la distancia de máximo acercamiento entre el bloque y la pared será de 10 *cm*.

- 8-10.-** Un automóvil se queda sin frenos cuando está bajando por una pendiente cubierta de hielo que tiene un ángulo de inclinación  $\beta$ , tal y como se muestra en la figura 8.15. Inicialmente el automóvil baja con rapidez  $v_0$ , después de recorrer una distancia  $L$  con fricción despreciable, el conductor guía el automóvil ascendiendo sobre una rampa de emergencia que tiene una superficie arenosa blanda en la que el coeficiente de fricción de rodamiento es  $\mu_r$  y una inclinación constante  $\alpha$  hacia arriba. ¿Qué distancia recorre el automóvil por la rampa antes de parar? Utilice métodos de energía.

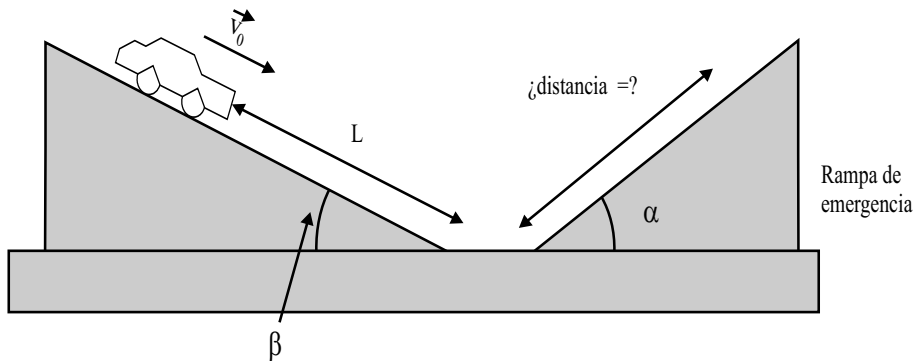


Figura 8.15: Paso de un automóvil a través de una rampa de emergencia.

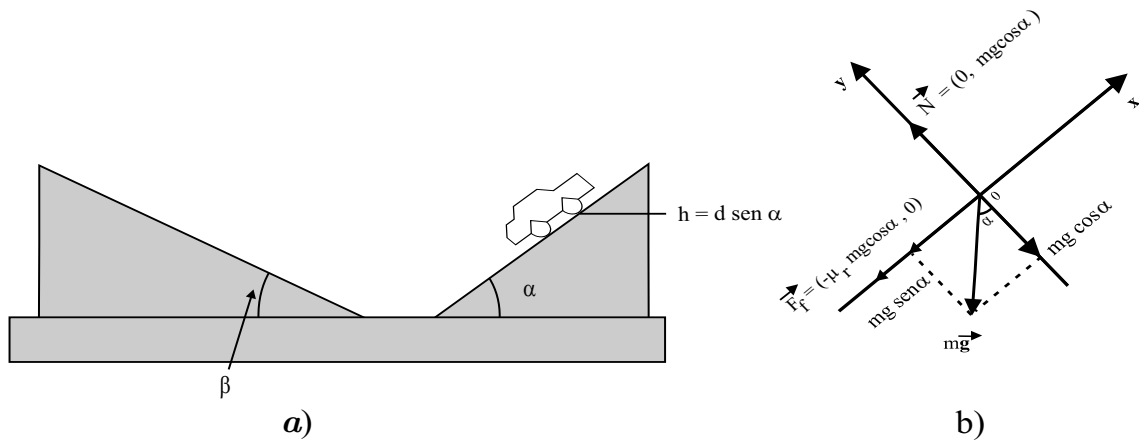


Figura 8.16: a) Diagrama del ascenso de un automóvil por una rampa de emergencia recorriendo una distancia  $d$  antes de detenerse. b) Diagrama de cuerpo libre de un automóvil durante el ascenso por una rampa de emergencia.

**Sol:**

Ya que desde el inicio del descenso (situación  $A$ ) la fricción existente entre la superficie de la pendiente y el automóvil puede despreciarse, la energía mecánica total será constante y tendrá el mismo valor en la base de la pendiente (situación  $B$ ), es decir:

$$\begin{aligned}
 K_B + U_B &= K_A + U_A \\
 \frac{1}{2}mv_f^2 &= mgh_i + \frac{1}{2}mv_0^2 = \\
 &= mgL \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{2}mv_0^2,
 \end{aligned}$$

en donde  $v_f$  es la rapidez con la que el automóvil llega a la base de la pendiente e inicia el ascenso por la rampa de emergencia. A partir de este punto la energía mecánica no se conserva debido a la fricción entre el automóvil y la rampa de emergencia.

Por lo tanto, tomando en cuenta las pérdidas asociadas con las fuerzas no conservativas, el balance de energía puede expresarse de la siguiente forma:

$$K_B + U_B + W_{rampa} = U_C, \quad (8.22)$$

el punto  $C$  corresponde a la altura máxima que alcanza el automóvil  $h = d \operatorname{sen} \alpha$ , en donde  $d$  es la distancia que el automóvil recorre por la rampa de emergencia antes de detenerse y  $W_{rampa} = -F_f \cdot d$ , donde  $F_f$  estará dada, de acuerdo al diagrama de cuerpo

libre (Fig. 8.16), por:

$$F_f = \mu_r N = \mu_r mg \cos \alpha.$$

De esta manera tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_f^2 - \mu_r mgd \cos \alpha &= mgd \sin \alpha \\ mgL \sin \beta + \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_r mgd \cos \alpha &= mgd \sin \alpha, \end{aligned}$$

de donde podemos encontrar la siguiente expresión para  $d$ , que es justamente la cantidad física que queremos determinar:

$$d = \frac{\frac{v_0^2}{2g} + L \sin \beta}{\sin \alpha + \mu_r \cos \alpha}.$$

## Capítulo 9

# Colisiones y conservación del momento lineal

9-1.- Una estrella de *hockey* sobre hielo que pesa  $756\text{ N}$  patina a una velocidad de  $13\frac{\text{m}}{\text{s}}$  hacia un defensor que se mueve en la misma línea pero en sentido contrario a una velocidad de  $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$  y que tiene un peso de  $900\text{ N}$ , tal y como se muestra en la figura 9.1. Justo después de la colisión, el jugador estrella se mueve a  $1.50\frac{\text{m}}{\text{s}}$  en su dirección original. Sin tomar en cuenta las fuerzas horizontales externas aplicadas por el hielo a los jugadores antes y después del choque, calcule:

- ¿Qué velocidad tiene el defensor justo después del choque?
- El cambio en la energía cinética total de ambos jugadores.

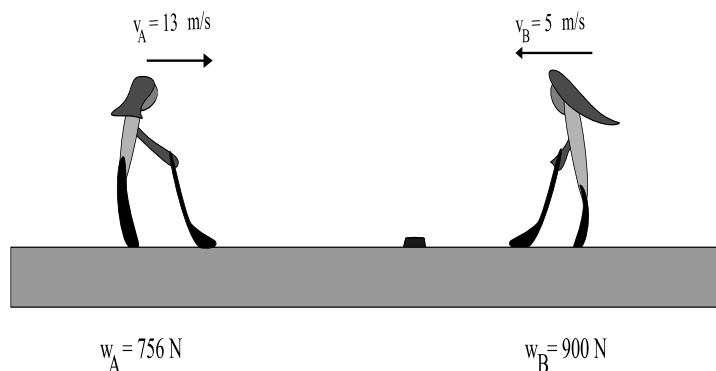


Figura 9.1: Choque entre dos jugadores de *hockey*.

**Sol:**

a) Para determinar la velocidad que tiene el defensor justo después del choque debemos identificar que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, la cantidad de movimiento lineal se conserva, ya que al estar patinando ambos jugadores sobre hielo, podemos despreciar la fuerza de fricción externa. Por otra parte, la tercera ley de Newton nos dice que la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero, por lo tanto tenemos que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.1)$$

en donde  $i$  y  $f$  corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora bien, para calcular  $\vec{P}_{Total_i}$  y  $\vec{P}_{Total_f}$  llamaremos al jugador menos pesado por la letra  $A$  y al jugador más pesado por la letra  $B$ , de esta manera  $\vec{P}_{Total_i}$  estará dado por:

$$\begin{aligned} P_{Total_i} &= m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i} = \\ &= v_{A_i} \frac{W_A}{g} + v_{B_i} \frac{W_B}{g} = 13 \left( \frac{756}{9.8} \right) + (-5) \left( \frac{900}{9.8} \right) \\ &= 543.67 \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

porque este problema es en una dimensión, además por la conservación de la cantidad de movimiento lineal total  $P_{Total_i}$  será igual a  $P_{Total_f}$  que está dado por:

$$\begin{aligned} P_{Total_f} &= m_A v_{A_f} + m_B v_{B_f} = P_{Total_i} = 543.67 \left( \text{kg} \frac{m}{s} \right) \\ &= v_{A_f} \frac{W_A}{g} + v_{B_f} \frac{W_B}{g} = 1.5 \left( \frac{756}{9.8} \right) + v_{B_f} \left( \frac{900}{9.8} \right) \\ &\Rightarrow \\ v_{B_f} &= \frac{P_{Total_i} - v_{A_f} \frac{W_A}{g}}{\frac{W_B}{g}} \\ &\Rightarrow \\ v_{B_f} &= 4.66 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Por lo tanto, la velocidad que tiene el defensor justo después del choque será de:  $v_{B_f} = 4.66 \frac{m}{s}$ .

b) Para determinar el cambio en la energía cinética total de ambos jugadores podemos utilizar el resultado del inciso anterior ya que:

$$\begin{aligned}
\Delta K &= K_f - K_i = \frac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_f}^2 - \\
&\quad - \left( \frac{1}{2}m_A v_{A_i}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_i}^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2}m_A (v_{A_f}^2 - v_{A_i}^2) + \frac{1}{2}m_B (v_{B_f}^2 - v_{B_i}^2) \\
\implies \\
\Delta K &= -6582.6 \text{ J.} \tag{9.4}
\end{aligned}$$

**9-2.-** En un sistema físico dos bloques que se encuentran en reposo sobre una superficie plana sin fricción comprimen un resorte de masa despreciable, tal y como se muestra en la figura 9.2. El bloque *A* tiene una masa de 1 kg y el *B* una masa de 3 kg. Posteriormente el sistema se libera y el resorte cae a la superficie después de extenderse, debido a esto el bloque *B* adquiere una velocidad de  $-1.20 \frac{m}{s}$ .

a) ¿Qué velocidad final tiene el bloque *A*?

b) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en el resorte comprimido?

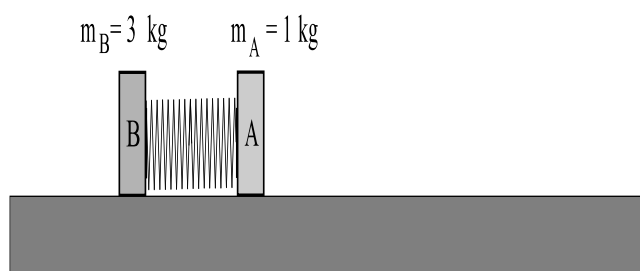


Figura 9.2: Sistema físico formado por dos bloques que inicialmente están comprimiendo a un resorte.

**Sol:**

a) Inicialmente el sistema físico se encuentra en reposo con una cantidad de energía  $E_i = U_i = \frac{kx^2}{2}$  que está almacenada en forma de energía elástica en el resorte, en donde  $x$  corresponde a la compresión inicial del resorte. Al liberarse el sistema la energía elástica se transforma íntegramente en energía cinética de ambos bloques, ya que no hay fuerzas disipativas que actúen sobre el sistema:

$$E_i = U_i = K_f = E_f. \tag{9.5}$$

$$m_B = 3 \text{ kg} \quad m_A = 1 \text{ kg}$$

$$\vec{P}_{Ti} = 0 = \vec{P}_{Tf} = m_A \vec{v}_{Af} + m_B \vec{v}_{Bf} = 1 \vec{v}_{Af} - 3.6 \text{ (kg m/s)}$$

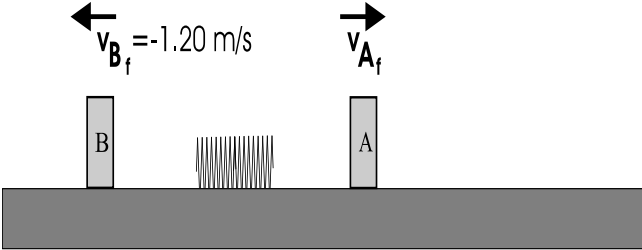
$$v_{Af} = 3.60 \text{ (m/s)}$$


Figura 9.3: Al liberarse el sistema de bloques la energía mecánica elástica almacenada en el resorte se transforma en energía cinética de ambos bloques, de forma que el movimiento lineal total del sistema se conserva.

Por otra parte, durante el proceso en que el sistema transforma esta cantidad de energía (Fig. 9.3), con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas del sistema es igual a cero:

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = 0, \quad (9.6)$$

y en consecuencia la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conservará:

$$\vec{P}_T = \sum_i \vec{p}_i = Cte. \quad (9.7)$$

Inicialmente, al estar el sistema en reposo, la cantidad de movimiento del sistema era igual a cero, de manera que en la situación final la cantidad de movimiento lineal total del sistema también debe sumar cero, i.e:

$$\begin{aligned} P_{Ti} = 0 &= P_{Tf} = \\ &= m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} = (1 v_{Af} - 3.60) \text{ kg} \frac{m}{s} = 0 \\ &\implies \\ v_{Af} &= 3.60 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

b) De acuerdo con la discusión del inciso anterior la energía potencial que se almacenó en el resorte comprimido es igual a la energía cinética total del sistema después de que el resorte se expande, i.e:

$$U_i = \frac{kx^2}{2} = K_f = \frac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_f}^2 = 8.64 J. \quad (9.9)$$

Por lo tanto, la energía potencial que inicialmente se almacenó en el resorte fue de 8.64 J.

**9-3.-** Un disco de *hockey* A que viaja a una velocidad de  $40 \frac{m}{s}$  sobre una superficie de hielo golpea a otro disco B que se encontraba en reposo, después del impacto el disco A se desvía  $30^\circ$  respecto a su dirección original, tal y como se muestra en la figura 9.4, mientras que el disco B adquiere una velocidad a  $45^\circ$  respecto a la velocidad original de A. Los discos tienen la misma masa.

a) Calcule la rapidez de cada uno de los discos después del choque.

b) ¿Qué fracción de la energía cinética original de A se disipa durante el choque?

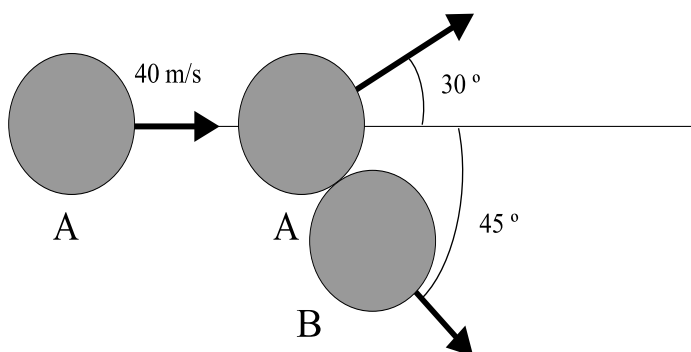


Figura 9.4: Diagrama de las trayectorias de dos discos de *hockey*.

**Sol:**

a) Para determinar la rapidez que tiene cada uno de los discos justo después del choque debemos identificar que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que al estar los discos de *hockey* sobre hielo podemos despreciar la fuerza de fricción externa y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.10)$$

en donde  $i$  y  $f$  corresponden a los estados inicial y final del sistema físico formado por los discos de *hockey*. Ahora, para calcular  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  y  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$  llamaremos al disco que inicialmente se encontraba desplazándose por la letra  $A$  y al disco inicialmente en reposo por la letra  $B$ , de esta manera  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  estará dado por:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i}, \quad (9.11)$$

en donde  $m_A$  y  $m_B$  tienen el mismo valor, por lo tanto, debemos concentrarnos en los vectores velocidad de los discos antes y después del choque:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_{A_i} &= (40, 0) \frac{m}{s} \\ \vec{\mathbf{v}}_{B_i} &= (0, 0) \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

adicionalmente, de la figura 9.4 sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_{A_f} &= (v_{A_f} \cos 30, v_{A_f} \sen 30) \\ \vec{\mathbf{v}}_{B_f} &= (v_{B_f} \cos 45, -v_{B_f} \sen 45), \end{aligned} \quad (9.13)$$

por lo que  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  y  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$  estarán dados por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\ &= m_A (40, 0) + m_B (0, 0) \\ \vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_f} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_f} \\ &= m_A (v_{A_f} \cos 30, v_{A_f} \sen 30) + m_B (v_{B_f} \cos 45, -v_{B_f} \sen 45), \end{aligned} \quad (9.14)$$

la condición impuesta por la conservación del vector cantidad de movimiento  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$  se escribe como:

$$\begin{aligned} m_A (40, 0) &= m_A (v_{A_f} \cos 30, v_{A_f} \sen 30) + m_B (v_{B_f} \cos 45, -v_{B_f} \sen 45) \\ \implies \\ 40 \frac{m}{s} &= \frac{\sqrt{3}}{2} v_{A_f} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{B_f} \\ 0 \frac{m}{s} &= \frac{1}{2} v_{A_f} - \frac{1}{\sqrt{2}} v_{B_f}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

donde hemos cancelado las masas de ambos bloques porque éstas son iguales, de esta forma, la rapidez de cada uno de los discos después del choque estará dada por:

$$\begin{aligned} v_{A_f} &= 29.28 \frac{m}{s} \\ v_{B_f} &= 20.70 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

b) La fracción de la energía cinética que posee el sistema físico después del choque está dada por el cociente de la energía cinética final entre la energía cinética inicial, i.e:

$$\begin{aligned} \frac{K_f}{K_i} &= \frac{\frac{1}{2}m_A v_{A_f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B_f}^2}{\frac{1}{2}m_A v_{A_i}^2} = \\ &= \frac{v_{A_f}^2 + v_{B_f}^2}{v_{A_i}^2} = 0.804, \end{aligned} \quad (9.17)$$

por lo tanto, la fracción de la energía cinética original que se disipa durante el choque es de:

$$1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - 0.804 = 0.196.$$

**9-4.-** En el cruce de la Avenida Texas y el Paseo Universitario, un auto subcompacto de 950 kg que viaja al este choca con una camioneta de 1900 kg que se ha pasado el alto de un semáforo mientras se dirigía hacia el norte, tal y como se muestra en la figura 9.5. Los dos vehículos quedan unidos después del impacto y se deslizan a  $16 \frac{m}{s}$  en una dirección a  $24^\circ$  al este del norte. Calcule la rapidez de cada vehículo antes del choque. Como la colisión tiene lugar durante una tormenta las fuerzas de fricción entre los vehículos y el pavimento húmedo son despreciables.

**Sol:**

Para determinar la rapidez que tiene cada uno de los vehículos justo antes del choque debemos identificar que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que al estar los vehículos sobre pavimento mojado podemos despreciar las fuerzas de fricción externas y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.18)$$

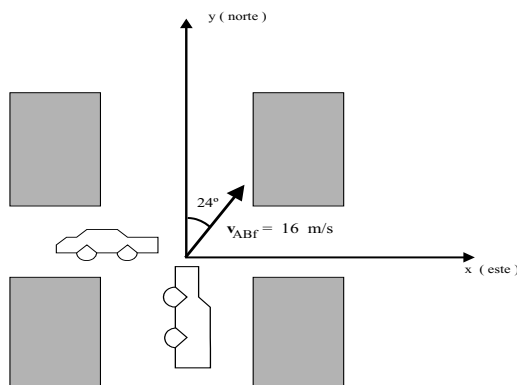


Figura 9.5: Diagrama de la colisión de dos vehículos.

en donde  $i$  y  $f$  corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, para calcular  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  y  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$  llamaremos al vehículo menos pesado por la letra  $A$  y al vehículo más pesado por la letra  $B$ , de esta manera  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  estará dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\ &= m_A (v_{A_i}, 0) + m_B (0, v_{B_i}) \\ &= (m_A v_{A_i}, m_B v_{B_i}),\end{aligned}\tag{9.19}$$

después de la colisión el sistema físico se encuentra formado por un sólo objeto cuya masa es  $m_A + m_B$ , es decir, en el presente caso nos encontramos ante una colisión totalmente inelástica, por lo tanto, el movimiento lineal total después del impacto está dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (m_A + m_B) \vec{\mathbf{v}}_{AB_f} \\ &= ((m_A + m_B) v_{AB_f} \cos 66, (m_A + m_B) v_{AB_f} \sin 66) \\ &= (18547.2, 41657.67) \text{ kg} \frac{m}{s},\end{aligned}\tag{9.20}$$

en donde  $v_{AB} = 16 \frac{m}{s}$ ,  $m_A = 950 \text{ kg}$  y  $m_B = 1900 \text{ kg}$ . Como  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$  debe ser igual a  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= (18547.2, 41657.67) \text{ kg} \frac{m}{s} = \\ &= \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = (m_A v_{A_i}, m_B v_{B_i}) \\ \implies \\ (18547.2, 41657.67) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v_{A_i}, m_B v_{B_i}),\end{aligned}\tag{9.21}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} 18547.2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} &= m_A v_{A_i} \\ 41657.67 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} &= m_B v_{B_i}, \end{aligned} \quad (9.22)$$

por consiguiente, la rapidez del vehículo subcompacto antes del choque será:

$$v_{A_i} = 19.52 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

y la rapidez de la camioneta antes del choque será:

$$v_{B_i} = 21.92 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**9-5.-** Las esferas  $A$ ,  $B$  y  $C$  que tienen una masa de  $0.020 \text{ kg}$ ,  $0.030 \text{ kg}$  y  $0.050 \text{ kg}$ , respectivamente, se acercan al origen deslizándose sobre una mesa neumática sin fricción, tal y como se muestra en la figura 9.6. Las velocidades iniciales de  $A$  y  $B$  se indican en esta figura. Las tres esferas llegan al origen simultáneamente y después de impactarse se desplazan unidas.

- ¿Qué componentes  $x$  y  $y$  debe tener la velocidad inicial de la esfera  $C$  si después del choque las tres se mueven juntas con una velocidad de  $0.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  en la dirección positiva de las  $x$ ?
- Si la esfera  $C$  tiene la velocidad obtenida en el inciso anterior, ¿cuánto cambia la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque?

**Sol:**

a) Para determinar la rapidez que tiene la esfera  $C$  justo antes del choque, nuevamente podemos identificar que durante todo el proceso físico; antes, durante y después del choque, el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que las esferas están deslizándose sobre una mesa neumática sin fricción y por lo tanto, la resultante de las fuerzas externas es igual a cero y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total} = cte = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}, \quad (9.23)$$

en donde  $i$  y  $f$  corresponde a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, para calcular  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  y  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$  debemos descomponer los vectores velocidad de las tres esferas antes y después de la colisión; con ayuda de la figura 9.6 obtenemos:

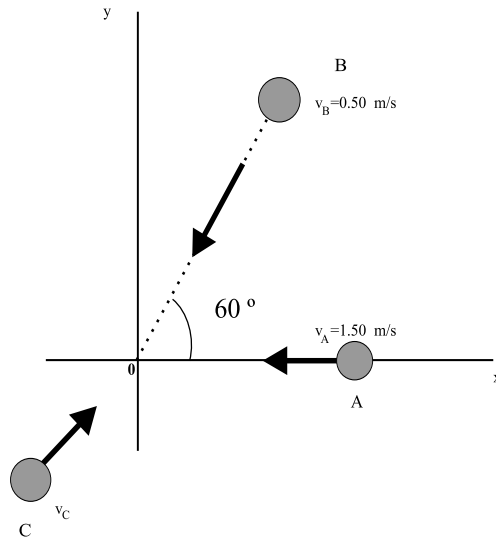


Figura 9.6: Diagrama de la trayectoria de tres esferas.

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_{A_i} &= (v_{B_i}, 0) = (-1.50, 0) \frac{m}{s} \\
 \vec{v}_{B_i} &= (v_{B_i}, 0) = (-0.50 \cos 60, -0.50 \operatorname{sen} 60) \frac{m}{s} \\
 \vec{v}_{C_i} &= (v_{C_{ix}}, v_{C_{iy}}) \frac{m}{s},
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

adicionalmente, debido a que la colisión es de tipo totalmente inelástico se tiene que:

$$\vec{v}_{A_f} = \vec{v}_{B_f} = \vec{v}_{C_f} = \vec{v}_{ABC_f} = (0.50, 0) \frac{m}{s}, \tag{9.25}$$

por lo tanto, de la conservación del movimiento lineal obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{Total_i} &= m_A \vec{v}_{A_i} + m_B \vec{v}_{B_i} + m_C \vec{v}_{C_i} \\
 &= m_A (-1.50, 0) + m_B (-0.50 \cos 60, -0.50 \operatorname{sen} 60) + \\
 &\quad + m_C (v_{C_{ix}}, v_{C_{iy}}) \\
 &= \left( -1.50m_A - \frac{0.50}{2}m_B + m_C v_{C_{ix}}, -\frac{\sqrt{3}(0.50)}{2}m_B + m_C v_{C_{iy}} \right), \tag{9.26}
 \end{aligned}$$

en donde  $m_A = 0.020 \text{ kg}$ ,  $m_B = 0.030 \text{ kg}$  y  $m_C = 0.050$ , además:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{Total_f} &= (m_A + m_B + m_C) \vec{v}_{ABC_f} \\
 &= (m_A + m_B + m_C) (0.50, 0),
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

por lo que:

$$\left( -1.50m_A - \frac{0.50}{2}m_B + m_C v_{C_{ix}}, -\frac{\sqrt{3}(0.50)}{2}m_B + m_C v_{C_{iy}} \right) = (m_A + m_B + m_C)(0.50, 0), \quad (9.28)$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} m_C v_{C_{ix}} &= 0.50(m_A + m_B + m_C) + 1.50m_A + \frac{0.50}{2}m_B = 0.0875 \text{ kg} \frac{m}{s} \\ m_C v_{C_{iy}} &= \frac{\sqrt{3}(0.50)}{2}m_B = 0.01299 \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

y finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} v_{C_{ix}} &= 1.75 \frac{m}{s} \\ v_{C_{iy}} &= 0.26 \frac{m}{s} \\ v_{C_i} &= \sqrt{v_{C_{ix}}^2 + v_{C_{iy}}^2} = 1.77 \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

en donde  $v_{C_i}$  es la rapidez de la esfera  $C$  antes del choque.

b) Para determinar el cambio en la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque tenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = \\ &= \frac{1}{2}[m_A + m_B + m_C](v_{ABC_f})^2 - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2}m_A(v_{A_i})^2 + \frac{1}{2}m_B(v_{B_i})^2 + \frac{1}{2}m_C(v_{C_i})^2 \right] \\ &= (0.0125 - 0.1045) \text{ J} = -0.092 \text{ J}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Por lo tanto, durante el choque la energía cinética del sistema disminuyó en una cantidad de  $0.092 \text{ J}$ .

**9-6.-** Dos bloques se deslizan sin fricción a lo largo de una línea recta con velocidades constantes, tal y como se indica en la figura 9.7. Después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el bloque que tiene una masa de  $1.6 \text{ kg}$  alcanza a otro bloque que tiene una masa de  $2.4 \text{ kg}$ , originándose una colisión.

a) ¿Cuál es la velocidad  $\vec{v}_f$  del bloque de  $1.6 \text{ kg}$  después de la colisión?

b) ¿Es elástica la colisión?

c) Suponiendo que la velocidad inicial del bloque de  $2.4 \text{ kg}$  está dirigida en sentido opuesto al que se muestra en la figura 9.7. ¿Después de la colisión puede la velocidad del bloque de  $1.6 \text{ kg}$  ocurrir en la dirección que se muestra en la figura?

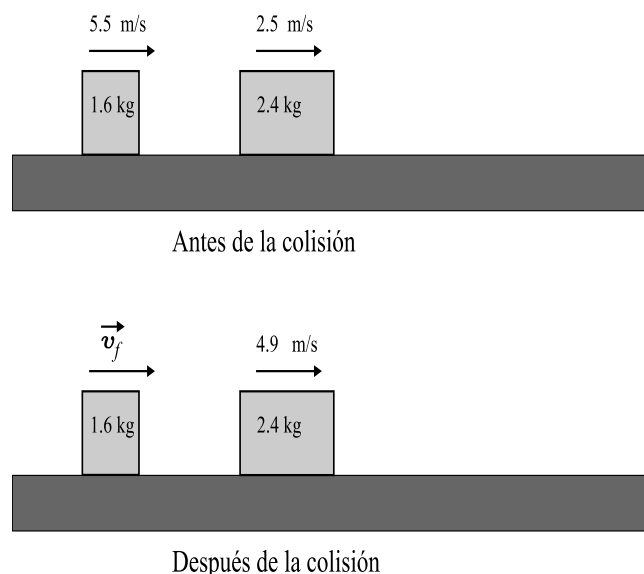


Figura 9.7: Diagramas de dos bloques, antes y después de que colisionan.

**Sol:**

En este problema llamaremos al bloque de masa  $1.6 \text{ kg}$  como el bloque  $A$  y al bloque de masa  $2.4 \text{ kg}$  con la letra  $B$ .

a) Para determinar la velocidad  $\vec{v}_{Af}$  del bloque  $A$  cuya masa es  $m_A = 1.6 \text{ kg}$  después de la colisión, debemos identificar que durante toda la situación física; antes, durante y después del choque el vector cantidad de movimiento lineal total se conserva, ya que los bloques de la figura 9.7 se deslizan sobre una superficie horizontal sin fricción y con base en la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas de un sistema físico siempre es igual a cero.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{\mathbf{P}}_{Total} = cte = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_f}, \quad (9.32)$$

en donde  $i$  y  $f$  corresponden a los estados inicial y final del sistema físico formado por los bloques  $A$  y  $B$ . Ahora, necesitamos calcular  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  y  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f}$ , en donde  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$  estará dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{P}}_{Total_i} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_i} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_i} \\
&= m_A (5.50, 0) + m_B (2.50, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
&= (5.50m_A + 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s},
\end{aligned} \tag{9.33}$$

además:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} &= m_A \vec{\mathbf{v}}_{A_f} + m_B \vec{\mathbf{v}}_{B_f} \\
&= m_A (v, 0) + m_B (4.90, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
&= (m_A v + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s},
\end{aligned} \tag{9.34}$$

en donde  $v$  es la rapidez del bloque  $A$  después de la colisión y como  $\vec{\mathbf{P}}_{Total_f} = \vec{\mathbf{P}}_{Total_i}$ ,  $m_A = 1.6 \text{ kg}$  y  $m_B = 2.4 \text{ kg}$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned}
(5.50m_A + 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
\implies (5.50m_A + 2.50m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
\implies 14.8 \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A v + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} = (11.76 + m_A v) \text{ kg} \frac{m}{s} \\
\implies v &= 1.9 \frac{m}{s}.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

b) Para determinar el tipo de colisión que representa el proceso físico anterior debemos de considerar el valor del cambio de la energía cinética  $\Delta K$ :

$$\begin{aligned}
\Delta K &= K_f - K_i = \\
&= \frac{1}{2}m_A (v_{A_f})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{B_f})^2 - \\
&\quad - \left[ \frac{1}{2}m_A (v_{A_i})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{B_i})^2 \right] \\
&= (31.7 - 31.7) \text{ J} = 0 \text{ J}.
\end{aligned} \tag{9.36}$$

Esto significa que la energía cinética total del sistema se conserva durante la colisión y por lo tanto, se trata de una colisión elástica.

c) Para determinar la velocidad  $\vec{v}_{Af}$  del bloque  $A$  cuya masa es  $m_A = 1.6\text{kg}$  después de la colisión, si ahora  $\vec{v}_{Bi} = (-2.5, 0) \frac{m}{s}$ ,  $\vec{v}_{Ai} = (5.5, 0) \frac{m}{s}$  y  $\vec{v}_{Bf} = (4.9, 0) \frac{m}{s}$  tenemos que:

$$\vec{P}_{Total} = cte = \vec{P}_{Total_i} = \vec{P}_{Total_f}, \quad (9.37)$$

en donde  $i$  y  $f$  corresponden a los estados inicial y final del sistema físico. Ahora, necesitamos calcular  $\vec{P}_{Total_i}$  y  $\vec{P}_{Total_f}$ , en donde  $\vec{P}_{Total_i}$  estará dado por:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{Total_i} &= m_A \vec{v}_{Ai} + m_B \vec{v}_{Bi} \\ &= m_A (5.50, 0) + m_B (-2.50, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &= (5.50m_A - 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

además, si  $\tilde{v}$  es la velocidad en la dirección  $x$  del bloque  $A$  después de la colisión,  $\vec{P}_{Total_f}$  estará dado por:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{Total_f} &= m_A \vec{v}_{Af} + m_B \vec{v}_{Bf} \\ &= m_A (\tilde{v}, 0) + m_B (4.90, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.39)$$

y como  $\vec{P}_{Total_f} = \vec{P}_{Total_i}$ ,  $m_A = 1.6 \text{ kg}$  y  $m_B = 2.4 \text{ kg}$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} (5.50m_A - 2.50m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B, 0) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &\implies \\ (5.50m_A - 2.50m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &\implies \\ 2.8 \text{ kg} \frac{m}{s} &= (m_A \tilde{v} + 4.90m_B) \text{ kg} \frac{m}{s} \\ &\implies \\ \tilde{v} &= -5.6 \frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (9.40)$$

y el cambio en la energía cinética estará dado por:

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = \\ &= \frac{1}{2}m_A (v_{Af})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{Bf})^2 - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2}m_A (v_{Ai})^2 + \frac{1}{2}m_B (v_{Bi})^2 \right] \\ &= (53.9 - 31.7) \text{ J} = 22.20 \text{ J}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Por lo tanto, la velocidad final  $\vec{v}_{Af} = (\tilde{v}, 0) = (-5.6, 0) \frac{m}{s}$  del bloque  $A$ , de masa  $m_A = 1.6 \text{ kg}$ , no puede tener una dirección contraria a la que se muestra en la figura 9.7, ya que el sistema físico presentaría un incremento en su energía cinética, lo cuál no está permitido de acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica total.

# Bibliografía

- [1] P. G. Hewitt. *Física Conceptual*. 9ª ed., Pearson, México D.F., 2004.
- [2] Eliézer Braun E. *Física 1 (Mecánica)*. 1ª ed., Trillas, México D.F., 1993.
- [3] U. Haber-Schaim, J. B. Cross, J. H. Dodge & J. A. Walter. *PSSC Física*. 3ª ed., Reverté, México D.F., 1998.
- [4] F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, R. A. Freedman. *Física Universitaria*. 11ª ed., Pearson, 2004.
- [5] R. Resnick, D. Halliday, J. Walker. *Fundamentos de Física I*. 6ª ed., CECSA, México D.F., 2001.
- [6] P. A. Tipler & Mosca Gene. *Física para la Ciencia y la Tecnología*. 5ª ed., Editorial Reverté, Barcelona, España, 2004.
- [7] U. Ingard & W. L. Kraushaar. *Introducción al estudio de la Mecánica, Materia y Ondas*. 1ª ed., Editorial Reverté, Barcelona, España, 1960.
- [8] T. D. Navarrete & J. A. Rocha. *Colección de Problemas Resueltos para el Curso de Energías Mecánicas y Eléctricas*. 1ª ed., Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, 1997.
- [9] E. Hecht & F. J. Bueche. *Schaum's Outline of Theory and Problems of College Physics*. Ninth edition, Mc Graw Hill, New York, 1997.
- [10] S. Targ. *Curso Breve de Mecánica Teórica*. 5ª ed., Editorial Mir, Moscú, 1986.
- [11] J. Flores V. & G. Anaya D. *Dinámica del Cuerpo Rígido*. SEP-Fondo de Cultura Económica, México D.F., 1989.
- [12] D.T. Greenwood. *Classical Dynamics*. Dover Publication, New York, 1997.
- [13] S. Strelkov. *Mecánica*. Editorial Mir, Moscú, 1978.

*Problemas Resueltos de Cinemática y Dinámica  
de una Partícula* se terminó de imprimir en el  
mes de febrero de 2007, en los talleres de la  
Universidad Autónoma de la Ciudad de México,  
con un tiraje de 500 ejemplares.

## Problemas Resueltos de Cinemática y Dinámica de una Partícula

“Una de las más grandes dificultades con la que se enfrentan los estudiantes que por primera vez tienen contacto con la física a nivel universitario, es la de plasmar en un problema sencillo, pero específico, las ideas generales discutidas en clase. Esta dificultad para plantear y resolver problemas resulta ser un gran obstáculo para que los estudiantes avancen en el estudio de esta área del conocimiento”. Problemas Resueltos de Cinemática y Dinámica de una Partícula se convierte así, en un notable esfuerzo por poner en un lenguaje sencillo y accesible conceptos cuya correcta asimilación es indispensable para el disfrute de la física.

Es una obra que intenta transmitir a los estudiantes el espíritu y el valor del aprendizaje independiente, “la idea de proporcionar a los estudiantes este conjunto de problemas y sus soluciones es darles más elementos con los que puedan contrastar sus aprendizajes”, de ahí la importancia de este trabajo, que no debe ser visto, únicamente, como un libro de texto, sino como una herramienta fundamental para el desarrollo formativo e intelectual de los estudiantes —y para cualquier lector que se interese por este apasionante tema—.

Huitzilin Yépez Martínez es maestro —galardonado con la medalla Alfonso Caso— y doctor en Física por la Universidad Nacional Autónoma de México; actualmente se desempeña como profesor-investigador de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Biblioteca  
**BE**  
del  
Estudiante

ISBN 9685720-75-4