

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

**Control biológico de una plaga usando un modelo generalizado
depredador presa con multiagentes**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

PRESENTA

Dalila Susana Almaguer Suastegui

Director de la Tesis

Dr. Carlos Islas Moreno

Codirección

Dr. Pablo Padilla Longoria

Ciudad de México, diciembre de 2021.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Dedico esta tesis de grado a mi querido padre:

Alfredo Almaguer Castillo,
quién fue para mí, un ejemplo de fortaleza y dedicación.

Gracias a él, adquirí principios y valores.

Siempre estarás orgulloso de tu hija.

Dalila S. Almaguer Suastegui.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco infinitamente a mis padres: Estela Suastegui Medrano y Alfredo Almaguer Castillo, así como, a mis hermanas y hermano: Selene, Omar, Elisa y Telma por su amor y apoyo incondicional.

Agradezco mucho a mis docentes de la U.A.C.M. y de la U.N.A.M., por compartir conmigo sus valiosos conocimientos y todas las aportaciones que hicieron para mejorar este trabajo: Dra. Rocío Leonel Gómez, Dr. Felipe Humberto Contreras Alcalá, Dr. Juan Antonio Nido Valencia, M. en C. Juan Luis Martínez Ledesma y M. en C. Marco Antonio Prado Záya-go. En especial a mi Director; Dr. Carlos Islas Moreno por su ayuda, paciencia y dedicación, así como a mi Co - Director, Dr. Pablo Padilla Longoria en atención a sus aportaciones a lo largo de la presente tesis.

También quiero agradecer a todos los administrativos de la universidad, sobre todo a Rosa Emilia Waldo Martínez, por el apoyo brindado con todos los trámites necesarios para lograr la culminación de esta tesis.

Finalmente, quiero agradecer a todos mis compañeros de Maestría por haber compartido conmigo su valioso tiempo durante mi estadía en la U.A.C.M.

Muchas gracias a todos.

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN.	1
2. ANTECEDENTES	3
2.1. Modelo depredador presa	3
2.1.1. Modelos de población	3
2.2. Existencia y unicidad	9
2.2.1. Modelos no lineales	12
2.2.2. Linealización	14
2.3. Métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales	24
2.3.1. Método de Euler	25
2.3.2. Algoritmo del método de Euler	26
2.3.3. Runge Kutta	28
2.4. Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes	32
2.5. Antecedentes agroecológicos	36
3. MODELOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES	45
3.1. Modelo H. Cubana	45
3.2. Modelo H. Cubana vs. Cacti	47
3.3. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla	52
3.4. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla y Cacti	55
3.5. Modelo H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti).	58
3.6. Modelo H. Cubana vs. Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla, Cacti) y la vaca	60
4. MODELO BASADO EN AGENTES	63
4.1. Modelo H. Cubana	63
4.2. Modelo H. Cubana vs. Cacti	66
4.3. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla	68
4.4. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla y Cacti	70

4.5. Modelo H. Cubana y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti) alimentados con Leucaena.	73
4.6. Modelo H. Cubana, Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla, Cacti) y la vaca	75
5. RESULTADOS	79
6. CONCLUSIONES	83
BIBLIOGRAFÍA	84
A. APÉNDICE (CÓDIGO EN C RUNGE KUTTA)	90
B. APÉNDICE (CÓDIGO EN PYTHON RUNGE KUTTA)	91
B.1. Código Runge Kutta de la ecuación dinámica H. Cubana	91
B.2. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana y Cacti.	92
B.3. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana y Chrysoperla.	93
B.4. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana, Cacti y Chrysoperla	94
B.5. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana, Cacti y Chrysoperla, Leucaean y vaca	95
C. APÉNDICE (CÓDIGO DE NETLOGO INTERACTUANDO PLAGA (H. CUBANA) Y CULTIVO (LEUCAENA))	97
C.1. Apéndice (Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), y depredador (Cacti))	100
C.2. Apéndice (Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), y otro depredador (Chrysoperla)	102
C.3. Apéndice(Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla))	105
C.4. Apéndice(Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), cultivo y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla)	108
C.5. Apéndice (Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), cultivo dos depredadores (Cacti y Chrysoperla) y vaca).	111

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Análisis cualitativo del modelo logístico.	7
2.2	Teorema de la existencia.	11
2.3	Falta de unicidad.	12
2.4	Modelo no lineal.	13
2.5	Linealización.	14
2.6	Sistema lineal.	17
2.7	Sistema no lineal.	18
2.8	Plano traza - determinante.	19
2.9	Punto silla en el origen.	20
2.10	Sistemas lineales con $\lambda = \mu$	20
2.11	Sistemas lineales con $\lambda < \mu$	21
2.12	Sistemas lineales con $\lambda = \mu < 0$	21
2.13	Sistemas lineales con $a > 0$ y $b > 0$	21
2.14	Sistemas lineales con $a > 0$ y $b < 0$	22
2.15	Sistemas lineales caso 4 con $b > 0$	22
2.16	Sistemas lineales caso 4 con $b < 0$	22
2.17	Teorema de Taylor.	24
2.18	Método numérico de Euler (ejemplo 1a).	27
2.19	Método numérico de Euler (ejemplo 1b).	27
2.20	Método numérico de Runge Kutta.	31
2.21	Modelo basado en agentes.	33
2.22	Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 57 por ciento de árboles.	35
2.23	Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 61 por ciento de árboles.	35

2.24	Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 55 por ciento de árboles.	36
2.25	Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 65 por ciento de árboles.	36
2.26	Cuadro 1: Comparación de las principales características de un sistema de producción ganadera con pastos mejorados y asociado con <i>Leucaena leucocephala</i> a baja y alta densidad. Nomenclaturas: $t\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa toneladas por hectárea por año, $kg\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa kilogramos por hectárea por año, $L\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa litros por hectárea por año.	40
2.27	Cuadro 2: Oferta y calidad de forraje de un sistema silvopastoril intensivo comparado con monocultivo de pasto fertilizado con nitrógeno en el Valle de Cauca, Colombia. Nomenclaturas: $tMS\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa toneladas de materia seca por hectárea por año, $Mcal\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa megacaloría por hectárea por año, $kg\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa kilogramo por hectárea por año.	41
2.28	[7] Cuadro 3: Carga animal y producción de leche en dos sistemas de pastoreo: tradicional vs. silvopastoril intensivo. Nomenclaturas: $kg\ N\ ha^{-1}\ año^{-1}$ significa kilogramo de nitrógeno por hectárea por año, $450\ kg\ animal\ ha^{-1}$ es 450 kilogramos de animal por hectárea, $L\ ha^{-1}\ año^{-1}$ indica litros por hectárea por año, mm quiere decir milímetros y msnm metros sobre el nivel del mar.	42
2.29	<i>Heteropsylla</i> Cubana [49] y <i>Leucaena Leucocephala</i> [50].	43
2.30	Dos depredadores: Cacti [51] y <i>Chrysoperla</i> [52].	44
3.1	Esquema 1. Modelo H. Cubana. α representa una interacción de H. Cubana con H. Cubana.	46
3.2	Comportamiento de estabilidad respecto al parámetro α	47
3.3	Crecimiento poblacional de H. Cubana.	48
3.4	Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana.	48
3.5	Esquema 2. Modelo H. Cubana vs. Cacti, donde β es el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones <i>Chilocorus Cacti</i> y e representa porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir una presa.	49
3.6	Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana Vs. Cacti.	51
3.7	Esquema 3. Modelo H. Cubana vs. <i>Chrysoperla</i> , donde γ es el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones <i>Chrysoperla sp.</i> , y f representa el porcentaje de incremento de <i>Chrysoperla sp.</i> , por ingerir una presa.	53

3.8	Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana Vs. Chrysoperla.	55
3.9	Esquema 4. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla y Cacti, donde α, β, γ son los coeficientes de competencia intraespecífica de las poblaciones H. cubana, Chilocorus Cacti y Chrysoperla sp., respectivamente; así como e representa el porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir una presa y la f es el porcentaje de incremento de Chrysoperla sp., por ingerir una presa.	56
3.10	Puntos de equilibrio de H.Cubana vs. Cacti.	57
3.11	Puntos de equilibrio de H.Cubana vs. Chrysoperla.	57
3.12	Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana vs. Cacti y Chrysoperla. . .	58
3.13	Esquema 5. Modelo H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti), donde $\alpha, \beta, \gamma,$ y ϕ representan el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. Cubana, Chilocorus Cacti, Chrysoperla sp. y Leucaena respectivamente, así como g es el porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Ch. Cacti, y h es porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Chrysoperla sp.	59
3.14	Esquema 6. Modelo H. Cubana vs. Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla, Cacti) y la vaca, donde $\alpha, \beta, \gamma, \phi,$ y σ representan el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. cubana, Chilocorus cacti, Chrysoperla sp., Leucaena y vaca respectivamente.	61
4.1	Ventana de programa de: H. Cubana vs. Leucaena.	65
4.2	Corridas representativas de H. Cubana vs. Leucaena.	65
4.3	Ventana de programa de: H. Cubana vs. Cacti.	67
4.4	Corridas de H. Cubana vs. Cacti	67
4.5	Ventana de programa de: H. Cubana vs. Chrysoperla.	69
4.6	Corridas de H. Cubana vs. Chrysoperla.	69
4.7	Ventana de programa de: H. Cubana vs. Cacti y Chrysoperla.	71
4.8	Corridas de H. Cubana vs. Cacti y Chrysoperla.	72
4.9	Ventana de programa de: H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla).	74
4.10	Corridas de H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla).	74

4.11	Ventana de programa de: H. Cubana, Leucaena, sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), así como la vaca.	76
4.12	Corridas de H. Cubana, Leucaena, sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), así como la vaca.	77
5.1	Concentrado de datos usando NetLogo	82

1. INTRODUCCIÓN

Desde que el ser humano tuvo el interés por explicar cómo funciona la naturaleza misma, buscó la forma de entenderla a través de modelos matemáticos, que son representaciones abstractas de situaciones reales que nos rodean día a día. Por ejemplo, el comportamiento de los animales en un entorno específico; es decir, cómo podemos predecir la conducta de una presa y sus dos depredadores en un agroecosistema.

En este trabajo usamos el modelo dinámico Lotka Volterra para establecer el comportamiento de una presa con sus dos depredadores en un sistema biológico predeterminado. Para esto, necesitamos un sistema de ecuaciones diferenciales que nos facilitará su comprensión. Después usamos modelos mucho más complicados (con más ecuaciones diferenciales y más parámetros) con la intención de entender un agroecosistema establecido más acorde al real. También, usando los esquemas que nos ayudan a determinar las ecuaciones diferenciales para los modelos generalizados depredador presa, describimos todos los agentes que intervendrán en el presente trabajo. Finalizamos este trabajo modelando con multiagentes los agroecosistemas planteados en el capítulo 3 y presentando soluciones numéricas para hacer simulaciones computacionales del comportamiento del sistema en cuestión y con ello, establecer un criterio propio de optimización real en el campo agrícola. Lo anterior, únicamente requerirá de la parte computacional que toma como base el establecimiento de patrones numéricos reales. Esto atiende y da respuesta parcial a la problemática planteada en [7].

Este trabajo esta organizado como sigue: Empezamos mostrando los antecedentes necesarios para la investigación; iniciamos el capítulo de antecedentes con la teoría de ecuaciones diferenciales necesaria para describir el modelo depredador presa y su generalización, incluyendo los métodos que aplicamos para la descripción dinámica de los puntos de equilibrio. También incluimos la descripción de los modelos multiagentes y su necesidad. Cerramos el capítulo de antecedentes incluyendo una historia de arte de la necesidad agroecológica del problema que atenderemos con el modelo depredador presa.

En el capítulo 3 describiremos los modelos generalizados depredador presa; sin embargo, para entenderlos, empezamos describiendo modelos poblacionales de la plaga y el cultivo. Continuamos viendo dos modelos depredador presa bidimensionales y finalizamos describiendo dos generalizaciones de los modelos depredador presa.

En el capítulo 4, usaremos la herramienta NetLogo para hacer simulaciones computacionales basadas en los agentes que involucren a los modelos depredador presa. Además usaremos la herramienta de análisis de comportamientos de NetLogo para describir las situaciones óptimas similares a las presentadas en el capítulo 3.

Finalizamos esta tesis presentando los resultados obtenidos, principalmente la consistencia numérica de sistemas dinámicos y sistemas multiagentes en nuestro sistema silvopastoril.

2. ANTECEDENTES

Con el objetivo de presentar un modelo multiagentes que describa un sistema silvopastoril es necesario introducir la herramienta para dicho modelo. Dado que los sistemas de ecuaciones diferenciales serán la base para el modelo silvopastoril, iniciaremos este capítulo describiendo el modelo depredador presa por medio de este tipo de ecuaciones; por esta razón empezaremos a describir la teoría de ecuaciones diferenciales, modelos de población, modelos no lineales y la forma de entenderlos. Describiremos los métodos numéricos que nos apoyarán para encontrar soluciones. Continuaremos con la descripción del modelado basado en agentes y finalizaremos describiendo los antecedentes necesarios para el modelo biológico multiagente que propondremos.

2.1. Modelo depredador presa

2.1.1. Modelos de población

Modelo de población exponencial

De acuerdo a [1], un modelo elemental de crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población. La razón de cambio de una población solamente depende del tamaño de esta. Por ejemplo; al estudiar los primeros brotes de moho en una pieza de pan o los primeros colonizadores de Estados Unidos.

En estos dos planteamientos, antes mencionados, las cantidades implicadas son:

t = tiempo (variable independiente),

P = población (variable dependiente) y

k = constante de proporcionalidad (parámetro) entre la tasa de crecimiento de la población y el tamaño de esta.

El parámetro k suele llamarse **coeficiente de velocidad de crecimiento**. Las unidades para esas cantidades dependen de la aplicación. Si estamos modelando el crecimiento del moho en el pan, entonces t podría medirse en días y $P(t)$ en millones de pobladores. En este caso haríamos corresponder $t = 0$ en cualquier tiempo que quisiéramos, es decir, podemos elegir una población inicial en algún tiempo determinado. Como la tasa de crecimiento de la población P , denotada por dP/dt , es proporcional a la población, se expresa como el producto, kP , de la población P y la constante k de proporcionalidad. Todo lo anterior implica que el

modelo de población exponencial se exprese por la ecuación diferencial.

$$\frac{dP}{dt} = (kP).$$

Lo que predice el modelo es lo siguiente: como $dP/dt = kP$ para alguna constante k , $dP/dt = 0$ si $P = 0$. Entonces la función constante $P(t) = 0$ es una solución de la ecuación diferencial, a esto se le denomina **solución de equilibrio**, en el sentido que es constante para siempre. En términos del modelo de población, corresponde a una especie que no existe.

Si $P(t_0) \neq 0$ en algún tiempo t_0 , entonces en el tiempo $t = t_0$, con $k \neq 0$,

$$\frac{dP}{dt} = kP(t_0) \neq 0.$$

En consecuencia, la población no es constante.

Si $k > 0$ y $P(t_0) > 0$, tenemos,

$$\frac{dP}{dt} = kP(t_0) > 0.$$

Por lo que, en este caso, en el tiempo $t = t_0$ la población está creciendo (como era de esperarse). Conforme t crece, $P(t)$ se vuelve mayor, por lo que dP/dt aumenta. A su vez, $P(t)$ crece aún más rápidamente. Es decir, la velocidad de crecimiento crece en relación directa con la población.

Soluciones analíticas de la ecuación diferencial

Si, por otra parte, conocemos el valor exacto P_0 de $P(0)$ y queremos predecir el valor de $P(10)$ o $P(100)$, entonces necesitamos información más precisa sobre la función $P(t)$. El par de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= kP \\ P(0) &= P_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

se llaman **problema de valor inicial**. Una **solución** al problema de valor inicial es una función $P(t)$ que satisface ambas ecuaciones; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= kP(t) \text{ para toda } t, \\ P(0) &= P_0. \end{aligned}$$

Para solucionar esta ecuación diferencial debemos hallar una función $P(t)$ cuya derivada sea el producto de k con $P(t)$, así

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

es dicha solución. En conclusión obtuvimos una ecuación diferencial para resolver el problema con valor inicial (2.1). Este método lo usaremos como una herramienta de solución para resolver cualquier problema que implique un crecimiento exponencial de población con condiciones iniciales dadas.

Modelo logístico de la población

Tomando como base el modelo exponencial de población agregamos lo siguiente:

- Si la población es pequeña, la razón de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.
- Si la población es demasiado grande para ser sostenida por su entorno y recursos, la población disminuirá, es decir la razón de crecimiento es negativa.

Para este modelo usamos de nuevo:

t = tiempo (variable independiente),

P = población (variable dependiente) y

k = constante de proporcionalidad (parámetro) entre la tasa de crecimiento de la población y el tamaño de esta.

Sin embargo, al añadir la hipótesis de recursos limitados, tendremos otra cantidad, con el tamaño de la población que corresponde a ser *demasiado grande*. Esta cantidad es un segundo parámetro, que se denota para cada N y que llamamos la *capacidad de carga* del entorno. En términos de la capacidad de carga, estamos suponiendo que $P(t)$ crece si $P(t) < N$. No obstante, si $P(t) > N$, suponemos que $P(t)$ está decreciendo.

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Si P es pequeña (primera hipótesis) y
- Si $P > N$, $\frac{dP}{dt} < 0$ (segunda hipótesis).

Modificando el modelo exponencial lo menos posible, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot (\text{algo}) \cdot P.$$

El factor es *algo* cercano a 1, si P es pequeña, y $P > N$, queremos que *algo* sea negativo. La expresión más simple que tienen estas propiedades es la función

$$(\text{algo}) = \left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

y será negativa si $P > N$.

Entonces nuestro modelo es:

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P.$$

A este se le llama **modelo logístico de la población** con velocidad de crecimiento k y capacidad de carga N . Se trata de otra ecuación diferencial de primer orden. Se dice que esta ecuación es **no lineal** porque su lado derecho no es una función lineal de P como lo es en el modelo de crecimiento exponencial.

Análisis cualitativo del modelo logístico

Comenzaremos con el siguiente análisis:

$$f(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P.$$

Si la población es cero, permanecerá en cero indefinidamente. Si la población es exactamente la asociada con la capacidad de carga, entonces no crecerá ni disminuirá. En este caso las funciones constantes son $P(t) = 0$ y $P(t) = N$ y son llamadas **soluciones de equilibrio**. También podemos decir lo siguiente: $P(t)$ crece si $0 < P < N$ y $P(t)$ disminuye si $P > N$ o $P < 0$. Los valores exactos de $P(t)$ en cualquier tiempo dado t dependerán de los valores de $P(0)$, k y N (ver figura 2.1).

De acuerdo a lo anterior podemos argumentar que si P es una población de una plaga, el crecimiento de esta es exponencial, pero se restringe si el espacio no es suficiente o se devora el alimento, razón por la cual el modelo logístico se adapta a esta situación. La capacidad de carga N , nos dice cuándo ya no hay espacio para más plaga o con qué cantidad se devorará el alimento. N y k describen el comportamiento del modelo biológico planteado en [9].

Modelo depredador presa

Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926, propusieron el modelo depredador presa que llamaron Lotka Volterra, se conocen comúnmente como ecuaciones depredador-presa o presa-depredador, consiste en un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales

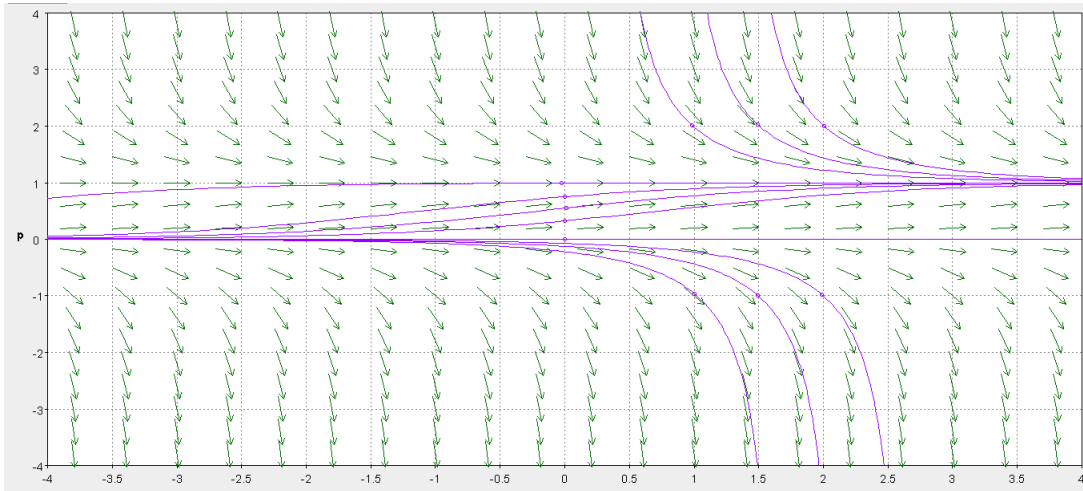


Figura 2.1: Análisis cualitativo del modelo logístico.

para describir dinámicas de sistemas biológicos, dónde interactúan, de forma natural dos especies, una es presa y otro depredador.

De acuerdo a [1]: Ninguna especie vive aislada y las interacciones entre especies proporcionan algunos de los modelos más interesantes por estudiar. El siguiente caso es el modelo más representativo de presa depredador, dónde una especie se come a otra. El modelo tiene dos variables dependientes que son ambas funciones del tiempo. En este caso llamaremos a la presa conejos y a los depredadores zorros, la presa es c y los depredadores z . La hipótesis es la siguiente:

- Si no hay zorros presentes, los conejos se reproducen a una tasa proporcional a su población y no les afecta la sobrepoblación.
- Los zorros se comen a los conejos y la razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la tasa a la que los zorros y conejos interactúan.
- Sin conejos que comer, la población de zorros disminuye a una razón proporcional a ella misma.
- La tasa de nacimiento de los zorros va en proporción al número de conejos comidos por zorros que, por la segunda hipótesis, es proporcional a la razón a la que los zorros y conejos interactúan.

Para formularlo en términos matemáticos, necesitamos cuatro parámetros adicionales a nuestra variable independiente t y a nuestras dos variables dependientes z y c . Los parámetros son:

α = coeficiente de la razón de crecimiento de conejos,

β = constante de proporcionalidad que mide el número de interacciones conejos-zorros en las que el conejo es devorado,

γ = coeficiente de la razón de muertes de zorros, y

δ = constante de proporcionalidad que mide el beneficio a la población de zorros de un conejo devorado.

La razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la razón de interacción entre los zorros y los conejos, por lo que necesitamos un término que modele la razón de interacción de ambas poblaciones; que crezca c o z aumente, pero que desaparezca si $c = 0$ o $z = 0$.

Así, obtenemos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= c(\alpha - \beta * z), \\ \frac{dz}{dt} &= -z(\gamma - \delta * c).\end{aligned}$$

Respecto al tema de este trabajo (cuyos antecedentes se presentarán en la sección 2.5), notamos que la hipótesis del modelo que se planteó originalmente en N., Mercedes y M. [9] es la siguiente:

- Si no hay *Chilocorus cacti* ni *Chrysoperla* sp (depredadores), la H. Cubana (presa), se reproduce de forma exponencial; esto ocasiona que el cultivo de *Leucaena Leucocephala* (alimento de la plaga, H. Cubana) disminuya considerablemente.
- La *Chilocorus cacti* para sobrevivir se come a la H. Cubana, por lo tanto, su tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de la presa consumida.
- La *Chrysoperla* sp, come a la H. Cubana, esto permite que su tasa de reproducción también sea proporcional a la cantidad de H. Cubana consumido.
- Si hay *Chilocorus cacti* y *Chrysoperla* sp, la tasa de reproducción de H. Cubana disminuye radicalmente; esto permite que el cultivo de *Leucaena Leucocephala* se mantenga, y aumente a través del tiempo.

Es decir, la plaga (H. Cubana), puede convivir de forma natural con dos depredadores (*Chilocorus cacti* y *Chrysoperla* sp), pues estos mismos solamente comen a la presa, pero entre ellos no hay una competencia de especies. De acuerdo a todo lo anterior las ecuaciones de Lotka Volterra, proponen lo siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta * y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta * x),$$

donde:

- y es el número de algún predador (por ejemplo, *Chilocorus cacti* y *Chrysoperla sp*);
- x es el número de sus presas (por ejemplo, *Heteropsylla cubana*);
- dy/dt y dx/dt representa el crecimiento de las dos poblaciones en el tiempo;
- t representa el tiempo; y
- α, β, γ y δ son parámetros (positivos) que representan las interacciones de las dos especies.

Con base a lo anterior, es importante recalcar el hecho de que al implementar el modelo antes dicho, se podrá controlar a la plaga (*Heteropsylla cubana*) a través de sus dos depredadores (*Chilocorus cacti* y *Chrysoperla sp*), pues de lo contrario, el cultivo de *Leucaena Leucocephala* con el que se alimenta a las vacas se extinguiría, el consumo del cultivo, incrementa significativamente su peso, disminuyendo de forma considerable la ingesta del suplemento dietético, con el fin de aumentar la producción de leche de forma natural con bajos costos.

Resolver estos modelos significa encontrar una solución a los sistemas de ecuaciones diferenciales. En la siguiente sección veremos el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

2.2. Existencia y unicidad

Teorema de la existencia. Supongamos [1, p. 64] que $f(t, y)$ es una función Lipschitz continua en un rectángulo de la forma $\{(t, y) \mid a < t < b, c < y < d\}$ en el plano $t - y$. Si (t_0, y_0) es un punto en este rectángulo, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función $y(t)$ definida para $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ que resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0,$$

el teorema, dice que mientras sea “razonable” la función en el lado derecho de la ecuación diferencial, existen soluciones.

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Se observa que dy/dt aumenta con rapidez cuando $y(t)$ crece, por consiguiente es muy posible que las ecuaciones “exploten” (van hacia infinito con rapidez) de acuerdo al crecimiento de t . Al observar las soluciones por el campo de pendientes, no sabemos si las soluciones explotan en un tiempo finito o si permanecen finitas todo el tiempo, será necesario usar métodos cualitativos

Siendo esta, una ecuación autónoma (es decir, que no depende explícitamente del tiempo), podemos separar las variables e integrar. Entonces tenemos

$$\int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int dt.$$

La integración da

$$\arctan y = t + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Por tanto

$$y(t) = \tan(t + c),$$

que es la solución general de la ecuación diferencial. Usando el valor inicial

$$0 = y(0) = \tan(0 + c),$$

encontramos que $c = 0$ (o $c = n\pi$ para cualquier entero n). Por todo lo anterior, una solución particular es $y(t) = \tan t$, y el dominio de definición para esta solución particular es $-\pi/2 < t < \pi/2$.

La gráfica de esta solución particular (ver figura 2.2) tiene asíntotas verticales en $t = \pm\pi/2$. La solución cuando t tiende a $\pi/2$ desde la izquierda, $y(t) = \tan t \rightarrow \infty$. Cuando t tiende a $-\pi/2$ desde la derecha, $y(t) = \tan t \rightarrow -\infty$.

Sabemos que la solución de un problema de valor inicial es única y valiosa, si no fuera así, soluciones diferentes nos darían predicciones distintas acerca del comportamiento de un sistema. Existe un teorema que garantiza que las respuestas a los problemas de valor inicial sean únicas [1, p. 66].

Teorema de Unicidad. Supongamos que $f(t, y)$ y df/dy son funciones continuas en un rectángulo de la forma $\{(t, y) \mid a < t < b, c < y < d\}$ en el plano $t - y$. Si (t_0, y_0) es un punto en este rectángulo y si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son dos funciones que resuelven el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0.$$

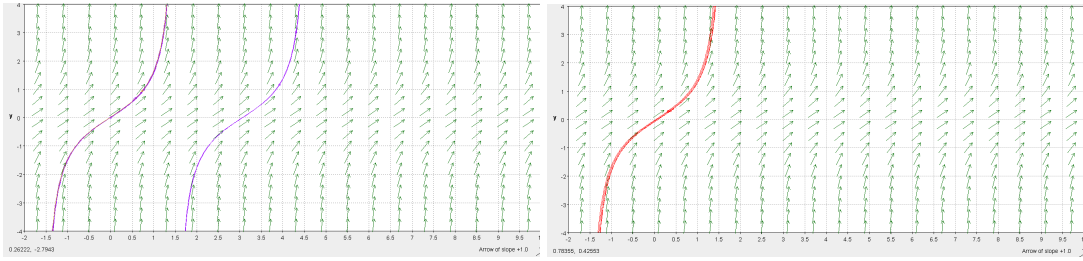


Figura 2.2: Teorema de la existencia.

Entonces existe ε , número positivo tal que para toda t en el intervalo $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$, entonces.

$$y_1(t) = y_2(t),$$

para $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$, es decir, la solución del valor inicial es *única*.

Por lo regular juntamos estos dos teoremas (usando las hipótesis más restrictivas del teorema de unicidad) refiriéndonos a la combinación de ellos como **teorema de existencia y unicidad**.

Falta de unicidad.

Consideremos el siguiente ejemplo [1, p. 67]:

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}.$$

El lado derecho es una función continua en todo el plano $t - y$. Desafortunadamente, la derivada parcial de $y^{2/3}$ con respecto a y no existe si $y = 0$, y por lo tanto la función no es Lipschitz continua, por lo que es indispensable para regresar a la unicidad que el teorema de unicidad no nos dice nada acerca del número de soluciones para el problema en $y(t - 0) = 0$.

Aplicando técnicas cualitativas y analíticas, si buscamos soluciones de equilibrio, la función $y(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ es una respuesta, al ser una ecuación separable, separamos las variables y obtenemos

$$\int y^{-2/3} dy = \int 3dt.$$

Al integrar obtenemos

$$y(t) = (t + c)^3.$$

donde c es una constante arbitraria

Por lo que el problema de valor inicial, tiene más de una solución (ver figura 2.3).

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

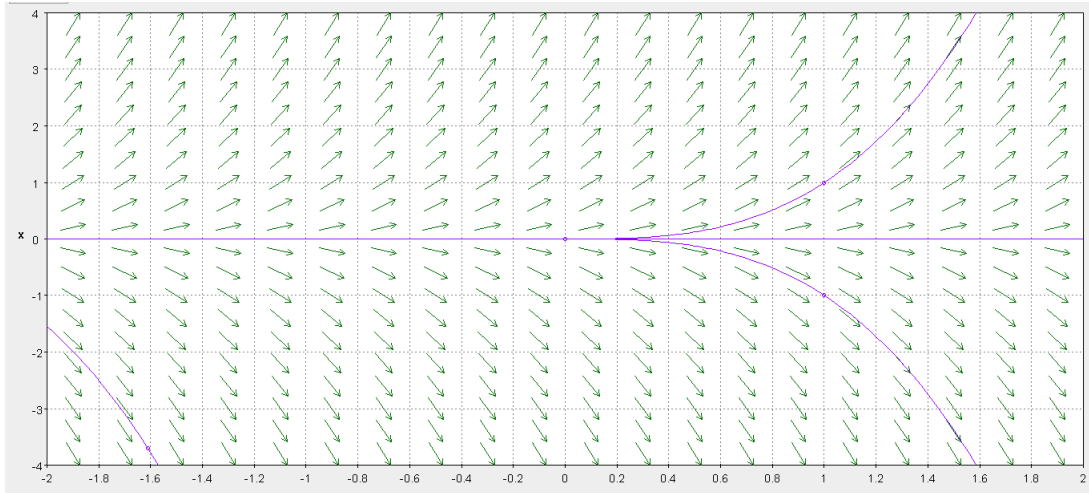


Figura 2.3: Falta de unicidad.

El teorema de unicidad garantiza que, si dos soluciones están siempre en el mismo lugar al mismo tiempo, entonces son la misma función.

2.2.1. Modelos no lineales

De acuerdo a [3], las ecuaciones diferenciales ordinarias tienen como soluciones a funciones que dependen de una variable independiente. Las ecuaciones diferenciales ordinarias vienen en dos tipos; autónomas, en las cuales la variable independiente no aparece explícitamente y las no autónomas. En [56, p. 275] se menciona que “las ecuaciones diferenciales autónomas son las que directamente capturan el espíritu de un sistema dinámico determinístico, en el cual la ley para futuros estados está escrita solo en términos del estado presente de la variable dependiente”.

Consideremos el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n' &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

denotado por $x' = f(x)$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Recordemos que un punto de equilibrio es un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Mientras que en un sistema lineal se tienen o bien un punto de equilibrio o una línea (o un subespacio de dimensión mayor) de equilibrio, un sistema no lineal puede tener un conjunto aislado de puntos de equilibrio como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Considera

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= \operatorname{sen} x - y.\end{aligned}$$

Entonces los puntos de la forma con $(n\pi, 0)$ con $n \in \mathbb{N}$, o \mathbb{R} son los puntos de equilibrio.

Ejemplo 2

Para el modelo depredador presa

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy,\end{aligned}$$

se tienen dos puntos de equilibrio aislados $(0, 0)$ y $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$. Por ejemplo, si $a = 2 = c$, $b = 1 = d$ (ver gráfica 2.4).

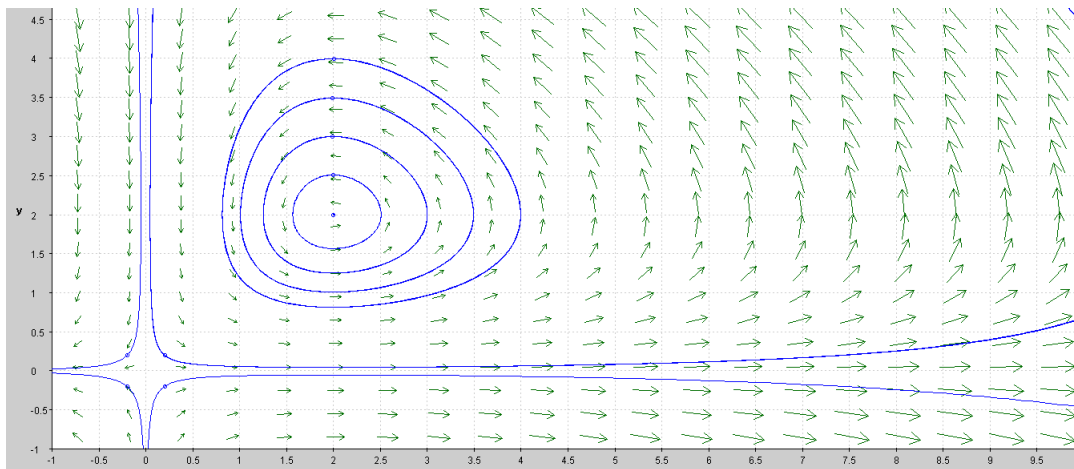


Figura 2.4: Modelo no lineal.

Si los parámetros son positivos, el sistema muestra que hay un punto de equilibrio con ambas poblaciones positivas si y solo si $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ son mayores a uno o menores a uno.

Localmente, en cada punto de equilibrio, se tiene un comportamiento de crecimiento estable que se aprecia en sistemas lineales como:

$$\begin{aligned}x' &= ax \\ y' &= -cy.\end{aligned}$$

en el punto $(0, 0)$. Algo semejante haremos en el segundo punto de equilibrio a partir de usar la herramienta de la próxima sección.

2.2.2. Linealización

Empezaremos describiendo la estabilidad en modelos lineales de una dimensión. Partiendo de la gráfica de $dy/dt = f(y)$, la clasificación de un punto de equilibrio depende únicamente de la línea fase: campo de pendientes de una ecuación diferencial a lo largo de una sola línea vertical, cerca del punto de equilibrio, [1].

Si y_0 es un sumidero (un punto de equilibrio que representa un estado estacionario estable, se le conoce como nodo estable o foco estable), entonces las flechas sobre la línea de fase justamente abajo de y_0 señalan hacia arriba, y las flechas arriba de y_0 señalan hacia abajo. Por tanto, $f(y)$ debe ser positiva cuando y es menor que y_0 y negativa cuando y es mayor que y_0 (ver figura 2.5 con $y = -3$). Si y_0 es fuente (un punto de equilibrio que representa un estado estacionario inestable, se le conoce como nodo inestable o foco inestable), entonces $f(y)$ debe ser positiva cuando $y > y_0$ y negativa cuando $y < y_0$. Inversamente, si $f(y_0) = 0$ y f está decreciendo para toda y cercana a y_0 , entonces $f(y)$ es positiva justo a la izquierda de y_0 , por consiguiente, y_0 es un sumidero. De manera similar, el punto de equilibrio y_0 es una fuente, si y solo si, f está creciendo para toda y cercana a y_0 . Esto último lo podemos notar en la figura 2.5, $y = 2$ es fuente.

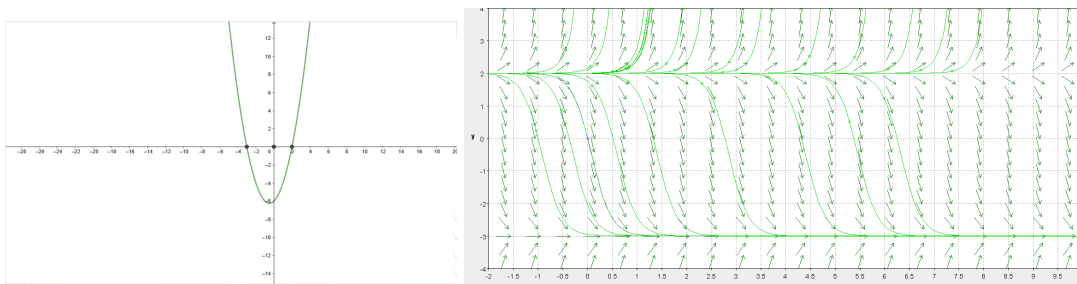


Figura 2.5: Linealización.

Contamos con una poderosa herramienta del cálculo para saber si una función está creciendo o decreciendo en un punto particular: la derivada. Usando la derivada de $f(y)$ (si esta

existe) combinada con las observaciones geométricas anteriores, se pueden dar criterios específicos de punto de equilibrio. Un estudio más detenido y la prueba del siguiente teorema está en [1, p. 84].

Teorema 2.2.1. (Teorema de linealización). *Suponga que y_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $dy/dt = f(y)$ donde f es una función diferenciable continuamente.*

Si $f'(y_0) < 0$, entonces y_0 es un sumidero;

Si $f'(y_0) > 0$, entonces y_0 es una fuente; o

Si $f'(y_0) = 0$, o si $f'(y_0)$ no existe, entonces necesitamos información adicional para determinar el tipo de punto de equilibrio de y_0 .

Este teorema se deriva inmediatamente del análisis anterior a su enunciado, una vez que recordemos que si $f'(y_0) < 0$, entonces f está creciendo cerca de y_0 . Este análisis y esas conclusiones son un ejemplo de la **linealización**, una técnica que en este trabajo encontraremos de utilidad.

La derivada $f'(y_0)$ nos da el comportamiento de la mejor aproximación lineal a f cerca de y_0 . Si reemplazamos f por su mejor aproximación lineal, entonces la ecuación diferencial que obtenemos es muy parecida a la ecuación diferencial original para la y más próxima a y_0 .

Enunciamos el siguiente Lema, el cual usaremos en el presente trabajo y se encuentra en [3].

Lemma 2.2.2. (Sistema Bidimensional). *Si A es una matriz cuadrada, entonces:*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Con e^A la expresión de Taylor descrita en [3, p.17].

Demostración. Dado que A conmuta con ella misma:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{At}(e^{Ah} - I)}{h}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right)$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

□

Teorema 2.2.3. (Teorema fundamental). Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Entonces el problema de valor inicial:

$$x' = Ax$$

$$x(0) = x_0,$$

tiene una única solución para toda t dado por:

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Demostración. Tomando como referencia el lema 2.2.2, si $x(t) = e^{At}x_0$. Entonces:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

para toda $t \in \mathbb{R}$. También $x(0) = Ix_0 = x_0$ es una solución. Por otro lado si $x(t)$ es una solución del problema de valor inicial, entonces tenemos la siguiente ecuación:

$$y(t) = e^{-At}x(t).$$

Tenemos lo siguiente por lema 2.2.2.

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $y(t)$ es una constante. Colocando $t = 0$, se muestra que $y(t) = x_0$, esto quiere decir que si $x(t)$ es una solución del problema de valor inicial entonces esta es dada por $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$. \square

Ejemplos de linealización

Consideremos el siguiente ejemplo,

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

La solución está dada por:

$$x(t) = e^{At} X_0 = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Como $|x(t)| = e^{-2t}$ y el ángulo $\theta(t) = \tan^{-1} x_2(t)/x_1(t) = t$, el punto de equilibrio es un atractor (ver figura 2.6).

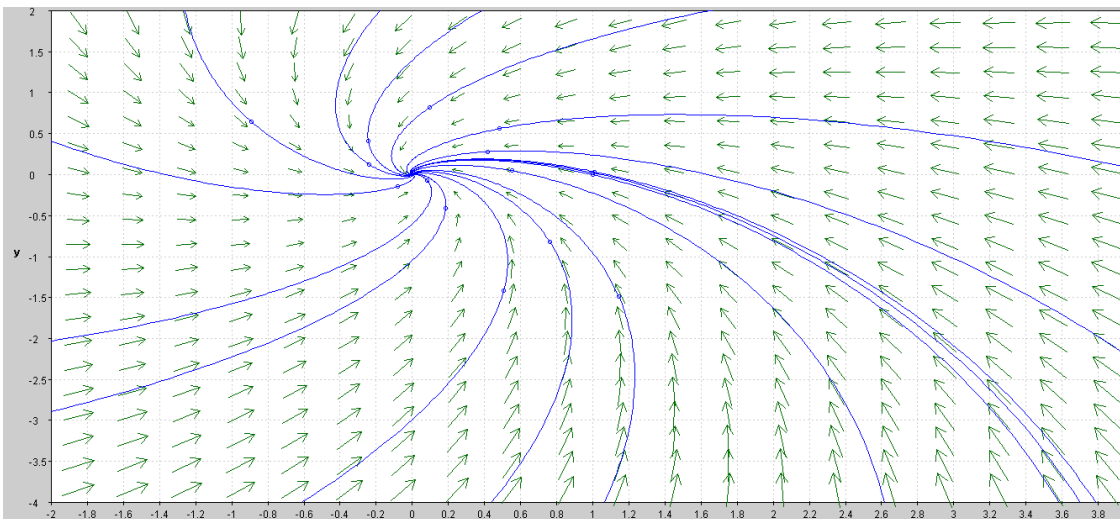


Figura 2.6: Sistema lineal.

Sistemas lineales en \mathbb{R}^2

Se tratarán varios retratos fase que son posibles para un sistema lineal. Donde $x \in \mathbb{R}^2$ y A es una matriz de 2×2 .

$$x' = Ax.$$

Se describe el retrato fase para un sistema lineal de la siguiente forma:

$$x' = Bx.$$

Si la matriz $B = P^{-1}AP$, entonces obtenemos lo siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ó } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, de acuerdo al teorema fundamental, la solución al problema con $x_0 = x(0)$, es dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} x_0, x(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0 \text{ ó } x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} x_0.$$

La gráfica del teorema fundamental (ver figura 2.7) nos da condiciones para tener puntos de equilibrio con dinámicas específicas.

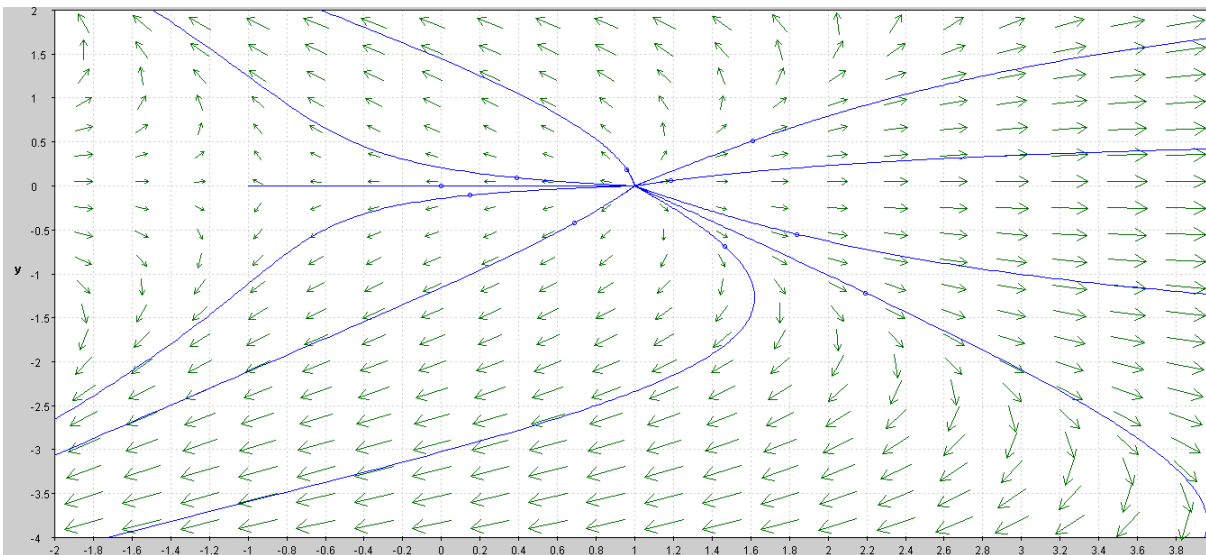


Figura 2.7: Sistema no lineal.

Teorema 2.2.4. (Teorema de estabilidad Bidimensional). Sea $\delta = \det A$ y $\tau = \text{Traza } A$ del sistema lineal

$$x' = Ax.$$

1. Si $\delta < 0$, tenemos un punto silla en el origen.
2. Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, tenemos un nodo (Ver Figura 2.10) en el origen. Si $\tau < 0$ es estable, pero si $\tau > 0$ es inestable.

3. Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$, entonces tenemos un foco (Ver Figura 2.13) en el origen. Es estable cuando $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
4. Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces tenemos un centro en el origen.

Demostración. Los valores propios de la matriz A , son dados por

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

Por lo anterior,

1. Si $\delta < 0$, entonces tenemos dos valores propios reales de signo opuesto.
2. Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, entonces tenemos dos valores propios reales del mismo signo que τ .
3. Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$, entonces tenemos dos valores propios complejos conjugados, donde $\lambda = a \pm ib$.
4. Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$, entonces tenemos dos valores propios complejos, conjugados, puros e imaginarios.

Recordemos que un nodo estable o foco estable es llamado **sumidero de un sistema lineal**. Un nodo inestable, o foco inestable se le conoce como **fuelle**. También los resultados obtenidos nos permiten llegar a un diagrama de estabilidad del plano (τ, δ) , donde podemos tener varios esquemas (ver figura 2.8). Con $\delta \neq 0$, tenemos los cuatro casos. [3, pp. 25-26].



Figura 2.8: Plano traza - determinante.

Esquema de los casos. Caso 1: Un punto silla en el origen [3, p. 21].

Vamos a enunciar el primer caso, describimos la matriz con un ejemplo de la gráfica de los puntos de equilibrio.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda < 0 < \mu .$$

El retrato fase del sistema lineal con dos valores propios reales de signo opuesto tiene un punto silla en el origen cuando $\lambda < 0 < \mu$, pero si $\mu < 0 < \lambda$ las flechas son invertidas.

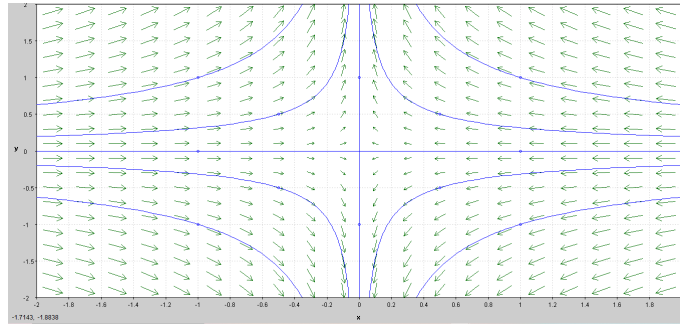


Figura 2.9: Punto silla en el origen.

Caso 2: Un nodo estable en el origen [3, p. 22].

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \leq 0 < \mu \text{ o } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda = \mu < 0.$$

Tenemos la propiedad del nodo con $\lambda = 0$. Si tenemos $\lambda \geq \mu > 0$ o si $\lambda > 0$, entonces la estabilidad del nodo depende de los valores propios, es estable: Si $\lambda \leq \mu < 0$ e inestable: si $\lambda \geq \mu > 0$.

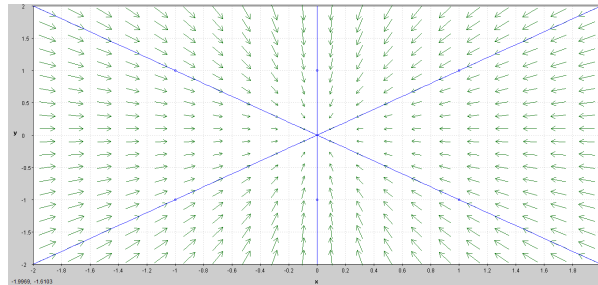


Figura 2.10: Sistemas lineales con $\lambda = \mu$.

Caso 3: Un foco estable en el origen [3, p. 22].

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a < 0.$$

Si $a > 0$, las trayectorias de las espirales parten del origen, cuando f se incrementa y es llamado un foco inestable en el origen. Sin embargo, en este ejemplo tendríamos un foco estable en el origen si $a < 0$, teniendo valores propios complejos conjugados $a \pm ib$.

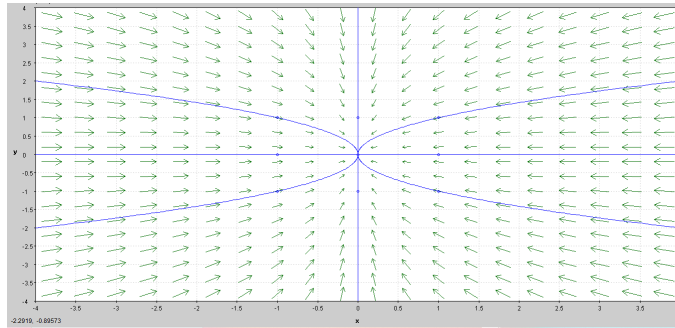


Figura 2.11: Sistemas lineales con $\lambda < \mu$.

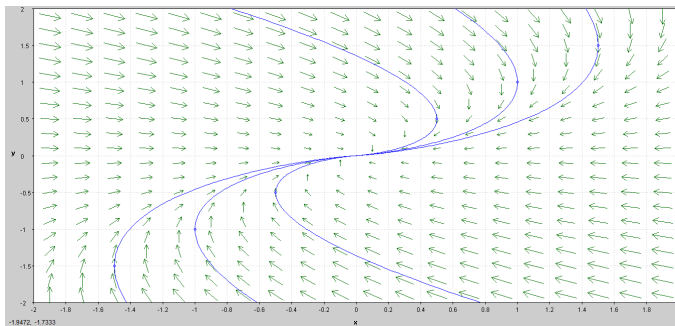


Figura 2.12: Sistemas lineales con $\lambda = \mu < 0$.

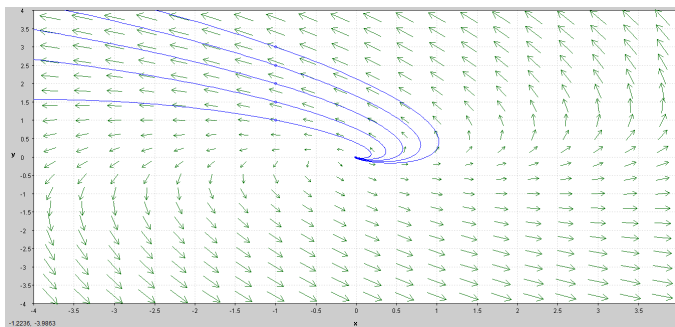


Figura 2.13: Sistemas lineales con $a > 0$ y $b > 0$.

Caso 4: Un centro en el origen [3, p. 23].

$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ El retrato fase está dado por la matriz antes mencionada, con valores propios complejos conjugados imaginarios, $\pm ib$. □

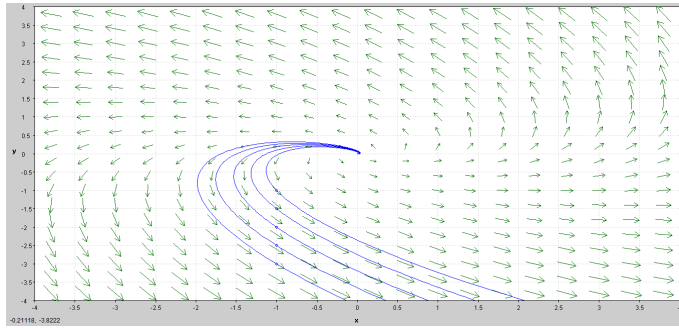


Figura 2.14: Sistemas lineales con $a > 0$ y $b < 0$.

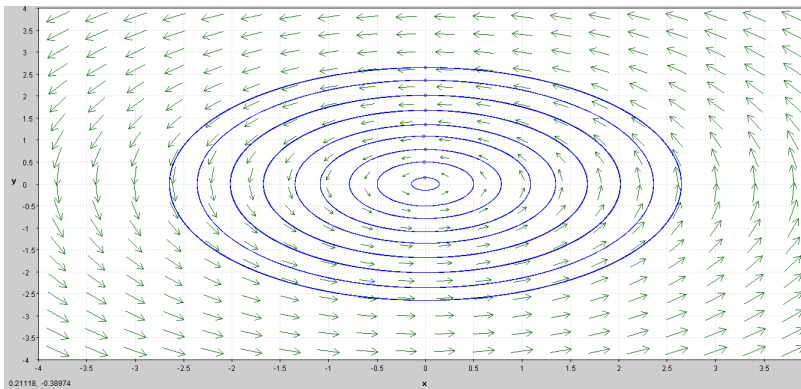


Figura 2.15: Sistemas lineales caso 4 con $b > 0$.

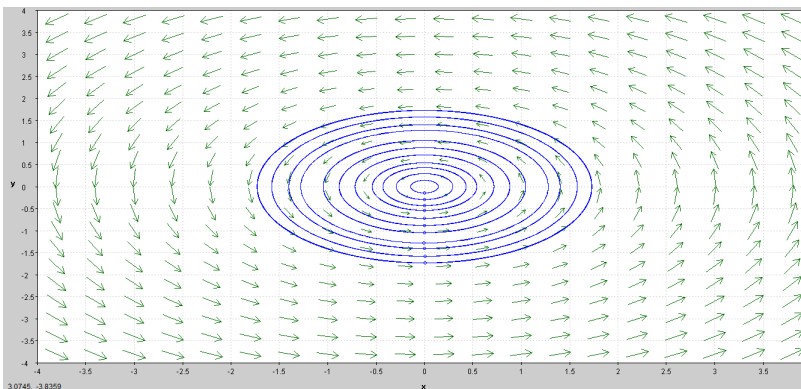


Figura 2.16: Sistemas lineales caso 4 con $b < 0$.

Notemos lo siguiente:

Corolario 2.2.5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

1. Si $\alpha, \beta < 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ es nodo estable.

2. Si $\alpha, \beta > 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ es nodo inestable.
3. Si $\alpha > 0$ y $\beta < 0$, entonces $(0, 0)$ es el punto de equilibrio punto silla.
4. Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, entonces $(0, 0)$ es el punto de equilibrio punto silla.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

1. Si $\alpha < 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ es nodo estable.
2. Si $\alpha > 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, 0)$ es nodo inestable.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

1. Si $\alpha < 0$, entonces $(0, 0)$ es espiral estable.
2. Si $\alpha > 0$, entonces $(0, 0)$ es espiral inestable.

y finalmente si $\alpha = 0$, entonces el punto de equilibrio es centro.

Linealización

Recordemos que el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de $x' = f(x)$, si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 es **hiperbólico** si todos los eigenvalores tienen parte real diferente de cero. El sistema lineal $x' = A(x)$ con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamada **la linealización** de: $x' = f(x)$ con $x(0) = x_0$.

Si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, entonces $f(0) = 0$, y por el teorema de Taylor:

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Si x_0 es un punto de equilibrio de $x' = f(x)$ y $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo de la ecuación diferencial: $x' = f(x)$. Entonces $\phi_t(x_0)$ satisface la ecuación diferencial para toda t que $\in \mathbb{R}$. Por lo tanto x_0 es llamado un punto fijo del flujo ϕ_t , esto también es llamado un cero, o un punto crítico, o un punto singular del campo de vectores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ver figura 2.17).

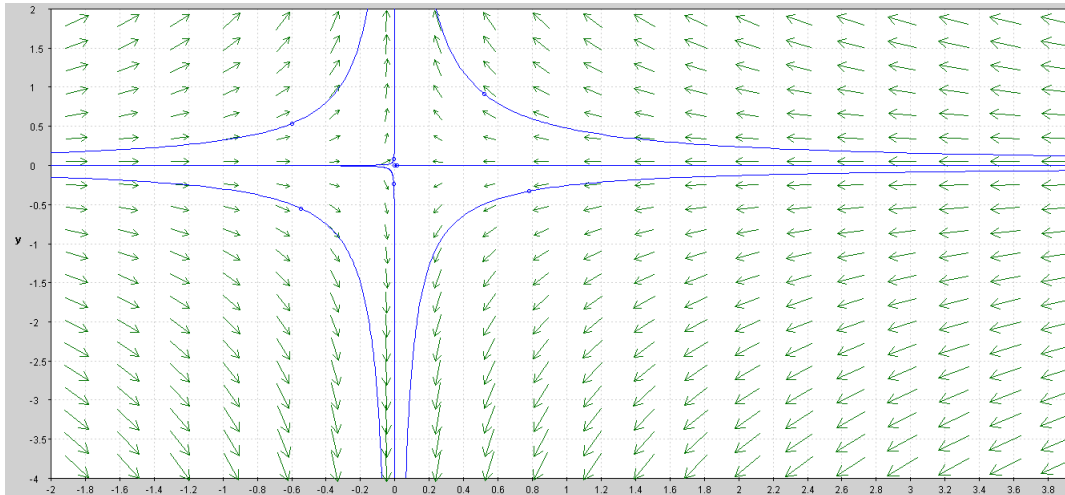


Figura 2.17: Teorema de Taylor.

Teorema 2.2.6. [3, p. 141] Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto con $(0,0) \in E$ y $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(E)$ (diferenciable con derivada continua). Si el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal: $x' = f(x)$, entonces el origen es un punto silla para $x' = f(x)$ si y solo si el origen es un punto silla para el sistema: $x' = Df(x)$ con $A = Df(0)$.

Teorema 2.2.7. (Teorema de Hartman Grobman) [3, p. 143] Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene al $f \in C^1(E)$. Suponemos que el origen es un punto crítico hiperbólico del sistema no lineal: $x' = f(x)$. Entonces el origen es un nodo estable o inestable para el sistema no lineal, si y solo si este es un nodo estable o inestable para el sistema lineal: $x' = A(x)$ con $A = Df(0)$. En el origen es un foco estable o inestable para el sistema no lineal: $x' = f(x)$ si y solo si este es un foco estable o inestable para el sistema lineal: $x' = A(x)$ con $A = Df(0)$.

2.3. Métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales

Como se menciona en [2], muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse analíticamente, por ejemplo cuando se tienen que usar funciones elípticas. Sin embargo, para efectos prácticos, como en ingeniería, una aproximación numérica a la solución suele ser suficiente.

Un sistema biológico o físico que se modela con una ecuación diferencial puede depender crucialmente de los valores numéricos de ciertos coeficientes o parámetros que aparezcan en la ecuación. Los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias son procedimientos utilizados para encontrar aproximaciones numéricas a las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Su uso también se conoce como integración numérica.

2.3.1. Método de Euler

Leonhard Euler, gran matemático del siglo XVIII y pionero de los métodos numéricos no tuvo graficador de computadora, y su idea fue hacerlo todo numéricamente en lugar de utilizar gráficas.

Para aproximar la solución del problema de valor inicial [2, pp. 113-114]:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Debemos escoger un **tamaño de paso** h fijo y horizontal, para utilizarlo en cada aproximación que se haga de un punto al siguiente. Suponiendo que iniciamos en el punto (x_0, y_0) y después de n pasos se ha alcanzado el punto (x_n, y_n) , entonces el paso (x_{n+1}, y_{n+1}) será dependiente del punto (x_n, y_n) . Como la pendiente del segmento de dirección a través de (x_n, y_n) es $m = f(x_n, y_n)$, se tiene en consecuencia un cambio horizontal de h desde x_n hasta x_{n+1} , lo cual corresponde a un cambio vertical de $m \cdot h = h \cdot f(x_n, y_n)$ desde y_n hasta y_{n+1} . Con base a lo anterior, las coordenadas del nuevo punto (x_{n+1}, y_{n+1}) están dadas por:

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Es decir, de manera explícita, dado el problema de valor inicial con tamaño de h , la solución aproximada por este método consiste en:

$$x_1 = x_0 + h \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h \quad y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$x_3 = x_2 + h \quad y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2).$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

Por lo regular no se grafica la aproximación poligonal, pues el resultado numérico de la aplicación de Euler es la sucesión de *aproximaciones* para los valores reales

$$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n), \dots$$

en los puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ de la solución *exacta* $y(x)$ (aunque desconocida) del problema de valor inicial, los resultados se muestran en una tabla de valores aproximados de la solución deseada.

2.3.2. Algoritmo del método de Euler

Recordemos que dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

El método de Euler con tamaño de paso h consiste en aplicar la fórmula iterativa

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (n \geq 0),$$

para calcular las aproximaciones sucesivas.

La fórmula iterativa indica como realizar un paso típico de y_n a y_{n+1} , que es el corazón del método de Euler.

Ejemplo 1

Aplicar el método de Euler para aproximar la solución del problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{5}y, \quad y(0) = -3.$$

(a) Primero con tamaño de paso $h = 1$ en el intervalo $[0, 5]$,

(b) después con tamaño de paso $h = 0.2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución (a): Con $x_0 = 0$, $y_0 = -3$, $f(x, y) = x + \frac{1}{5}y$ y $h = 1$, la fórmula iterativa nos lleva a los siguientes valores aproximados.

$$y_1 = y_0 + h \cdot [x_0 + \frac{1}{5}y_0] = (-3) + (1)[0 + \frac{1}{5}(-3)] = -3.6,$$

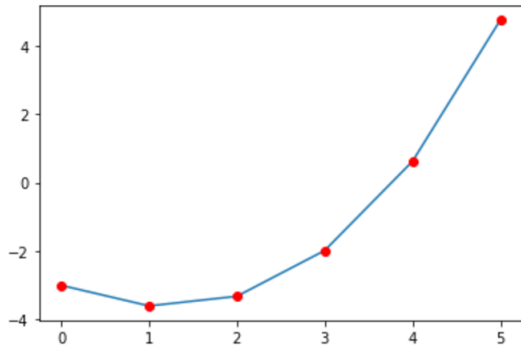
$$y_2 = y_1 + h \cdot [x_1 + \frac{1}{5}y_1] = (-3.6) + (1)[1 + \frac{1}{5}(-3.6)] = -3.32,$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot [x_2 + \frac{1}{5}y_2] = (-3.32) + (1)[2 + \frac{1}{5}(-3.32)] = -1.984,$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot [x_3 + \frac{1}{5}y_3] = (-1.984) + (1)[3 + \frac{1}{5}(-1.984)] = 0.6192, \text{ y}$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot [x_4 + \frac{1}{5}y_4] = (0.6192) + (1)[4 + \frac{1}{5}(0.6192)] \approx 4.7430.$$

De tal manera que nos queda la siguiente gráfica, así como su tabla:



x	Aprox. y
0	-3
1	-3.6
2	-3.32
3	-1.984
4	0.6192
5	4.7430

Figura 2.18: Método numérico de Euler (ejemplo 1a).

Solución (b) Con $x_0 = 0$, $y_0 = -3$, $f(x, y) = x + \frac{1}{5}y$ y $h = 0.2$, se obtienen los valores aproximados.

$$y_1 = y_0 + h \cdot [x_0 + \frac{1}{5}y_0] = (-3) + (0.2)[0 + \frac{1}{5}(-3)] = -3.12,$$

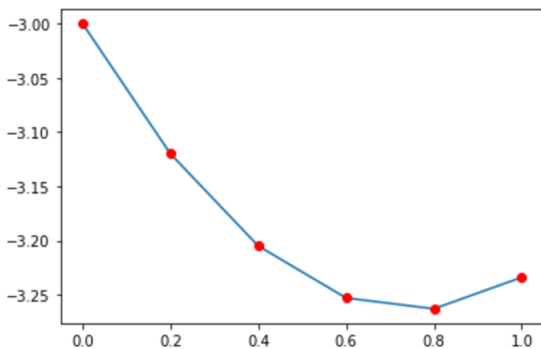
$$y_2 = y_1 + h \cdot [x_1 + \frac{1}{5}y_1] = (-3.12) + (0.2)[0.2 + \frac{1}{5}(-3.12)] \approx -3.205,$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot [x_2 + \frac{1}{5}y_2] \approx (-3.205) + (0.2)[0.4 + \frac{1}{5}(-3.205)] \approx -3.253,$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot [x_3 + \frac{1}{5}y_3] \approx (-3.253) + (0.2)[0.6 + \frac{1}{5}(-3.253)] \approx -3.263, \text{ y}$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot [x_4 + \frac{1}{5}y_4] \approx (-3.263) + (0.2)[0.8 + \frac{1}{5}(-3.263)] \approx -3.234.$$

Nos queda su gráfica y tabla:



x	Aprox. y
0	-3
0.2	-3.12
0.4	-3.205
0.6	3.253
0.8	3.263
1	3.234

Figura 2.19: Método numérico de Euler (ejemplo 1b).

2.3.3. Runge Kutta

Con base a [2, pp. 135-137], tenemos un método más exacto que Euler, se conoce como método Runge Kutta, su nombre se toma de sus desarrolladores, los matemáticos alemanes Carl Runge (1856 -1927) y Wilhem Kutta (1867 - 1944).

Para aproximar la solución $y = y(x)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0,$$

suponemos que se han calculado las aproximaciones $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ para los valores reales $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y ahora se quiere calcular $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$. Entonces

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx,$$

por el teorema fundamental del cálculo. Posteriormente, la regla de Simpson para la integración numérica nos lleva a

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6} \left[y'(x_n) + 4y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + y'(x_{n+1}) \right].$$

Definimos que y_{n+1} , es,

$$y_{n+1} \approx y(x_n) + \frac{h}{6} \left[y'(x_n) + 2y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + 2y' \left(x_n + \frac{h}{2} \right) + y'(x_{n+1}) \right]. \quad (2.2)$$

Separamos el término $4y'(x_n + \frac{1}{2}h)$ en los dos sumandos para intentar aproximar la pendiente $y'(x_n + \frac{1}{2}h)$ en el punto medio $x_n + \frac{1}{2}h$ del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ en sus dos diferentes formas. En el lado derecho de (2.2) sustituimos los valores de la pendiente real $y'(x_n)$, $y'(x_n + \frac{1}{2}h)$, $y'(x_n + \frac{1}{2}h)$ y $y'(x_{n+1})$ obtenemos las siguientes estimaciones:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

- Esta es la pendiente del método de Euler en x_n

$$k_2 = f \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1 \right)$$

- Esto es una estimación de la pendiente en el punto medio del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ utilizando el método de Euler para predecir la ordenada en ese punto.

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

- Este es un valor del método de Euler mejorado para la pendiente en el punto medio.

$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3)$$

- Este es la pendiente en el método de Euler en el punto x_{n+1} , utilizando la pendiente mejorada k_3 en el punto medio para pasar a x_{n+1} . Al sustituirlo en 2.2, el resultado es la fórmula iterativa

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

El uso de esta última fórmula para calcular las aproximaciones y_1, y_2, y_3, \dots constituye el método Runge Kutta. Cabe aclarar que dicho método es de *cuarto orden*, se puede probar que el error acumulado está en el intervalo acotado $[a, b]$ con $a = x_0$ es del orden de h^4 .

Método de Runge Kutta y ecuaciones de segundo orden

La versión vectorial [2, pp. 271-272] de la fórmula iterativa para el método de Runge Kutta es

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

donde los vectores k_1, k_2, k_3 y k_4 se definen de manera semejante al caso de orden uno, como sigue:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3). \end{aligned}$$

Para describir en notación escalar el método de Runge Kutta en el problema de valor inicial de dos dimensiones

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), & x(t_0) &= x_0, \\ y' &= g(t, x, y), & y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Se escribe como $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ y $k_i = \begin{pmatrix} F_i \\ G_i \end{pmatrix}$.

Entonces las fórmulas iterativas de Runge Kutta para el paso (x_n, y_n) a la siguiente aproximación (x_{n+1}, y_{n+1}) son

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4), \end{aligned}$$

donde los valores F_1, F_2, F_3 , y F_4 de la función f son

$$\begin{aligned} F_1 &= f(t_n, x_n, y_n), \\ F_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hF_1, y_n + hG_1\right), \\ F_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hF_2, y_n + hG_2\right), \\ F_4 &= f(t_n + h, x_n + hF_3, y_n + hG_3); \end{aligned}$$

G_1, G_2, G_3 , y G_4 son los valores definidos análogamente para la función g .

Método de Runge Kutta

En general el método de Runge Kutta se aplica en \mathbb{R}^n , como sigue:

Sean,

$$y' = f(t, y(t)),$$

una ecuación diferencial ordinaria, con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde Ω es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de f sea

$$(t_0, y_0) \in \Omega.$$

Entonces el método RK (de orden s) tiene la siguiente expresión, en su forma más general:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

donde h es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el incremento Δt_n entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1} . Los coeficientes k_i son términos de aproximación intermedios, evaluados en f de manera local,

$$k_i = f\left(t_n + hc_i, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} k_j\right) \quad i = 1, \dots, s,$$

con $a_{i,j}$, b_i , c_i coeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la regla de cuadratura utilizada.

Ejemplo 1

$$y' = \frac{x - y}{2},$$

$$y(0) = 0.$$

Para visualizar el método Runge Kutta de cuarto orden, en esta sección solo se presenta la declaración de funciones y el primer proceso de iteración de la ecuación diferencial $(x - y)/2$ con valor inicial cero. El código completo está en el apéndice A.

Código en C Runge Kutta:

```

{
#include < stdio.h >
float dydx(float x, float y)
{
return((x - y)/2);
}
{
int n = (int)((x - x0)/h);
float k1, k2, k3, k4, k5;
Iteraciones
float y = y0;
for (int i = 1; i <= n; i ++);
}

```

Los resultados que se obtienen son numéricos, y son representados en una tabla de datos y en una gráfica de dicha tabla (ver figura 2.20). La solución obtenida es la siguiente:

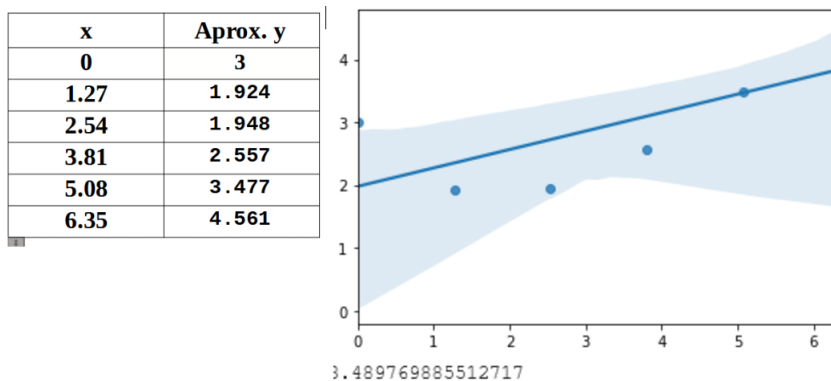


Figura 2.20: Método numérico de Runge Kutta.

Debido a que es un proceso computacional, usamos un lenguaje de programación como Python para poder ejecutarlo repetidamente en este trabajo.

Al igual que antes, para visualizar el proceso del método de Runge Kutta de cuarto orden de la ecuación diferencial $(t-y)/2$ con valor inicial cero, presentamos parte código. El código completo está en el apéndice B.

Código en Python Runge Kutta

```
#RungeKutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
from math import*
def f(t,y):
    func = ((t - y)/2)
    return func
def RK4(t0, y0, h, n):
```

2.4. Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes

De acuerdo a [53], un *modelo* “puede ser definido como la representación de algún sistema real con la intención de resolver una problemática real o responder alguna pregunta con relación a este sistema”.

En [21], describen que “los *modelos matemáticos* son aquellos que expresan particularidades significativas del fenómeno real estudiado en términos matemáticos, sabiendo desde un inicio que los interrogantes de interés pueden ser respondidos más exacta y definitivamente usando herramientas matemáticas”; es decir, es la representación simbólica de una problemática real, partiendo de un lenguaje natural a un simbolismo representativo para la cual será necesario, evaluar si podremos encontrar una solución adecuada y determinar cuan determinante será su solución.

“**Ciclo de Modelado**” hace referencia a una serie de tareas que se deben realizar sistemáticamente y de forma iterativa con el propósito de mejorar en cada paso nuestro modelo planteado y si es necesario replantearnos cuántas veces sea necesario para resolver la interrogante cuestionada.

Etapas del Ciclo de Modelado (tomadas de [22].)

1. Formulación del problema;
2. Planteamiento de las hipótesis con respecto a los procesos y estructuras del sistema de estudio;

3. Construcción del modelo a través de la elección de: escalas, entidades, variables de estado, procesos y parámetros;
4. Implementación del modelo, hacemos uso de la matemática, así como de los programas de computación para el desarrollo de este mismo;
5. Análisis, revisión y evaluación del modelo para comprobar si el camino elegido es el óptimo para la resolución del problema.

Un tipo particular de modelado es el modelado basado en agentes o modelado basado en individuos, como se los denomina generalmente en el ámbito de la biología y ecología. De acuerdo a lo anterior, entendemos que los modelos basados en agentes (MBA) fueron creados, no solo con el propósito de modelar un sistema, sino para representar de forma individual a los agentes, así como sus interacciones con los demás miembros que forman parte de dicho sistema.

Los agentes pueden representar a seres humanos, instituciones, organismos, células, etc. Se da por entendido que los MBA son capaces de describir a los individuos como una entidad única y autónoma la cual tiene la capacidad de interactuar con todos lo demás en un entorno establecido. Cabe mencionar que los agentes se diferencian a través de sus particularidades, como son: tamaño, ubicación, color, género, etc., actuando estos mismos, de acuerdo a sus propios objetivos establecidos de forma autónoma. Una característica importante atribuida a los agentes, es el hecho de poseer la capacidad de adaptarse; pueden ajustar su comportamiento dependiendo de su estado actual, así como de los demás involucrados. Por todo lo anterior los MBA tienen una dinámica, que surge a partir de las interacciones individuales de cada agente con los demás miembros del sistema dentro de un ambiente específico (ver figura 2.21).

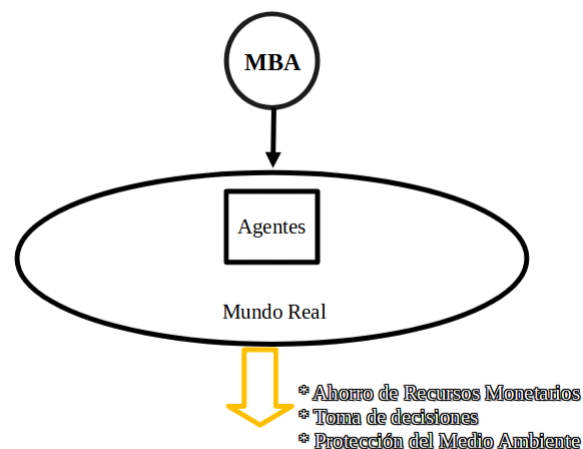


Figura 2.21: Modelo basado en agentes.

Fundamentos del Modelado Basado en Agentes (MBA)

En [24, p. 6] "un modelo basado en agentes se identifica, como los tipos de agentes que representan las entidades significativas del sistema, sus interacciones, y el entorno en el que están situados estos mismos."

En resumen.

Características de los agentes:

- Entidades identificables que poseen un conjunto de características y reglas que gobiernan su comportamiento y pueden tomar de decisiones por sí mismos.
- Los agentes deciden independientemente sus acciones, es decir, son autónomos.
- Capacidad de adaptar su comportamiento a las circunstancias, basándose en su experiencia adquirida, de alguna manera poseen alguna forma de memoria.
- Rasgos diferentes, lo que permite reconocer y distinguir a otros agentes, pueden interactuar de manera distinta con unos agentes y con otros, de acuerdo a sus rasgos o afinidades.
- Se sitúan en un entorno, donde pueden sentir así como actuar, lo que les permite interactuar con otros agentes.

Modelado Basado en Agentes

La complejidad de los modelos que actualmente se vienen desarrollando, requiere de la colaboración de amplios y variados equipos interdisciplinarios que puedan abordar el problema, limitando al máximo las aproximaciones. Respecto al MBA se tiende a seguir un proceso.

Etapas [24, pp. 7-8]:

- Abstracción del sistema objeto de estudio, identificar el contexto y propósito del modelo. Esta tarea es responsabilidad de los expertos del área de estudio.
- Diseño y especificación del modelo basado en agentes. Para realizar esta actividad el modelador con base al objeto de estudio, generará agentes con características específicas que serán capaces de interactuar en un entorno real.
- Transformación en un modelo computacional, que se adapte a las características de la plataforma de simulación basada en agentes.
- Programación del modelo sobre la plataforma de simulación basada en agentes.
- Inferencia: obtención de las conclusiones a partir de las premisas del modelo.
- Análisis de resultados, permite verificar el comportamiento del modelo computacional.
- Interpretación de los resultados, valida el modelo basado en agentes.

Ejemplos: Incendios forestales.

En [23, p. 18] se describe el incendio forestal usando dos ecuaciones diferenciales parciales. La primera ecuación describe el calor de una región dada en un lapso de tiempo, donde θ representa la difusividad térmica del material por el cual viaja el calor.

$$\frac{dH(x, t)}{dt} = \theta \frac{d^2H(x, t)}{dx^2}.$$

La segunda ecuación describe la propagación de un incendio forestal. Trata al fuego como si este mismo fuera un fluido potencialmente turbulento, usando la ecuación de Reynolds de dinámica de fluidos [23, p. 18].

$$\frac{dU_i}{dt} + U_j \frac{dU_i}{dx_j} = \frac{-1dP}{pdx_i} + \nu \frac{d^2U_i}{dx_j dx_j} - \frac{d}{dx_j} \overline{u_i^t u_j^t}.$$

Usamos la modelación basada en agentes, para la propagación del fuego (ver figuras 2.22 - 2.25), que consiste en dar reglas a las células que representan a las que tienen fuego, y cómo se propaga a sus células vecinas. Todo esto, establecido en un escenario lo más parecido a un entorno real, con el fin de medir el comportamiento y así establecer los mecanismos de control de incendios forestales reales.

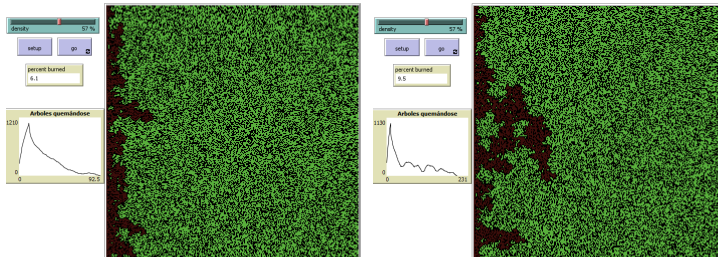


Figura 2.22: Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 57 por ciento de árboles.

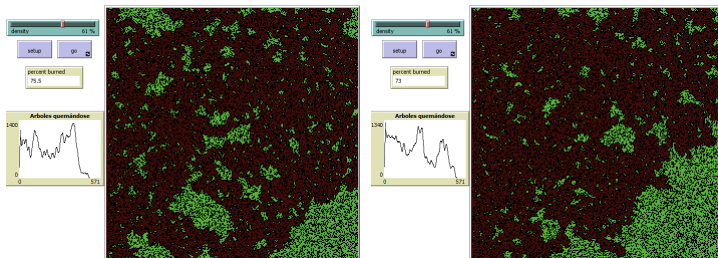


Figura 2.23: Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 61 por ciento de árboles.

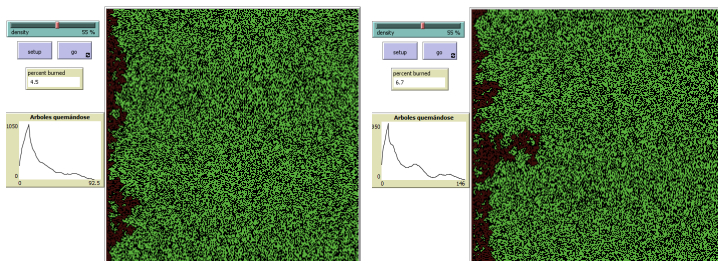


Figura 2.24: Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 55 por ciento de árboles.

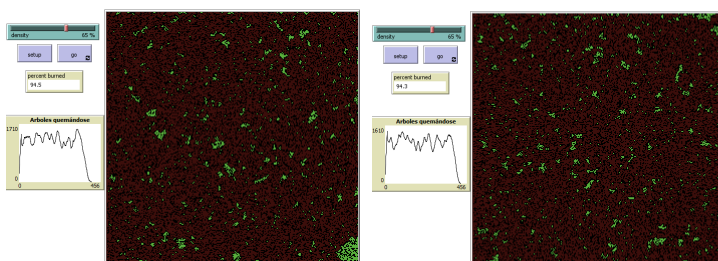


Figura 2.25: Primera y segunda corrida del modelo: Incendio forestal con densidad del 65 por ciento de árboles.

Podemos observar en las figuras 2.22 - 2.25 que a mayor densidad más rápido se quemará el bosque; es decir si están lo suficientemente separados (menor densidad) podrán resistir más un incendio forestal.

Con base a lo anterior, podemos afirmar que los modelos basados en agentes, nos permiten entender el mundo real de una mejor manera, pues podemos controlar los eventos a través de simulaciones numéricas, que arrojan datos reales de sucesos que están ocurriendo a nuestro alrededor. Todo esto con la intención de tomar la mejor decisión del campo de estudio que lo requiera.

2.5. Antecedentes agroecológicos

En esta sección describiremos los antecedentes biológicos basándonos primordialmente en comentarios específicos del artículo [7]. Por completes de este trabajo incluiremos las aseveraciones que se presentan en [7], [14] y [45].

De acuerdo a [7] hacemos notar que en el trópico, la ganadería bovina es una actividad importante y la más dispersa en el medio rural, principalmente por su contribución en la oferta de productos cárnicos y lácticos para la alimentación humana (para mayor información

referimos a [18] y [25]). Cabe mencionar que “la región tropical posee fuertes limitantes que impiden incrementar la productividad de los sistemas pecuarios [19], dentro de los cuales destacan: los serios problemas de alimentación animal (disponibilidad y calidad del forraje), aunado a la presencia de pasturas degradadas o en proceso de degradación”. Al igual que en [7], una de las estrategias para la recuperación y mejoramiento de los sistemas ganaderos es el establecimiento de sistemas silvopastoriles (SSP), los cuales acorde a [20] y [48] constituyen un tipo de agroforestería donde los árboles y/o arbustos interactúan con las forrajeras herbáceas y los animales. En este sistema (una combinación de árboles, arbustos forrajeros y pastos con la producción ganadera en la finca) se requiere una administración de estos recursos de manera que perduren en el tiempo los árboles y arbustos, así como su aprovechamiento en la alimentación animal. La importancia de los mismos (descritos en [7]), es “que pueden aportar mucho en mantener una cobertura vegetal continua sobre el suelo, posiblemente haciéndolo más fértil a mediano plazo, y además, trae beneficios verificables en la producción animal”. La diferencia con el sistema tradicional, es que antes se pensaba que tener una sola variedad de pasto establecido era suficiente para la alimentación animal, se ha asumido un papel importante debido a la necesidad de diseñar sistemas altamente productivos y armónicos con el ambiente. Con base en [41], ante dicha necesidad, se desarrollaron los sistemas silvopastoriles; los cuales se caracterizan por la presencia de arbustos forrajeros, como *Leucaena leucocephala*, asociado con pastos mejorados en un sistema de pastoreo rotacional intensivo con cerca eléctrica y oferta de agua de abrevadero.

Problemática de la ganadería en el trópico

Se destaca en [7] que en las regiones tropicales predominan los sistemas tradicionales de producción animal de doble propósito; los caracterizan por ser principalmente de pastoreo extensivo con monocultivo de gramíneas, los cuales producen bajos rendimientos de forraje y son de deficiente calidad, sobre todo en la época de secas. Aunado a ello, en [10] y [17] notan que “dichos sistemas están asociados con problemas de deforestación, degradación del suelo, escasez del agua, alteraciones en el clima y baja productividad”. A lo anterior se añade en [25], que “el hecho de que los sistemas ganaderos en monocultivo son los principales responsables en el cambio del uso del suelo (deforestación), y así contribuyen al 9 por ciento de las emisiones de dióxido de carbono (CO₂) que producen el efecto invernadero, asociado al cambio climático”. Por otro lado en [26] comentan que “el CO₂ se libera, principalmente, cuando las áreas boscosas son convertidas en pastizales o en tierras cultivables para la producción de alimentos, incluyendo los granos para la elaboración de concentrados”. Regresando al sistema que nos preocupa, en [27] y [25] destacan que la mayor limitante para este tipo de sistemas es la marcada estacionalidad en la producción y disponibilidad de las pasturas, además de una deficiente calidad nutricional en la época seca del año, lo cual no permite obtener niveles aceptables de producción de carne y leche, afectándose de igual manera los parámetros reproductivos. En este sentido, para contribuir a reducir la deficiencia de

la producción animal, con frecuencia se recurre a la compra de elevadas cantidades de granos y cereales para la elaboración de raciones; por lo cual, la actividad ganadera resulta altamente dependiente y poco rentable ([28] y [29]). Respecto a México, en [16] observan que “la importación de granos y cereales se ha incrementado, pues principalmente se destina a la alimentación animal. Esta situación se agrava ante la evidencia, cada vez más fuerte, del agotamiento del petróleo durante los próximos 40 años”. En [30] notan que este recurso es uno de los principales elementos empleados para la producción de granos y cereales utilizados en la alimentación animal. Sin embargo, como se menciona en [7] “a pesar de los señalamientos que pueden hacerse con respecto a la baja productividad de la ganadería tropical y su impacto negativo sobre los recursos naturales, es posible mejorar su productividad y competitividad mediante el uso de las tecnologías adecuadas. Ante ello, los SSP son una opción importante, ya que permiten optimizar la producción animal”.

Los sistemas silvopastoriles como opción para la ganadería tropical

En [32] y [33] describen que los SSP están compuestos por gramíneas rastreras o erectas, árboles y arbustos leguminosos y animales que se alimentan de los componentes forrajeros. Por su lado en [34] describen que estos sistemas presentan una mayor productividad forrajera, por lo que mejoran la cantidad y calidad de la dieta animal; lo anterior permite incrementar la producción de carne y leche, así como mejorar la reproducción en forma estable en el tiempo con reducción de costos al no requerir insumos como los granos, concentrados y antiparasitarios [35] y [36].

La inclusión de árboles en pasturas constituye una fuente importante de alimento. Al respecto en [37], [38] y [12], mencionan “que la inclusión de altas densidades es provechosa, ya que han encontrado que los mejores resultados en cuanto a la altura y número de hojas se obtienen con 60,000 y 80,000 árboles por hectárea a los 100 días de edad, con 138.28 cm y 24.74 cm, respectivamente. De igual manera, los SSP brindan múltiples servicios ambientales, al capturar cantidades importantes de dióxido de carbono (CO₂)”; por otro lado en [39], destacan “que un bosque tropical caducifolio en la región de Huatusco, Veracruz, es capaz de capturar hasta 469.79 toneladas por hectárea, siguiéndole el SSP con 62.58 toneladas por hectárea y el potrero convencional con 49.94 toneladas por hectárea”. El SSP, [7] “se caracterizó por tener árboles de huizache (*Acacia pennatula*) y de colorín (*Erythrina americana*), a una distancia de 10 m entre hileras y de 8 m entre plantas. El estrato herbáceo está cubierto en 90 por ciento por la mezcla de pasto nandi (*Setaria sphacelata*) y pasto señal (*Brachiaria decumbens*). El sistema convencional consistió en una comunidad vegetal dominada por pasto estrella África (*Cynodon plectostachyus*)”. Por su parte en [13] señalan que “con la siembra de 80,000 plantas de *L. leucocephala*, Var. *Cunningham* por hectárea, pasto Cuba CT-115 (*Pennisetum purpureum*) y cocotero (*Cocos nucifera*), es posible capturar hasta 128.62 toneladas por hectárea por año, equivalente a 2.44 veces más, con respecto de aquella donde sólo se asocia el cocotero con la gramínea”.

Se destaca en [40] y [34] que los SSP con *L. leucocephala*, al proveer múltiples beneficios, son una opción importante para mejorar las condiciones del suelo en muchas zonas ganaderas del trópico; ya que tienen un potencial de fijación de nitrógeno atmosférico de 52 y 320 kg por hectárea, dependiendo de la variedad, densidad y condiciones ambientales. Debido a la importancia de estos sistemas, se ha impulsado el diseño de nuevas modalidades para su aplicación en la ganadería tropical. Ante ello en [41], se desarrollaron los sistemas silvopastoriles intensivos con *Leucaena leucocephala*, el cual permite incrementar de manera considerable la productividad y la carga animal, así como la generación de servicios ambientales que resultan de la presencia de altas densidades en esta leguminosa.

Los sistemas silvopastoriles intensivos (SSPi) con *Leucaena leucocephala*

Con base en [7] los SSPi son una modalidad de los sistemas agroforestales que se caracterizan por la presencia de altas densidades (mayor a 10,000 plantas por hectárea), de arbustos forrajeros como *L. leucocephala*, asociados a pastos mejorados de alta producción de biomasa bajo modelos de pastoreo rotacional intensivo con cerca eléctrica y oferta de agua de abrevadero. Se pueden asociar, o no, con árboles maderables, frutales y leguminosas rastreras; *L. leucocephala* por su calidad nutricional, fijación de nitrógeno (N) atmosférico, crecimiento, tolerancia a la sequía y adaptación al ramoneo, ya que resulta una de las especies utilizada con mayor éxito [29] y [41].

En [42] y [43] describen que la utilización del cercado eléctrico (principalmente de la variante móvil) en estos sistemas permite el mayor aprovechamiento de las especies disponibles, pastoreo y distribución de heces y orina más uniforme, desarrollo de rebrotes más densos con mayor proporción de hojas y menor contenido de fibra.

En [31] usan el modelo rotativo intensivo que permite pastorear un área determinada en un periodo de tiempo relativamente corto, antes que los animales sean cambiados a una nueva área; involucra el uso de periodos cortos de pastoreo intensivo con periodos largos de descanso donde el sistema se recupera. Con relación a las altas densidades de árboles, en [7] destacan que “estos permiten obtener múltiples beneficios; tales como: el ahorro de fertilizantes nitrogenados, mayor duración de las pasturas, mejor retención hídrica en el suelo, disminución del efecto desecante de los vientos y reducción del estrés calórico en los animales. Además, se alcanzan altos rendimientos de biomasa que permiten mayor carga animal y un incremento en la ingesta de proteína que mejora la producción y calidad de leche y carne. De igual manera, con estos sistemas se captura una mayor cantidad de carbono (C), se reduce la emisión de Metano (CH₄) y se incrementa la biodiversidad [44]”. Destacamos el cuadro siguiente (ver figura 2.26), que originalmente se muestra en [7], en el cual se presenta la comparación de tres sistemas de producción con cinco años de evolución; donde se encuentra en el SSPi una alta producción de forraje, carne y leche en comparación con el sistema de baja densidad y con pastos sin árboles [41].

Cuadro 1

Comparación de las principales características de un sistema de producción ganadera con pastos mejorados y asociado con *Leucaena leucocephala* a baja y alta densidad.

Indicador.	Pastos mejorados sin árboles, con riego, sin fertilización y suplementación.	Pastos y <i>L. leucocephala</i> con baja densidad (4,000 plantas ha⁻¹) con riego, sin fertilización y suplementación.	SSPi con <i>L. leucocephala</i> (10,000 plantas ha⁻¹), con riego, sin fertilización y suplementación.
Forraje verde (t ha⁻¹ año⁻¹)	55	90	185
Carga animal unidades ganado grande (UGG)	1.3	2.5	5.0
Carga animal (kg ha⁻¹ año⁻¹)	526.5	1,125	2,250
Producción de carne (kg ha⁻¹ año⁻¹)	180	680	1,900
Producción de leche (L ha⁻¹ año⁻¹)	1,000	3,650	10,950

Fuente: Murgueitio y Solorio (2008).

Figura 2.26: Cuadro 1: Comparación de las principales características de un sistema de producción ganadera con pastos mejorados y asociado con *Leucaena leucocephala* a baja y alta densidad. Nomenclaturas: t ha⁻¹ año⁻¹ significa toneladas por hectárea por año, kg ha⁻¹ año⁻¹ significa kilogramos por hectárea por año, L ha⁻¹ año⁻¹ significa litros por hectárea por año.

Producción y calidad de forraje

En [46] se muestra el cuadro 2 (ver figura 2.27) que evidencia las ventajas en la producción de biomasa y composición química del forraje, con la implementación de los SSPi basados en *L. leucocephala* y *C. plectostachyus*, comparado con el monocultivo del mismo pasto fertilizado con Neutrógeno en el Valle del Cauca, Colombia.

Cuadro 2		
Oferta y calidad de forraje de un sistema silvopastoril intensivo comparado con monocultivo de pasto fertilizado con nitrógeno en el Valle del Cauca, Colombia.		
Indicador.	Monocultivo C. plectostachyus + 184 kg N t ha⁻¹ año⁻¹	SSPi L. leucocephala (10,000 plantas ha⁻¹) + Cynodon + 0 kg N ha⁻¹ año⁻¹
Biomasa (t MS ha⁻¹ año⁻¹)	23.2	29.5
Proteína cruda (t MS ha⁻¹ año⁻¹)	2.5	4.1
Energía metabolizable (Mcal ha⁻¹ año⁻¹)	56,876	70,222
Calcio (kg ha⁻¹ año⁻¹)	83.2	142.3
Fósforo (kg ha⁻¹ año⁻¹)	74.0	88.8

Fuente: Molina y Uribe (2002).

Figura 2.27: Cuadro 2: Oferta y calidad de forraje de un sistema silvopastoril intensivo comparado con monocultivo de pasto fertilizado con nitrógeno en el Valle de Cauca, Colombia. Nomenclaturas: tMS ha⁻¹ año⁻¹ significa toneladas de materia seca por hectárea por año, Mcal ha⁻¹ año⁻¹ significa megacaloría por hectárea por año, kg ha⁻¹ año⁻¹ significa kilogramo por hectárea por año.

En [7] se expone el caso de México, dónde se realizó un estudio en el trópico seco de Michoacán, en tres ranchos de producción ganadera de doble propósito, dos con *Panicum maximum* cv. Tanzania, asociado con *L. leucocephala* cv. Cunningham (densidad de 34,500 y 53,000 plantas por hectárea y uno con sistema tradicional de *C. plectostachyus* en monocultivo, donde encontraron una mayor oferta de forraje comestible en la asociación, con un promedio de 2,470 y 2,693 kilogramos de materia seca por hectárea en un pastoreo en la época de seca (marzo-mayo).

Como muestra [14], “el periodo de ocupación y descanso es de 3 y 45 días, respectivamente, realizándose dos pastoreos en época seca. En el sistema tradicional, la oferta fue de 948 kg MS por hectárea en un pastoreo. En ambos sistemas se aplicó riego por gravedad cada 15 días, sin fertilización para el sistema asociado y aplicando abono orgánico con base en bovinaza para el monocultivo”. De acuerdo a [47], un aspecto a resaltar en el estudio anterior, es que en la época de secas *L. leucocephala* aporta una considerable oferta de forraje; ante ello, la incorporación de esta leguminosa constituye una fuente importante de alimentación animal, sobre todo en la época con menor disponibilidad de pastos.

Producción animal

En [44] se menciona que a lo largo de los últimos años, los SSPi en México, Colombia y Costa Rica han evidenciado una capacidad de producción ganadera superior a los sistemas tradicionales extensivos, pero similares a los modelos intensivos que emplean altas cantidades de fertilizantes, concentrados, medicamentos y agroquímicos. En el cuadro 3 (ver figura 2.28) se evidencian las ventajas de estos sistemas, comparadas con sistemas ganaderos tradicionales; con el establecimiento de SSPi se han alcanzado producciones de leche mayores a los 10,000 litros por hectárea por año con ganancias diarias de peso en bovinos de 790.20 g en un animal por día.

Cuadro 3				
Carga animal y producción de leche en dos sistemas de pastoreo: tradicional vs. silvopastoril intensivo.				
Característica	Sistema tradicional sin árboles		Silvopastoril intensivo	
	Pastura degradada	Pastura mejorada con fertilización química (mayor a 250 kg N ha ⁻¹ año ⁻¹)	Banco forrajero mixto, cerca viva, fertilización orgánica	Sistema silvopastoril intensivo sin fertilización
Lugar	Trópico húmedo (Amazonia, Colombia). Altitud de 500 msnm y precipitación de 3,000 mm	Trópico húmedo (Costa Rica). Altitud de 600 msnm y precipitación de 2,600 mm	Laderas Andes (Colombia). Altitud de 2,625 msnm y precipitación de 1,625 mm	Trópico seco (México y Colombia). Altitud de 600 msnm y precipitación de 1,000 mm
Carga animal (450 kg animal ha ⁻¹)	0.6	5.0	4.6	4.0
Producción de leche (L ha ⁻¹ año ⁻¹)	400	10,800	5,320	Mayor a 10,000

Fuente: Shelton (2004).

Figura 2.28: [7] Cuadro 3: Carga animal y producción de leche en dos sistemas de pastoreo: tradicional vs. silvopastoril intensivo. Nomenclaturas: kg N ha⁻¹ año⁻¹ significa kilogramo de nitrógeno por hectárea por año, 450 kg animal ha⁻¹ es 450 kilogramos de animal por hectárea, L ha⁻¹ año⁻¹ indica litros por hectárea por año, mm quiere decir milímetros y msnm metros sobre el nivel del mar.

De acuerdo a [29], en Australia se ha utilizado la leguminosa *L. leucocephala* asociada a pasturas de *Cenchrus ciliaris*, los cuales han resultado altamente productivos y rentables. Con esta asociación se alcanzó una ganancia diaria de peso de 250-280 kg en un animal por año, equivalente a 165-185 kg por hectárea por año, comparado con la pastura en monocultivo; con la cual se obtuvo una ganancia diaria de peso de 80-100 kg por animal en un año, equivalente a 8-10 kg por hectárea por año.

En [20], destacan que en Colombia, con la asociación de *C. plectostachyus*, *L. leucocephala* y *Prosopis juliflora*, con suplementación de 1.65 kg de salvado de arroz y 1.20 kg de gallinaza en un animal por día, es posible obtener producciones de leche de 10.30 kg por vaca en un día, lográndose mayor estabilidad entre periodos secos y lluviosos.

Heteropsylla cubana

De acuerdo a [45], *Heteropsylla cubana* es el principal insecto fitófago que habita en el cultivo *Leucaena leucocephala*, (ver figura 2.29) sus ninfas y adultos provocan daños al succionar la savia de los cogollos y hojas jóvenes de la planta. Esto puede provocar que la planta se marchite y llegue a morir cuando hay ataques severos. Estos daños se favorecen por la expulsión de exudados tóxicos que depositan estos insectos sobre las plantas. El conocimiento del umbral de daño de una plaga determinada o, al menos, el coeficiente de nocividad, resulta muy importante, ya que ambos conceptos definen las posibles pérdidas económicas que provoca el organismo nocivo que se estudia. Los especialistas recomiendan siempre calcular este umbral, ya que define la cantidad de individuos mínimos capaces de ocasionar daños económicos y permite así accionar contra la plaga, antes de que ocurran pérdidas. Sin embargo, cuando no es posible su determinación, debe tratarse de hallar el coeficiente de nocividad, pues con este se conoce el grado de afectación que provoca el insecto fitófago a la planta, o sea la magnitud de sus daños. Obtener esta información es importante para estabilizar la población de esta plaga y encaminar a una optimización de las especies. En [45] se encuentra el coeficiente de nocividad del psílido *Heteropsylla cubana* en la *Leucaena leucocephala* en condiciones de insectarios.



Figura 2.29: *Heteropsylla Cubana* [49] y *Leucaena Leucocephala* [50].

Es muy importante para poder controlar la plaga (*Heteropsylla cubana*) mediante dos depredadores (ver figura 2.30) (*Chilocorus cacti* y *Chrysoperla* sp.) que acaban con el cultivo de *Leucaena leucocephala*, el cual es usado para alimentar de manera óptima al ganado vacuno [7], incrementado significativamente el peso, al mismo tiempo que proporciona disminución del costo total del suplemento dietético y aumenta la producción de leche [14].



Figura 2.30: Dos depredadores: Cacti [51] y Chrysoperla [52].

3. MODELOS CON ECUACIONES DIFERENCIALES

En esta sección se van a describir los modelos generalizados depredador presa; sin embargo, para entenderlos, es necesario describir los modelos que den pauta al desarrollo del presente trabajo.

Por [7] es importante ver el crecimiento de la Leucaena, por ello comenzaremos con el modelo de crecimiento poblacional de la H. Cubana, continuamos con el modelo depredador presa **Modelo H. Cubana vs. Leucaena**, dónde a través de ecuaciones diferenciales, así como esquemas detallados, se representa la interacción que tiene la plaga con el cultivo tratando de simular lo que se presenta en [45]. Después **Modelo H. Cubana vs. Cacti**, en este interactúa la plaga con su primer depredador potencial, posteriormente **Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla**, aquí vemos al igual que en el caso anterior, el comportamiento de la plaga, pero ahora con un segundo depredador. Seguimos con **Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla y Cacti**, en este caso específico usamos el modelo usado por N., Mercedes y M. [9] que describe la investigación de un modelo de agroecosistema; se explica el comportamiento de la plaga, pero ahora con la presencia de dos depredadores, a continuación **Modelo H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti)**, en este caso se contempla una variable, más, pues añadimos el cultivo y finalmente **Modelo H. Cubana vs. Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla, Cacti) y la Vaca**. Este último modelo representa de manera más amplia nuestro agroecosistema.

3.1. Modelo H. Cubana

En esta sección, analizaremos un modelo de ecuaciones diferenciales que muestra el crecimiento de la H. Cubana, con sus parámetros (mortalidad, natalidad, y coeficientes de competencia).

Esquema 1, representado en la Figura 3.1

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \lambda - \mu. \quad (3.1)$$

Donde,

x - H. Cubana;

λ - tasa finita de incremento de las poblaciones H. Cubana;

μ - tasa de mortalidad natural de H. Cubana y

α - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. Cubana.

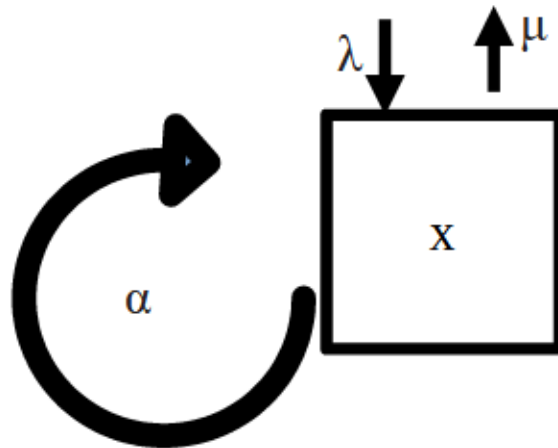


Figura 3.1: Esquema 1. Modelo H. Cubana. α representa una interacción de H. Cubana con H. Cubana.

Con esta ecuación diferencial, describimos el crecimiento poblacional de nuestra especie (H. Cubana), como un crecimiento ilimitado. Vale la pena considerar más componentes debido a que nuestra variable depende de otras poblaciones.

De acuerdo al teorema 2.2.3, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *En la ecuación 3.1, la población de H. Cubana es estable si $\alpha < 0$. La población de H. Cubana es inestable si $\alpha > 0$.*

Respecto a [9] en sus técnicas de muestreo, por ejemplo, se obtiene que $\mu = 0.4$, y $\lambda = 1.2$. Por lo que la ecuación 3.1 es estimada por

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 0.8. \quad (3.2)$$

Con punto de equilibrio $x = 0.8/\alpha$ y diagrama de comportamiento de estabilidad (Ver Figura 3.2) respecto al parámetro α .

Claro, si $\alpha = 0$ cada condición inicial es inestable. Es decir, como $\alpha = 0$ la ecuación 3.2 queda:

$$\frac{dx}{dt} = 0.8 \quad (3.3)$$

Para la condición inicial su crecimiento parece indefinido a una tasa del 0.8, pero el crecimiento no es ilimitado, usamos la ecuación logística descrita en la sección 2.1.1.

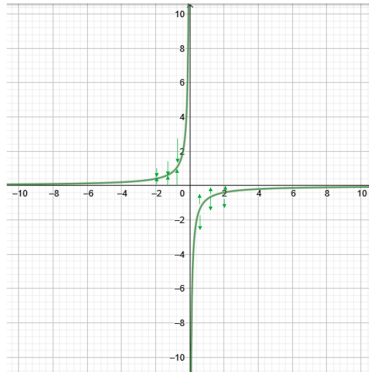


Figura 3.2: Comportamiento de estabilidad respecto al parámetro α .

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - x/N) + \lambda - \mu.$$

Nuevamente con los datos de [9] obtenemos $\alpha = \lambda - \mu$, sin considerar tasa de crecimiento autónoma. Por ello específicamente en el caso de esta interacción se obtiene.

$$\frac{dx}{dt} = 0.8x - 0.3x^2. \quad (3.4)$$

Lo cual nos refleja los puntos de equilibrio (Ver Figura 3.3).

$$\begin{aligned} x_{0,1} &= 0, \\ x_{0,2} &= 0.8/0.3. \end{aligned}$$

Al usar el método Runge Kutta en la ecuación (3.4) antes mencionada, encontramos un comportamiento representativo cerca de los puntos de equilibrio (Ver Figura 3.4).

El código completo del método de Runge Kutta para esta ecuación está en el apéndice B.1.

3.2. Modelo H. Cubana vs. Cacti

A continuación se muestra un modelo de ecuaciones diferenciales que describe el crecimiento de la H. Cubana, con sus parámetros (mortalidad, natalidad, y coeficientes de competencia), así como la interacción que tiene con un depredador (Ch. Cacti). Lo más valioso de estas ecuaciones, es que podemos ver como se puede controlar el crecimiento de la plaga por la existencia del depredador (ver figura 3.6).

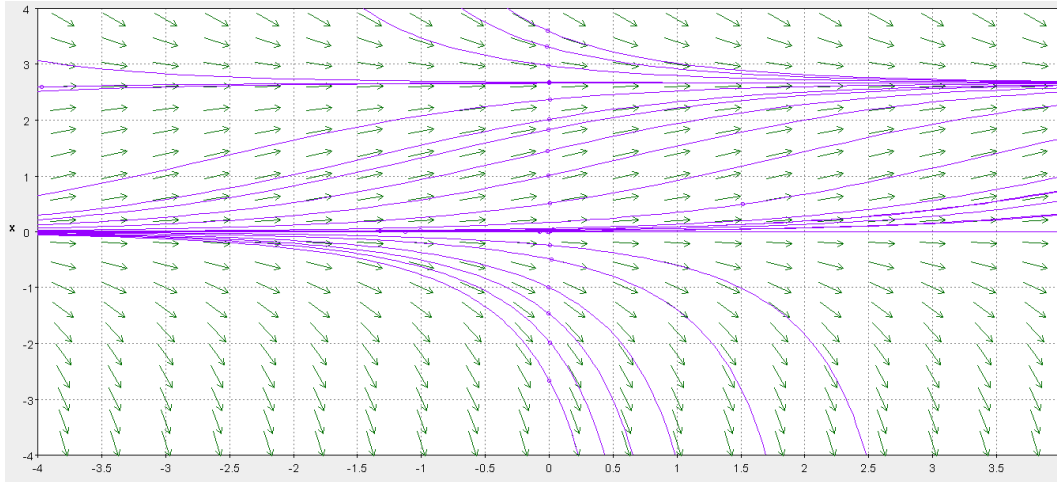


Figura 3.3: Crecimiento poblacional de H. Cubana.

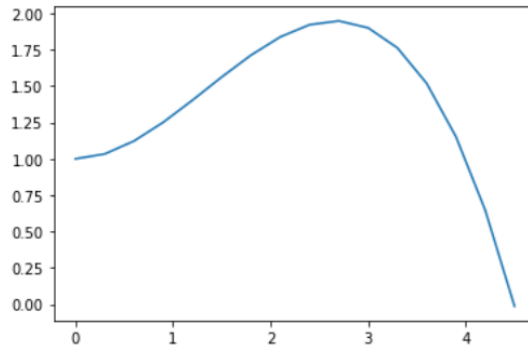


Figura 3.4: Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana.

Esquema 2

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \lambda - \mu - cxy, \\ \frac{dy}{dt} &= e xy - \beta y. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Donde,

x - H. Cubana;

y - Ch. Cacti;

λ - tasa finita de incremento de las poblaciones H. Cubana;

μ - tasa de mortalidad natural de H. Cubana;

α - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. Cubana;

e - porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir una presa;

c - porcentaje de pérdida de H. Cubana, atribuida a Ch. Cacti y

β - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones Chilocorus Cacti.

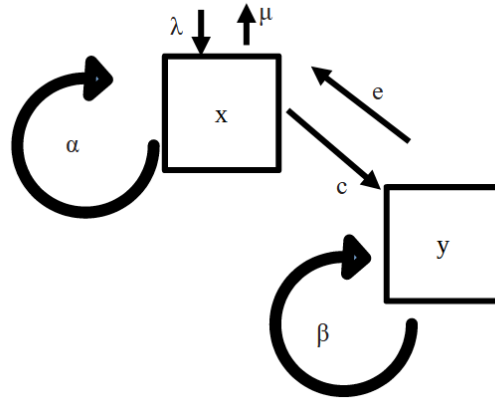


Figura 3.5: Esquema 2. Modelo H. Cubana vs. Cacti, donde β es el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones Chilocorus Cacti y e representa porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir una presa.

Análogo a la sección anterior, describimos la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema. En las ecuaciones (3.5), podemos destacar los puntos fijos.

Proposición 3.2.1. *Supóngase que $\lambda = 0$ y $\mu = 0$. Entonces los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(-\beta/e, -\alpha/c)$. Estos mismos determinan que la plaga se mantenga estable, pero el depredador depende de la plaga.*

Demostración. De 3.5 Supóngase que $\lambda = 0 = \mu$.

$$x' = \alpha x - cxy$$

$$y' = exy + \beta y.$$

Entonces los puntos de equilibrio igualando a cero de $f_1(x, y) = \alpha x - cxy$, y $f_2(x, y) = exy + \beta y$ son:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (-\beta/e, -\alpha/c).$$

□

Proposición 3.2.2. *En 3.5 el punto de equilibrio*

$$(-\beta/e, -\alpha/c)$$

tiene la siguiente estabilidad:

- Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ es inestable.
- Si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ es estable.
- Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$ es un punto silla.

Demostración. Calculamos las derivadas parciales con respecto a x de las ecuaciones (3.5) y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dx} &= \alpha - cy, \\ \frac{df_2}{dx} &= ey.\end{aligned}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales con respecto a y de las ecuaciones (3.5) y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dy} &= -cx, \\ \frac{df_2}{dy} &= ex + \beta.\end{aligned}$$

Con base a lo anterior, obtenemos la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \alpha - cy & -cx \\ ey & ex + \beta \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana $(0, 0)$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Con base al **teorema 2.2.4**, la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ determina la estabilidad del punto de equilibrio $(0,0)$.

Si $\alpha > 0$ y $\beta < 0$, entonces el $(0, 0)$ es un punto silla.

- $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, entonces $(0, 0)$ es inestable.
- $\alpha < 0$ y $\beta < 0$, entonces $(0, 0)$ es estable.
- $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, entonces $(0, 0)$ es un punto silla.

Ahora sustituimos en la matriz jacobiana el otro punto de equilibrio $(-\beta/e, -\alpha/c)$, y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & c\beta/e \\ -e\alpha/c & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Con base a las ecuaciones diferenciales enunciadas, podemos observar la interacción que tendrá la plaga con su depredador, de esta manera se tendrá un mayor control sobre el crecimiento de la H. Cubana, así como de la Cacti. Recordemos que deseamos mejorar el equilibrio del agroecosistema para que subsista con la intervención de más variables.

Ahora, usando los datos de [9] obtenemos para las ecuaciones (3.5):

- $\alpha = 0.8$
- $c = 0.11$
- $e = 0.71$
- $\beta = 0.0003$

Por la proposición 3.2.2 el punto de equilibrio $(-\beta/e, -\alpha/c)$ es inestable.

Notamos que al usar el método Runge Kutta en las ecuaciones (3.5). Se observa que el depredador Cacti crece de forma significativa, pero la plaga H. Cubana tiene un crecimiento estable a través del tiempo (ver figura 3.6).

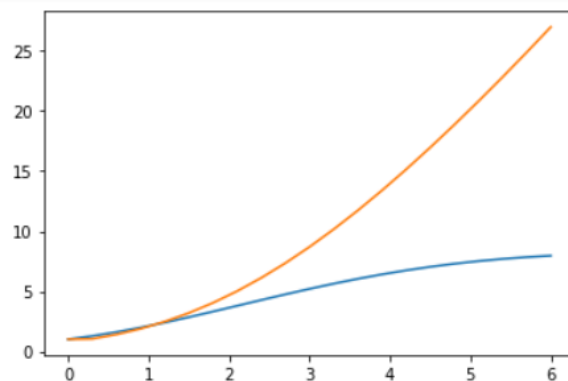


Figura 3.6: Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana Vs. Cacti.

El código Runge Kutta esta en el apéndice B.2.

3.3. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla

En el presente modelo se hará lo mismo que en el anterior, pues el modelo es igual (presa depredador). Se muestra un modelo de ecuaciones diferenciales que describe el crecimiento de la H. Cubana, con sus parámetros (mortalidad, natalidad, y coeficientes de competencia), así como la interacción que tiene con otro depredador (Chrysoperla), lo más valioso de estas ecuaciones, es que podemos ver como se puede controlar el crecimiento de la plaga por la existencia de la Chrysoperla.

Esquema 3

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x + \lambda - \mu - dxz \\ \frac{dz}{dt} &= f xz - \gamma z.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Donde,

x - H. Cubana;

z - Chrysoperla sp;

λ - tasa finita de incremento de las poblaciones H. Cubana;

μ - tasa de mortalidad natural de H. Cubana;

α - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. Cubana;

d - porcentaje de pérdida de H. Cubana, atribuida a Chrysoperla sp;

f - porcentaje de incremento de Chrysoperla sp., por ingerir una presa y

γ - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones Chrysoperla sp.

Con base a las ecuaciones diferenciales enunciadas, podemos observar la interacción que tendrá la plaga al convivir con su depredador, de esta manera podremos tener una mayor control sobre el crecimiento de la H. Cubana, con esto se pretende mejorar el equilibrio del agroecosistema para que subsista con la intervención de más variables, como lo es la Chrysoperla.

Si linealizamos las ecuaciones con una matriz jacobiana, el sistema es estable si cumple las siguientes condiciones.

Proposición 3.3.1. Si $\lambda - \mu = 0$, entonces los puntos de equilibrio son:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^y \\ (-\gamma/f, \alpha/d).$$

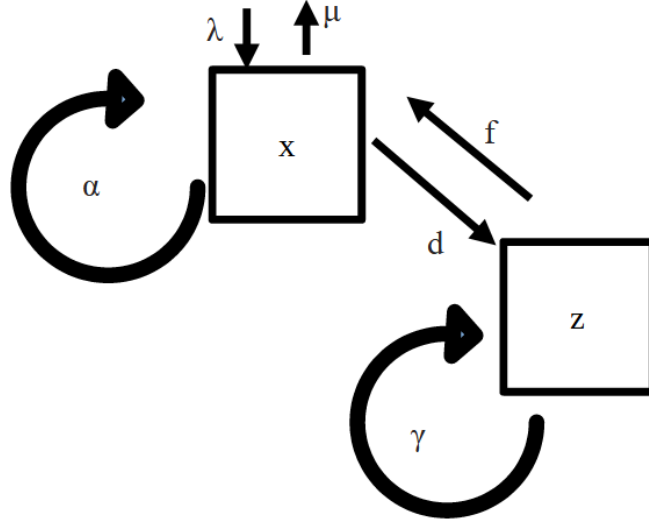


Figura 3.7: Esquema 3. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla, donde γ es el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones Chrysoperla sp., y f representa el porcentaje de incremento de Chrysoperla sp., por ingerir una presa.

Proposición 3.3.2. *La estabilidad del punto de equilibrio $(0, 0)$ es:*

- *Inestable, si $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$*
- *Estable, si $\alpha < 0$ y $\gamma < 0$*
- *Punto silla, si $\alpha < 0$ y $\gamma > 0$*

Demostración. De la ecuación 3.6, supóngase que $\lambda = 0 = \mu$. Entonces los puntos de equilibrio son:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} y \\ (-\gamma/f, \alpha/d).$$

Análogamente, como en la sección anterior, este mismo determina que la plaga se mantenga estable, pero el depredador depende de la plaga, y está bien controlado el sistema.

Ahora calculamos las derivadas parciales con respecto a x de las ecuaciones (3.6) y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{df_1}{dx} = \alpha - dz,$$

$$\frac{df_2}{dx} = fz + \gamma.$$

Ahora calculamos las derivadas parciales con respecto a z de las ecuaciones (3.6) y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dz} &= -dx, \\ \frac{df_2}{dz} &= \gamma + fx.\end{aligned}$$

Nuevamente, obtenemos la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \alpha - dz & -dx \\ fz + \gamma & \gamma + fx \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos los puntos de equilibrio en la matriz jacobiana $(0, 0)$, y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Sustituimos el punto de equilibrio $(-\gamma/f, \alpha/d)$ en la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 0 & d\gamma/f \\ f\alpha/d & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Corolario 3.3.3. *El punto de equilibrio $(-\gamma/f, \alpha/d)$ es estable si $\alpha < 0$ y $\gamma < 0$*

Usando los datos de [9] obtenemos:

- $\alpha = 0.8$
- $\gamma = 0.0002$
- $f = 0.63$
- $d = 0.01$

El punto de equilibrio $(-\gamma/f, \alpha/d)$ es punto silla.

Observamos que al aplicar el método runge kutta a las ecuaciones (3.6) se nota que el depredador *Chrysoperla* logró disminuir el crecimiento de la plaga (ver figura 3.8). Análogo al resultado obtenido en la sección anterior.

El código Runge Kutta está en el apéndice B.3.

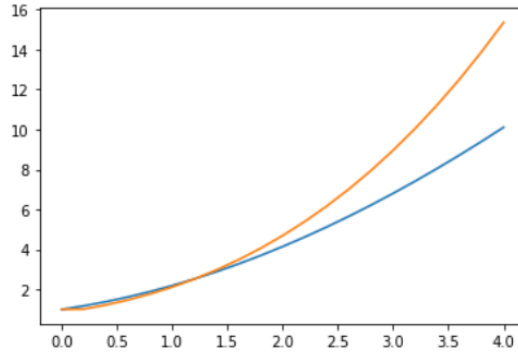


Figura 3.8: Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana Vs. Chrysoperla.

3.4. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla y Cacti

El siguiente esquema coincide con lo propuesto en [9], donde se modela la interacción *Heteropsylla cubana* con *Chilocorus cacti* y *Chrysoperla sp.* en un agroecosistema de *Leucaena leucocephala*. Observamos un modelo de ecuaciones diferenciales que describen el crecimiento de la H. Cubana, con sus parámetros (mortalidad, natalidad y coeficientes de competencia), así como la interacción que tiene con dos depredadores (Chrysoperla y Cacti), lo más valioso de estas ecuaciones, es que podemos ver como se puede controlar el crecimiento de la plaga, así como de los dos depredadores.

Esquema 4

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= (\alpha x - \lambda x)x - cxy - dxz - \alpha x^2 \\
 \frac{dy}{dt} &= e xy - \beta y^2 \\
 \frac{dz}{dt} &= f xz - \gamma z^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Donde,

x - H. Cubana;

y - Ch. Cacti;

z - Chrysoperla sp;

λ - tasa finita de incremento de las poblaciones H. Cubana;

μ - tasa de mortalidad natural de H. Cubana;

c - porcentaje de pérdida de H. Cubana, atribuida a Ch. Cacti;

d - porcentaje de pérdida de H. Cubana, atribuida a Chrysoperla sp;

e - porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir una presa y

f - porcentaje de incremento de *Chrysoperla* sp., por ingerir una presa

α, β, γ - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones *H. cubana*, *Chilocorus cacti* y *Chrysoperla* sp., respectivamente.

La siguiente figura generaliza lo presentado en la sección de resultados y discusión de [9, p. 314].

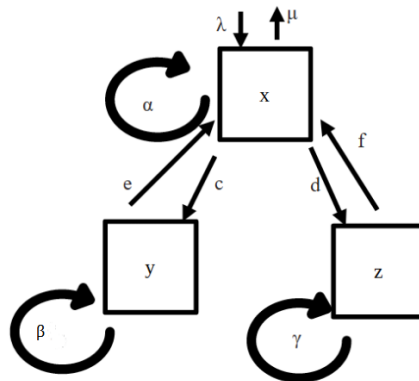


Figura 3.9: Esquema 4. Modelo *H. Cubana* vs. *Chrysoperla* y *Cacti*, donde α, β, γ son los coeficientes de competencia intraespecífica de las poblaciones *H. cubana*, *Chilocorus Cacti* y *Chrysoperla* sp., respectivamente; así como e representa el porcentaje de incremento de *Ch. Cacti* por ingerir una presa y la f es el porcentaje de incremento de *Chrysoperla* sp., por ingerir una presa.

De acuerdo a [9, p. 315], los muestreos realizados en campo, tuvieron los siguientes valores estimados, donde los parámetros resultaron: $\lambda = 1.2$ y $\mu = 0.4$. Para este fitófago la literatura informa, con respecto a la población total, un valor $\lambda = 1.01$ [57]. De ahí se infiere que existe determinada coincidencia entre el valor de λ [58] y su cálculo de acuerdo con el promedio de las diferencias poblacionales ascendentes de un muestreo a otro.

Al no contar con un experimento de enfrentamiento y al considerar que *Ch. cacti* es un depredador más específico de *H. cubana* y que *Chrysoperla* sp se comporta como un depredador generalista, se seleccionaron los coeficientes $c = 0.11$ y $d = 0.01$.

Los valores del incremento poblacional de estos depredadores fueron $e = 0.71$ y $f = 0.63$. Los niveles de competencia intra específica se tomaron de acuerdo con el nicho ecológico y el alimento de las poblaciones ($\alpha = 0.3, \beta = 0.0003$ y $\gamma = 0.0002$), siendo como resultante

las siguientes ecuaciones diferenciales [9, p. 315]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (0.8x - 0.11xy - 0.01xz - 0.3x^2) \\ \frac{dy}{dt} &= 0.71xy - 0.0003y^2 \\ \frac{dz}{dt} &= 0.63xz - 0.0002z^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tomando como base las ecuaciones diferenciales, así como el método Runge Kutta de orden cuatro, los puntos de equilibrio resultaron ser: (0, 0, 0), (2.6, 0, 0), (0.002, 6.48, 8.62), (0.003, 7.26, 0) (ver figura 3.10) y (0.025, 0, 79.24) (ver figura 3.11) [9, p. 315].

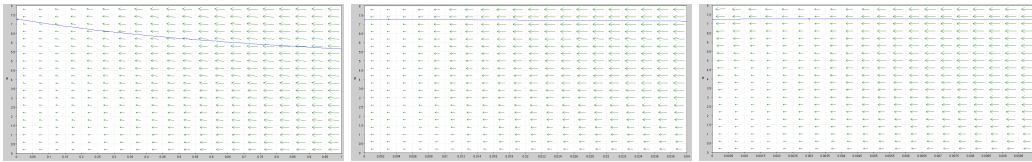


Figura 3.10: Puntos de equilibrio de H.Cubana vs. Cacti.

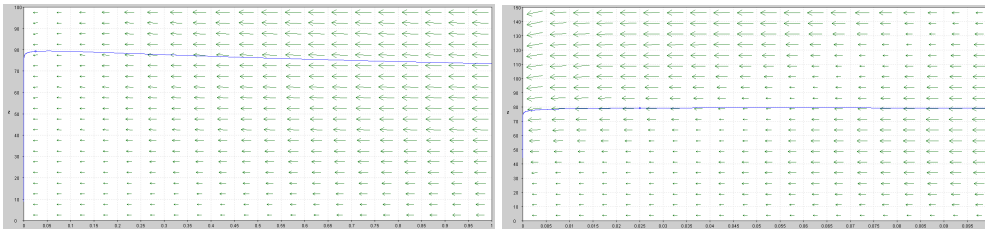


Figura 3.11: Puntos de equilibrio de H.Cubana vs. Chrysoperla.

Notemos que la interacción con un solo depredador, y los puntos de equilibrio hacen que la plaga tienda a cero, y el depredador se mantenga estable.

Podemos afirmar que nuestro resultado es consistente con el presentando en [9, p. 315], pues se llega a puntos de equilibrio óptimos, dónde la plaga H. Cubana llegará casi a la extinción, pues los dos depredadores (Cacti y Chrysoperla) se encargarán de este hecho, sin embargo, al mover los parámetros de interacción podemos lograr que subsistan en el tiempo las tres variables contempladas para este esquema.

Al usar el método Runge Kutta en las ecuaciones (3.8), obtuvimos un comportamiento representativo (ver figura 3.12) cerca de los puntos de equilibrio.

El código está en el apéndice B.4.

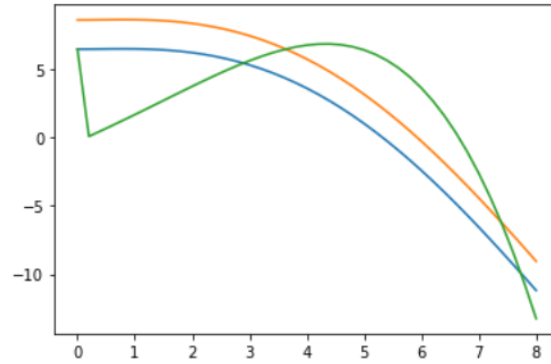


Figura 3.12: Gráfica de crecimiento poblacional de H. Cubana vs. Cacti y Chrysoperla.

3.5. Modelo H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti)

Se muestra un modelo de ecuaciones diferenciales que describe el crecimiento de la H. Cubana, con sus parámetros (mortalidad, natalidad, y coeficientes de competencia), así como la interacción que tiene con dos depredadores (Chrysoperla y Cacti), se añade una variable más, el cultivo (Leucaena), de esta manera podemos simular el agroecosistema lo más parecido al sistema real.

Esquema 5

Donde, si aumentamos Leucaena, tendremos los siguientes datos

$$\begin{aligned}
 \frac{dl}{dt} &= \omega l - \kappa l - gly - hlz - ilx + \phi l \\
 \frac{dx}{dt} &= mx - \alpha x^2 \\
 \frac{dy}{dt} &= jly + cxy - \beta y^2 \\
 \frac{dz}{dt} &= klz + dxz - \gamma z^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

x - H. Cubana;

y - Ch. Cacti;

z - Chrysoperla sp;

l - Leucaena;

ω - tasa finita de incremento de Leucaena;

κ - tasa de mortalidad natural de Leucaena;

g - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Ch. Cacti;

h - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Chrysoperla sp;
 i - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a H. Cubana;
 j - porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir Leucaena;
 k - porcentaje de incremento de Chrysoperla sp por ingerir Leucaena;
 m - porcentaje de incremento de H. Cubana por ingerir Leucaena;
 $\alpha, \beta, \gamma, \text{ y } \phi$ - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. cubana, Chilocorus Cacti y Chrysoperla sp. y Leucaena respectivamente.

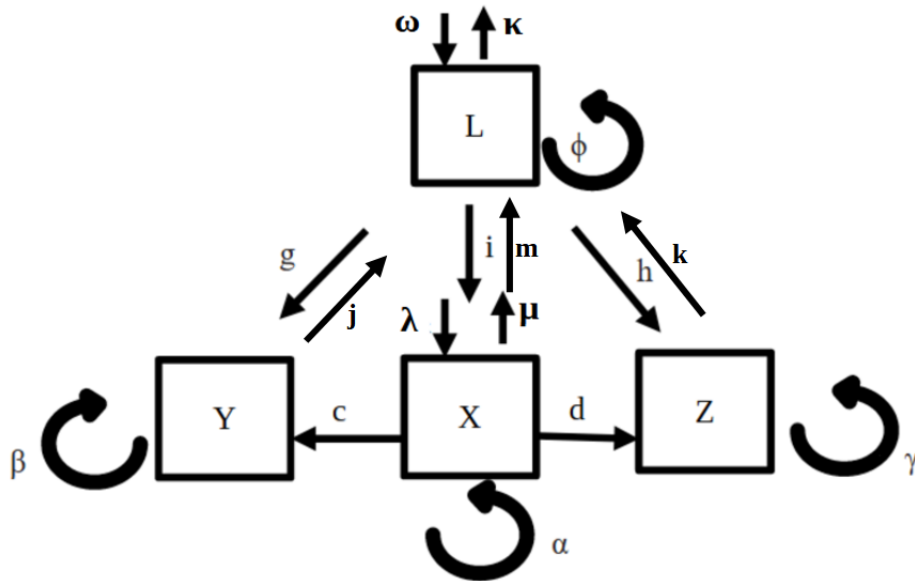


Figura 3.13: Esquema 5. Modelo H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti), donde $\alpha, \beta, \gamma, \text{ y } \phi$ representan el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. Cubana, Chilocorus Cacti, Chrysoperla sp. y Leucaena respectivamente, así como g es el porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Ch. Cacti, y h es porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Chrysoperla sp.

Con base al sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) podemos inferir que al intervenir más variables, podemos llegar a puntos de equilibrio óptimos, donde pueden subsistir el cultivo (Leucaena), dos depredadores (Cacti y Chrysoperla). De esta manera, todo funciona en condiciones manejables como se desea obtener en [7], permitiendo que el agroecosistema funcione de la mejor manera, aumentado la ganancia para los agricultores que lo implementen como un mecanismo de mejora. Para este sistema se tiene una solución numérica, debido a que las soluciones analíticas solo se obtienen parcialmente o con retratos fase.

3.6. Modelo H. Cubana vs. Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla, Cacti) y la vaca

Se muestra un modelo de ecuaciones diferenciales que describe el crecimiento de la H. Cubana, con sus parámetros (mortalidad, natalidad, y coeficientes de competencia), así como la interacción que tiene con dos depredadores (Chrysoperla y Cacti), se añaden dos variables más el cultivo (Leucaena), y la vaca. De esta manera podemos simular el agroecosistema lo más parecido al sistema real.

Esquema 6

$$\begin{aligned}
 \frac{dl}{dt} &= \omega l - \kappa l + \phi - g l y - i l x - n v l \\
 \frac{dx}{dt} &= \lambda x - \mu x - \alpha x^2 - i l x - c x y - d x z \\
 \frac{dy}{dt} &= j y l + c x y - \beta y^2 \\
 \frac{dz}{dt} &= k z l + d x z - \gamma z^2 \\
 \frac{dv}{dt} &= o l v + \sigma.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Donde,

Si aumentamos vaca, tendremos los siguientes datos

x - H. Cubana;

y - Ch. Cacti;

z - Chrysoperla sp;

l - Leucaena;

v - Vaca;

ω - tasa finita de incremento de Leucaena;

κ - tasa de mortalidad natural de Leucaena;

g - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Ch. Cacti;

h - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a Chrysoperla sp;

n - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a vaca;

i - porcentaje de pérdida de Leucaena, atribuida a H. Cubana;

j - porcentaje de incremento de Ch. Cacti por ingerir Leucaena;

k - porcentaje de incremento de Chrysoperla sp por ingerir Leucaena;

m - porcentaje de incremento de H. Cubana por ingerir Leucaena;
 o - porcentaje de incremento de vaca por ingerir Leucaena y
 $\alpha, \beta, \gamma, \phi,$ y σ - coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. cubana, Chilocorus Cacti, Chrysoperla sp., Leucaena y vaca respectivamente.

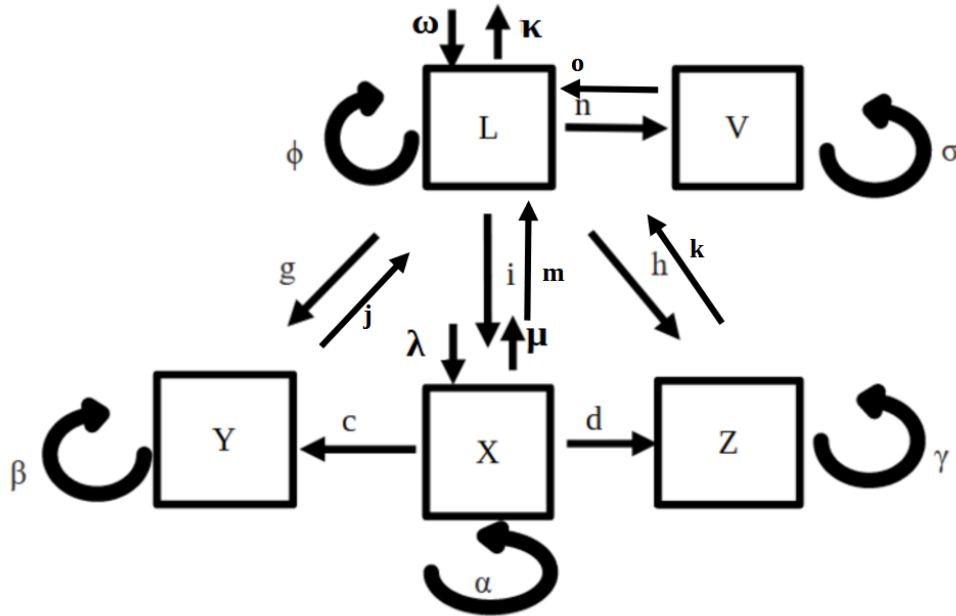


Figura 3.14: Esquema 6. Modelo H. Cubana vs. Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla, Cacti) y la vaca, donde $\alpha, \beta, \gamma, \phi,$ y σ representan el coeficiente de competencia intraespecífica de las poblaciones H. cubana, Chilocorus cacti, Chrysoperla sp., Leucaena y vaca respectivamente.

Con base al sistema de ecuaciones diferenciales (3.10) podemos afirmar que al intervenir más variables, se llega a puntos de equilibrio óptimos, donde pueden subsistir el cultivo (Leucaena), dos depredadores (Cacti y Chrysoperla) de esta manera todo funciona en excelentes condiciones permitiendo que el agroecosistema funcione de la mejor manera, pues ahora interviene la vaca, aumentado la ganancia para los agricultores que lo implementen como un mecanismo de mejora como es originalmente propuesto por [7].

Presentaremos un código del método Runge Kutta en el apéndice B.5, el cual es una generalización del presentado en la sección 3.4, gracias al cual se podrían describir las posibles soluciones tanto de puntos fijos como proyecciones que describan el crecimiento de cada una de las poblaciones, incorporando los respectivos parámetros. Vale la pena explorar los parámetros que se describen en la sección 4.6, toda vez que es consistente la elección de parámetros de las secciones 3.1-3.4 con las secciones 4.1-4.4.

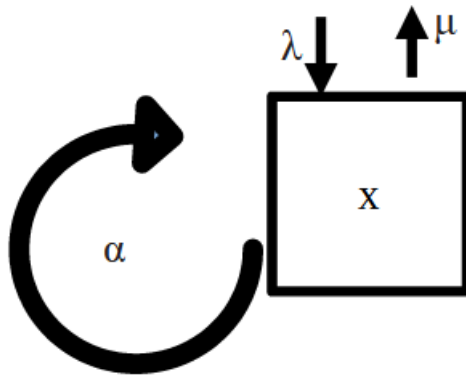
Obtener la información de los diferentes parámetros de este modelo es importante para estabilizar la población, no solo de la plaga y sus dos depredadores, como se observó hasta la sección 3.4, además su interacción con la *Leucaena*, como alimento de las tres especies y con el objetivo de mejorar la alimentación de la vaca como se proponen en [14] y [20].

4. MODELO BASADO EN AGENTES

El modelo propuesto basado en agentes múltiples intenta representar de la manera lo más realista posible, el comportamiento de la presa (H. Cubana) con su alimento la Leucaena. Para esto se implementó un modelo basado en agentes (MBA) con la plataforma NetLogo, en el que se presentan dos agentes conviviendo de forma natural en un agroecosistema, con el objetivo de representar el comportamiento de una presa con sus dos depredadores en un agroecosistema. Para entender esto de la mejor manera, se usaron dos deslizadores para establecer parámetros de interacción y dos tortugas que conviven en un ambiente. Dicho ambiente describe el espacio de interacción de las especies que se mueven aleatoriamente y que al interceptarse crecen o decrecen dependiendo de los parámetros involucrados, además de que cada especie o tortuga crece o decrece en determinado tiempo.

4.1. Modelo H. Cubana

A continuación vemos la creación de dos tipos de agentes: H. Cubana y Leucaena. Se colocan siete deslizadores para controlar el crecimiento del pasto, número de plaga, cultivo (Leucaena), tasa de reproducción de ambos agentes, así como ganancia por comida. Usamos el siguiente esquema, para tomar como base la ecuación diferencial usada en el capítulo anterior.



$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \lambda - \mu.$$

En contraste con la sección 3.1 y 3.2, aquí involucramos la Leucaena debido a que es la fuente de alimento de la H. Cubana y, que satisface un modelo depredador presa.

Una vez que se formuló el problema con las hipótesis de la sección 4.1 se construye el modelo que involucre los parámetros ya descritos en el programa NetLogo, generando el siguiente código aquí solo presentamos la primera parte.

Código de NetLogo interactuando plaga (*H. Cubana*) y cultivo (*Leucaena*)

```

(breed [planta – plant]
breed [buga – bug]
turtles – own [energy]
patches – own [countdown]
to setup
ca
ask patches
[
set pcolor one – of [greenbrown]
ifelse pcolor = green
[set countdown grass – regrowth – time]
[set countdown random grass – regrowth – time]
]
create – bug initial – number – bug
[
set shape “bug”
set color red
set size 1.2
set energy random(2 * H.Cubana – ganancia – por – comida)
setxy random – xcor random – ycor
]

```

El código completo está en el apéndice C.

A continuación se muestra un resultado de este modelo (una corrida del programa), con población inicial *H. Cubana* 20, tasa de reproducción 5 por ciento y ganancia por comida 5, población inicial de *Leucaena* 50, tasa de reproducción 10 por ciento y ganancia por comida (espacio de ramoneo) 20 (ver figura 4.1). Podemos observar que la plaga (*H. Cubana*), así como el cultivo (*Leucaena*) están interactuando en este agroecosistema; sin embargo, de acuerdo a los parámetros de interacción, la *H. Cubana* mantiene bajos niveles de crecimiento, lo que permite que la planta siga creciendo de forma natural.

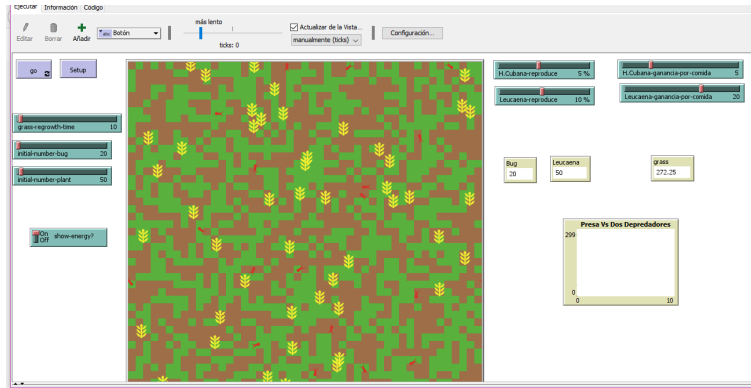


Figura 4.1: Ventana de programa de: H. Cubana vs. Leucaena.

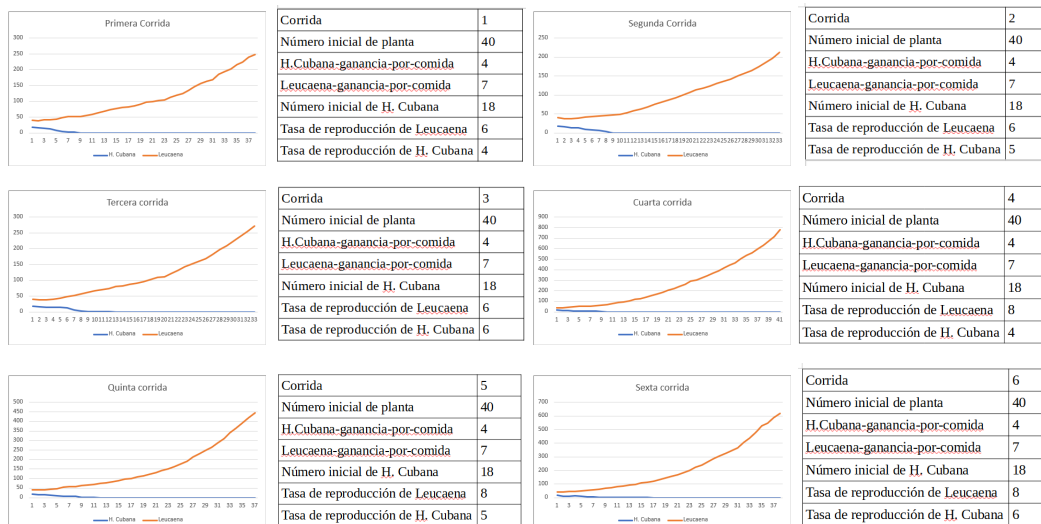


Figura 4.2: Corridas representativas de H. Cubana vs. Leucaena.

Las corridas (ver tablas de la figura 4.2) se obtuvieron usando la herramienta: analizador de comportamiento de NetLogo. Dicha herramienta nos reflejó que hay un cambio de comportamiento si se mueve ligeramente las tasas de reproducción de H. Cubana y Leucaena.

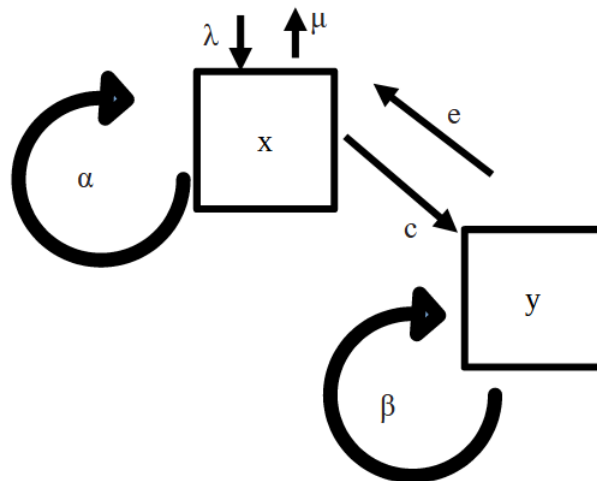
Se insertaron los siguientes parámetros representativos de interacción: número inicial de planta (40), H.Cubana-ganancia-por-comida (4), Leucaena-ganancia-por-comida (7), número inicial de H. Cubana (18), tasa de reproducción de Leucaena (6), tasa de reproducción de H. Cubana (4). Con base a lo anterior se observa que después de cierto tiempo muere la plaga por su tasa de mortandad natural y el cultivo se incrementa de forma exponencial, en la segunda corrida todos los parámetros se mantienen iguales a excepción de la tasa de reproducción H. Cubana que es (5), lo que significa que vivirá más la plaga, de hecho se ve un ligero incremento en la gráfica, lo mismo sucede con la tercera corrida, pues todo se mantiene igual, a excepción del incremento en uno en la tasa de reproducción de H. Cubana (6). Todo

lo anterior indica que si aumentamos la tasa de reproducción de forma progresiva, llegará el momento en que la plaga acabe con el cultivo (Leucaena). Con respecto a las corridas 4, 5 y 6, mantenemos los mismos parámetros de interacción, pero ahora cambiamos la tasa de reproducción de Leucaena a (8), se observa que el cultivo crece rápidamente, y a pesar de que la plaga incrementa su tasa de reproducción de uno en uno hasta llegar a 6, es posible mantener el cultivo.

Gracias a este programa, observamos un modelo de crecimiento logístico, dónde la tasa de reproducción de la H. Cubana, es un gran problema, pues se observa que si la plaga se reproduce rápidamente acabaría con la planta (Leucaena), esa es la razón por la cual es necesario controlar a la H. Cubana de forma natural con un modelo depredador presa.

4.2. Modelo H. Cubana vs. Cacti

Se desarrolló un programa donde se añaden más deslizadores, pues entra en contacto la plaga (H. Cubana) con su depredador (Cacti), a su vez la plaga come a la planta (Leucaena). Nos basamos en el siguiente esquema del capítulo 3.2.



$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \lambda - \mu - exy - cxy$$

$$\frac{dy}{dt} = exy + \beta y.$$

El código completo del programa en NetLogo está en el apéndice C.1.

Podemos observar que al intervenir más variables, (ver figura 4.3) después de cierto tiempo, disminuye de forma radical la H. Cubana, pues es controlada su reproducción por su

depredador Cacti, esto quiere decir que al introducir una variable más al agroecosistema inferimos que el control para la producción de Leucaena es fundamental y necesario, razón por la cual vale la pena incluirlo para optimizar dicho sistema.

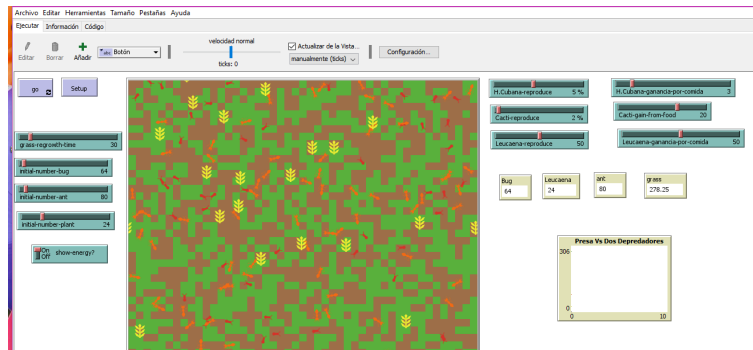


Figura 4.3: Ventana de programa de: H. Cubana vs. Cacti.

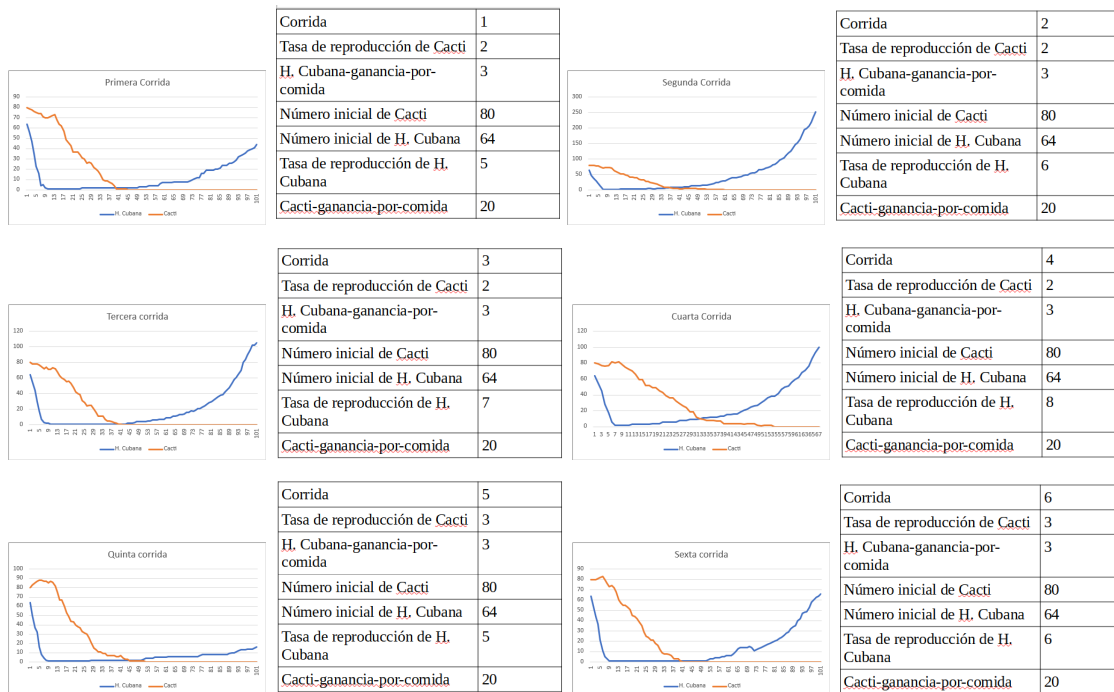


Figura 4.4: Corridas de H. Cubana vs. Cacti

Para inferir lo descrito en el párrafo anterior usamos nuevamente el analizador de comportamiento de NetLogo (ver figura 4.4). Dando como resultado que al mover tasas de reproducción de la H. Cubana y de Cacti se manifiestan cambios en el sistema.

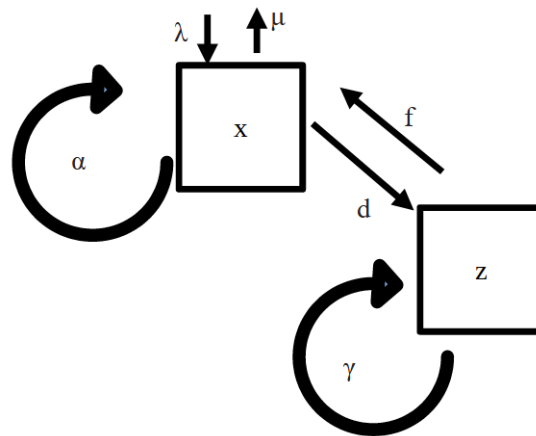
Se usaron los siguientes parámetros de interacción: tasa de reproducción de Cacti (2), H. Cubana-ganancia-por-comida (3), número inicial de Cacti (80), número inicial de H. Cubana (64), tasa de reproducción de H. Cubana (5), y Cacti-ganancia-por-comida (20), con base a

lo anterior se observa que en las cuatro corridas al incrementarse la tasa de reproducción de H. Cubana, de uno en uno, dónde en la segunda es (6), tercera (7) y cuarta (8) el depredador no puede controlar a la H. Cubana. Sin embargo, en la quinta al subir la tasa de Cati a (3) y manteniendo los parámetros iniciales, puede controlar más a la plaga, pero en la sexta se incrementa la tasa de Reproducción de H. Cubana (6) lo que impide que Cacti controle a esta misma.

Tomando como referente cada gráfico, en cada una de las corridas se observa un modelo presa depredador, donde intervienen dos especies, la plaga (H. Cubana) y un depredador Cacti, se observa que este mismo controla a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Cacti para controlar el sistema, pues a medida que van perdiendo energía el depredador, la plaga se incrementa, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida.

4.3. Modelo H. Cubana vs. Chrysoperla

A continuación se desarrolló un programa donde se cambian deslizadores, pues entran en contacto la plaga (H. Cubana) con su depredador (Chrysoperla). Nos basamos en el siguiente esquema de la sección 3.3. A diferencia de la sección anterior la Chrysoperla tiene diferente tasa de reproducción que el depredador Cacti y acorde a [52] la cantidad requerida de Chrysoperla es diferente a la Cacti.



$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \lambda - \mu + f x z - d x z$$

$$\frac{dz}{dt} = f x y + \beta y.$$

El código completo del programa de NetLogo está en el apéndice C.2.

Nos muestra que al intervenir más variables, después de cierto tiempo (ver figura 4.5), disminuye de forma radical la H. Cubana, pues es controlada la cantidad de plaga con su depredador Chrysoperla, esto quiere decir que al introducir una variable más al agroecosistema inferimos que el control para la reproducción de Leucaena es fundamental y necesaria, razón por la cual vale la pena incluirlo para optimizar dicho sistema.

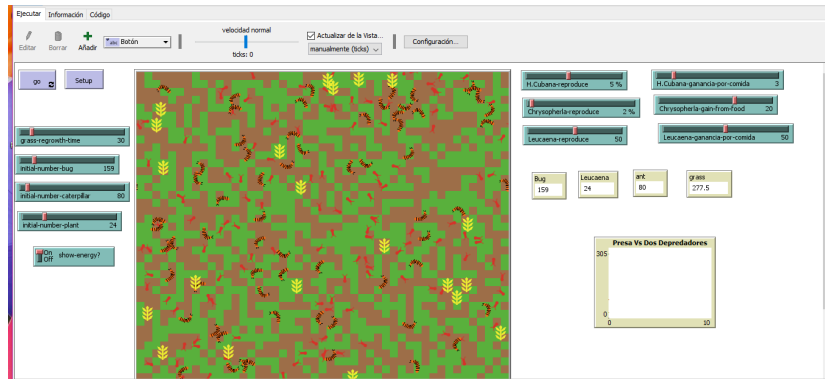


Figura 4.5: Ventana de programa de: H. Cubana vs. Chrysoperla.

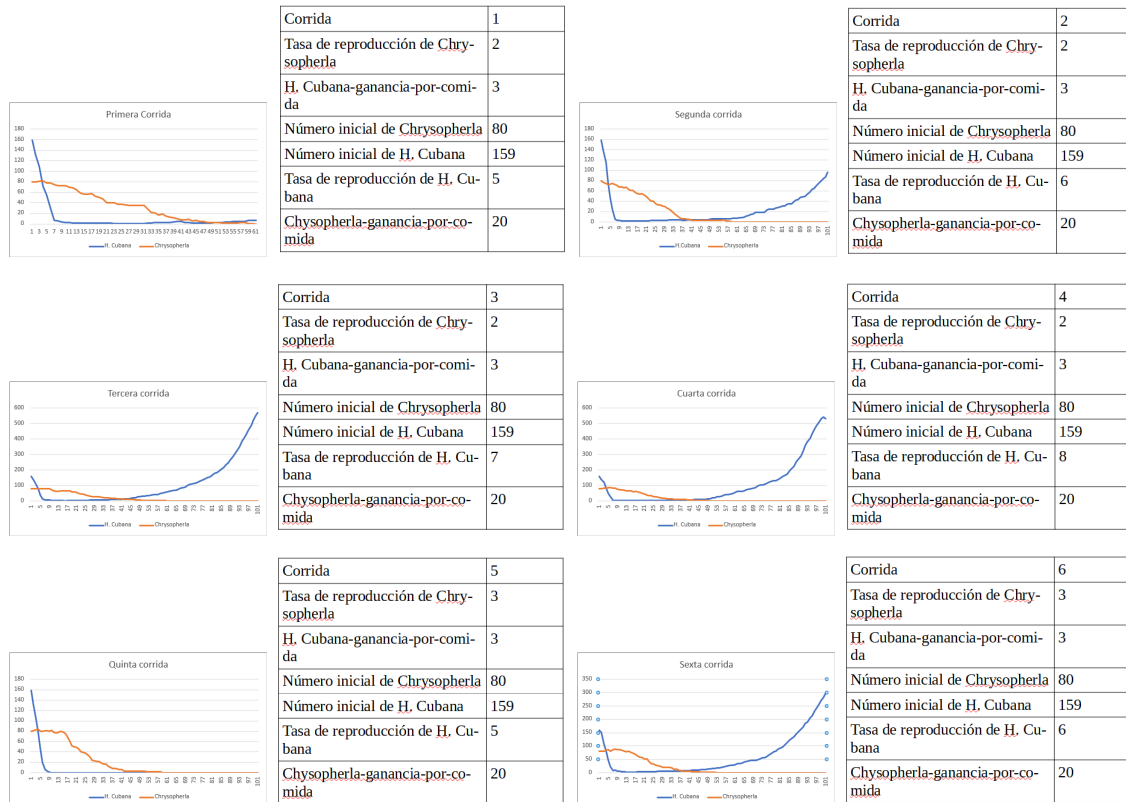


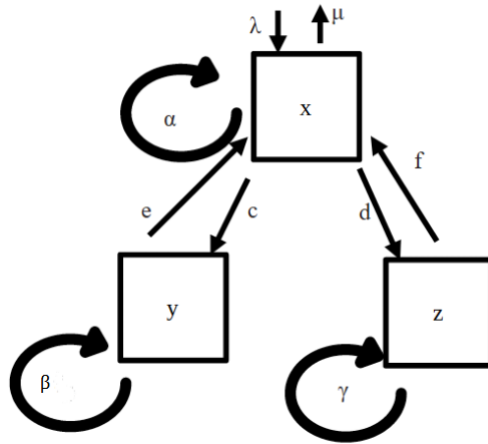
Figura 4.6: Corridas de H. Cubana vs. Chrysoperla.

Nuevamente, las corridas (ver figura 4.6), se obtuvieron usando el analizador de comportamiento de NetLogo, donde se insertaron los siguientes parámetros representativos de interacción: tasa de reproducción de *Chrysoperla* (2), *H. Cubana*-ganancia-por-comida (3), número inicial de *Chrysoperla* (80), número inicial de *H. Cubana* (159), tasa de reproducción de *H. Cubana* (5) y *Chrysoperla*-ganancia-por-comida (20). En la primera corrida observamos que el depredador tiene un incremento exponencial y después de cierto tiempo empieza a decaer su población, donde después de un tiempo se empareja con la plaga, esto quiere decir que controla a la plaga, sin embargo, en la segunda, tercera y cuarta la tasa de reproducción se incrementa de uno en uno hasta llegar a (8), esto hace que el depredador muera antes, incrementando así su población la *H. Cubana*, pero en la quinta corrida, la tasa de reproducción de *Chrysoperla* cambia a (3), a su vez la tasa de reproducción de *H. Cubana* se regresa a su valor inicial (5) lo que permite controlar a la plaga sin mayor problema, pero en la corrida 6, todo se mantiene igual que el caso anterior, pero la tasa de *H. Cubana* cambia a (6), y de nueva cuenta crece la población de la plaga.

De este modo, notamos que en cada una de las corridas se observa un modelo presa depredador, donde intervienen dos especies la plaga (*H. Cubana*), y un depredador *Chrysoperla*, semejante al obtenido en la sección anterior. Por ello, nuevamente se observa que el depredador controla a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de *H. Cubana* y aumentar la de *Chrysoperla* para controlar el sistema, pues a medida que va perdiendo energía el depredador sube de nuevo la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida.

4.4. Modelo *H. Cubana* vs. *Chrysoperla* y Cacti

En esta sección se añaden más deslizadores, pues entra en contacto la plaga (*H. Cubana*) y sus dos depredadores (Cacti y *Chrysoperla*). Nos basamos en el siguiente esquema de la sección 3.4. Ahora se muestra un resultado de este modelo (una corrida del programa), con población inicial *H. Cubana* 20, tasa de reproducción 5 por ciento y ganancia por comida 5, población inicial de *Leucaena* 50, tasa de reproducción 10 por ciento y ganancia por comida (espacio de ramoneo) 20, con población inicial Cacti 80, tasa de reproducción 2 por ciento y ganancia por comida 20, población inicial de *Chrysoperla* 80, tasa de reproducción 6 por ciento y ganancia por comida 20 (Ver Figura 4.7). Podemos observar que la plaga (*H. Cubana*), así como el cultivo (*Leucaena*) están interactuando en este agroecosistema con Cacti y *Chrysoperla*; sin embargo, de acuerdo a los parámetros de interacción, la *H. Cubana*, mantiene bajos niveles de crecimiento, lo que permite que la planta siga creciendo de forma natural.



$$\frac{dx}{dt} = (\alpha x - \lambda x)x - cxy - dxz - \alpha x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = exy - \beta y^2$$

$$\frac{dz}{dt} = fxz - \gamma y^2.$$

El código completo del Programa de NetLogo está en el apéndice C.3.

Al intervenir más variables, (ver figura 4.7) después de cierto tiempo, disminuye la plaga la H. Cubana controlándola con sus dos depredadores (Chrysoperla, y Cacti), esto quiere que el cultivo (leucaena), puede ser preservado de forma natural con los parámetros de interacción del agroecosistema, cabe mencionar que en este modelo la plaga come mucho cultivo y tiene una tasa de reproducción y de mortandad bastante alta, razón por la cual se debe incluir una variable más (Leucaena).

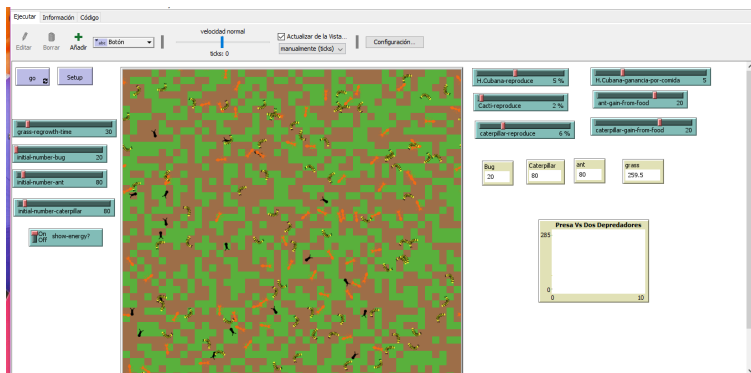


Figura 4.7: Ventana de programa de: H. Cubana vs. Cacti y Chrysoperla.

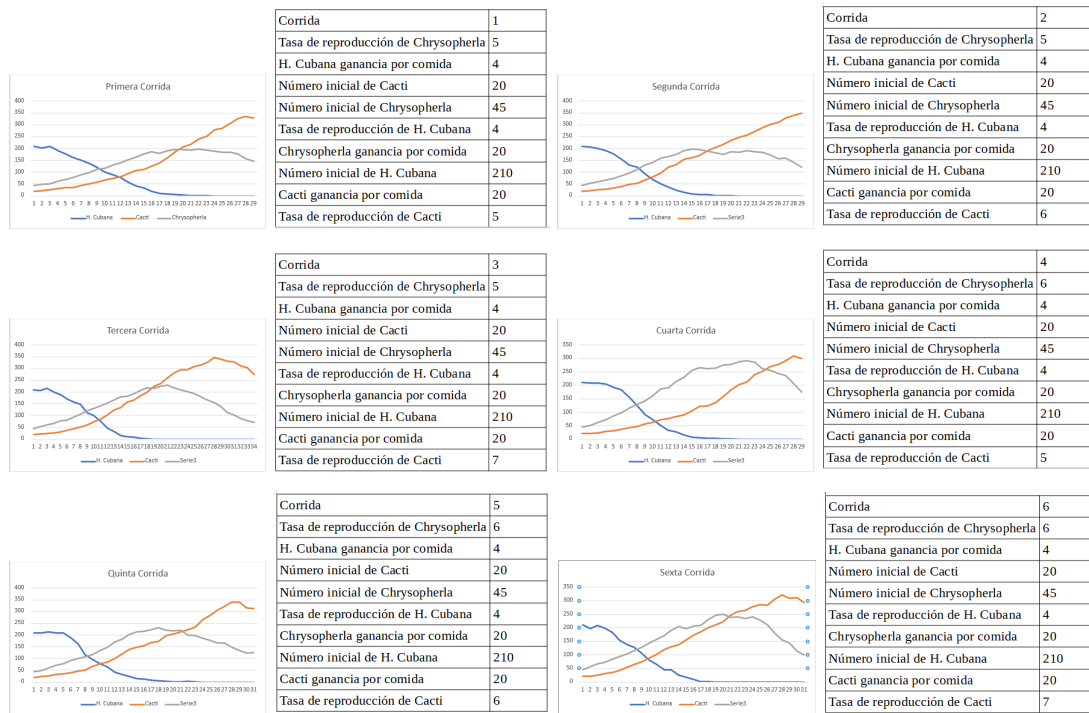


Figura 4.8: Corridas de H. Cubana vs. Cacti y Chrysoperla.

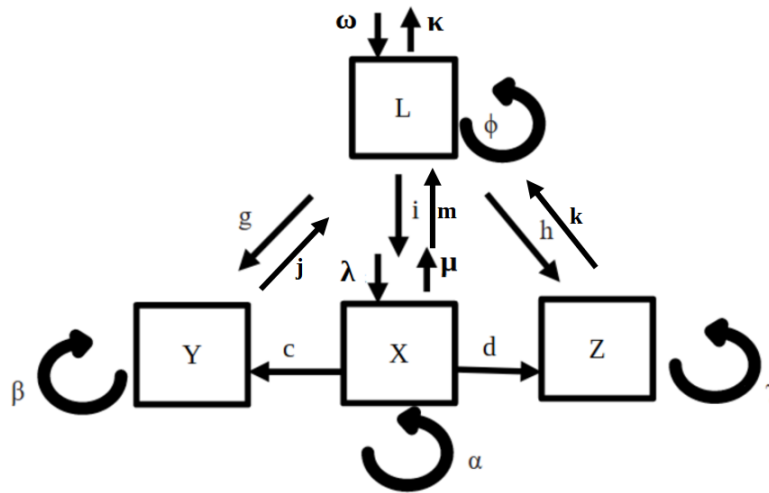
Con los parámetros significativos del analizador de comportamiento (ver figura 4.8), de NetLogo, y usando: tasa de reproducción de Chrysoperla (5), H. Cubana-ganancia-por-comida (4), número inicial de Cacti (20), número inicial de Chrysoperla (45), tasa de reproducción de H. Cubana (4), Chrysoperla ganancia por comida (20), número inicial de H. Cubana (210), Cacti-ganancia-por-comida (20) y tasa de reproducción de Cacti (5), podemos observar que en todas las gráficas se controla a la plaga mediante los dos depredadores, pues lo que se hizo fue fijar el parámetro de la tasa de reproducción de H. Cubana, es decir se mantuvo constante, solo se incrementa la tasa de reproducción de los depredadores, por ejemplo en la gráfica tanto Cacti como Chrysoperla tienen la misma tasa, a pesar de eso sube más la población de Cacti, después en la segunda gráfica y tercera gráfica se incrementó un valor más en este último, eso denota un incremento poblacional. En la cuarta corrida aumenta la tasa de reproducción de Chrysoperla (6), y Cacti sigue con su parámetro inicial (5), en la quinta se mantiene la Chrysoperla y Cacti (6) y en la sexta Chrysoperla (6) y Cacti (7). Con base a lo anterior podemos inferir que lo mejor es mantener parámetros bajos de reproducción de H. Cubana, y solo ajustar las tasas de reproducción, así como la ganancia por consumo de presa de los depredadores con la finalidad de estabilizar el agroecosistema.

En cada una de las corridas se observa un modelo presa dos depredadores, donde intervienen tres especies la plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), se observa que estos dos controlan a la presa, pues a medida que van perdiendo energía los depredadores, vuelve a subir la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después

de cierto tiempo muere la plaga y los depredadores.

4.5. Modelo H. Cubana y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti) alimentados con Leucaena

Se añaden más deslizadores, pues entran en contacto la plaga (H. Cubana) y sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), a su vez la plaga come a la planta (Leucaena). Nos basamos en el siguiente esquema de la sección 3.5.



$$\frac{dl}{dt} = \omega l - \kappa l - gly - hlz - ilx + \phi l$$

$$\frac{dx}{dt} = mlx - \alpha x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = jly + cxy - \beta y^2$$

$$\frac{dz}{dt} = klz + dxz - \gamma z^2.$$

Presentamos una corrida del programa de NetLogo para esta modelación, muy semejante al de la sección anterior, pero este nuevo incorporará la interacción de las tres especies con la Leucaena. Observamos (ver figura 4.9) que al intervenir más variables, después de cierto tiempo, disminuye la plaga, controlándola con sus dos depredadores (Chrysoperla, y Cacti), esto quiere decir que si no controlamos el crecimiento de la H. Cubana se puede volver una amenaza para el agroecosistema.

El código completo del programa de NetLogo se puede visualizar en el apéndice C.4.

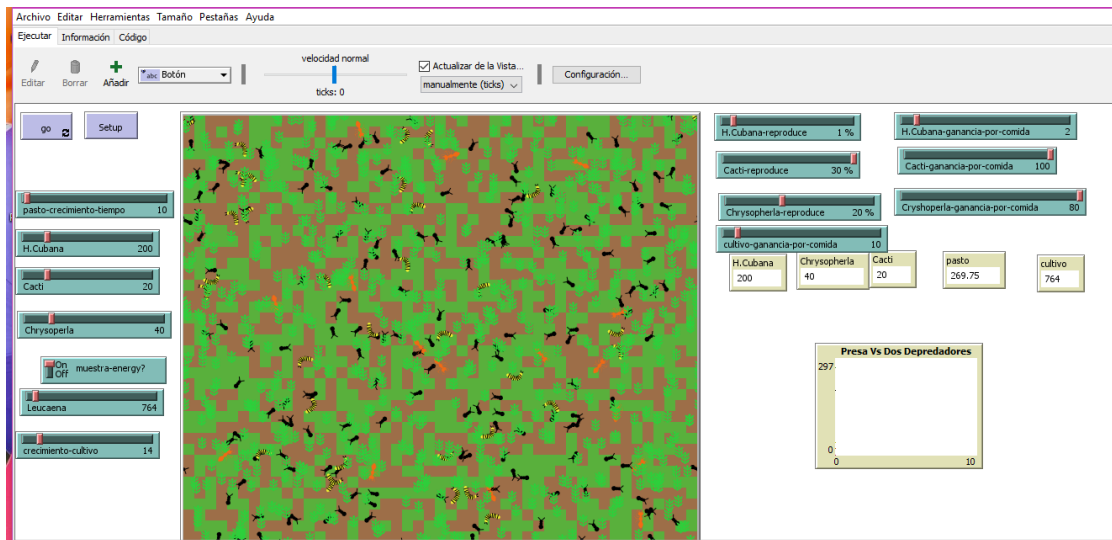


Figura 4.9: Ventana de programa de: H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla).

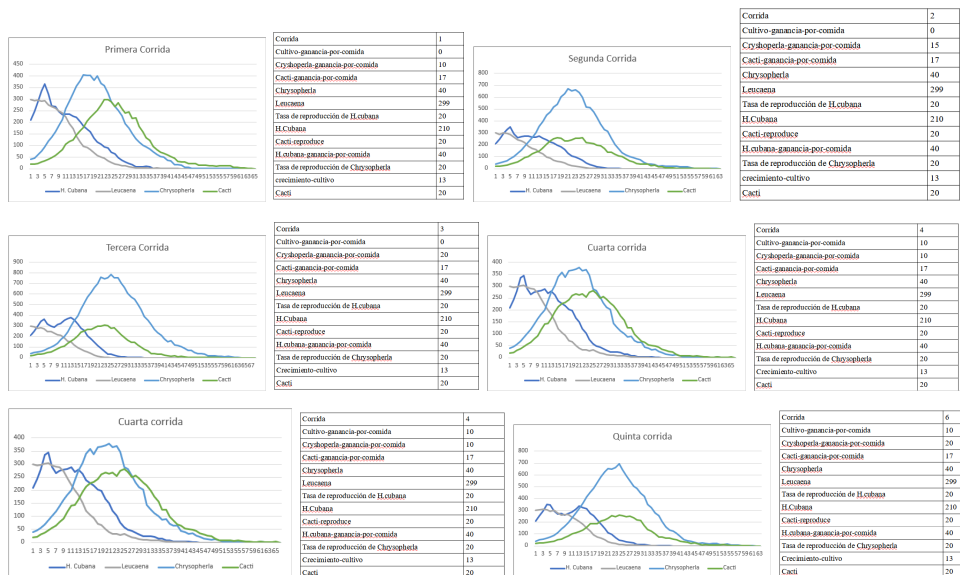


Figura 4.10: Corridas de H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla).

Nuevamente, presentamos algunas corridas (se puede ver en la figura 4.10), en este caso con los siguientes parámetros significativos de interacción: cultivo-ganancia-por-comida (0), Crysopterla-ganancia-por-comida (10), Cacti-ganancia-por-comida (17), Chrysoperla (40), Leucaena (299), tasa de reproducción de H. Cubana (20), H. Cubana (210), Cacti-reproduce (20), H. Cubana-ganancia-por-comida (40), tasa de reproducción de Chrysoperla (20), Crecimiento-cultivo (13) y Cacti (20), podemos observar como, en la primera y cuarta gráfica se mantiene

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \omega l - \kappa l + \phi - g l y - i l x - n v l \\ \frac{dx}{dt} &= \lambda x - \mu x + \alpha x - i l x - c x y - d x z \\ \frac{dy}{dt} &= j y l + c x y - \beta y^2 \\ \frac{dz}{dt} &= k z l + d x z - \gamma z^2 \\ \frac{dv}{dt} &= o l v + \sigma. \end{aligned}$$

Ahora se muestra un resultado de este modelo (una corrida del programa), con población inicial H. Cubana 204, tasa de reproducción 10 por ciento y ganancia por comida 10, población inicial de Leucaena 240, tasa de reproducción 10 por ciento y ganancia por comida (espacio de ramoneo) 20, con población inicial Cacti 19, tasa de reproducción 27 por ciento y ganancia por comida 34, población inicial de Chrysoperla 39, tasa de reproducción 34 por ciento y ganancia por comida 20, por último la población inicial de 35 vacas que son alimentadas con Leucaena, tasa de reproducción 10 por ciento, y ganancia por alimento de Leucaena 30 (ver figura 4.11).

El código completo de este programa en NetLogo está en el apéndice C.5.

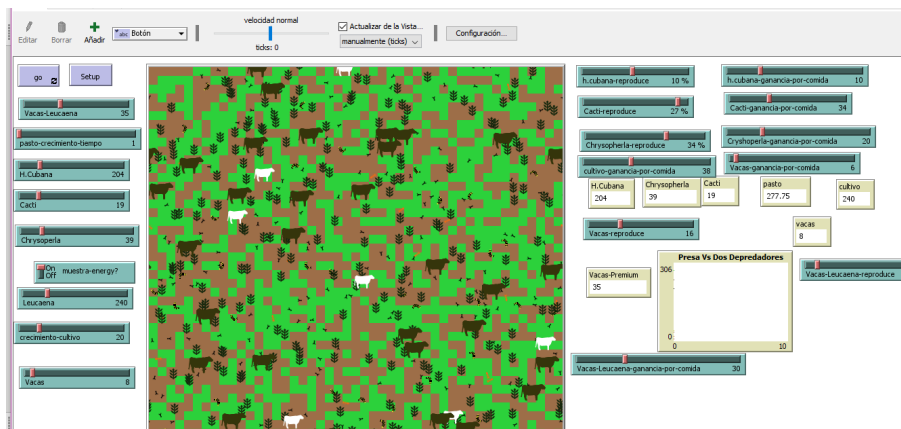


Figura 4.11: Ventana de programa de: H. Cubana, Leucaena, sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), así como la vaca.

Al intervenir más variables, después de cierto tiempo, disminuye la plaga H. Cubana, disminuyendo su población gracias a los dos depredadores (Chrysoperla, y Cacti). También involucra el crecimiento del cultivo y las vacas, de esta manera tenemos al agroecosistema más completo. Cabe recordar que la producción de leche aumentará debido al control de todas las demás variables [7], y todo ello se verá reflejado en la economía del país, pues de esta

manera se tendrá un sistema inteligente que será en beneficio de la población involucrada.

Con el analizador de comportamiento de NetLogo, (ver figura 4.12) donde se insertaron los siguientes parámetros de interacción: Cultivo-ganancia-por-comida (0), Crysoperla-ganancia-por-comida (10), Cacti-ganancia-por-comida (17), Chrysoperla (40), Leucaena (299), tasa de reproducción de H. Cubana (20), H. Cubana (210), Cacti-reproduce (20), tasa de reproducción de vacas Leucaena (17), H. Cubana-ganancia-por-comida (40), tasa de reproducción de Chrysoperla (20), número inicial de Vacas-Leucaena (11), crecimiento-cultivo (13) y Cacti (20), Vacas-Leucaena-ganancia-por-comida (11). Con todos estos parámetros representativos del analizador de comportamiento, podemos observar cómo en la primera y cuarta gráfica se mantiene casi igual el crecimiento de la Chrysoperla al igual que el de Cacti; sin embargo, cabe mencionar que se ve un poco elevado debido a su tasa de reproducción, así como ganancia por comer plaga, la segunda, quinta y sexta casi son iguales por el mismo hecho, pero con un crecimiento exponencial considerable con respecto a las anteriores gráficas, pero la tercera gráfica es la que tiene un crecimiento mayor de las cinco variables (Cacti, Chrysoperla, H. Cubana, Vaca y Leucaena) aquí expuestas.

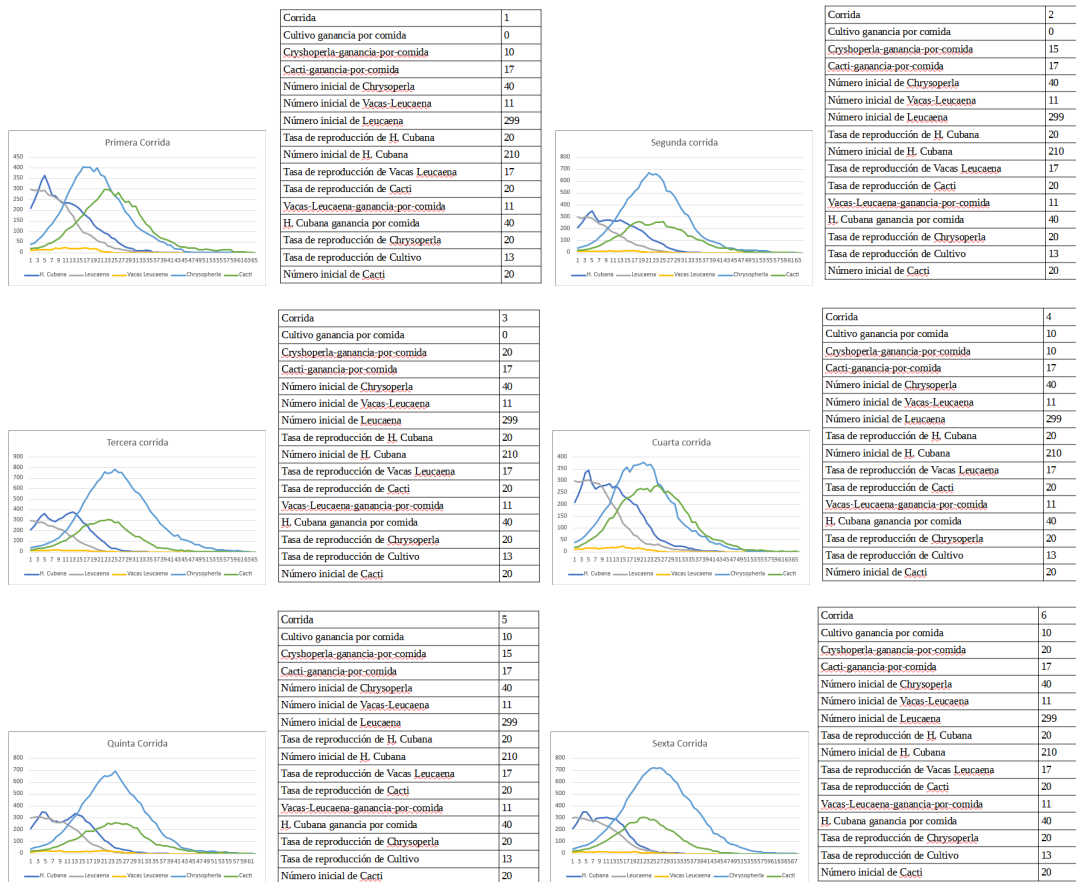


Figura 4.12: Corridas de H. Cubana, Leucaena, sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), así como la vaca.

Ahora, en cada una de las corridas se observa un modelo presa dos depredadores, dónde intervienen tres especies la plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), se observa que estos dos controlan a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Cacti y Chrysoperla para controlar el sistema, pues a medida que va perdiendo energía el depredador vuelve a subir la cantidad de población de la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida. Cabe mencionar que al tener dos agentes que representen a las especies, el cultivo y la vaca, tenemos un agroecosistema mucho más acorde al real, sobre todo enfocado a describir el crecimiento óptimo de poblaciones tanto del cultivo como de la vaca, por [7] se tendrán ganancias significativas, sin la necesidad de altos costos de producción, y sobre todo sin suplementos dietéticos o plaguicidas que dañan la tierra y contaminan el agua, así como al cultivo y todo lo que lo rodea.

5. RESULTADOS

Se presenta un modelo depredador presa, en el que se añaden más variables tanto en ecuaciones diferenciales como multiagentes o modelo basado en agentes.

A continuación se muestran los resultados de los 6 casos expuestos en el presente trabajo.

Interactuando plaga (H. Cubana) y cultivo (Leucaena)

El resultado principal obtenido en la sección 4.1, usando NetLogo, encontramos las corridas representativas, pues se insertaron los siguientes parámetros de interacción: número inicial de planta (40), H. Cubana-ganancia-por-comida (4), Leucaena-ganancia-por-comida (7), número inicial de H. Cubana (18), tasa de reproducción de Leucaena (6), tasa de reproducción de H. Cubana (4), con base a lo anterior se observa que después de cierto tiempo muere la plaga por su tasa de mortandad natural y el cultivo se incrementa de forma exponencial, en la segunda corrida todos los parámetros se mantienen iguales a excepción de la tasa de reproducción H. Cubana que es (5), lo que significa que vivirá más la plaga, de hecho se ve un ligero incremento en la gráfica, lo mismo sucede con la tercera corrida, pues todo se mantiene igual excepto el incremento de uno de H. Cubana (6). Todo lo anterior indica que si aumentamos la tasa de reproducción de forma progresiva, llegará el momento en que la plaga acabe con el cultivo (Leucaena). Con respecto a las corridas 4, 5 y 6, mantenemos los mismos parámetros de control, pero ahora cambiamos la tasa de reproducción de Leucaena a (8), se observa que el cultivo crece rápidamente, y a pesar de que la plaga incrementa su tasa de reproducción de uno en uno hasta llegar a 6, es posible mantener el cultivo.

De acuerdo a lo anterior, en cada una de las corridas se observa un modelo de crecimiento logístico, donde la tasa de reproducción de la H. Cubana, es un gran problema, pues se observa que si la plaga se reproduce rápidamente acabaría con la planta (Leucaena), esa es la razón por la cual es necesario controlar a la H. Cubana de forma natural con un modelo presa depredador.

Interactuando plaga (H. Cubana) con su depredador (Cacti)

Recordando el resultado obtenido en la sección 4.2, donde se usó la herramienta: Analizador de Comportamiento de NetLogo, a través de la cual se obtuvieron las corridas; se insertaron los siguientes parámetros de interacción: tasa de reproducción de Cacti (2), H. Cubana-ganancia-por-comida (3), número inicial de Cacti (80), número inicial de H. Cubana (64), tasa de reproducción de H. Cubana (5), y Cacti-ganancia-por-comida (20), con base a lo anterior se observa que en las cuatro corridas al incrementarse la tasa de reproducción de H. Cubana, de uno en uno, donde en la segunda es (6), tercera (7) y cuarta (8) el depredador no puede controlar a la H. Cubana, sin embargo, en la quinta al subir la tasa de Cati a (3)

y manteniendo los parámetros iniciales, puede controlar más a la plaga, pero en la sexta se incrementa la tasa de reproducción de H. Cubana (6) lo que impide que Cacti controle a esta misma.

Se muestra un modelo presa depredador, dónde intervienen dos especies la plaga (H. Cubana), y un depredador Cacti, este mismo controla a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Cacti para controlar el sistema, pues a medida que van perdiendo energía el depredador la plaga se incrementa, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida.

Interactuando plaga (H. Cubana) con su depredador (Chrysoperla)

Con base a las secciones 3.3 y 4.3, donde se usó el modelo depredador presa y la herramienta: Analizador de Comportamiento de Net Logo, a través de la cual se obtuvieron las corridas representativas; se insertaron los siguientes parámetros de interacción: tasa de reproducción de Chrysoperla (2), H. Cubana-ganancia-por-comida (3), número inicial de Chrysoperla (80), número inicial de H. Cubana (159), tasa de reproducción de H. Cubana (5) y Chrysoperla-ganancia-por-comida (20), en la primera corrida observamos que el depredador tiene un incremento exponencial y después de cierto tiempo empieza a decaer su población, dónde después de un tiempo se empareja con la plaga, esto quiere decir que controla a la plaga, si embargo en la segunda, tercera y cuarta observamos que la tasa de reproducción se incrementa de uno en uno hasta llegar a (8), esto hace que el depredador muera antes, incrementando así su población la H. Cubana, pero en la quinta corrida vemos un cambio, pues la tasa de reproducción de Chrysoperla cambia a (3), a su vez la tasa de reproducción de H. Cubana se regresa a su valor inicial (5) lo que permite controlar a la plaga sin mayor problema, pero en la corrida 6, todo se mantiene igual que el caso anterior, pero la tasa de H. Cubana cambia a (6), y de nueva cuenta crece la población de la plaga.

Observamos un modelo depredador presa, dónde intervienen dos especies la plaga (H. Cubana), y un depredador Chrysoperla, se observa que éste mismo controla a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Chrysoperla para controlar el sistema, pues a medida que van perdiendo energía el depredador sube de nuevo la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida.

Interactuando plaga (H. Cubana) con sus dos depredadores (Cacti y Chrysoperla)

Al usar la herramienta de NetLogo, se obtuvieron las corridas representativas; donde se insertaron los siguientes parámetros de interacción: tasa de reproducción de Chrysoperla (5), H. Cubana ganancia por comida (4), número inicial de Cacti (20), número inicial de Chrysoperla (45), tasa de reproducción de H. Cubana (4), Chrysoperla ganancia por comida (20), número inicial de H. Cubana (210), Cacti ganancia por comida (20) y tasa de reproducción

de Cacti (5), podemos observar que en todas las gráficas se controla a la Plaga mediante los dos depredadores, pues lo que se hizo fue fijar el parámetro de la tasa de reproducción de H. Cubana, es decir mantenerlo constante, solo se incrementa la tasa de Reproducción de los depredadores, por ejemplo en la gráfica tanto Cacti, como Chrysoperla tienen la misma tasa, a pesar de eso sube más la población de Cacti, después en la segunda gráfica y tercera gráfica se incrementa un valor más en este último, eso denota un incremento poblacional. En la cuarta corrida aumenta la tasa de reproducción de Chrysoperla (6), y Cacti sigue con su parámetro inicial(5), en la quinta se mantiene la Chrysoperla y Cacti (6) y en la sexta Chrysoperla (6) y Cacti (7). Con base a lo anterior podemos inferir que lo mejor es mantener parámetros bajos de reproducción de H. Cubana, y solo ajustar las tasas de reproducción, así como la ganancia por consumo de presa de los depredadores con la finalidad de estabilizar el agroecosistema.

En cada una de las corridas se nota un modelo presa dos depredadores, donde intervienen tres especies la plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), se observa que estos dos controlan a la presa, pues a medida que van perdiendo energía los depredadores, vuelve a subir la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y los depredadores.

Interactuando plaga H. Cubana vs. Leucaena y sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti)

Obtuvimos las corridas representativas, pues se insertaron los siguientes parámetros de interacción: Cultivo-ganancia-por-comida (0), Chrysoperla-ganancia-por-comida (10), Cacti-ganancia-por-comida (17), Chrysoperla (40), Leucaena (299), tasa de reproducción de H.cubana (20), H.Cubana (210), Cacti-reproduce (20), H.cubana-ganancia-por-comida (40), tasa de reproducción de Chrysoperla (20), crecimiento-cultivo (13) y Cacti (20), podemos observar como en la primera y cuarta gráfica se mantiene casi igual el crecimiento de la Chrysoperla al igual que el de Cacti; sin embargo, cabe mencionar que se ve un poco elevado debido a su tasa de reproducción, así como ganancia por comer plaga, la segunda quinta y sexta casi son iguales por el mismo hecho, pero con un crecimiento exponencial considerable con respecto a las anteriores gráficas, pero la tercera gráfica es la que tiene un crecimiento mayor de las cuatro variables (Cacti, Chrysoperla, H. Cubana y Leucaena) aquí expuestas.

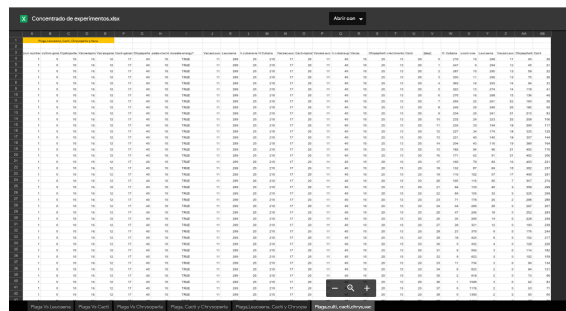
Usamos un modelo presa dos depredadores, donde intervienen tres especies la plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), se observa que estos dos controlan a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Cacti y Chrysoperla para controlar el sistema, pues a medida que van perdiendo energía el depredador vuelve a subir la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida. Cabe mencionar que al controlar al cultivo, podemos tener un agroecosistema mucho más real, pues de esta manera se obtiene una simulación sin altos costos.

Interactuando plaga H. Cubana vs. Leucaena, sus dos depredadores (Chrysoperla y Cacti) y la vaca

De acuerdo al resultado obtenido en la sección 4.6, obtuvimos las corridas representativas; se insertaron los siguientes parámetros de interacción: Cultivo-ganancia-por-comida (0), Chrysoperla-ganancia-por-comida (10), Cacti-ganancia-por-comida (17), Chrysoperla (40), Leucaena (299), tasa de reproducción de H. Cubana (20), H. Cubana (210), Cacti-reproduce (20), tasa de reproducción de vacas Leucaena (17), H. Cubana-ganancia-por-comida (40), tasa de reproducción de Chrysoperla (20), número inicial de Vacas-Leucaena (11), Crecimiento-cultivo (13) y Cacti (20), Vacas-Leucaena-ganancia-por-comida (11) podemos observar como en la primera y cuarta gráfica se mantiene casi igual el crecimiento de la Chrysoperla al igual que el de Cacti; sin embargo, cabe mencionar que se ve un poco elevado debido a su tasa de reproducción, así como ganancia por comer plaga, la segunda quinta y sexta casi son iguales por el mismo hecho, pero con un crecimiento exponencial considerable con respecto a las anteriores gráficas, pero la tercera gráfica es la que tiene un crecimiento mayor de las cinco variables (Cacti, Chrysoperla, H. Cubana, Vaca y Leucaena) aquí expuestas.

Podemos observar un modelo presa dos depredadores, dónde intervienen tres especies la plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), se observa que estos dos controlan a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Cacti y Chrysoperla para controlar el sistema, pues a medida que van perdiendo energía el depredador vuelve a subir la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida. Cabe mencionar que al tener dos agentes más como lo son: el cultivo y la vaca, tenemos un agroecosistema mucho más real, sobre todo productivo, pues se tendrán ganancias significativas, sin la necesidad de altos costos de producción, y sobre todo sin suplementos dietéticos o plaguicidas que dañan la tierra y contaminan el agua, así como al cultivo y todo lo que los rodea.

Concentrado de resultados[8] (ver figura 5.1)



The image shows a screenshot of a data table from a NetLogo simulation. The table has a header row with columns for 'Time', 'Cultivo', 'Vaca', 'Leucaena', 'H. Cubana', 'Chrysoperla', and 'Cacti'. The data rows show the values of these variables over time, with the 'Time' column increasing from 0 to 1000. The 'Cultivo' column shows a steady increase from 0 to 1000. The 'Vaca' column shows a steady increase from 0 to 1000. The 'Leucaena' column shows a steady increase from 0 to 1000. The 'H. Cubana' column shows a steady increase from 0 to 1000. The 'Chrysoperla' column shows a steady increase from 0 to 1000. The 'Cacti' column shows a steady increase from 0 to 1000.

Figura 5.1: Concentrado de datos usando NetLogo

6. CONCLUSIONES

A través del tiempo se ha visto la necesidad de mantener un equilibrio ecológico en nuestro planeta, sin la necesidad de recurrir a sustancias químicas (pesticidas) que dañan en general al medio ambiente, pues ha provocado la degradación de muchos ecosistemas, razón por la cual es muy importante desarrollar herramientas (ecuaciones diferenciales, modelos basados en agentes, entre otros) que puedan controlar de forma eficaz los agroecosistemas.

Con base a lo anterior, el presente trabajo inició con un modelo de ecuaciones diferenciales presentado por N., Mercedes y M. [9], el cual nos mostró la problemática inicial del agroecosistema (una plaga y dos depredadores) estudiado en Cuba. Dónde surgió la necesidad de establecer mecanismos eficientes de control de plaga de forma natural, sin la necesidad de degradar el agroecosistema, pues lo principal es que subsistan todos los elementos que forman parte de este mismo, sin necesidad de llegar a la extinción de ninguna de las especies.

Después de hacer la estimación numérica de parámetros o puntos de equilibrio nos dio pauta para utilizar un modelo basado en agentes. Para esto último, se utilizó un software especializado (NetLogo) que emulo el agroecosistema, y permitió hacer un análisis minucioso, ahora, podemos afirmar que existen varias similitudes del modelo que se hizo con ecuaciones diferenciales, así como de modelo basado en agentes, pues de hecho se encontraron varios datos que demuestran lo antes mencionado.

Dadas las características del modelo se considera atender otras variables, como la población del cultivo (*Leucena*) y vacas, de hecho, son parte fundamental del agroecosistema, así como la pieza clave del modelo antes mencionado. Es importante mencionar que el cultivo es el alimento principal de la vaca, pues gracias a él se tendrá una mayor producción de leche de calidad, sin recurrir a suplementos dietéticos, con lo anterior las ganancias serán superiores en un treinta por ciento aproximadamente con respecto a años anteriores, por esa razón surge la necesidad del control eficiente del agroecosistema

Haciendo uso de los modelos basados en agentes, fue posible obtener consistencia del modelo de ecuaciones diferenciales presentado por N., Mercedes y M. [9], pues el modelo basado en agentes nos refleja los parámetros a considerar en dicho modelo con la intención de encontrar trayectorias de equilibrio o cíclicas. Esto nos permite encontrar parámetros para las ecuaciones diferenciales descritas en la sección correspondiente (Capítulo: Modelo con ecuaciones diferenciales).

En resumen, se pretende dejar antecedentes de control biológico de plagas, haciendo uso de herramientas; tales como ecuaciones diferenciales, y modelo basado en agentes, que sean capaces de resolver problemáticas de dicho contexto, con el fin de poder implementarlo en

políticas públicas.

Además de encontrar una gran relación entre el modelo de ecuaciones diferenciales y la modelación basada en agentes, podemos concluir que: la plaga (H. Cubana), así como el cultivo (Leucaena) están interactuando en un agroecosistema; sin embargo, de acuerdo a los parámetros de interacción, H. Cubana mantiene bajos niveles de crecimiento, lo que permite que la planta siga creciendo de forma natural. Además, todo lo anterior indica que si aumentamos la tasa de reproducción de forma progresiva, llegará el momento en que la plaga acabe con el cultivo (Leucaena), lo podemos controlar, pues al intervenir más variables, después de cierto tiempo, disminuye de forma radical la H. Cubana controlándola con su depredador Cacti, esto quiere decir que al introducir una variable más al agroecosistema podemos controlar la producción de Leucaena, esto es fundamental y necesario, razón por la cual vale la pena incluirlo para optimizar dicho sistema. Al tomar como referente cada gráfico en cada una de las corridas se observa un modelo presa depredador, dónde intervienen dos especies la plaga (H. Cubana), y un depredador Cacti, se observa que este mismo controla a la presa; sin embargo, es necesario disminuir la tasa de reproducción de H. Cubana y aumentar la de Cacti para controlar el sistema, pues a medida que van perdiendo energía el depredador la plaga se incrementa, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, pues después de cierto tiempo muere la plaga y sigue el depredador con su ciclo de vida. Cabe mencionar, que al introducir más opciones como, la vaca, en cada una de las corridas se observa un modelo presa dos depredadores, dónde intervienen tres especies la plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla), estos dos controlan a la presa, pues a medida que van perdiendo energía los depredadores, vuelve a subir la plaga, eso significa un gran problema, pero se torna periódico, después de cierto tiempo, pues muere la plaga y los depredadores.

Al hacer un comparativo de las ecuaciones diferenciales halladas en el artículo de N., Mercedes y M. [9] con el modelo basado en agentes o multi agentes usado en el presente trabajo, podemos observar varias similitudes, pues de acuerdo al modelo depredador presa, vemos que la población H. Cubana (plaga), disminuye al presentarse uno o dos depredadores (Cacti ó Chrysoperla); es decir cumple con las condiciones establecidas de dicho modelo, así como del modelo depredador presa, dónde una especie disminuye o se incrementa, con respecto al tiempo después de haber interactuado en un ambiente establecido, razón por la cual, notamos la consistencia con la recreación del agroecosistema con modelos basados en agentes, pues establecemos los parámetros significativos que se desprenden del analizador de comportamiento para la interacción de las especies (agentes involucrados en este modelo).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. G. R. Blanchard Paul Devaney Robert L., *Ecuaciones Diferenciales*. International Thomson Editores, 1999.
- [2] E. C. H. Penney David E., *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Computo y Modelado*. Editorial Pearson, 2009.
- [3] P. Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, ép. Text in Applied Mathematics. Springer, 2000.
- [4] P. R. y. R.-B. A. Arrieta J. Ferreira R., *Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, ép. Text in Applied Mathematics. Parainfo, Madrid, 2020.
- [5] L. R. Ascher Uri M.; Petzold, *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*, ép. Text in Applied Mathematics. Philadelphia (USA), 1998.
- [6] J. D. F. Richard L. Burden, *Análisis Numérico*, ép. Text in Applied Mathematics. Cengage Learning Latin America, 2001.
- [7] H. M. Bacab, N. B. Madera, F. J. Solorio, F. Vera y D. F. Marrufo, “Los sistemas silvopastoriles intensivos con *Leucaena leucocephala*: una opción para la ganadería tropical. (S) [Los sistemas silvopastorales],” *Universidad de Colima*, vol. 17, n.º 3, pp. 67-81, 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [8] E. de NetLogo, “Corridas representativas,” 2021. doi: <https://drive.google.com/file/d/1aYFsnqx1ql-PHi08piMPCaHtIg6rn2Jf/view?usp=sharing>.
- [9] M. I. H. D. V. N., L. Mercedes y F. M., “Modelación de la interacción presa-dos depredadores para el sistema *Heteropsylla cubana* - *Chilocorus cacti* - *Chrysoperla* sp,” *Revista Cubana de Ciencia Agrícolas, Instituto de Ciencia Animal Cuba*, vol. 41, n.º 4, pp. 313-316, 2007.
- [10] B. M. M., E. S. M., M. D. F., R. de Ledesma V. A. y G. F. Pulido, “Sistemas extensivos de producción animal,” *Archivo Zootécnico*, pp. 465-489, 2001.
- [11] L. M. Medio Alfredo, *Nonlinear dynamics, A primer*, ép. British Library. Cambridge, University Press, 2001. doi: <http://www.cambridge.org>.
- [12] P. J. M. Anguiano J. M. Aguirre J., “Establecimiento de *Leucaena leucocephala* con alta densidad de siembra bajo cocotero (*Cocus nucifera*).,” *Revista Cubana de Ciencia Agrícola* 46, pp. 103-107, 2012.

- [13] A. J. M., A. J. y P. J. M., “Secuestro de carbono en la biomasa aérea de un sistema agrosilvopastoril de *Cocus nucifera*, *Leucaena leucocephala* Var. Cunningham y *Pennisetum purpureum*,” *Cuba CT-115. Avances en Investigación Agropecuaria* 17, pp. 149-160, 2013.
- [14] B. H. M. y S. F. J., “Oferta y consumo de forraje y producción de leche en ganado de doble propósito manejado en sistemas silvopastoriles en Tepalcatepec, Michoacán. Tropical and Subtropical,” *Agroecosystems* 13, pp. 271-278, 2011.
- [15] H. C. Beer J., I. M., H. J. M. y S. E. y Jiménez F., “Agroforestería en las Américas 10,” *Avances en Investigación Agropecuaria* 16, pp. 80-87, 2003.
- [16] C. M., “Estudio de gran visión y factibilidad económica y financiera para el desarrollo de la infraestructura de almacenamiento y distribución de granos y oleaginosas para el mediano y largo plazo a nivel nacional,” *Secretaría de Agricultura and Ganadería and Desarrollo Rural and Pesca y Alimentación (SA-GARPA). México*, p. 256, 2010.
- [17] M. J. L. Quero A. R. Enríquez J. F., “Evaluación de especies forrajeras en América Tropical, avances o status quo,” *Interciencia* 32, pp. 566-571, 2007.
- [18] M. E. y A. D. M. Gallardo J. L. Luna, “Situación actual y perspectivas de la producción de carne de bovino en México.,” *Coordinación General de Ganadería. SAGARPA. México.*, p. 45, 2006.
- [19] I. M. y B. J. Szott L., “The hamburger connection hangover: cattle, pasture, land degradation and alternative land use in Central America.,” *CATIE. Costa Rica.*, p. 71, 2000.
- [20] D. C. V. Mahecha L. Rosales M., M. C. H. y M. E. J. y Uribe F.0, “Evaluación del forraje y los animales a través del año en un silvopastoril conformado por *Cynodon plectostachyus*, *Leucaena leucocephala* y *Prosopis juliflora*, en el Valle del Cauca, Colombia,” *CIPAV. Colombia*, <http://www.cipav.org.co/redagrofor/memorias99/SeminInd.htm>. (Consultada el 10 de febrero de 2011), 2002.
- [21] S. E. Calvetti Daniela, *Computational Mathematical Modeling: An Integrated Approach Across Scales*. Siam, 2012.
- [22] G. V. Railsback Steven F., *Agent-based and individual-based modeling: a practical introduction*. Princeton university press, 2011.
- [23] R. W. Wilensky Uri, *AN INTRODUCTION TO AGENT-BASED MODELING Modeling Natural, Social, and Engineered Complex Systems with NetLogo*. Massachusetts Institute of Technology, 2015.
- [24] L. P. A. y G. O. J. M. Pavón Mestras Juan, “Modelo basado en agentes para el estudio de sistemas complejos,” *Novática* 218, <http://srn.com/abstract=2252909>, pp. 13-18, 2012.

- [25] W. T. Steinfeld H. Gerber P., C. V. R. M. y de Haan C., "Livestock's long Shadow. Environmental issues and options," *LEAD-FAO. Italia*, pp. 377, 2006.
- [26] S. J. F., "The role of the carbon cycle for the greenhouse gas balance of grasslands and of livestock production systems En: Rowlinson P., Steele M. y Nefzaoui, A.," (Eds.). *Proceedings International Conference Livestock and Global Climate Change. British Society of Animal Science. Hammamet, Tunisia*, pp. 12-15, 2008.
- [27] I. J. Lamela L. Castillo E. y P. A., "Principales avances de la introducción de los sistemas silvopastoriles en las condiciones de producción en Cuba.," *Pastos y Forrajes* 28, pp. 47-58, 2005.
- [28] R. J. M. Sadeghian S. y G. M. E., "Impacto de sistemas de ganadería sobre las características físicas, químicas y biológicas de suelos en Los Andes de Colombia," *Agroforestería para la producción animal en Latinoamérica. FAO. Italia*, pp. 77-95, 1998.
- [29] S. H. M., "Importance of tree resources for dry seasons feeding and the impact on productivity of livestock farms," En: *Mannetje et al. (Eds.). The importance of silvopastoral system in rural livelihoods to provide ecosystem services. Proceedings of the Second International Symposium on Silvopastoral Systems. Mérida, Yucatán, México*, pp. 346, 2004.
- [30] M. H. Chacón E., "Tecnologías alimentarias apropiadas para la producción con bovinos a pastoreo," En: *González S. C., Madrid B. C., Soto B.E. (Eds.). Desarrollo sostenible en la ganadería de doble propósito. Fundación Girarz. Ediciones Astro Data. Venezuela*, pp. 435-453, 2008.
- [31] SAGARPA, "Pastoreo rotacional intensivo," *Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación. México.*, pp. 8, 2007.
- [32] S. M., "Los sistemas agroforestales y su clasificación," En: *Santana M. y Valencia, J. (Eds.) Seminario producción ganadera sostenible, silvopastoreo. CORPOICA. Caucaisia.*, pp. 1-55, 1998.
- [33] I. M. Pezo D. y C. F., "El pago por servicios ambientales: acelerador del cambio tecnológico en sistemas ganaderos basados en pasturas.," En: *Tejos, R. (Ed.). XII Seminario Manejo y Utilización de Pastos y Forrajes en Sistemas de Producción Animal. Mérida, Yucatán, México.*, pp. 1-1, 2008.
- [34] D. I. A. Yamamoto W. e I. M., "Effects of silvopastoral areas on milk production at dual-purpose cattle farms at the semi-humid old agricultural frontier in central Nicaragua.," *Agricultural Systems* 94, pp. 368-375, 2007.
- [35] K. L. y Ávila, "Agroforestería básica. Serie de textos básicos para la formación ambiental," *No. 3. Editorial PNUMA. México*, pp. 340, 1999.

- [36] B. J. Pezo D. A. Ibrahim M. y C. L. A., “Oportunidades para el desarrollo de sistemas silvopastoriles en América Central,” *Serie Técnica, Informe Técnico No. 311. CATIE. Costa Rica*, pp. 46, 1999.
- [37] M. M. A., “Sistemas agrosilvopastoriles: una alternativa de desarrollo rural sustentable para el trópico mexicano.,” *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente* 8:, pp. 91-100, 2002.
- [38] D. B. K. y N. K. R., “Silvopastoral research and adoption in Central America: recent findings and recommendations for future directions.,” *Agroforestry Systems* 59:, pp. 149-155, 2003.
- [39] R. L. Torres J. A. Espinoza W. y V. A., “Secuestro de carbono en potreros arbolados, potreros sin árboles y bosque caducifolio de Huatusco, Veracruz.,” *Tropical and Sub-tropical Agroecosystems* 13:, pp. 543-549, 2011.
- [40] V. M. A. Lozano M. D. Amparo C. G., F. L., R. G. M., C. H. G., C. V. N. y A. M. C., “Sistemas silvopastoriles con uso de biofertilizantes: opción tecnológica para el Valle Cálido del Alto Magdalena,” *CORPOICA. Colombia.*, pp. 32, 2006.
- [41] M. E. y S. B., “El Sistema Silvopastoril Intensivo, un modelo exitoso para la competitividad ganadera en Colombia y México.,” *En: V Congreso Latinoamericano de Agroforestería para la Producción Pecuaria Sostenible. Universidad Rómulo Gallegos, Universidad Central de Venezuela, Universidad de Zulia.*, Venezuela (Publicación electrónica), 2008.
- [42] C. C., “Introducción al pastoreo de alta densidad,” *Curso de producción de bovinos de doble propósito. Universidad Nacional Autónoma de México. México.*, pp. 33, 1996.
- [43] J. H. Senra A. Martínez R.O., R. T., R. J. J., G. R. V. y R. J. V., “Principios básicos del pastoreo rotacional eficiente y sostenible para el subtrópico americano.,” *Revista Cubana de Ciencia Agrícola* 39, pp. 23-30, 2005.
- [44] M. E., C. Z. U. F., C. A. y S. B., “Native trees and shrubs for the productive rehabilitation of tropical cattle ranching lands.,” *Forest Ecology and Management* 261, pp. 1654-1663, 2011.
- [45] V. Nurys y M. C., “Determinación del coeficiente de nocividad del psílido *Heteropsylla cubana* en condiciones de insectarios.,” *Revista Cubana de Ciencia Agrícola, vol. 39, núm. 1, Instituto de Ciencia Animal La Habana, Cuba*, pp. 93-98, 2011.
- [46] M. C. H. y U. F., “Experiencias en producción limpia de ganaderías en pastoreo. En: Memorias del III Seminario Internacional Competitividad en Carne y Leche,” *Coooperativa Lechera de Antioquia. Medellín, Colombia.*, pp. 333-354, 2002.

- [47] S. H. M., “El género *Leucaena* y su potencial para los trópicos. En: Leguminosas forrajeras arbóreas en la agricultura tropical,” En: Clavero, T. (Ed.). *Fundación Polar, Universidad del Zulia, Centro de transferencia de tecnología en pastos y forrajes. Venezuela.*, pp. 17-28, 1996.
- [48] K. U. y G. M. S., “Cattle distribution and behavior in southern-pine silvopasture versus open-pasture.,” *Agroforestry Systems* 78, pp. 159-168, 2010.
- [49] C. C. A.-S.-A. L. 3.0., “*Heteropsylla cubana*”– news · newspapers · books · scholar · JSTOR,” <https://www.naturalista.mx/taxa/330261-Heteropsylla-cubana>, 2015.
- [50] M. V. Fabian, “Imagen tomada de *Leucaena*, Acacia forrajera (*Leucaena leucocephala*),” <https://infopastosyforrajes.com/arb-ol-forrajero/leucaena/>, 2020.
- [51] G. P. P. Camacho Molina J. y Q. M., “Insectos y Ácaros del guayabo (*Psidium guajava* L.) en plantaciones comerciales del estado Zulia, Venezuela,” *Rev. Fac. Agron. (LUZ)*, pp. 140-148, 2002. doi: https://www.ecured.cu/Cotorrita_de_los_cocoteros.
- [52] S. Manuel, “Imagen tomada de *Chrysoperla* sp”.,” *España, Lugo*, 2016. doi: <https://www.biodiversidadvirtual.org/insectarium/Chrysoperla-sp.-img818640.html>.
- [53] B. B. Adolfo, “Métodos Matemáticos para Modelos Basados en Agentes.,” *Universidad Nacional de Córdoba*, 2015. doi: <https://core.ac.uk/72041534.pdf>.
- [54] K. M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1990, pp. 35-37.
- [55] B. C. y M. U., *A History of Mathematics*. John Wiley y Sons, 1991, pp. 202-203.
- [56] A. K. T., S. T. D. e Y. J. A., *CHAOS An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 2000, p. 275.
- [57] V. N. y M. C., “Determinación del coeficiente de nocividad del psílido *Heteropsylla cubana* en condiciones de insectarios.,” *Rev. Cubana Cienc. Agríc.*, 39:93, 2005.
- [58] S. M.W., *Capacity for population increase*. En W. Helle M.W. Spider mites: their biology, natural enemies control. *World Crop Pest*, 1985, p. 35.

A. APÉNDICE (CÓDIGO EN C RUNGE KUTTA)

Código en C Runge Kutta

```
# include<stdio.h>
float dydx(float x, float y)
{
return((x - y)/2);
}
{
int n = (int)((x - x0) / h);
float k1, k2, k3, k4, k5;
Iteraciones
float y = y0;
for (int i=1; i<=n; i++);
{
Aplica el Método Runge Kutta
k1 = h*dydx(x0, y);
k2 = h*dydx(x0 + 0.5*h, y + 0.5*k1);
k3 = h*dydx(x0 + 0.5*h, y + 0.5*k2);
k4 = h*dydx(x0 + h, y + k3);
Valor de y
y = y + (1.0/6.0)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 +
k4);
Valor de x
x0 = x0 + h;
}
return y;
}
Método Runge Kutta
int main()
{
float x0 = 0, y = 1, x = 2, h = 0.2;
printf(El valor de y en x es : %f);
rungeKutta(x0, y, x, h));
return 0;
}
```

B. APÉNDICE (CÓDIGO EN PYTHON RUNGE KUTTA)

Código en Python Runge Kutta

```
#Runge Kutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
from math import*
def f(t,y):
func=((t-y)/2)
return func
def RK4(t0,y0,h,n):
t=np.zeros(n+1)
y=np.zeros(n+1)
t[0]=t0
y[0]=y0
print('y',t[0],')=' ,y[0])
for k in range(n):
k1=f(t[k],y[k])
k2=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
k3=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
k4=f(t[k]+h,y[k]+h*k3)
y[k+1]=y[k]+(h/6)*
(k1+2*k2+2*k3+k4)
t[k+1]=t[k]+h
print('y(',round(t[k+1],3),')
=' ,round(y[k+1],3))
sns.regplot(t,y)
plt.show()
plt.plot(t,y)
RK4(0,3,1.27,5)
print(val)
```

B.1. Código Runge Kutta de la ecuación dinámica H. Cubana

```
#Runge Kutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
from math import*
def f(t,y):
func=(t*(0.8-0.3*t))
return func
def RK4(t0,y0,h,n):
t=np.zeros(n+1)
y=np.zeros(n+1)
t[0]=t0
y[0]=y0
print('y(',t[0],')=' ,y[0])
```

```

for k in range(n):
    k1=f(t[k],y[k])
    k2=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
    k3=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
    k4=f(t[k]+h,y[k]+h*k3)
    y[k+1]=y[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
    t[k+1]=t[k]+h
    print('y(',round(t[k+1],3),')=',round(y[k+1],3))
    sns.regplot(t,y)
    plt.show()
    plt.plot(t, y)
    RK4(0,1,0.3,15)

```

B.2. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana y Cacti

```

#Runge Kutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
def f(t,y):
    func=0.8*t + 0.8 - 0.11*t*y
    return func
def g(w,x):
    func1=w*(0.71*x - 0.0003)
    return func1
def RK4(t0,y0,h,n):
    t=np.zeros(n+1)
    y=np.zeros(n+1)
    t[0]=t0
    y[0]=y0
    w=np.zeros(n+1)
    x=np.zeros(n+1)
    w[0]=t0
    x[0]=y0
    print('y(',t[0],')=',y[0])
    print('x(',w[0],')=',x[0])
    for k in range(n):
        k1=f(t[k],y[k])
        k2=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
        k3=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
        k4=f(t[k]+h,y[k]+h*k3)
        y[k+1]=y[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        t[k+1]=t[k]+h
        k1=g(t[k],y[k])
        k2=g(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
        k3=g(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
        k4=g(t[k]+h,y[k]+h*k3)
        x[k+1]=y[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        w[k+1]=t[k]+h
        print('y(',round(t[k+1],3),')=',round(y[k+1],3))
        print('x(',round(w[k+1],3),')=',round(x[k+1],3))
        sns.regplot(t,y)
        sns.regplot(w,x)
        plt.show()
        plt.plot(t,y,w,x)
        RK4(0,1,0.3,20)

```

B.3. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana y Chrysoperla

```
#Runge Kutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns

def f(t,y):
    func=0.8*t + 0.8 - 0.01*t*y
    return func

def g(w,x):
    func1=x*(0.63*w - 0.0002*x)
    return func1

def RK4(t0,y0,h,n):
    t=np.zeros(n+1)
    y=np.zeros(n+1)
    t[0]=t0
    y[0]=y0
    w=np.zeros(n+1)
    x=np.zeros(n+1)
    w[0]=t0
    x[0]=y0
    print('y(',t[0],')=',y[0])
    print('x(',w[0],')=',x[0])

    for k in range(n):
        k1=f(t[k],y[k])
        k2=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
        k3=f(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
        k4=f(t[k]+h,y[k]+h*k3)
        y[k+1]=y[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        t[k+1]=t[k]+h

        k1=g(t[k],y[k])
        k2=g(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
        k3=g(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
        k4=g(t[k]+h,y[k]+h*k3)
        x[k+1]=y[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        w[k+1]=t[k]+h

    print('y(',round(t[k+1],3),')=',round(y[k+1],3))
    print('x(',round(w[k+1],3),')=',round(x[k+1],3))

    sns.regplot(t,y)
    sns.regplot(w,x)
    plt.show()
    plt.plot(t,y,w,x)
    RK4(0,1,0.6,10)
```

B.4. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana, Cacti y Chryso-perla

```

#Runge Kutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns

def f(x,y,z):
    func=x*(0.8 - 0.11*y - 0.01*z - 0.3*x)
    return func

def g(x,w):
    func1=w*(0.71*x - 0.0003*w)
    return func1

def m(u,l):
    func2=l*(0.3*u - 0.0002*l)
    return func2

def RK4(t0,x0,y0,z0,h,n):
    t=np.zeros(n+1)
    y=np.zeros(n+1)
    z=np.zeros(n+1)
    w=np.zeros(n+1)
    x=np.zeros(n+1)
    u=np.zeros(n+1)
    l=np.zeros(n+1)
    t[0]=t0
    y[0]=y0
    z[0]=z0
    w[0]=y0
    x[0]=t0
    u[0]=t0

    l[0]=z0
    print('y(',t[0],')=',y[0])
    print('z(',t[0],')=',z[0])
    print('t(',t[0],')=',t[0])
    for k in range(n):
        k1=f(x[k],y[k],z[k])
        k2=f(x[k]+h,(y[k]*1/2 + h*k1*1/2),(z[k]*1/2 + h*k1*1/2))
        k3=f(x[k]+h,(y[k]*1/2 + h*k2*1/2),(z[k]*1/2 + h*k2*1/2))
        k4=f(x[k]+h*k3,(y[k]+h*k3),(z[k]+h*k3))
        y[k+1]=y[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        k1=f(x[k],y[k],z[k])
        k2=f(x[k]+h*1/2,(y[k]*1/2 + h*k1*1/2),(z[k]*1/2 + h*k1*1/2))
        k3=f(x[k]+h*1/2,(y[k]*1/2 + h*k2*1/2),(z[k]*1/2 + h*k2*1/2))
        k4=f(x[k]+h*k3,(y[k]+h*k3),(z[k]+h*k3))
        z[k+1]=z[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        t[k+1]=t[k]+h
        k1=m(t[k],y[k])
        k2=m(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
        k3=m(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
        k4=m(t[k]+h,y[k]+h*k3)
        l[k+1]=l[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
        u[k+1]=u[k]+h
        k1=g(t[k],y[k])

```

```

k2=g(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k1)
k3=g(t[k]+h/2,y[k]+(h/2)*k2)
k4=g(t[k]+h,y[k]+h*k3)
w[k+1]=x[k]+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
x[k+1]=t[k]+h
print('y(',round(t[k+1],3),')=',round(y[k+1],3))
print('z(',round(t[k+1],3),')=',round(z[k+1],3))
print('t(',round(t[k+1],3),')=',round(t[k+1],3))
sns.regplot(t,y)
sns.regplot(t,z)
sns.regplot(t,w)
plt.show()
plt.plot(t,y,t,z,t,w)
RK4(0,0.002,6.48,8.62,0.2,20)

```

B.5. Código Runge Kutta de las ecuaciones dinámicas de H. Cubana, Cacti y Chryso- perla, Leucaean y vaca

```

#Runge Kutta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
def f(w, k, l, g, y, i, n, fi):
    func=l*(w - k - g*y - i*x - n*v) + fi
    return func
def g(x, lamda, mu, alpha, i, l, c, y, d, z):
    func1=x*(lamda - mu + alpha - i*1 - c*y - d*z)
    return func1
def m(y, g, l, c, x, beta):
    func2=y*(g*1 + c*x + beta)
    return func2
def p(d, h, z, x, delta):
    func3=z*(h*z + d*x + delta)
    return func3
def r(l, n, sigma):
    func3=(l*n*v + sigma)
    return func4
def RK4(x0,y0,z0,c0,d0,w0,k0,l0,i0,n0,alpha0,beta0,delta0,mu0,lamda0,sigma0,h,n):
    c=np.zeros(n+1)
    d=np.zeros(n+1)
    c=np.zeros(n+1)
    mu=np.zeros(n+1)
    lamda=np.zeros(n+1)
    delta=np.zeros(n+1)
    y=np.zeros(n+1)
    z=np.zeros(n+1)
    w=np.zeros(n+1)
    x=np.zeros(n+1)
    k=np.zeros(n+1)
    g=np.zeros(n+1)
    i=np.zeros(n+1)
    n=np.zeros(n+1)

```

```
alpha=np.zeros(n+1)
beta=np.zeros(n+1)
sigma=np.zeros(n+1)
t[0]=t0
y[0]=y0
z[0]=z0
w[0]=y0
```

```
x[0]=t0
u[0]=t0
l[0]=z0
print('y(',t[0],')=',y[0])
print('z(',t[0],')=',z[0])
print('t(',t[0],')=',t[0])
print('l(',u[0],')=',u[0])
```

C. APÉNDICE (CÓDIGO DE NETLOGO INTERACTUANDO PLAGA (H. CUBANA) Y CULTIVO (LEUCAENA))

Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana) y cultivo (Leucaena)

```

breed [ plant a-plant ] breed [ bug a-bug
]
turtles-own [ energy ]
patches-own [ countdown ]
to setup
ca
ask patches
[ set pcolor one-of [ green brown ]
ifelse pcolor = green
[ set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown random grass-
regrowth-time ]
]
create-bug initial-number-bug
[
set shape "bug"
set color red
set size 1.2
set energy random (2 * H.Cubana-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor
] create-plant initial-number-plant
[
set shape "plant"
set color yellow
set size 2
set energy random (2 * Leucaena-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor ]
reset-ticks
end
to go
ask bug
[
move-bug
set energy energy - 1
eat-plant
death-bug
reproduce-bug
]
ask plant
[ move-plant
set energy energy - 1
eat-grass
death-plant
reproduce-plant
]
ask patches

```

```

[
grow-grass
]
display-labels
tick
end
to move-bug
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to reproduce-bug
if random-float 100 <H.Cubana-
reproduce [ set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to eat-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody
[ ask prey [ die ]
set energy energy + H.Cubana-
ganancia-por-comida
]
end
to death-bug
if energy <0 [ die ]
end
to move-plant
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to reproduce-plant
if random-float 100 <Leucaena-
reproduce
[
set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to eat-grass
if pcolor = green [
set pcolor brown
set energy energy - 1 + Leucaena-
ganancia-por-comida
]
end
to death-plant
if energy <0 [ die ]
end
to grow-grass
if pcolor = brown [
ifelse countdown <= 0
[ set pcolor green
set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown countdown - 1 ] ]
end

```

```
to-report grass  
  report patches with [pcolor = green]  
end to display-labels  
ask turtles [ set label ]
```

```
if show-energy? [  
  ask plant [ set label round energy ]  
  ask bug [ set label round energy ] ]  
end
```

C.1. Apéndice (Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), y depredador (Cacti))

```

breed [ bug a-bug ] breed [ ant a-ant ]
breed [plant a-plant]
turtles-own [ energy ]
patches-own [ countdown ]
to setup
ca
ask patches
[ set pcolor one-of [ green brown ]
ifelse pcolor = green
[ set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown random grass-
regrowth-time ]
]
create-bug initial-number-bug
[ set shape "bug"
set color red
set size 1.2
set energy random (2 * H.Cubana-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor
]
create-ant initial-number-ant
[
set shape ".ant"
set color orange
set size 2
set energy random (2 * Cacti-gain-
from-food)
setxy random-xcor random-ycor
]
create-plant initial-number-plant
[
set shape "plant"
set color yellow
set size 2
set energy random (2 * Leucaena-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor
]
reset-ticks
end
to go
ask bug
[
move-bug
set energy energy - 1
eat-plant
death-bug
reproduce-bug
]
ask ant
[
move-ant

```

```

set energy energy - 1
eat-bug
death-ant
reproduce-ant
]
ask plant
[
move-plant
set energy energy - 1
eat-grass
death-plant
reproduce-plant
]
ask patches
[
grow-grass
]
display-labels
tick
end
to move-bug
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to eat-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [ ask prey [ die ]
set energy energy + H.Cubana-

```

```

ganancia-por-comida
]
end
to death-bug
if energy <0 [ die ]
end
to reproduce-bug
if random-float 100 <H.Cubana-
reproduce [ set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to move-ant
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to eat-bug
let prey one-of bug-here
if prey != nobody [ ask prey [ die ]
set energy energy + Cacti-gain-from-
food
]
end
to death-ant
if energy <0 [ die ]
end
to reproduce-ant
if random-float 100 <Cacti-reproduce [
set energy (energy / 2)

```

```

hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end

to move-plant
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end

to reproduce-plant
if random-float 100 <Leucaena-
reproduce
[
set energy (energy / 2) hatch 1 [ rt
random-float 360 fd 1 ]
]
end

to eat-grass
if pcolor = green [ set pcolor brown
set energy energy - 1 + Leucaena-
ganancia-por-comida
]
end

```

```

to death-plant
if energy <0 [ die ]
end

to grow-grass
if pcolor = brown [
ifelse countdown <= 0
[ set pcolor green
set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown countdown - 1 ] ]
end

to-report grass
report patches with [pcolor = green]
end

to display-labels
ask turtles [ set label ]
if show-energy?
[
ask ant [ set label round energy ]
ask bug [ set label round energy ]
ask plant [ set label round energy ]
]
end

```

C.2. Apéndice (Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), y otro depredador (Chrysoperla))

```

breed [ bug a-bug ] breed [ caterpillar
a-caterpillar ]
breed [plant a-plant]
turtles-own [ energy ]

```

```

patches-own [ countdown ]
to setup
ca

```

```

ask patches
[ set pcolor one-of [ green brown ]
ifelse pcolor = green
[ set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown random grass-
regrowth-time ]
]
create-bug initial-number-bug
[ set shape "bug"
set color red
set size 1.2
set energy random (2 * H.Cubana-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor ]
create-caterpillar
initial-number-caterpillar
[ set shape caterpillar"
set color orange
set size 2
set energy random (2 * Chrysopherla-
gain-from-food)
setxy random-xcor random-ycor
]
create-plant initial-number-plant
[ set shape "plant"
set color yellow
set size 2
set energy random (2 * Leucaena-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor ]

reset-ticks
end
to go
ask bug
[ move-bug
set energy energy - 1
eat-plant
death-bug
reproduce-bug
]
ask caterpillar [ move-caterpillar
set energy energy - 1
eat-bug
death-caterpillar
reproduce-caterpillar
]
ask plant [ move-plant
set energy energy - 1
eat-grass
death-plant
reproduce-plant
]
ask patches [ grow-grass
]
display-labels
tick
end
to move-bug
rt random 90 - 45

```

```

lt random 90 - 45
fd 1
end
to eat-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [ ask prey [ die ]
set energy energy + H.Cubana-
ganancia-por-comida
]
end
to death-bug
if energy <0 [ die ]
end
to reproduce-bug
if random-float 100 <H.Cubana-
reproduce
[ set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to move-caterpillar
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to eat-bug
let prey one-of bug-here
if prey != nobody [ ask prey [ die ]
set energy energy + Chrysopherla-gain-
from-food
]
end
to death-caterpillar
if energy <0 [ die ]
end
to reproduce-caterpillar
if random-float 100 <Chrysopherla-
reproduce [ set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to move-plant
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to reproduce-plant
if random-float 100 <Leucaena-
reproduce
[ set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to eat-grass
if pcolor = green [ set pcolor brown
set energy energy - 1 + Leucaena-
ganancia-por-comida
]
end
to death-plant

```

```

if energy <0 [ die ]
end
to grow-grass
if pcolor = brown [ ifelse countdown
<= 0
[ set pcolor green
set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown countdown - 1 ] ]
end
to-report grass

```

```

report patches with [pcolor = green]
end
to display-labels
ask turtles [ set label ]
if show-energy? [ ask caterpillar [ set la-
bel round energy ]
ask bug [ set label round energy ]
ask plant [ set label round energy ] ]
end

```

C.3. Apéndice(Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla))

```

globals [ max-bug]
breed [ bug a-bug ]
breed [ ant a-ant ]
breed [caterpillar a-caterpillar]
turtles-own [ energy ]
patches-own [ countdown ]
to setup
ca
ask patches [ set pcolor one-of [ green
brown ]
ifelse pcolor = green
[ set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown random grass-
regrowth-time ]
]
create-bug initial-number-bug

```

```

[ set shape "bug"
set color black
set size 1.2
set energy random (2 * H.Cubana-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor
] create-ant initial-number-ant
[ set shape ."ant"
set color orange
set size 2
set energy random (2 * ant-gain-from-
food)
setxy random-xcor random-ycor
] create-caterpillar initial-number-
caterpillar
[ set shape çaterpillar"

```

```

set color yellow
set size 1.7
set energy random (2 * caterpillar-gain-
from-food)
  setxy random-xcor random-ycor ]
reset-ticks
end
to go
ask bug[
move-bug
set energy energy - 1
eat-grass
death-bug
reproduce-bug
]
ask ant [
move-ant
set energy energy - 1
eat-bug
death-ant
reproduce-ant
]
ask caterpillar [
move-caterpillar
set energy energy - 1
eats-bug
death-ant
reproduce-caterpillar
]

```

```

ask patches [
grow-grass ]
display-labels
tick
end
to move-bug
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to eat-grass
if pcolor = green [
set pcolor brown
set energy energy + H.Cubana-
ganancia-por-comida
]
end
to reproduce-bug
if random-float 100 <H.Cubana-
reproduce [
set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end
to move-ant
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end

```

```

to eat-bug
let prey one-of bug-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy + ant-gain-from-food
]
end

to death-ant
if energy <0 [ die ]
end

to reproduce-ant
if random-float 100 <Cacti-reproduce [
set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end

to move-caterpillar
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end

to eats-bug
let prey one-of bug-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy + caterpillar-gain-
from-food
] end

to death-caterpillar
if energy <0 [ die]

```

```

end

to reproduce-caterpillar
if random-float 100 <caterpillar-
reproduce [
set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
]
end

to grow-grass
if pcolor = brown [
ifelse countdown <= 0
[ set pcolor green
set countdown grass-regrowth-time ]
[ set countdown countdown - 1 ]
]
end

to death-bug
if energy <0 [ die ]
end

to-report grass
report patches with [pcolor = green]
end

to display-labels
ask turtles [ set label ]
if show-energy? [
ask ant [ set label round energy ]
ask bug [ set label round energy ]
ask caterpillar [ set label round energy ]
]
end

```

C.4. Apéndice(Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), cultivo y dos depredadores (Cacti y Chrysoperla)

```
breed [ bug a-bug ]
breed [ ant a-ant ]
breed [caterpillar a-caterpillar]
breed [plant a-plant]
turtles-own [ energy ]
patches-own [ countdown ]
to setup
ca
ask patches [ set pcolor one-of [ green
brown ]
ifelse pcolor = green
[ set countdown pasto-crecimiento-
tiempo ]
[ set countdown random pasto-
crecimiento-tiempo ]
]
create-bug H.Cubana
[ set shape "bug"
set color black
set size 1.2
set energy random (2 * H.Cubana-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor
]
create-ant Cacti
[ set shape .^nt"
set color orange
set size 2
set energy random (2 * Cacti-ganancia-
por-comida)
setxy random-xcor random-ycor ]
create-caterpillar Chrysoperla
[ set shape çaterpillar"
set color yellow
set size 1.7
set energy random (2 * Cryshoperla-
ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor
] create-plant Leucaena
[ set shape "plant"
set color lime
set size 1.2
set energy random (2 * crecimiento-
cultivo )
setxy random-xcor random-ycor
]
reset-ticks
end
to go
ask bug[ move-bug
set energy energy - 1
death-bug
eat-plant
reproduce-bug
```

```

] ask ant [
move-ant
set energy energy - 1
eat-bug
death-ant
reproduce-ant
]
ask caterpillar [
move-caterpillar
set energy energy - 1
eats-bug
death-ant
reproduce-caterpillar
]
ask plant [
move-plant set energy energy - 1
eat-grass
reproduce-plant
death-plant
]
ask patches [
grow-grass
]
display-labels
tick
end
to move-bug
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45

fd 1
end
to eat-grass
if pcolor = green [
set pcolor brown
set energy energy + cultivo-ganancia-
por-comida
] end
to eat-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy + H.Cubana-
ganancia-por-comida
]
end
to reproduce-bug
if random-float 100 <H.Cubana-
reproduce [
set energy (energy / 2)
hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
] end
to death-bug
if energy <0 [ die ]
end
to move-ant
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end

```

```

to eat-bug
  let prey one-of bug-here
  if prey != nobody [
    ask prey [ die ]
    set energy energy + Cacti-ganancia-
por-comida
  ]
end

to death-ant
  if energy <0 [ die ]
end

to reproduce-ant
  if random-float 100 <Cacti-reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
  ]
end

to move-plant
  rt random 90 - 45
  lt random 90 - 45
  fd 1
end

to reproduce-plant
  if random-float 100 <crecimiento-
cultivo [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
  ]
end

```

```

to death-plant
  if energy <0 [ die ]
end

to move-caterpillar
  rt random 90 - 45
  lt random 90 - 45
  fd 1
end

to eats-bug
  let prey one-of bug-here
  if prey != nobody [
    ask prey [ die ]
    set energy energy + Cryshoperla-
ganancia-por-comida
  ]
end

to death-caterpillar
  if energy <0 [ die]
end

to reproduce-caterpillar
  if random-float 100 <Chrysotherla-
reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt random-float 360 fd 1 ]
  ]
end

to grow-grass
  if pcolor = brown [
    ifelse countdown <= 0

```

```

[ set pcolor green
  set  countdown  pasto-crecimiento-
tiempo ]
[ set countdown countdown - 1 ] ]
end
to-report grass
report patches with [pcolor = green]
end

```

```

to display-labels
ask turtles [ set label ]
if muestra-energy? [
ask ant [ set label round energy ]
ask bug [ set label round energy ]
ask caterpillar [ set label round energy ]
]
end

```

C.5. Apéndice (Código de NetLogo interactuando plaga (H. Cubana), cultivo dos de- predadores (Cacti y Chrysoperla) y vaca)

```

breed [ bug a-bug ]
breed [ ant a-ant ]
breed [caterpillar a-caterpillar]
breed [plant a-plant]
breed [cow a-cow]
breed [cowleucaena a-cowleucaena]
turtles-own [ energy ]
patches-own [ countdown ]

globals [l c cry x ] ; l = leucaena, x =
punto de equilibrio de H. Cubana, c = pun-
to de equilibrio de Cacti y cry = punto de
equilibrio de Chrysoperla

to setup
ca
ask patches[
set pcolor one-of [ lime brown ]
ifelse pcolor = lime
[ set  countdown  pasto-crecimiento-

```

```

tiempo ]
[ set  countdown  random  pasto-
crecimiento-tiempo] ]
create-bug H.Cubana
[
set shape "bug"
set color black
set size 0.5
set energy (2 * x * H.Cubana-ganancia-
por-comida) - (2 * x )
set x 0.1 ; punto de equilibrio de H. Cu-
bana
setxy random-xcor random-ycor
]
create-ant Cacti
[ set shape ."ant"
set color orange
set size 1

```

```

set energy (4 * c * Cacti-ganancia-por-comida) - (2 * c)
set c 6.48 ; punto de equilibrio de Cacti
setxy random-xcor random-ycor ]
create-caterpillar Chrysoperla
[ set shape çaterpillar"
set color yellow
set size 1
set energy
(4 * cry * Cryshoperla-ganancia-por-comida) - (2 * cry )
set cry 8.62 ; punto de equilibrio de Chrysoperla
setxy random-xcor random-ycor ]
create-plant Leucaena
[
set shape "plant"
set color green - 4
set size 1.3
set energy
( (4 * l * crecimiento-cultivo) - (2 * l * crecimiento-cultivo) ) ; aquí está la ecuación diferencial, dónde 4 y 2 son un parámetro de control.
set l 800
setxy random-xcor random-ycor
]
create-cow Vacas
[ set shape çow"
set color white

```

```

set size 2.5
set energy random (2 * Vacas-ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor]
create-cowleucaena Vacas-Leucaena
[ set shape çowleucaena"
set color yellow - 4
set size 3
set energy random (2 * Vacas-Leucaena-ganancia-por-comida)
setxy random-xcor random-ycor]
reset-ticks
if any? plant [stop]
end
to go
ask bug[
move-bug
set energy energy - 1
death-bug
eat-plant
reproduce-bug
]
ask ant [
move-ant
set energy energy - 1
eat-bug
eats-plant
death-ant
reproduce-ant ]

```

```

ask caterpillar [
move-caterpillar
set energy energy - 1
eats-bug
eatss-plant
death-ant
reproduce-caterpillar
]
ask plant [
move-plant
set energy energy - 1
eat-grass
reproduce-plant
death-plant
]
ask cow[
move-cow
set energy energy - 1
eats-grass
east-plant
reproduce-cow
death-cow ]
ask cowleucaena[
move-cowleucaena
set energy energy - 1
east-plant
reproduce-cowleucaena
death-cowleucaena
] ask patches [grow-grass]

display-labels
tick
end
to move-bug
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to move-cow
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to move-cowleucaena
rt random 90 - 45
lt random 90 - 45
fd 1
end
to eat-grass
if pcolor = lime [
set pcolor brown
set energy energy - 1 + cultivo-
ganancia-por-comida
]
end
to eats-grass
if pcolor = lime [
set pcolor brown
set energy energy - 1 + H.Cubana-

```

```

ganancia-por-comida
]
end
to eatss-grass
if pcolor = lime [
set pcolor brown
set energy energy - 1 + Cacti-ganancia-
por-comida
]
end
to eatsss-grass
if pcolor = lime [
set pcolor brown
set energy energy - 1 + Cryshoperla-
ganancia-por-comida
]
end
to east-grass
if pcolor = lime [
set pcolor brown
set energy energy - 1 + Vacas-ganancia-
por-comida
]
end
to eat-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy - 1 + H.Cubana-
ganancia-por-comida

```

```

]
end
to eats-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy - 1 + Cacti-ganancia-
por-comida
]
end
to eatss-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy - 1 + Cryshoperla-
ganancia-por-comida
]
end
to east-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]
set energy energy - 1 + Vacas-ganancia-
por-comida
]
end
to easts-plant
let prey one-of plant-here
if prey != nobody [
ask prey [ die ]

```

```

    set energy energy - 1 + Vacas-
Leucaena-ganancia-por-comida
  ]
end
to reproduce-bug
  if random-float 100 <H.Cubana-
reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt 90 lt 90 fd 1 ]
  ]
end
to death-cow
  if energy <10 [ die ]
end
to reproduce-cow
  if random-float 100 <Vacas-reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt 90 lt 90 fd 1 ]
  ]
end
to reproduce-cowleucaena
  if random-float 100 <Vacas-Leucaena-
reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt 90 lt 90 fd 1 ]
  ]
end
to death-cowleucaena
  if energy <0 [ die ]
end

```

```

to death-bug
  if energy <-0.5 [ die ]
end
to move-ant
  rt random 90 - 45
  lt random 90 - 45
  fd 1
end
to eat-bug
  let prey one-of bug-here
  if prey != nobody [
    ask prey [ die ]
    set energy energy + Cacti-ganancia-
por-comida
  ]
end
to death-ant
  if energy <10 [ die ]
end
to reproduce-ant
  if random-float 100 <Cacti-reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt 90 lt 90 fd 1 ]
  ]
end
to move-plant
  rt random 90 - 45
  lt random 90 - 45
  fd 1

```

```

end
to reproduce-plant
  if random-float 100 <crecimiento-
cultivo [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt random 360 fd 1 ]
  ]
end
to death-plant
  if energy <-5 [ die ]
end
to move-caterpillar
  rt random 90 - 45
  lt random 90 - 45
  fd 1
end
to eats-bug
  let prey one-of bug-here
  if prey != nobody [
    ask prey [ die ]
    set energy energy - 1 + Cryshoperla-
ganancia-por-comida
  ]
end
to death-caterpillar
  if energy <10 [ die]
end
to reproduce-caterpillar

```

```

  if random-float 100 <Chrysotherla-
reproduce [
    set energy (energy / 2)
    hatch 1 [ rt random 360 fd 1 ]
  ]
end
to grow-grass
  if pcolor = brown [
    ifelse countdown <= 0
    [ set pcolor lime
    set  countdown  pasto-crecimiento-
tiempo ]
    [ set countdown countdown - 1 ]
  ]
end
to-report grass
  report patches with [pcolor = lime]
end
to display-labels
  ask turtles [ set label ]
  if muestra-energy? [
    ask ant [ set label round energy ]
    ask bug [ set label round energy ]
    ask caterpillar [ set label round energy ]
    ask cow [ set label round energy ]
    ask cowleucaena [ set label round
energy ]
  ]
end

```