

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

Colegio de Ciencia y Tecnología

Modelación de los
sistemas dinámicos

TESIS

Que para obtener el título de:
Licenciados en Modelación Matemática

Presentan:

César Rodrigo Camacho Guzmán
José de Jesús Camacho De la Rosa

Director:

Mtro. Miguel Ángel Zárate Reyes

Ciudad de México, diciembre de 2021.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS ©

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Contenido

Introducción.....	1
Capítulo 1. Sistemas dinámicos.....	2
Breve historias de los sistemas dinámicos.....	2
Introducción a los sistemas dinámicos.....	4
Capítulo 2. Bifurcaciones.....	10
Bifurcaciones para sistemas dinámicos continuos.....	11
Bifurcaciones para sistemas dinámicos discretos.....	13
Capítulo 3. Modelación de sistemas dinámicos.....	16
Puntos fijos.....	17
Ecuación logística y el número de Feigenbaum.....	18
Modelación de la ecuación logística.....	19
Diagrama de Telaraña.....	24
Lenguas de Arnold.....	25
Fractales.....	30
Conjunto de Mandelbrot.....	31
Atractores extraños.....	34
Atractor de Rossler.....	36
Atractor de Lorenz.....	41
Aplicaciones a los circuitos eléctricos. Modelación por computadora de algunos ejemplos.....	44
Conclusiones.....	53
Índice de figuras.....	55
Apéndice de programas.....	57
Bibliografía.....	73

Introducción

A lo largo de la historia de la humanidad, el entendimiento y dominio de la naturaleza ha sido el objetivo fundamental para que el hombre garantice su sobrevivencia; desde el dominio del fuego, la construcción de refugios para resguardarse de las inclemencias del tiempo, la fabricación de armas para la cacería y, posteriormente, su uso en guerras tanto de conquista como de defensa, lo cual no ha cambiado en nuestros días. Esta constante búsqueda de explicar el entorno que lo rodea incentivó el desarrollo de la herramienta más importante con la que el ser humano ha contado para entender y explicar distintos fenómenos naturales: las matemáticas.

Es fundamental entender nuestro entorno, que cada día se vuelve más complejo pero no por ello inexpugnable, entre más avanzamos en la explicación de los paradigmas que la naturaleza nos plantea surgen nuevos retos que incentivan al ingenio para resolver, adaptar y volver a comenzar contra una nueva provocación a nuestra existencia (hoy en día el coronavirus es el nuevo adversario). Todo esto nos refiere a un punto de equilibrio, en cuyas condiciones vivimos de manera casi óptima hasta que una perturbación nos empieza a separar de este punto y, nuevamente, después de ardua lucha regresamos a este equilibrio. Esto nos muestra que la vida es un sistema dinámico, donde hay puntos atractores y repulsores que nos acercan o alejan a este punto de equilibrio, pero pensemos ahora en cualquier componente de nuestra cotidianidad y encontraremos el mismo patrón, desde el goteo de una llave, el exterminio de alguna especie, la economía, las finanzas, el comportamiento de dispositivos electrónicos y, en general, cualesquiera de los modelos que se nos ocurra.

Este trabajo, primeramente, explica lo que son los sistemas dinámicos y cómo ha sido su evolución a lo largo de la historia. Todos los gráficos que se muestran se obtienen con programas de cómputo elaborados por los autores de este trabajo con el software Octave, en la segunda parte se muestra el análisis del sistema dinámico del circuito de Chua como una aplicación a los circuitos electrónicos, donde el programa de simulación utilizado fue Xcos de Scilab.

Capítulo 1.

Sistemas Dinámicos.

Breve historia de los sistemas dinámicos

En la actualidad hay una tremenda fascinación por los conceptos de caos y los fractales, tanto de los científicos como de las personas ajenas a este campo. El atractivo estético de las imágenes producidas por el caos y los fractales provoca un interés de las personas por estas ideas.

El origen de los sistemas dinámicos se remonta al siglo XVII, como una rama de la física, cuando Isaac Newton inventó las ecuaciones diferenciales, descubrió las leyes del movimiento y de la gravitación universal, combinándolas para explicar las leyes de Kepler del movimiento de los planetas.

Posteriormente, Jules Henri Poincaré, físico matemático francés, quien a finales de 1800s introdujo una serie de teorías que se enfocaban más en lo cualitativo que en lo cuantitativo. Poincaré desarrolló un poderoso enfoque geométrico para analizar la dinámica de los planetas, que posteriormente se extendió más allá de la mecánica de los cuerpos celestes. También fue el primero en hablar acerca de la posibilidad del **caos**, en el cual un sistema determinístico exhibe un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, haciendo imposible la predicción a largo plazo.

La palabra **Caos** usualmente significa falta de orden o predicción. Muchas personas podrían asociar el “efecto mariposa” con la noción de caos. Este “efecto mariposa” describe como al aletear sus alas en alguna parte del mundo ésta podría ser en gran parte responsable de una enorme tormenta en otra parte del mundo algunas semanas después, debido a que el clima es extremadamente sensible a las condiciones iniciales [3].

El **caos** describe el comportamiento de un sistema que es altamente sensible a las condiciones iniciales. Los sistemas caóticos no son predecibles durante un largo periodo de tiempo y típicamente son asociados con estructuras fractales. El **caos** permaneció en un segundo plano durante la

primera mitad del siglo pasado, la dinámica era relacionada con osciladores no lineales y sus aplicaciones en la ingeniería y la física.

Los osciladores no lineales ayudaron al desarrollo de tecnologías como la radio, el radar y los lasers. También ayudaron a la invención de nuevas técnicas matemáticas por parte de científicos como Van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson, Smale, Poincaré, Birkhoff, Kolmogorov, Arnol'd y Moser.

La invención de las computadoras de alta velocidad a mediados de los cincuenta del siglo pasado permitieron experimentar con las ecuaciones de una manera que antes era imposible, desarrollando más información acerca de los sistemas no lineales. Tales experimentos guiaron en 1963 a Edward Lorenz al descubrimiento de un extraño atractor.

El trabajo de Lorenz tuvo poco impacto hasta la década de 1970, cuando fue el auge del **caos**. En 1971 David Ruelle, físico matemático belga, y Floris Takens, matemático holandés, propusieron una nueva teoría para la aparición de turbulencia en los fluidos, basada en el comportamiento de algunos atractores extraños. Unos años después, Robert May científico australiano, encontró ejemplos del caos en mapas iterados que surgen en la biología de poblaciones. Posteriormente Mitchell Feigenbaum, matemático y físico estadounidense, descubrió que existen ciertas leyes universales que gobiernan la transición de un comportamiento regular a uno caótico, explicado de manera sencilla, sistemas completamente diferentes se pueden volver caóticos de la misma manera. Su trabajo estableció un vínculo entre caos y transición de fase, e introdujo a toda una generación de físicos al estudio de los sistemas dinámicos.

Ocurrieron otros dos grandes descubrimientos en la década de 1970. Benoit Mandelbrot, matemático polaco, codificó y popularizó los fractales, produjo increíbles gráficos por computadora y mostró como podían ser aplicados en distintas materias. En el área de la biología matemática, Robert Winfree, biólogo teórico, aplicó los métodos de los sistemas dinámicos a los osciladores biológicos, principalmente a los ritmos circadianos (de 24 horas) y a los ritmos cardíacos. Desde 1980, mucha gente ha estado trabajando en los sistemas dinámicos, con valiosas contribuciones.

Introducción a los sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un sistema en el que una función describe la dependencia de un punto en el espacio con respecto del tiempo, es decir, su ubicación en el presente depende de su ubicación en el pasado, además la ubicación varía con el tiempo cuando no está en su estado de equilibrio.

En otras palabras, podemos decir que los sistemas dinámicos representan el estudio de los fenómenos deterministas, es decir, situaciones que dependen de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos que es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

Más formalmente, un sistema dinámico es una tripleta (X, A, φ) donde X es un conjunto (espacio métrico, variedad, etc) llamado espacio fase, A es un grupo a un parámetro de transformaciones de X en nuestro caso $A = \mathbb{R}$ los números reales (tiempo continuo) o $A = \mathbb{Z}$ los enteros (tiempo discreto) y φ es una función continua $\varphi : A \times X \rightarrow X$ donde $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$, son tales que satisfacen:

1. $\varphi_0 : X \rightarrow X$ es la función identidad: $\varphi_0(x_0) = x_0$
2. Las composiciones satisfacen $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{(t+s)}$ para todas $r, s \in A$

Dado $x_0 \in X$ el conjunto $\mathcal{O}(x_0) = \{\varphi_t(x_0) | t \in A\}$ se llama órbita del punto x_0 y es la trayectoria continua (discreta) del punto x_0 a lo largo del tiempo, en particular si $\mathcal{O}(x_0)$ es un único punto, entonces a x_0 lo llamamos **punto de equilibrio**.

Decimos que el sistema dinámico es diferenciable si X es una variedad diferenciable (espacio métrico con estructura diferenciable) y si además $\varphi_t : X \rightarrow X$ son diferenciables para el caso de $A = \mathbb{Z}$ o $\varphi : A \times X \rightarrow X$ es diferenciables para el caso de $A = \mathbb{R}$.

Ejemplos:

Ejemplo 1. [tiempo continuo]

Sean $X = A = \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $\varphi(t, x) = xe^t$ claramente es un sistema dinámico diferenciable, en particular veamos que:

$\varphi(0, x) = \varphi_0(x) = xe^0 = x$ es la identidad y

$\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_t(xe^s) = (xe^s)e^t = xe^{t+s} = \varphi_{(t+s)}(x)$.

$\mathcal{O}(1) = \{\varphi_t(1) = e^t | t \in A\}$ así que la órbita del punto 1 es la gráfica de la exponencial.

$\mathcal{O}(0) = \{\varphi_t(0) = 0e^t = 0 | t \in A\}$ así que la órbita del punto 0 es únicamente el punto cero, por lo tanto, 0 es un punto de equilibrio.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \varphi(t) \\ \varphi(0) = x_0 \end{cases}$$

La solución está dada por $\varphi(t) = x_0e^t$, lo que da pie al flujo $\varphi(t, x) = xe^t$.

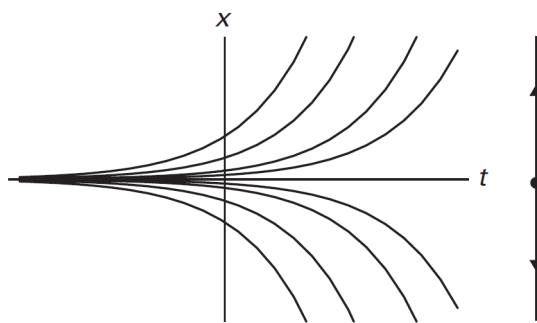


Figura 1: Gráfica de las soluciones y el espacio fase de $\varphi' = \varphi$

Ejemplo 2. [tiempo discreto]

Sean $X = \mathbb{S}^1 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ el círculo unitario centrado en el origen, $A = \mathbb{Z}$ y $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ está definida por:

$\varphi(t, (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) = (\cos(\theta + 45t), \operatorname{sen}(\theta + 45t))$, es decir,

$\varphi_t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos(\theta + 45t), \operatorname{sen}(\theta + 45t))$ es una rotación de $45t$ grados.

Veamos que:

$$\begin{aligned}\varphi(0, (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) &= \varphi_0(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ &= (\cos(\theta + 45(0)), \operatorname{sen}(\theta + 45(0))) \\ &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

es la función identidad, y

$$\begin{aligned}\varphi_t \circ \varphi_s(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) &= \varphi_t(\cos(\theta + 45s), \operatorname{sen}(\theta + 45s)) \\ &= (\cos(\theta + 45s + 45t), \operatorname{sen}(\theta + 45s + 45t)) \\ &= \varphi_{t+s}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

Con respecto a las órbitas veamos en particular que

$$\mathcal{O}((0, 0)) = \{(0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0, 1), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-1, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (0, -1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (0, 0)\}.$$

Así que la órbita del punto 0 regresa al punto donde inició, por lo tanto, $\mathcal{O}((0, 0))$ es lo que llamamos una órbita cerrada.

Este sistema dinámico se puede expresar como el **mapeo iterado o ecuación de diferencias finitas**:

$$\varphi_{t+1}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \varphi_t(\cos(\theta + 45), \operatorname{sen}(\theta + 45))$$

En general los sistemas dinámicos de tiempo continuo ($A = \mathbb{R}$) se expresan con **ecuaciones diferenciales**. Sea (X, \mathbb{R}, φ) un sistema dinámico diferenciable, entonces podemos definir el campo vectorial:

$$V(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(x) \right|_{t=0}$$

Este campo vectorial define una ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = V(x)$$

Entonces $\varphi_t(x)$ es la solución a la ecuación diferenciable con condición inicial x en $t = 0$.

Un teorema importante y complicado dice que el flujo $\varphi(t, x)$ es C^∞ si y sólo si, el campo vectorial $V(x)$ es C^∞ .

De la misma forma, en general, los sistemas dinámicos de tiempo discreto ($A = \mathbb{Z}$) se expresan con **mapeos iterados**. Sea (X, \mathbb{Z}, φ) un sistema dinámico diferenciable, entonces podemos definir el **mapeo iterado o ecuación de diferencias finitas**:

$$\varphi_{t+1}(x) = \varphi_t(\varphi(1, x)).$$

Además de clasificar los sistemas dinámicos como continuos o discretos, también se pueden clasificar como **Lineales** o **No lineales**.

Supongamos que tenemos un sistema dinámico continuo autónomo (F sólo depende de x y no de t) que cumple el principio de superposición (la combinación lineal de soluciones es nuevamente una solución) dado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = F(x)$$

Si x y y son soluciones, entonces decimos que el sistema es **lineal** si:

$$\dot{x} = F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$$

Si esta ecuación no se cumple, entonces decimos que el sistema dinámico es **no lineal**.

Los sistemas dinámicos lineales en general son fáciles de resolver y se pueden dar soluciones analíticas, mientras que en el caso de los no lineales, no siempre se pueden dar soluciones analíticas específicas, y en tal caso, se manejan aspectos geométricos y aproximaciones.

Los sistemas dinámicos pueden tener puntos de equilibrio de distinta naturaleza, estos pueden ser estables o inestables y pueden tener comportamientos complicados. Esta dinámica es la que nos interesa analizar.

Estas dinámicas están presentes en biología, cinética química, crecimiento poblacional, finanzas y en todas las actividades que la naturaleza nos muestra cada día. Tanto los fractales y el caos son sistemas dinámicos. Los sistemas dinámicos juegan ya un papel importante, inclusive en el arte, a través de los maravillosos conjuntos fractales que aparecen en el estudio de la dinámica de ciertas funciones en el plano complejo: los conocidos conjuntos de Julia y de Mandelbrot.

Como comentamos antes, los sistemas dinámicos pueden tener puntos de equilibrio y estos pueden ser estables o inestables. La siguiente figura nos muestran su naturaleza desde el punto de vista geométrico:

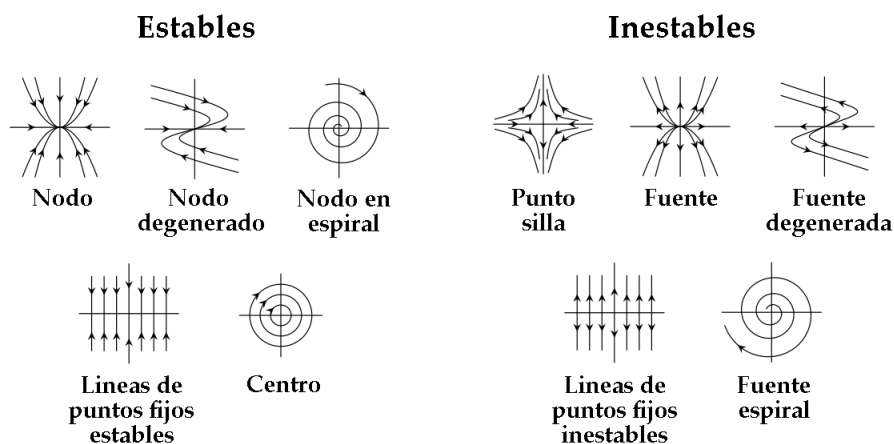


Figura 2: Puntos de equilibrio

Las aplicaciones de los sistemas dinámicos pueden ser tan diversas como: el manejo de una crisis económica, la competencia entre especies por el alimento y la supervivencia, la carrera armamentista, la modelación de un péndulo simple o doble, etc.

Los sistemas dinámicos caóticos se enmarcan en el campo de la dinámica no lineal, donde los procesos evolucionan de manera irregular e impredecible. Los sistemas caóticos tienen muchas aplicaciones en el estudio de la economía. Algunos sirven para modelar las variables económicas e intentar explicar la aperiocidad e irregularidad de los fenómenos económicos. Otros tratan de detectar comportamientos caóticos en un sistema dinámico que genera series de tiempo. Otra aportación, es la de aplicar el análisis y el diseño de los sistemas de control para diseñar políticas económicas que puedan estabilizar la economía.

Capítulo 2. Bifurcaciones.

La Teoría de las Bifurcaciones intenta explicar varios fenómenos que han sido descubiertos y descritos a través de los siglos. El pandeo de la varilla de Euler, la aparición de los vórtices de Taylor y el comienzo de las oscilaciones en un circuito eléctrico tienen una causa común: un parámetro físico específico cruza un umbral, y ese evento fuerza el sistema a un nuevo estado que difiere considerablemente del observado anteriormente. La teoría de la bifurcación provee la existencia matemática de escenarios de bifurcación observados en varios sistemas y experimentos. La palabra bifurcación por lo general se relaciona con un rompimiento de la simetría.

La dinámica de los campos vectoriales sobre una línea es muy limitada: todas las soluciones se estabilizan a un punto de equilibrio o divergen a $\pm\infty$. En los sistemas unidimensionales dependen en gran medida de los parámetros: la estructura cualitativa de los flujos puede cambiar cuando los parámetros varían. Los puntos fijos pueden ser creados o destruidos o su estabilidad puede cambiar. Estos cambios cualitativos producidos en la dinámica se llaman **bifurcaciones** y los valores de los parámetros en los cuales ocurren se llaman **puntos de bifurcación**. Cuando algún parámetro es variado, las bifurcaciones proporcionan modelos de transiciones e inestabilidades. Las bifurcaciones son importantes científicamente porque proveen modelos de transiciones e inestabilidades siempre que algunos controles de parámetros varían.

Matemáticamente hablando, ocurre lo siguiente: Al cambio de la apariencia geométrica y el comportamiento de un sistema dinámico, después de la variación de uno de los parámetros se le llama bifurcación. Es decir cuando hay un cambio cualitativo. Para entender esto mejor es importante primero definir cuando dos sistemas dinámicos son equivalentes o cualitativamente similares. Desde luego dos sistemas equivalentes deben tener el mismo número de puntos de equilibrio, el mismo número de órbitas cerradas y tener el mismo tipo de estabilidad, más aún el retrato fase de uno debe ser una deformación continua del otro.

Bifurcaciones para sistemas dinámicos continuos.

Definición: El sistema dinámico (X, A, φ) es topológicamente (geométricamente) equivalente al sistema dinámico (X, A, ϕ) , si hay un homeomorfismo (función biyectiva continua con inversa continua) $h : X \rightarrow X$ tal que envía órbitas del primer sistema dinámico en órbitas del segundo sistema dinámico conservando la dirección del tiempo. Más aún podemos pedir que $h : X \rightarrow X$ sea un difeomorfismo (función biyectiva diferenciable con inversa diferenciable)

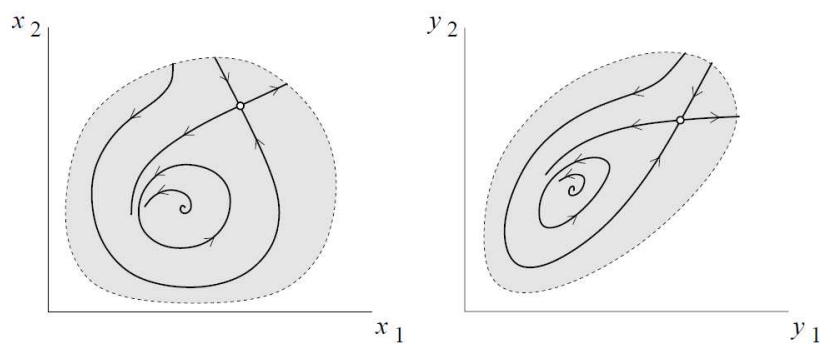


Figura 3: Sistema equivalentes.

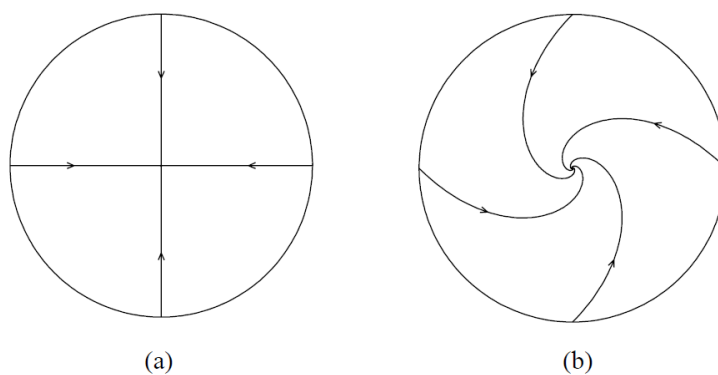


Figura 4: Puntos de equilibrio equivalentes.

Ahora podemos definir bifurcación más formalmente, consideremos los sistemas dinámicos que dependen del parámetro a :

$$\dot{x} = f(x, a)$$

Entonces cuando el parámetro a varía, los retratos fase varían, y hay dos posibilidades, que el sistema resultante sea topológicamente equivalente al original o su topología cambia, pueden aparecer nuevos puntos críticos, nuevas ciclos (órbitas cerradas), etc.

Definición: Una bifurcación es cuando al variar un parámetro de un sistema dinámico, da como resultado un sistema dinámico que no es topológicamente equivalente al original.

Como ejemplo consideremos el siguiente sistema dinámico en coordenadas polares:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(a - \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Aparece una bifurcación conocida como la bifurcación de Hopf:

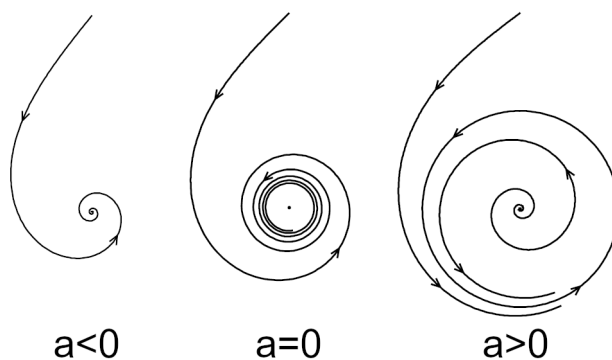


Figura 5: Bifurcación de Hopf

Para $a \leq 0$ el punto de equilibrio es un nodo o pozo estable, mientras que para $a > 0$ el punto de equilibrio es un nodo inestable y surge una órbita periódica o ciclo.

Bifurcaciones para sistemas dinámicos discretos.

Para comprender las bifurcaciones en el caso discreto consideremos la ecuación logística:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

Esta ecuación modela muchos fenómenos en la naturaleza, en particular el crecimiento de una población de una especie.

Consideremos el modelo $x_{n+1} = rx_n$ con $r > 0$ y supongamos que x_0 representa la población inicial. Después de un año la población será $x_1 = rx_0$ de la misma forma después de dos años tendríamos $x_2 = rx_1 = r^2x_0$ en general $x_n = r^n x_0$, entonces dependiendo del valor de r la población se extinguiría si $r < 1$, se mantendría constante si $r = 1$ y crecería infinitamente si $r > 1$. Ahora sin pérdida de generalidad supongamos que 1 representa el número máximo de individuos ideal y consideramos la iteración: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ de tal forma que si la población se acerca a uno entonces el término $(1 - x_n)$ tiende a cero y este factor impediría crecimientos infinitos, de hecho supongamos por un momento que $r = 2$ entonces $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n) = 2x_n - x_n^2$. Si graficamos x_{n+1} con respecto de x_n tenemos que:

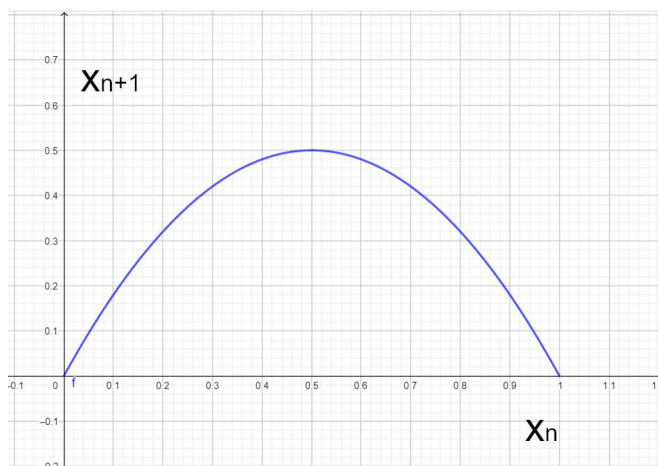


Figura 6: Crecimiento de un año con respecto al anterior.

Vemos que cuanto mayor sea el crecimiento del año n menor será al año siguiente.

Ahora siguiendo con $r = 2$ y $x_0 = .4$ tenemos que:

$$x_1 = 0.48$$

$$x_2 = 0.4992$$

$$x_3 = 0.49999872$$

$$x_4 = 0.4999999999$$

$$x_5 = .5$$

$$x_6 = .5$$

.

.

.

$$x_n = .5$$

La población converge rápidamente al valor .5 Veamos que pasa si cambiamos la condición inicial por $x_0 = .7$

$$x_1 = 0.42$$

$$x_2 = 0.4872$$

$$x_3 = 0.49967232$$

$$x_4 = 0.49999978525$$

$$x_5 = .5$$

$$x_6 = .5$$

.

.

.

$$x_n = .5$$

La población vuelve a converger rápidamente al valor .5, no importa cual sea nuestra condicional inicial, la población seguirá convergiendo a la **población de equilibrio** 0.5. Viendo que para r fija la población de equilibrio no depende de la condición inicial, entonces la pregunta interesante es cómo varía la población de equilibrio al variar el parámetro r . Por ejemplo, para $r \leq 1$ la población de equilibrio es 0 la población se extingue, para valores $1 < r < 3$ la población de equilibrio crece a medida que r crece, por ejemplo para $r = 2.6$ la población de equilibrio es 0.61538461538, para $r = 2.8$ la población de equilibrio es 0.64285714285, pero cuando $r > 3$ no hay una la población de equilibrio, la población oscila entre dos valores y a medida que r crece la población oscila entre más valores. Estos puntos donde hay un cambio son las bifurcaciones del sistema. A continuación vemos en el diagrama de bifurcaciones que hay un ingrediente extra el **Caos**.

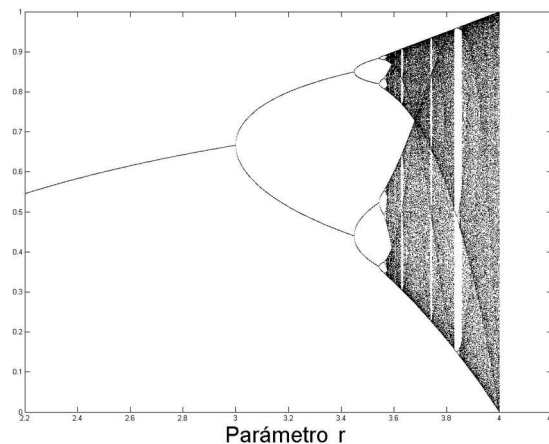


Figura 7: Diagrama de bifurcaciones de la ecuación logística

Capítulo 3.

Modelación de sistemas dinámicos.

En este capítulo trabajaremos sistemas dinámicos específicos y utilizando diversos programas vamos modelar su comportamiento. Primero definiremos algunos conceptos importantes.

Mapas iterados

Consideremos las iteraciones de funciones. Supongamos que f es una función y x_0 es un elemento del dominio de f . Las iteraciones de x_0 consisten en:

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Como vimos en el capítulo 1, todas estas iteraciones se llaman la órbita de x_0 . Ahora podemos escribir $x_{n+1} = f(x_n)$, a lo cual usualmente nos referimos como mapa, de tal manera, que la órbita de x se convierte en $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$

Los sistemas dinámicos en los que el tiempo es discreto, son conocidos como ecuaciones de diferencia, relaciones de recursividad, mapas iterados o simplemente mapas.

Los mapas surgen de diversas maneras:

1. Como herramientas para analizar el comportamiento de algunas ecuaciones diferenciales.
2. Como modelos de fenómenos naturales.
3. Como simples ejemplos del caos.

Puntos fijos

En general, si tenemos una función $f : X \rightarrow X$ y un número c en el dominio de f , c es un punto fijo de f si y sólo si $f(c) = c$.

Los puntos fijos o de equilibrio se pueden clasificar como estables o inestables según vimos en el capítulo 1. Un punto inestable es un punto fijo para el cual las iteraciones que empiezan cerca del punto fijo se moverán lejos del punto. Un punto estable es un punto fijo para el cual las iteraciones cerca del punto fijo se aproximan al punto o se quedan muy cerca de él.

Sea x^* tal que $f(x^*) = x^*$ un punto fijo. Entonces para determinar la estabilidad de x^* usamos el siguiente criterio:

- Si $|f'(x^*)| < 1$ el punto fijo es linealmente estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$ el punto fijo es inestable.

Supongamos que x_0 es tal que $x_n = x_0$. Entonces la órbita de x_0 está dada por

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

donde todos sus elementos son distintos, entonces decimos que x_0 tiene período n .

Ecuación logística y el número de Feigenbaum

Retomamos la ecuación logística del capítulo anterior:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2)$$

Como ya vimos dependiendo del parámetro r el comportamiento cualitativo cambia : estados estables, ciclos periódicos de diferentes longitudes y caos. Una de las metas importantes en el estudio de ecuaciones de diferencias finitas no lineales es entender las bifurcaciones que ocurren cuando se cambia un parámetro. Existen muchos tipos diferentes de bifurcaciones. Por ejemplo, en la ecuación lineal $x_{n+1} = rx_n$, la cual decae a cero cuando $0 < r < 1$. Para $r > 1$, sin embargo, el comportamiento cambia a un crecimiento exponencial. El punto de bifurcación, o el punto en el cual ocurre un cambio en r , es en $r = 1$. Los sistemas no lineales pueden mostrar otros tipos de bifurcaciones. Por ejemplo, cambiando un parámetro se puede inducir que un punto fijo estable se convierta en un punto inestable, se puede ocasionar un cambio de comportamiento de estado estable a un ciclo periódico. En los mapas en una bifurcación se puede dar la **duplicación del período** que se presenta al variar cierto parámetro y en la primera bifurcación se generan dos soluciones estables, luego cuatro, luego ocho y así sucesivamente hasta el caos.

La ecuación de diferencias finitas $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ y muchos otros sistemas no lineales, muestran una secuencia de bifurcaciones con **duplicación del período** cuando un parámetro se cambia ligeramente.

MODELACION DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Utilizando el programa **diabifurca** modelamos la bifurcación de Feigenbaum de la ecuación logística (véase el apéndice de programas).

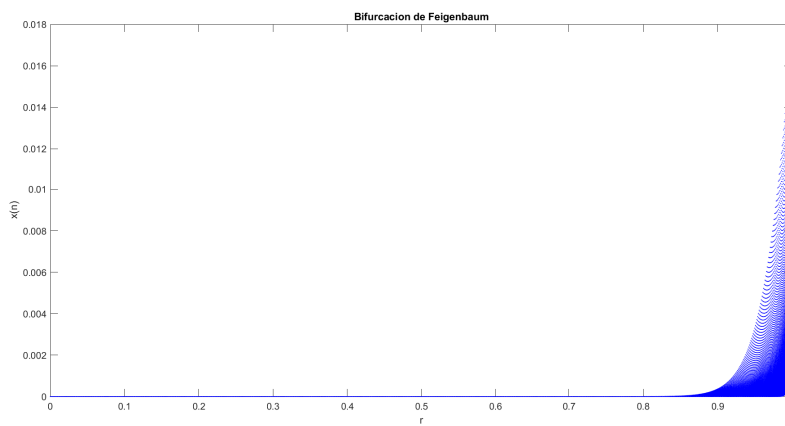


Figura 8: Gráfica cuando $0 < r < 1$. Extinción de especies.

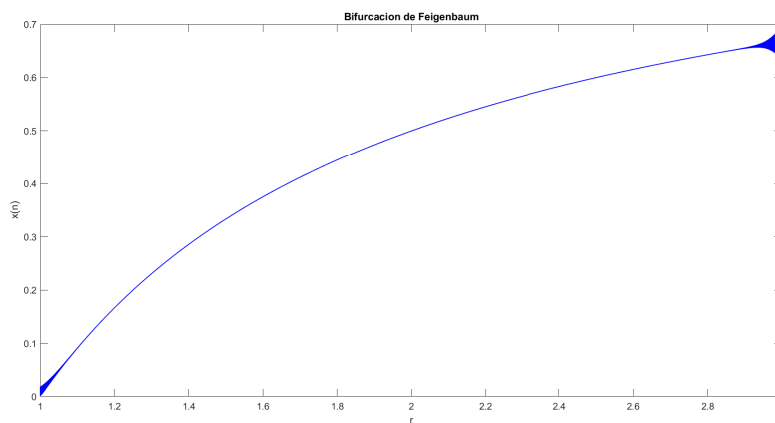


Figura 9: Gráfica cuando $1 < r < 3$.

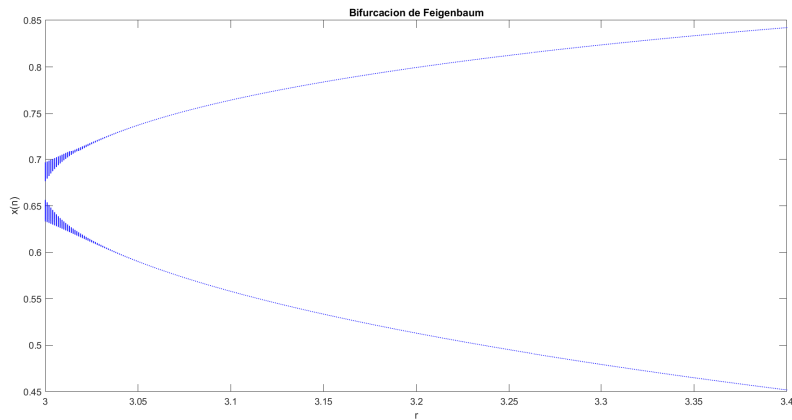


Figura 10: Gráfica cuando $3 < r < 3.4$. Bifurcación de doble periodo.

Mitchell J. Feigenbaum estudió las bifurcaciones de doble periodo para la ecuación $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ e hizo uno de los mayores descubrimientos en la dinámica no lineal. Feigenbaum observó que cuando el parámetro r varía en la ecuación $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, existen sucesivas duplicaciones en el periodo de oscilación. Las estimaciones numéricas de los valores de r en las sucesivas bifurcaciones dieron los siguientes resultados:

- Para $3.0000 < r < 3.4495$, existe un ciclo estable de periodo 2.
- Para $3.4495 < r < 3.5441$, existe un ciclo estable de periodo 4.
- Para $3.5441 < r < 3.5644$, existe un ciclo estable de periodo 8.
- Para $3.5644 < r < 3.5688$, existe un ciclo estable de periodo 16.

- Cuando r es cercano a 3.570, existen ciclos estables de periodo 2^n , donde el período de los ciclos se incrementa conforme se acerca a 3.570.
- Para valores de $r < 3.570$, existen amplios rangos de soluciones periódicas así como un comportamiento aperiódico.

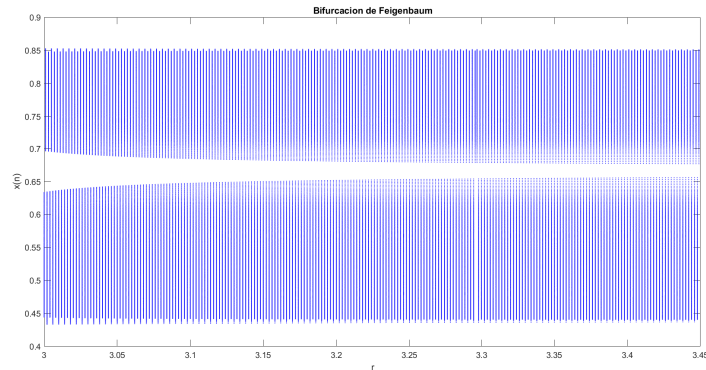


Figura 11: Gráfica cuando $3.0000 < r < 3.4495$

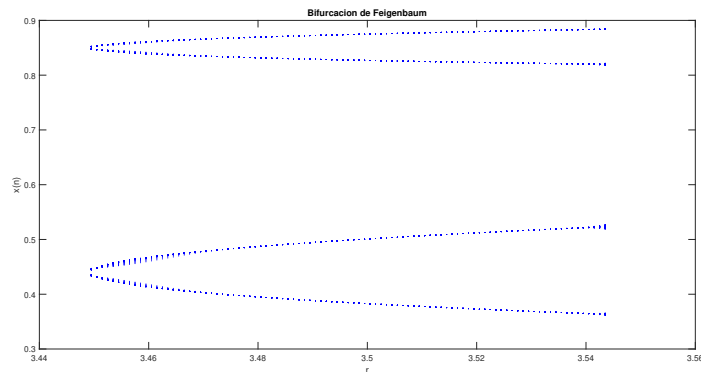


Figura 12: Gráfica cuando $3.4495 < r < 3.5441$

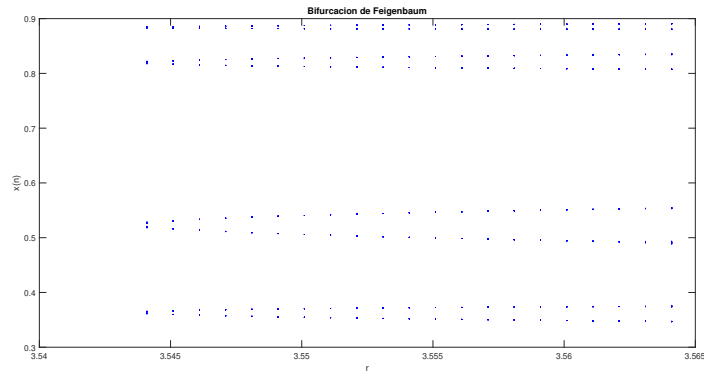


Figura 13: Gráfica cuando $3.5441 < r < 3.5644$

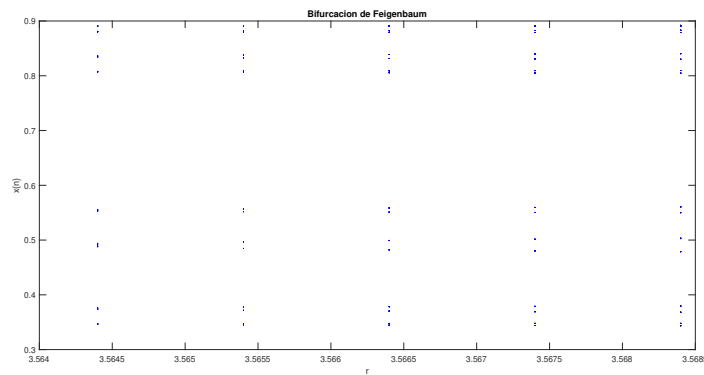


Figura 14: Gráfica cuando $3.5644 < r < 3.5688$

Estos resultados ilustran la secuencia de periodos de doble bifurcación en $r = 3.0000$, $r = 3.4495$, $r = 3.5441$ y $r = 3.5644$ con bifurcaciones adicionales de doble período a medida que r se incrementa. Esta transición de ciclos periódicos estables al comportamiento caótico en $r = 3.570$ es llamado **ruta de doble periodo al caos**.

Notamos que el rango de valores para cada ciclo periódico sucesivo es cada vez más estrecho. Usaremos Δ_n para definir el rango de los distintos valores de r en un determinado periodo de n ciclos. Por ejemplo, tenemos que para los valores $3.4495 < r < 3.5441$ se obtiene un periodo de 4 ciclos, entonces $\Delta_4 = 3.5441 - 3.4495 = 0.0946$. De similar manera $\Delta_8 = 3.5644 - 3.5441 = 0.0203$.

La razón

$$\frac{\Delta_4}{\Delta_8} = \frac{0.0946}{0.0203} = 4.6601$$

Ahora considerando los periodos dobles sucesivos, Feigenbaum descubrió que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{2n}} = 4.6692... \quad (3)$$

La constante, 4.6692... es llamado **número de Feigenbaum**. Este número aparece no solamente en el modelo teórico simple que se ha estado discutiendo, además también en otros modelos teóricos y en sistemas experimentales en los cuales existe una ruta de doble periodo al caos.

Una manera de representar gráficamente bifurcaciones complejas en ecuaciones de diferencias finitas es graficando valores asintóticos de la variable como una función del parámetro que varía. Este tipo de gráfica es llamado **diagrama de bifurcación**. La figura 15 muestra un diagrama de bifurcación de la ecuación $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Utilizando el programa **diabifurca**, modelamos la Bifurcación de Feigenbaum, los parámetros están implícitos en el programa (véase el apéndice de programas).

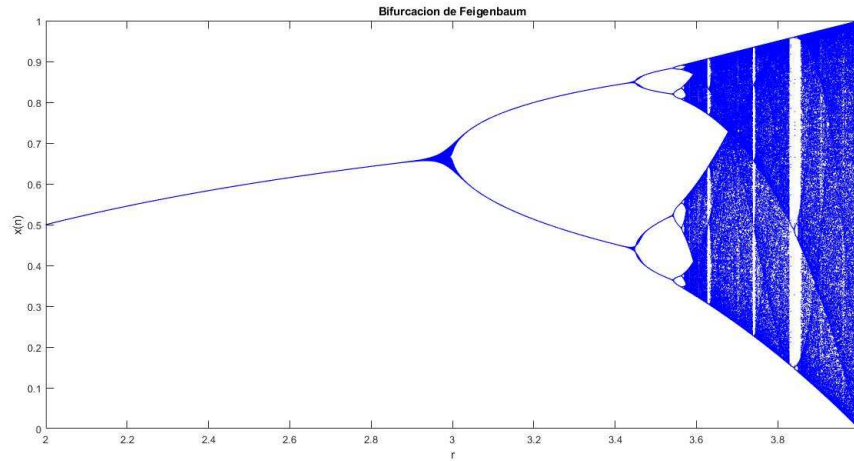


Figura 15: Bifurcación de Feigenbaum.

Diagrama de Telaraña

En matemáticas un diagrama de telaraña o diagrama de Verhulst, es un método gráfico utilizado en el campo de los sistemas dinámicos para investigar el comportamiento cualitativo de las ecuaciones en diferencias finitas.

La construcción de la telaraña es la siguiente:

Dada una función f , $x_{n+1} = f(x_n)$ y un punto inicial x_0 grafique $(x, f(x))$ y grafique la función identidad $y = x$. Trace una línea recta perpendicular al eje y desde el punto x_0 hasta intersectar el punto $(x_0, f(x_0))$. Como $f(x_0)$ es el punto x_1 y recordando que $x_{n+1} = f(x_n)$, para llegar al punto x_1 en el eje x se procederá a trazar una línea paralela al eje y desde el punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$ hasta intersectar la función identidad que será en el punto (x_1, x_1) . Una vez hecho esto, vuelva a trazar una línea recta perpendicular al eje y desde el punto (x_1, x_1) hasta intersectar el punto $(x_1, f(x_1))$ y repita el mismo proceso realizado con el punto $(x_0, f(x_0))$. Repita el proceso n tiempos

para generar los primeros n puntos en la órbita. Utilizando el programa **grapufijo**, modelamos la gráfica de la telaraña con los siguientes parámetros `grapufijo(0.1,0,2.9,200)` (véase el apéndice de programas).

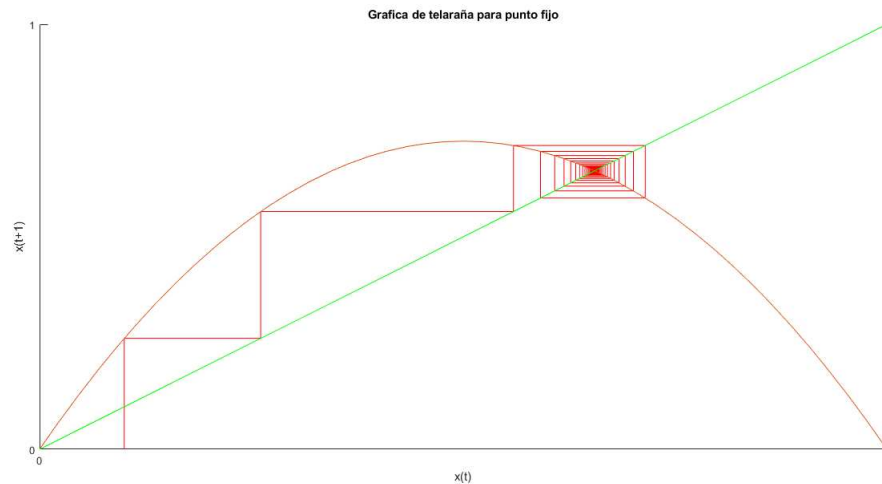


Figura 16: Gráfica de telaraña para punto fijo.

Punto Fijo en $x_{n+1} = 0.655170437176865739$

Punto Fijo en $x_n = 0.655174610017825398$

Lenguas de Arnold

El término lenguas de Arnold fue acuñado para describir regiones en un espacio de parámetros en donde un oscilador fue fijado en la fase de un oscilador forzado de manera externa. Originalmente, las lenguas de Arnold comenzaron a ser usadas en modelos de mapas circulares de arritmias cardiacas, donde los ritmos anormales se asociaron a la competen-

cia entre dos marcapasos y son una importante característica del comportamiento de osciladores acoplados, uno empuja al otro. La familia de mapas circulares sirve como modelo matemático útil para explicar fenómenos biológicos. [7]

En matemáticas, particularmente en sistemas dinámicos, las lenguas de Arnold son un fenómeno pictórico que ocurre al visualizar cómo el número de rotación de un sistema dinámico, u otra propiedad invariante relacionada del mismo, cambia según dos o más de sus parámetros. Se ha observado que las regiones de número de rotación constante, para algunos sistemas dinámicos, forman figuras geométricas que se asemejan a lenguas en cuyo caso se denominan lenguas de Arnold.[7]

La existencia de las lenguas de Arnold en el mapa circular es conocida desde hace más de cincuenta años. Existen diferentes técnicas numéricas para poder visualizarlas. El algoritmo para la identificación de las lenguas de Arnold se basa en dos sencillos pasos. Primero, el sistema debe ser iterado lejos de las condiciones iniciales hasta que todos los procesos trascendentes cesen. Segundo, es posible identificar el efecto de la fase encerrada en el atractor estacionario discreto. Los diferentes modos de las fases encerradas se pueden mostrar en colores distintos o en la concentración de puntos de cada fase como se muestra en la gráfica siguiente. La base de programación para este caso particular es el mapa circular obtenido con la fórmula $\theta_{i+1} = \theta_i + \omega + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_i)$. [8]

El funcionamiento orgánico de un sistema complejo es po-

sible gracias a la sincronización de sus diferentes componentes o subsistemas. Es así que, el estudio de sistemas interactuantes constituye un tema central en cualquier disciplina científica. Sin embargo, el análisis matemático de estos sistemas es un problema difícil; de hecho, el estado actual del conocimiento -científico y matemático- aún dista mucho de poder comprender todos los posibles comportamientos de los sistemas complejos. El problema radica, por un lado, en la gran cantidad de componentes, variables y parámetros que pueden estar interactuando, lo que obliga a analizar simplificaciones del problema; y por otro, a que las interacciones generalmente son no lineales. Un paso fundamental en el estudio de estas cuestiones es analizar el forzamiento de osciladores no lineales, asunto sobre el cual se ha vertido una gran cantidad de trabajo.

De manera general, podemos afirmar que en la naturaleza solamente hay dos tipos de dinámicas: las que presentan oscilaciones o las más o menos impredecibles, como las que se observan en los llamados sistemas caóticos. De hecho, a ciertas escalas el universo pareciera presentar algún orden regido por leyes precisas (razón por la cual se le llama Cosmos). El entendimiento humano ha permitido ir descifrando algunas de estas leyes y (parcialmente) comprender este Cosmos, lo que, a su vez ha redituado en alcanzar altos niveles en materia de tecnología y salud.

Esto ha sido posible gracias a la capacidad de abstraer y modelar sistemas dinámicos. La modelación de las dinámicas oscilatorias ha sido un reto y una inquietud presente en la mente de los investigadores desde los inicios de la cien-

cia moderna; ha sido también, en buena medida, el motor de desarrollo del cálculo diferencial y el análisis matemático, entre otras áreas de las matemáticas.

En la modelación de oscilaciones esencialmente se presentan dos problemas: por un lado, modelar sistemas que presenten oscilaciones autosostenidas (esto es, autónomas de cualquier estímulo externo; a estos sistemas se les llama osciladores), y por otro, determinar lo que sucede cuando estos sistemas son sometidos a perturbaciones o estimulaciones (forzamientos) por parte de otros sistemas, y el acoplamiento de varios osciladores. Un problema típico de esto último es: si un oscilador recibe un estímulo periódico, determinar condiciones para que la respuesta del sistema esté sincronizada con el estímulo.

Desde el punto de vista del análisis matemático, la complejidad de los modelos de osciladores se debe a que éstos suelen ser no lineales y de dimensión mayor que uno. Comúnmente, los osciladores se modelan en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

con $F : R^n \rightarrow R^n$ como los sistemas unidimensionales no son capaces de presentar oscilaciones autónomas, ya que todas sus soluciones son monótonas, oscilaciones autosostenidas ocurren en sistemas con al menos dos variables de estado interactuando ($N \geq 2$). En la estructura del modelo, el forzamiento se traduce en una dependencia temporal del sistema de ecuaciones diferenciales, de donde un modelo minimalista del oscilador forzado tendrá la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

No obstante, existen otras alternativas para modelar osciladores.

Utilizando el programa **tonguearnold**, modelamos las Lenguas de Arnold con los siguientes parámetros `tonguearnold(0.005,0.001,450)` (véase el apéndice de programas).

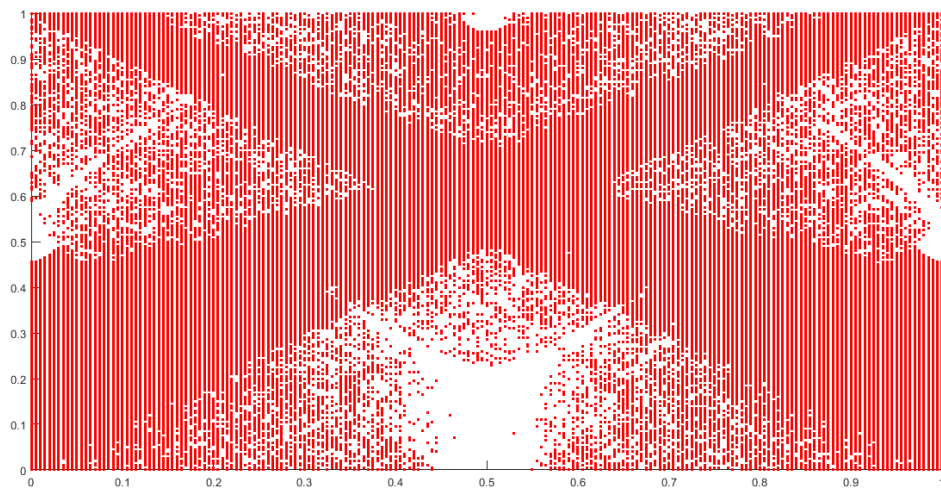


Figura 17: Lenguas de Arnold.

Fractales

La palabra **fractal** viene del adjetivo Latino *fractus*. El verbo correspondiente en Latín *frangere* significa "romper": crear fragmentos irregulares [2].

En el pasado, las matemáticas se ocupaban en gran medida de conjuntos y funciones en los cuales los métodos del cálculo clásico podían ser aplicados. Los conjuntos o funciones que no eran lo suficientemente suaves o regulares tendían a ser ignorados como "patológicos" y que no valían la pena ser estudiados. Recientemente, esto ha cambiado, los conjuntos irregulares proveen una mucho mejor representación de muchos fenómenos naturales que los que hacen las figuras de la geometría clásica.

Los fractales describen muchos de los patrones fragmentados e irregulares que nos rodean, y nos llevan a teorías de todo tipo por medio de la identificación de cierto tipo de familia de sombras. Resultan ser una descripción apropiada de muchas formas naturales que ocurren, tales como montañas, nubes, árboles, riveras y otras estructuras. Su ubicuidad y conexión a la geometría natural valida el sentido de que las dinámicas no lineales son más normativas que las dinámicas lineales. La estructura fractal es una característica importante de los fenómenos caóticos. Sin embargo, la fractalidad sola no es una condición suficiente para el caos, ni siquiera todos los sistemas que exhiben estructura fractal pueden ser considerados caóticos.

Los fractales son objetos auto-similares, es decir, simple-

mente consisten en pequeñas copias de ellos mismos. En este sentido, la palabra auto-similares no necesariamente significa iguales, más bien se debe interpretar en un sentido estadístico que un objeto es auto-similar si sus partes, en promedio, son similares a la totalidad.

Conjunto de Mandelbrot

Es uno de los fractales más famosos e interesantes, se obtiene de la siguiente forma: dado $c \in \mathbb{C}$ se construye una sucesión por recursividad:

$$\begin{cases} z_0 = 0 & \text{(termino inicial)} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c & \text{(sucesión recursiva)} \end{cases}$$

Si ésta sucesión queda acotada, entonces se dice que c pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo. Por ejemplo tomemos $c = 1$ entonces la sucesión queda de la siguiente forma:

$$z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 5, z_4 = 26, \dots$$

esta sucesión diverge, entonces no está acotada, por lo tanto $c = 1$ no está en el conjunto de Mandelbrot. Ahora tomemos el caso de $c = -1$, entonces la sucesión queda de la siguiente forma:

$$z_0 = 0, z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = -1, z_4 = 0, \dots$$

la sucesión oscila entre 0 y -1 , entonces está acotada, por lo tanto $c = -1$ si está en el conjunto de Mandelbrot.

En la siguiente figura modelamos el conjunto de Mandelbrot obtenido con el programa: **conjuntomandelbrot(xi,xf,yi,yf,h,iter)**, con los parámetros **conjuntomandelbrot(-2.5,1.2,-1.5,1.5,0.005,50)** (véase el apéndice de programas).

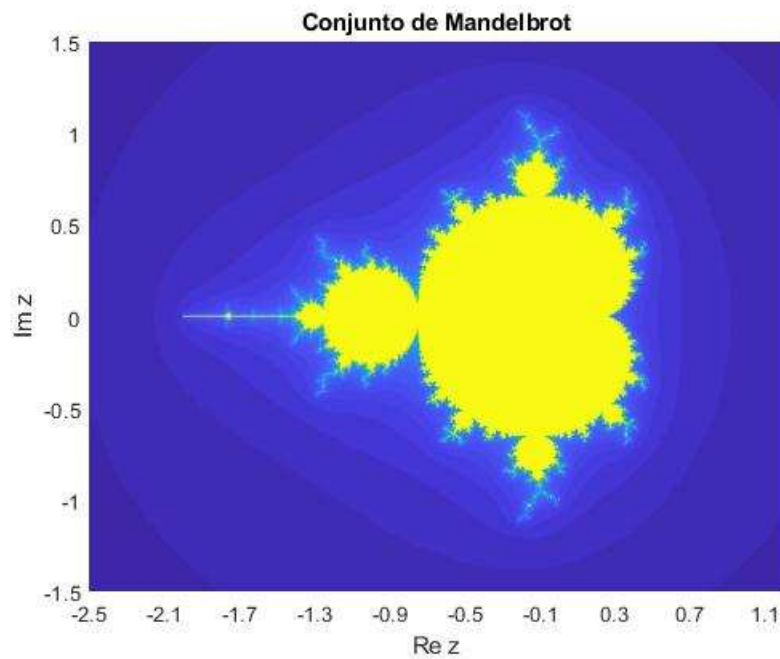


Figura 18: Conjunto de Mandelbrot.

Mediante iteraciones se puede mostrar que los puntos $c \in \mathbb{C}$ situados en el bulbo principal, es decir el más grande, la sucesión se estabiliza en un punto, para los puntos situados en el bulbo secundario como $c = -1$, la sucesión oscila entre 2 puntos, para los puntos situados en el bulbo alineado al secundario y el principal, la sucesión oscila entre 4, y si seguimos de esta forma encontraremos puntos cuya sucesión oscila entre 8, entre 16, entre 32... , etc hasta llegar a la parte caótica que se encuentra en la aguja del conjunto, así el conjunto de Mandelbrot tiene un diagrama de bifurcaciones asociado como lo ilustra la siguiente figura:

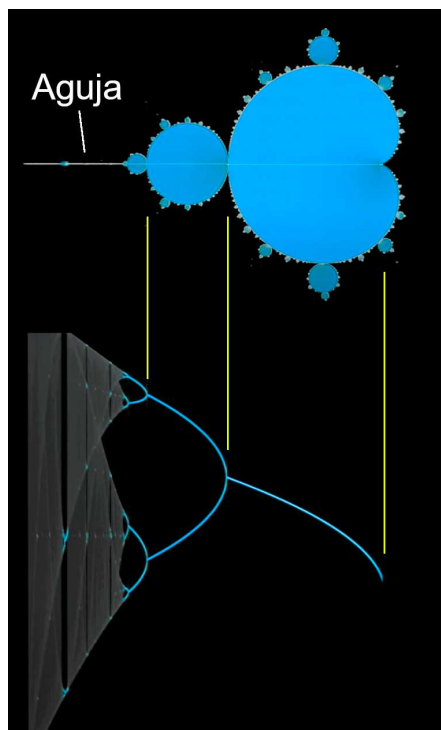


Figura 19: Diagrama de bifurcaciones del conjunto de Mandelbrot

Atractores extraños

Primeramente, definimos el caos como las **dinámicas aperiódicas y acotadas en un sistema determinístico con una dependencia sensible a las condiciones iniciales**. Cada uno de estos términos tiene un significado específico.

Aperiódica. Significa que el mismo estado nunca se repite dos veces. Examinando los valores numéricos que se obtienen de distintas iteraciones para la misma ecuación muestra este fenómeno. Sin embargo, en la práctica, ya sea mediante iteraciones gráficas o usando sistemas de computo de precisión finita, eventualmente, retornaremos al mismo valor. Aunque una simulación con computadora o iteración gráfica siempre deja alguna duda acerca del comportamiento periodico, la presencia de ciclos muy largos o de dinámicas aperiódicas en simulaciones computacionales es una evidencia parcial para la existencia del caos.

Acotado. Significa que para iteraciones sucesivas el estado del sistema permanece en un rango finito y no se aproxima a $+\infty$ o $-\infty$.

Determinístico. Significa que existe una regla bien definida con términos no aleatorios que gobiernan la dinámica del sistema. Para una dimensión, ecuaciones de diferencias finitas, "determinístico" significa que para cada posible valor de x_t , existe un simple valor para $x_{t+1} = f(x)$. En principio, para un sistema determinístico s_0 puede usarse para calcular todos los posibles valores de x_t .

Dependencia sensible a las condiciones iniciales. Significa que dos puntos que están inicialmente cerca se apartarán a medida que pase el tiempo. Esto es un aspecto esencial del

caos. Lo que quiere decir que podemos predecir lo que pasa en lapsos cortos de tiempo, pero a tiempos muy largos no podremos hacer predicciones, ya que no tendremos la certeza de la condición inicial para un sistema real. En contraste, para ecuaciones de diferencias finitas con puntos fijos estables o ciclos, dos condiciones iniciales ligeramente diferentes pueden llevarnos al mismo punto fijo o ciclo.

Un atractor es un objeto geométrico que caracteriza el comportamiento a largo plazo de un sistema. En esencia, un atractor funciona como una representación abstracta de flujo o movimiento, de un sistema 'almacenando' información acerca del comportamiento de un sistema a lo largo del tiempo.

Diversos estudios de los atractores revelan tres regímenes de comportamiento común que emanan de ecuaciones diferenciales no lineales creando atractores cuya forma es única. Un punto estable genera un **punto atractor** en el cual los datos son atraídos a un solo punto del mapeo. Un periodo de oscilación estable genera un mapa circular o ciclo límite a medida que los datos giran hacia adelante y hacia atrás entre puntos matemáticos consistentes. El atractor caótico es representado por una variedad de formas únicas dando como resultado el etiquetar estos atractores como **atractores extraños** los cuales son los más dominantes en muchos de los sistemas.

Un **atractor extraño** es un atractor que exhibe una dependencia sensible en las condiciones iniciales, esto quiere decir, pequeños cambios en las condiciones iniciales podrían producir grandes efectos en las salidas finales.

En los sistemas caóticos ocurre un fenómeno muy curioso, sabemos lo que sucede pero desconocemos las razones. Por ejemplo, no sabemos que es lo que causa una dependencia

sensible en las condiciones iniciales, ó como una ecuación diferencial puede generar un atractor fractal. Los atractores extraños presentan dos propiedades difíciles de reconciliar.

Atractor de Rössler

El atractor de Rössler es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales estudiadas por Otto E. Rössler, quien se inspiró en una máquina para sacar caramelos. Estas ecuaciones diferenciales definen un sistema dinámico del tiempo-continuo que muestra dinámicas caóticas asociadas con las propiedades fractales del atractor.

El sistema de Rössler sólo tiene una no linealidad cuadrática xz . Las ecuaciones que lo definen son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

Utilizando el programa **Rossler**, modelamos el Atractor de Rossler, los parámetros están implícitos en el programa (véase el apéndice de programas).

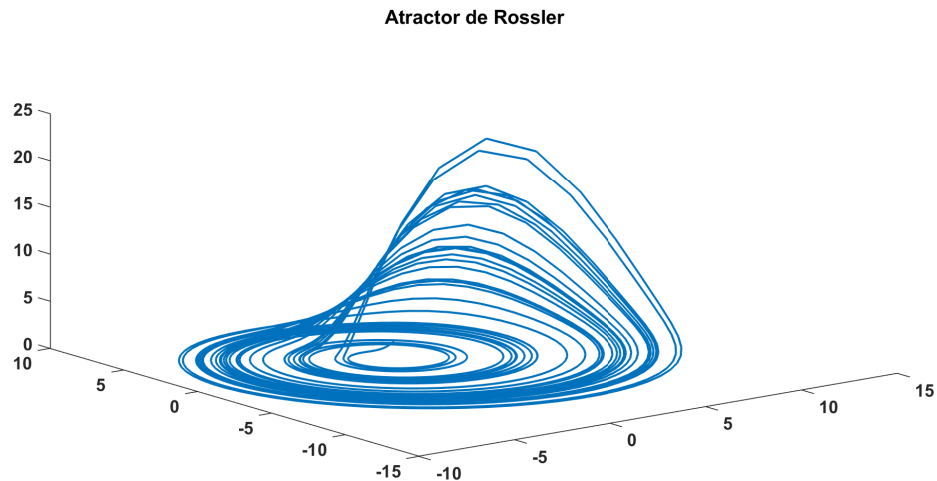


Figura 20: Atractor de Rossler.

Como hemos mencionado, los cambios cualitativos en los sistemas dinámicos son llamados bifurcaciones y los valores de parámetro en los cuales ocurren estos cambios son llamados puntos de bifurcación. En la bifurcación del sistema de Rössler ocurre que uno de los tres valores de parámetro varía mientras que los otros dos parámetros se mantienen fijos. El efecto de los tres parámetros en el atractor de Rössler se muestra en las figuras 6, 7 y 8, respectivamente.

Una mejor manera de observar el comportamiento general del sistema acorde a distintos valores del parámetro, es graficar las órbitas como una función de los parámetros. De esta

manera, graficando la órbita de los puntos x en el eje vertical contra los valores de cualquiera de los parámetros a , b y c a lo largo del eje horizontal, obtendremos la gráfica llamada diagrama de bifurcación.

Diagrama de bifurcación para a :

Aquí, b y c están fijas en 0.2 y 5.7 respectivamente, a es la que cambia. El diagrama muestra que cuando a se incrementa, el comportamiento caótico del atractor se incrementa. Cuando $a=2$, el comportamiento es normal. Más allá de este valor, surge el comportamiento caótico.

Utilizando el programa `bifurcacionRosslerA(x0,b,c,ini,fin,h)`, modelamos la bifurcación de Rössler para el parámetro a usando `bifurcacionRosslerA([1 1 0],0.2,5.7,0.1,0.38,0.001)` (véase el apéndice de programas).

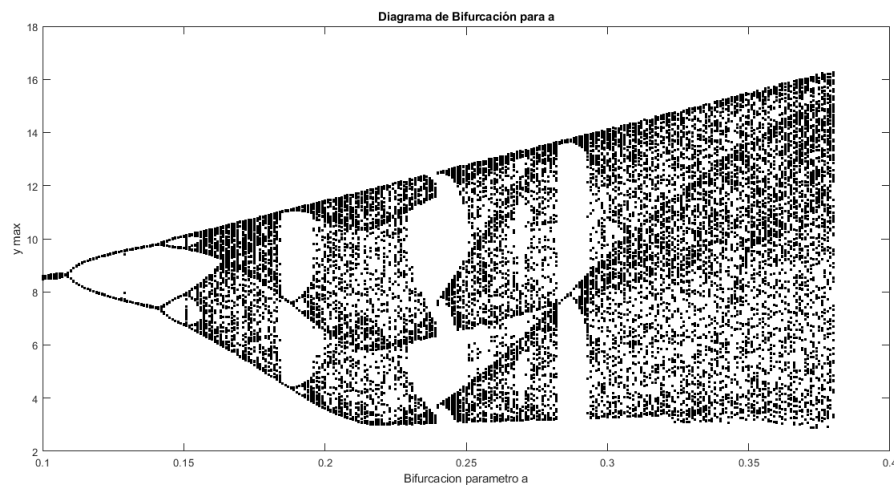


Figura 21: Bifurcación de Rössler para el parámetro a .

Diagrama de bifurcación para b :

Aquí, a y c están fijas en 0.2 y 5.7 respectivamente, b es la que cambia. Cuando b se aproxima a cero el atractor se aproxima a infinito. Comparativamente a los otros parámetros, la variación de b genera un rango más grande cuando ocurren los periodos 3 y 6. En contraste con a y c , conforme b incrementa su valor converge al periodo 1 y el comportamiento caótico disminuye.

Utilizando el programa `bifurcacionRosslerB(x0,a,c,ini,fin,h)`, modelamos la bifurcación de Rössler para el parámetro b usando `bifurcacionRosslerB([1 1 0],0.2,5.7,0.1,2,0.01)` (véase el apéndice de programas).

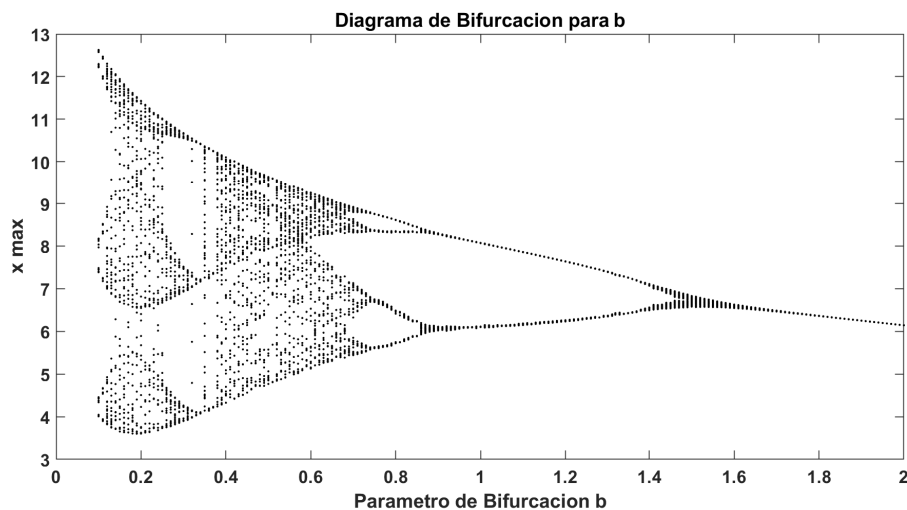


Figura 22: Bifurcación de Rössler para el parámetro b .

Diagrama de bifurcación para c:

Este diagrama de bifurcación muestra que cuando los valores de c son bajos se presenta periodicidad, pero cuando el valor de c incrementa el comportamiento caótico se presenta. Este patrón se repite cuando c se incrementa y existen secciones de periodicidad intercalada con periodos de caos, aunque la tendencia es hacia órbitas periódicas más grandes en las secciones periódicas donde c incrementó. Por ejemplo, el periodo de una órbita aparece para valores de c alrededor de 2.7 y no vuelve a aparecer en el diagrama de bifurcación. El mismo fenómeno se presenta con periodo tres; hasta $c=5.3$, aparecen órbitas de tres periodos, pero después ya no aparecen. Utilizando el programa `bifurcacionRosslerC(x0,a,b,ini,fin,h)`, modelamos la bifurcación de Rössler para el parámetro c usando `bifurcacionRosslerC([1 1 0],0.2,0.2,1,35,0.05)` (véase el apéndice de programas).

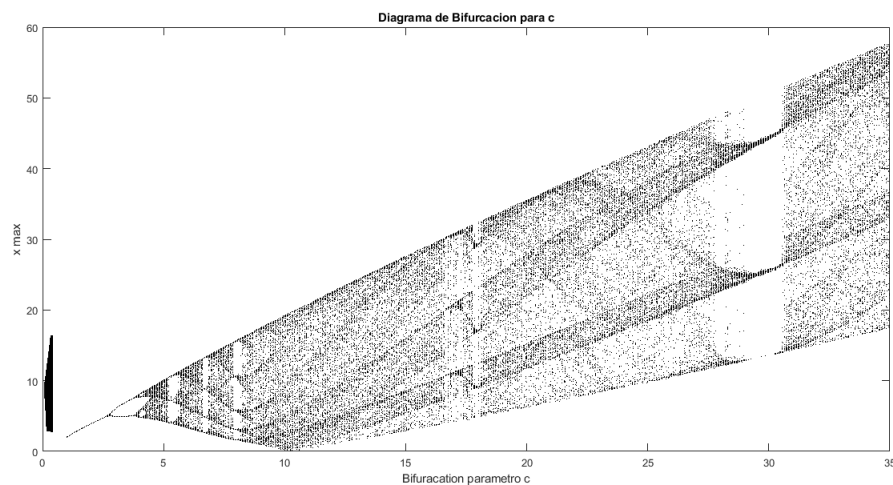


Figura 23: Bifurcación de Rössler para el parámetro c .

Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es un concepto introducido por Edward Lorenz en 1963. Este sistema tridimensional se derivó de un modelo drásticamente simplificado de rodillos de convección en la atmósfera. Surgió de la necesidad de poder predecir el clima.

Las ecuaciones de Lorenz son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(b - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases}$$

donde $a, b, c > 0$, usualmente $a = 10$, $c = \frac{8}{3}$ y b es variado. El sistema aparece en láseres, en generadores eléctricos y en determinadas ruedas de agua.

Lorenz descubrió que este sistema podía tener dinámicas extremadamente erráticas: en una amplia gama de parámetros, las soluciones oscilan irregularmente, nunca se repiten de manera exacta dado que tienen una dependencia sensible a las condiciones iniciales, esto es dos soluciones con condiciones iniciales muy cercanas que difieren en uno de los parámetros por muy poco resultan en soluciones que evolucionan de forma muy distinta al correr el tiempo. Algo muy interesante de

estas soluciones es que aunque su comportamiento sea totalmente distinto a mediano plazo ellas permanecen en una región acotada del retrato fase.

En la siguiente imagen ilustramos la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema, se tomaron tres condiciones iniciales extremadamente cercanas y al correr el tiempo los estados de las soluciones empezaron a separarse. Esto indica que es imposible predecir el clima a largo plazo, debido a que cualquier variación a una solución por muy pequeña que esta sea la solución será completamente distinta a la original a mediano plazo.

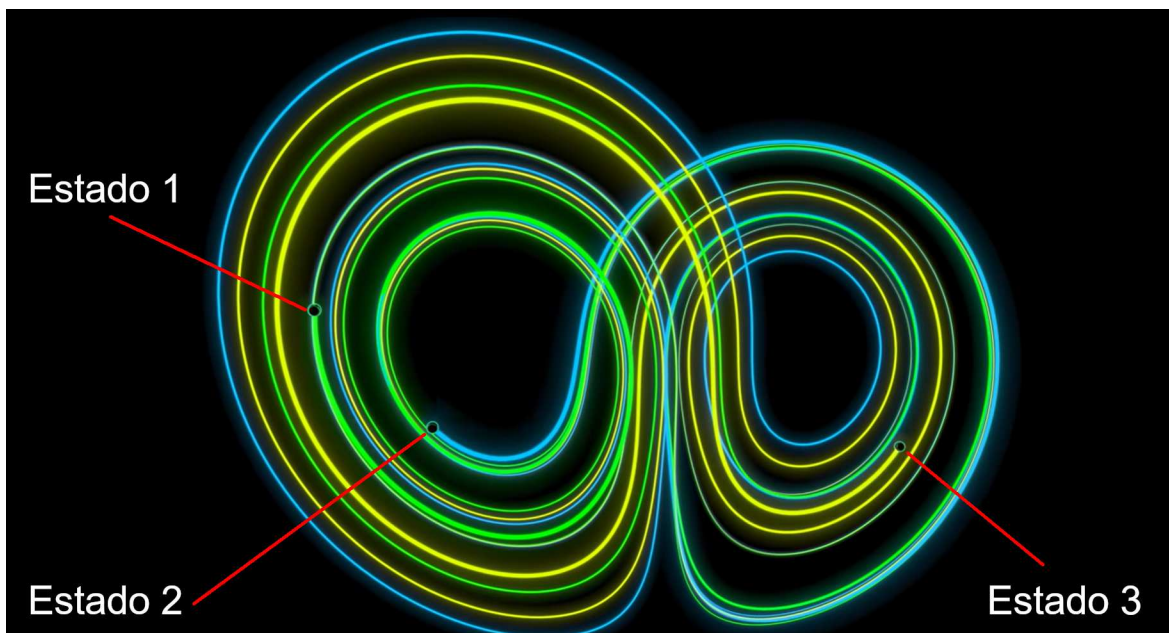


Figura 24: divergencia de soluciones en el sistema de Lorenz.

Sin embargo todas las soluciones se mantienen acotadas, es más si tomamos cualquier número de condiciones iniciales y vemos como evolucionan, sucede que todas las soluciones se mueven hacia un objeto, este es el Atractor de Lorentz. Utilizando el programa **atractorlorenz**, modelamos el Atractor de Lorentz, los parámetros están implícitos en el programa (véase el apéndice de programas).

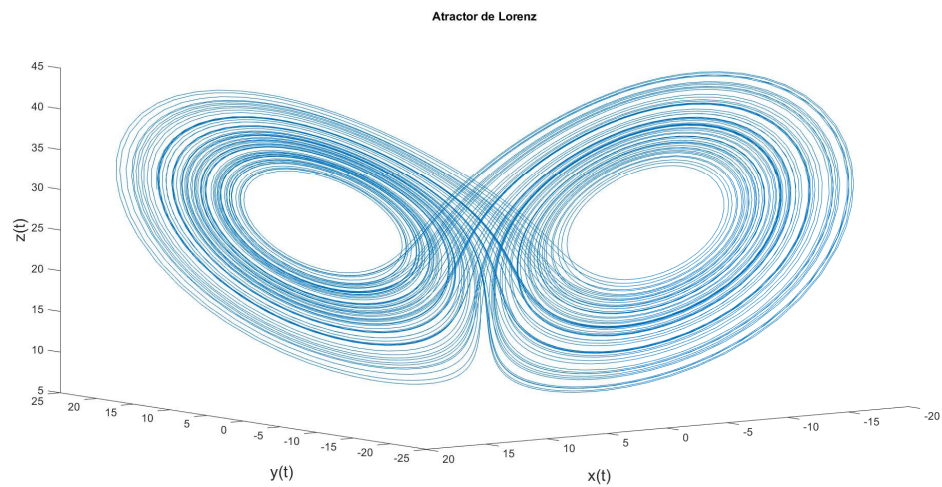


Figura 25: Atractor de Lorentz.

Aplicaciones a los circuitos eléctricos

Modelación por computadora de algunos ejemplos

Circuito de Chua

Para que pueda existir caos en un circuito eléctrico (sin entradas) construido con resistencias, inductores y capacitores, éste debe contener:

- 1) Al menos un elemento no lineal,
- 2) Mínimo un resistor locamente activo
- 3) Al menos tres elementos almacenadores de energía [9].

El circuito de Chua es un modelo no lineal y a determinados valores genera caos y produce un sinnúmero de comportamientos, incluso toda una familia de atractores extraños [10]. El circuito de Chua es un circuito simple, autónomo y de tercer orden, pero aún así, es un sistema caótico que se puede implementar con mucha facilidad [11].

En la siguiente figura se muestra el diagrama del circuito de chua.

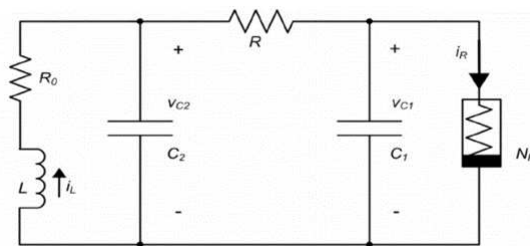


Figura 26: Circuito de Chua, contiene un inductor L , dos capacitores C_1 y C_2 , una resistencia R , la resistencia interna del inductor R_0 y un resistor no lineal $N - R$ (diodo de Chua). [10]

Haciendo uso del análisis de las redes eléctricas, se puede deducir el sistema de ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento dinámico del circuito de Chua:

$$\begin{cases} \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[\frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} - f(V_{C_1}) \right] \\ \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[\frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R} - i_L \right] \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} [V_{C_2} + R_0 i_L] \end{cases} \quad (4)$$

donde:

$$f(V_{C_1}) = m_1 V_{C_1} + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|V_{C_1} + E| - |V_{C_1} - E|) \quad (5)$$

Para analizar el circuito de Chua se trabajará con un modelo matemático que contenga ciertos parámetros y describa la dinámica del circuito. Para llevar a cabo esto, se puede hacer un cambio de variables en (4) y (5) para que, a partir de éstas, se obtenga un conjunto de ecuaciones adimensionales (normalizadas).

$$\text{Sea } x_1 = \frac{V_{C_1}}{E}, x_2 = \frac{V_{C_2}}{E}, x_3 = i_L(R/E), \gamma = \frac{RC_2 R_0}{L}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \\ \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, a = Rm_0, b = Rm_1.$$

donde E es el voltaje de ruptura de la parte no lineal del diodo de Chua.

Por lo tanto las ecuaciones adimensionales o normalizadas del circuito de Chua son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x + f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z\end{aligned}\tag{6}$$

donde $f(x_1)$ es la función no lineal y es definida por:

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)[|x + 1| - |x - 1|]\tag{7}$$

Los valores de los parámetros son $\alpha = 10$, $\beta = 15.62$, $a = -8/7$ y $b = -5/7$ con las condiciones iniciales $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = 0.02$ y $x_3(0) = 0$.

Utilizando el programa **chua**, modelamos el Atractor caótico de Chua de doble espiral, los parámetros están implícitos en el programa (véase el apéndice de programas).

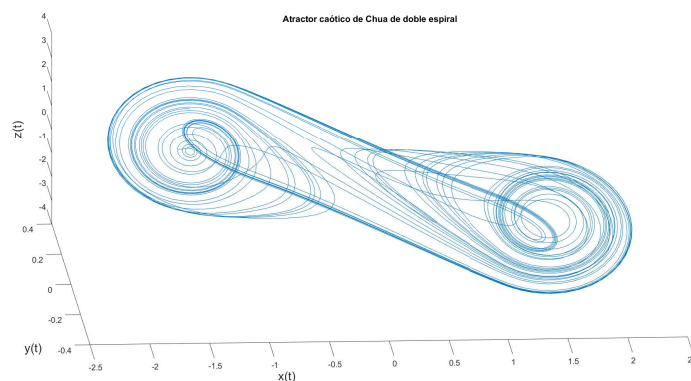


Figura 27: Atractor caótico de Chua de doble espiral.

Utilizando el programa **ChuaCI**, modelamos los cursos temporales que muestran la evolución en el tiempo de los estados $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ del circuito de Chua con los siguientes parámetros $\text{ChuaCI}(0.1, 0.002, 0, -30, 30, 0.1, -8/7, -5/7, 10, 15.62, 0.01)$ (véase el apéndice de programas).

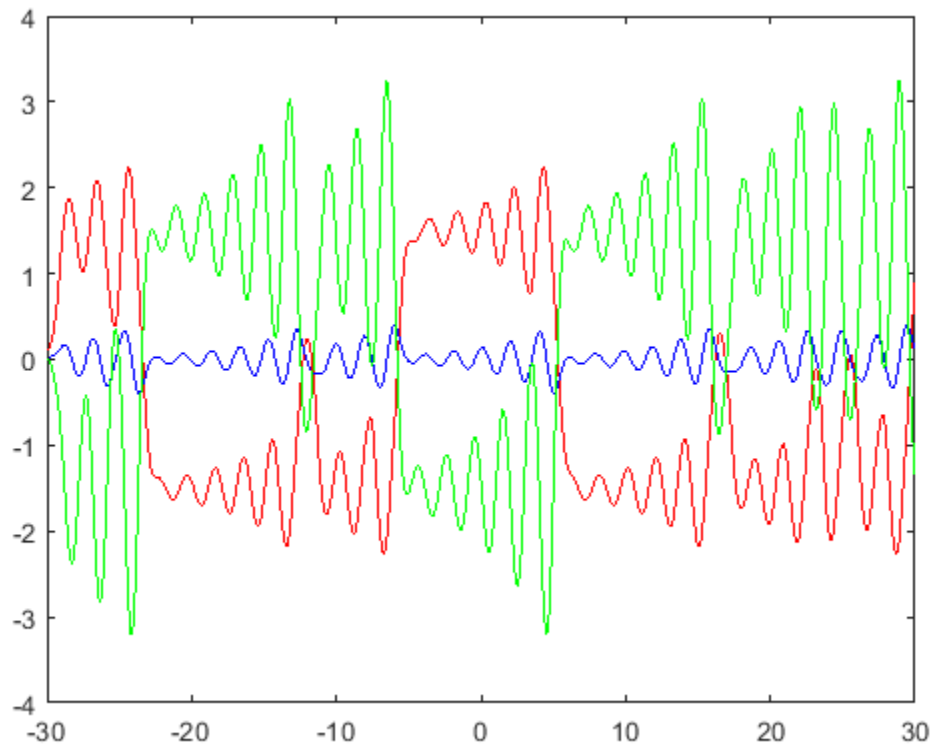


Figura 28: Cursos temporales que muestran la evolución en el tiempo de los estados $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ del circuito de chua.

Utilizando el programa **ChuaCI**, modelamos los cursos temporales de X del circuito de Chua con los siguientes parámetros $\text{ChuaCI}(0.1,0.002,0,-30,30,0.1,-8/7,-5/7,10,15.62,0.01)$ (véase el apéndice de programas).

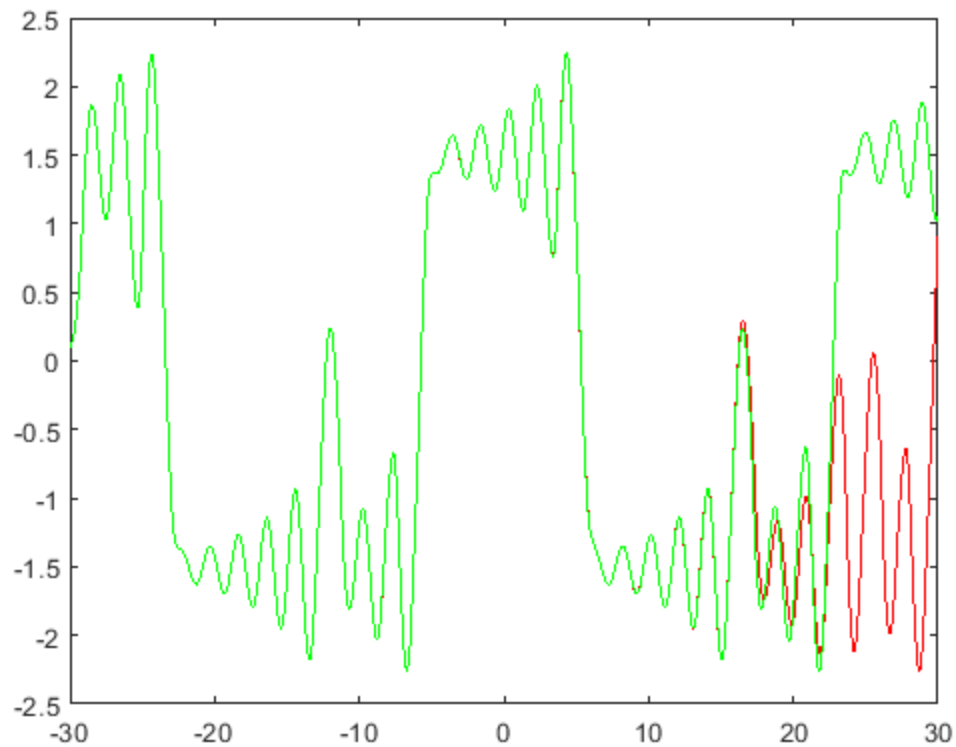


Figura 29: Cursos temporales de X del circuito de chua.

Utilizando el programa **ChuaCI**, modelamos los cursos temporales de Y del circuito de Chua con los siguientes parámetros $\text{ChuaCI}(0.1,0.002,0,-30,30,0.1,-8/7,-5/7,10,15.62,0.01)$ (véase el apéndice de programas).

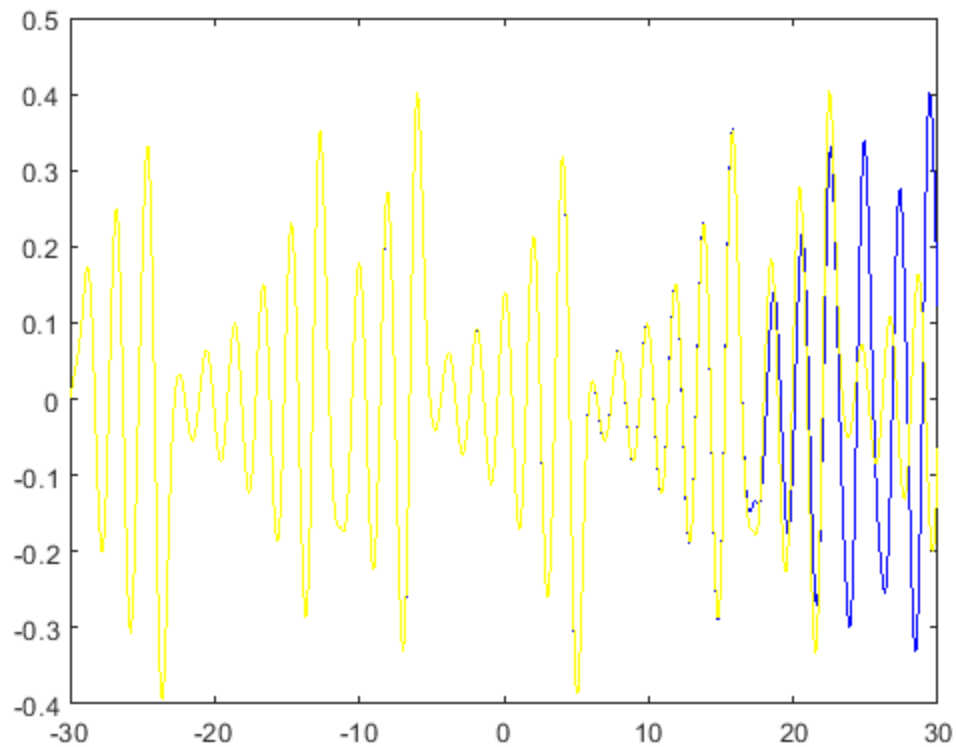


Figura 30: Cursos temporales de Y del circuito de chua.

Utilizando el programa **ChuaCI**, modelamos los cursos temporales de Z del circuito de Chua con los siguientes parámetros $\text{ChuaCI}(0.1, 0.002, 0, -30, 30, 0.1, -8/7, -5/7, 10, 15.62, 0.01)$ (véase el apéndice de programas).

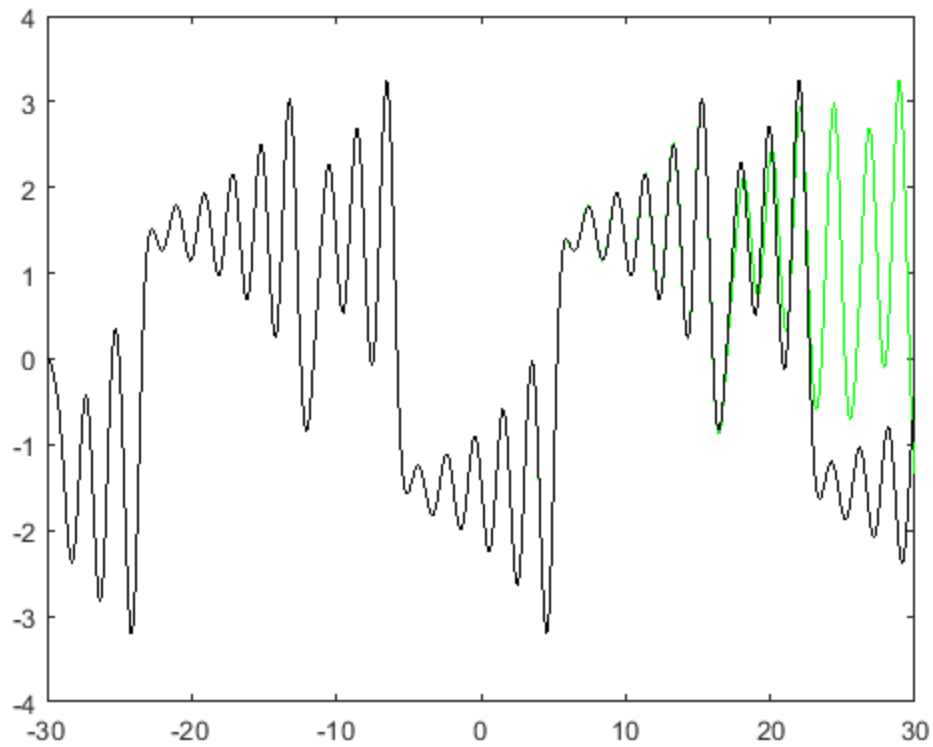


Figura 31: Cursos temporales de Z del circuito de Chua.

Utilizando el programa **ChuaCI**, modelamos el retrato fase del circuito de Chua con los siguientes parámetros ChuaCI(0.1,0.002,0,-30,30,0.1,-8/7, -5/7,10,15.62,0.01) (véase el apéndice de programas).

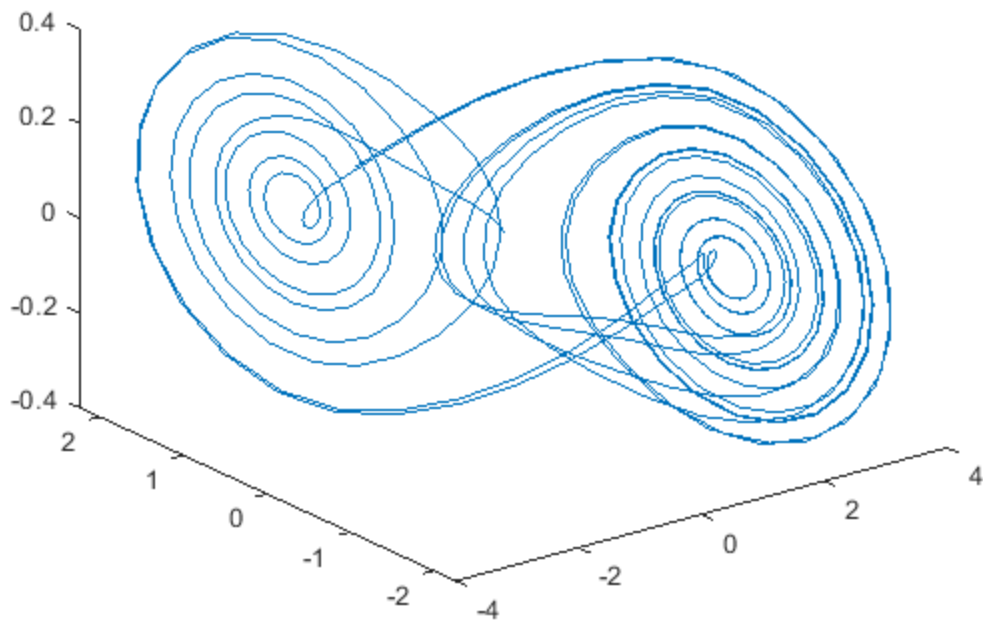


Figura 32: Retrato fase del circuito de chua.

Utilizando el programa **ChuaCI**, modelamos el retrato fase con cambios en las condiciones iniciales del circuito de Chua con los siguientes parámetros $\text{ChuaCI}(0.1, 0.002, 0, -30, 30, 0.1, -8/7, -5/7, 10, 15.62, 0.01)$ (véase el apéndice de programas).

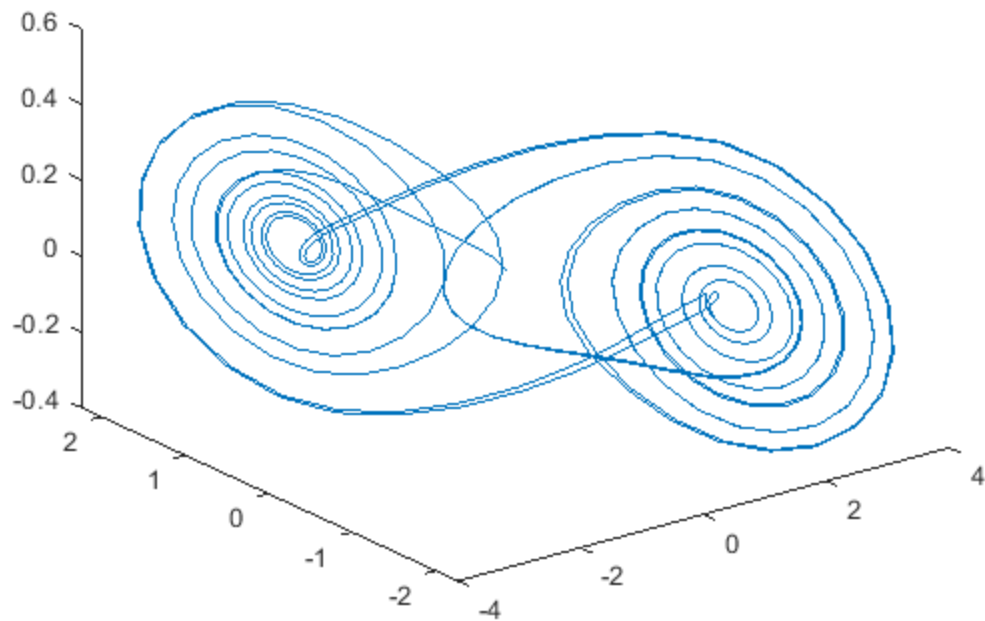


Figura 33: Retrato fase con condiciones iniciales del circuito de chua.

Conclusiones

La modelación de sistemas dinámicos consiste en el uso de modelos matemáticos para entender, de manera global, los cambios de un determinado sistema a través del tiempo. En este trabajo realizamos la programación de modelos matemáticos de las distintas ecuaciones que describen el comportamiento de sistemas complejos donde las interacciones de sus distintos componentes caracterizan y dan propiedades a dichos sistemas. La modelación de sistemas dinámicos nos ayuda a prevenir consecuencias de distintas catástrofes tales como tifones y extinción de especies.

La modelación de sistemas dinámicos no sólo se aplica a los fenómenos naturales sino a los distintos desarrollos tecnológicos, ya que modelamos y analizamos el comportamiento del circuito de Chua, que es un modelo no lineal que genera caos cuando algunas de sus condiciones iniciales se modifican ligeramente y, debido a ello produce atractores extraños.

Con esto, concluimos que la modelación del comportamiento de los sistemas dinámicos se aplica a una amplia gama que no sólo comprende las aplicaciones tecnológicas sino una gran variedad de áreas como por ejemplo, los ámbitos económico y financiero. Los resultados obtenidos de la modelación de estos sistemas son importantes desde el punto de vista teórico y práctico en el campo de la electrónica o la macroeconomía.

Otro campo de aplicación es la implementación de modelos

ambientales que nos ayudan a comprender y revertir acontecimientos que muchas veces son periódicos, que no se preveen y que son poco atendidos para minimizar sus consecuencias, por ejemplo inundaciones que muchas veces son resultado del mal manejo de residuos de las grandes y pequeñas ciudades de nuestro país.

Llevar a la práctica estos modelos teóricos observando las condiciones que les dan origen nos proporcionará una ventaja en caso de contingencias, ya que a partir del modelado de un sistema dinámico se determinarán las acciones a seguir.

Índice de figuras

1.	Gráfica de las soluciones y el espacio fase de $\varphi' = \varphi$	5
2.	Puntos de equilibrio	8
3.	Sistema equivalentes.	11
4.	Puntos de equilibrio equivalentes.	11
5.	Bifurcación de Hopf	12
6.	Crecimiento de un año con respecto al anterior. .	13
7.	Diagrama de bifurcaciones de la ecuación logística	15
8.	Gráfica cuando $0 < r < 1$. Extinción de especies.	19
9.	Gráfica cuando $1 < r < 3$	19
10.	Gráfica cuando $3 < r < 3.4$. Bifurcación de doble periodo.	20
11.	Gráfica cuando $3.0000 < r < 3.4495$	21
12.	Gráfica cuando $3.4495 < r < 3.5441$	21
13.	Gráfica cuando $3.5441 < r < 3.5644$	22
14.	Gráfica cuando $3.5644 < r < 3.5688$	22
15.	Bifurcación de Feigenbaum.	24
16.	Gráfica de telaraña para punto fijo.	25
17.	Lenguas de Arnold.	29
18.	Conjunto de Mandelbrot.	32
19.	Diagrama de bifurcaciones del conjunto de Mandelbrot	33
20.	Atractor de Rossler.	37
21.	Bifurcación de Rössler para el parámetro a	38
22.	Bifurcación de Rössler para el parámetro b	39
23.	Bifurcación de Rössler para el parámetro c	40

24.	divergencia de soluciones en el sistema de Lorenz.	42
25.	Atractor de Lorenz.	43
26.	Circuito de Chua, contiene un inductor L , dos capacitores $C1$ y $C2$, una resistencia R , la resistencia interna del inductor R_0 y un resistor no lineal $N - R$ (diodo de Chua). [10]	44
27.	Atractor caótico de Chua de doble espiral.	46
28.	Cursos temporales que muestran la evolución en el tiempo de los estados $x(t), y(t)$ y $z(t)$ del circuito de chua.	47
29.	Cursos temporales de X del circuito de chua.	48
30.	Cursos temporales de Y del circuito de chua.	49
31.	Cursos temporales de Z del circuito de chua.	50
32.	Retrato fase del circuito de chua.	51
33.	Retrato fase con condiciones iniciales del circuito de chua.	52

Apéndice de programas

1. Programa diabifurca

```
function [z]=diabifurca(Nf,Ni,rmax,rmin)
Nf=500
Ni=450
rmin=3
rmax=3.4
r=[rmin:0.001:rmax];
N=length(r);
y=zeros(Nf,N);
z=zeros(Ni,N);
for x=1:N
y(1,x)=0.2;
for n=1:Nf;
y(n+1,x)=r(x)*y(n,x)*(1-y(n,x));
end
for w=1:Ni
z(w,x)=y(w+(Nf-Ni-1),x);
end
end
plot(r,z,'b','markersize',3);
title('Bifurcacion de Feigenbaum');
xlabel('r');
ylabel('x(n)');
```

2. Programa grapufijo

```
function grapufijo(ini1,ini2,R,iter)

    medio=iter/2;
axis([0 1 0 1]);

    x=zeros(1,iter);
x1=zeros(1,iter);
x2=zeros(1,iter);

    x(1)=ini1;
x2(1)=ini2;

    for n=1:iter
x(n+1)=R*x(n)*(1-x(n));
end

    for n=1:medio
x1(2*n-1)=x(n);
x1(2*n)=x(n);
end

    x2(2)=x(2);
for n=2:medio
x2(2*n-1)=x(n);
x2(2*n)=x(n+1);
end

    fprintf("Punto Fijo en x(n+1)= %.18f \n",x(n+1));
```

```

fprintf("Punto Fijo en x(n)= % .18f \n",x(n));
clf()
hold on
plot(x1,x2,'r');
fplot('2.9*x*(1-x)',[0 1]);
x=[0 1];
y=[0 1];
plot(x,y,'g');
hold off
title('Grafica de telaraña para punto fijo')
set(gca,'xtick',[0 1])
set(gca,'ytick',[0 1])
xlabel('x(t)')
ylabel('x(t+1)')
endfunction

```

```

function [y]=f(x)
y=2.9*x*(1-x);
endfunction

```

3. Programa tonguearnold

```

function tonguearnold(pa,tol,M)
tic
k=0;

for a=0:pa:1
for b=0:pa:1
[Rot]=resonancias(a,b,tol,M);

```

```

    if abs(Rot)<tol || abs(Rot-1/2)<tol || abs(Rot-1/3)<tol || abs(Rot-
2/3)<tol || ...
abs(Rot-1/4)<tol || abs(Rot-3/4)<tol || abs(Rot-1/5)<tol || abs(Rot-
2/5)<tol || ...
abs(Rot-3/5)<tol || abs(Rot-4/5)<tol || abs(Rot-1)<tol
k=k+1;
x(k)=a;
y(k)=b;
end
end
end
figure(1)
clf(1)
hold on
plot(x,y,'r.')
toc
end

```

```

function [Rot]=resonancias(a,b,tol,M)
tol=0.001;
x0=rand();
trans=100;
for k=1:trans
x0=mod(f(x0,a,b),1);
end
t0=x0;
for k=1:M
tk=f(t0,a,b);
tk=mod(tk,1);

```

```
p=tk-t0;  
q=k+1;  
Rot=p/q;
```

```
t0=tk;  
end  
end
```

```
function [y]=f(x,a,b)  
y=x+a+b*sin(2*pi*x);  
end
```

4. Programa conjuntomandelbrot

```
function conjuntomandelbrot(xi,xf,yi,yf,h,iter)  
tic  
[x,y]=meshgrid(xi:h:xf, yi:h:yf);  
  
z = x+1i*y;  
  
w = zeros(size(z));  
k = zeros(size(z));  
  
inicio=0;  
while inicio<iter && ~all(k(:))  
  
w = w.^2+z;  
inicio = inicio+1;
```

```

    k(~ k & abs(w)>4) = inicio;
end

    k(k==0) = iter;

figure

s=pcolor(x,y,k);

set(s,'edgecolor','none')

axis([xi xf -yf yf])

set(gca,'XTick',xi:0.4:xf)
set(gca,'YTick',-yf:0.5:yf)
title('Conjunto de Mandelbrot')
xlabel('Re z')
ylabel('Im z')
toc
endfunction

```

5. Programa Rossler

```

    clc;
    h=0.1;

    t = 0:h:200;
    x = zeros(1,length(t));

```

```

y = zeros(1,length(t));
z = zeros(1,length(t));
x(1) = 1; y(1) = 1; z(1) = 1;
a=x(1); b=x(1);
c=y(1); d=y(1);
e=z(1); f=z(1);
F1_txyz = @(t,x,y,z) -y-z;
F2_txyz = @(t,x,y,z) x+0.2*y;
F3_txyz = @(t,x,y,z) 0.2+z*(x-5.7);
for i=1:(length(t)-1)
k_1 = F1_txyz(t(i),x(i),y(i),z(i));
l_1 = F2_txyz(t(i),a,c,e);
m_1 = F3_txyz(t(i),b,d,f);
k_2 = F1_txyz((t(i)+0.5*h),(x(i)+0.5*k_1*h),(y(i)+0.5*l_1*h),(z(i)+0.5*m_1*h));
l_2 = F2_txyz((t(i)+0.5*h),(a+0.5*k_1*h),(c+0.5*l_1*h),(e+0.5*m_1*h));
m_2 = F3_txyz((t(i)+0.5*h),(b+0.5*k_1*h),(d+0.5*l_1*h),(f+0.5*m_1*h));
k_3 = F1_txyz((t(i)+0.5*h),(x(i)+0.5*k_2*h),(y(i)+0.5*l_2*h),(z(i)+0.5*m_2*h));
l_3 = F2_txyz((t(i)+0.5*h),(a+0.5*k_2*h),(c+0.5*l_2*h),(e+0.5*m_2*h));
m_3 = F3_txyz((t(i)+0.5*h),(b+0.5*k_2*h),(d+0.5*l_2*h),(f+0.5*m_2*h));
k_4 = F1_txyz((t(i)+h),(x(i)+k_3*h),(y(i)+l_3*h),(z(i)+m_3*h));
l_4 = F2_txyz((t(i)+h),(a+k_3*h),(c+l_3*h),(e+m_3*h));
m_4 = F3_txyz((t(i)+h),(b+k_3*h),(d+m_3*h),(f+l_3*h));
x(i+1) = x(i) + (1/6)*(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)*h;
y(i+1) = y(i) + (1/6)*(l_1+2*l_2+2*l_3+l_4)*h;
z(i+1) = z(i) + (1/6)*(m_1+2*m_2+2*m_3+m_4)*h;
a=x(i+1); b=x(i+1);
c=y(i+1); d=y(i+1);
e=z(i+1); f=z(i+1);
end
plot3(x,y,z)

```

```
title('Atractor de Rossler')
```

6. Programa bifurcacionRosslerA

```
function bifurcacionRosslerA(x0,b,c,ini,fin,h)

    tic
    global a;
    arange = ini:h:fin;
    k = 0;
    tspan = 0:0.1:500;
    xmax = [];
    for a = arange
        f = @(t,x) [-x(2)-x(3); x(1)+a*x(2); b+x(3)*(x(1)-c)];
        x0 = [1 1 0];
        k = k + 1;
        [t,x] = ode45(f,tspan,x0);
        count = find(t>100);
        x = x(count,:);
        j = 1;
        n = length(x(:,1));
        for i = 2:n-1
            if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
                xmax(k,j)=x(i,1);
                j=j+1;
            end
        end
        if j>1 plot(a,xmax(k,1:j-1),'k. ');
    end
```

```

hold on;
index(k)=j-1;
end
xlabel('Bifurcacion parametro a');
ylabel('y max');
title('Diagrama de Bifurcación para a');
toc
endfunction

```

7. Programa bifurcacionRosslerB

```

function bifurcacionRosslerB(x0,a,c,ini,fin,h)

tic
format compact; format long e;
set(0,'defaultaxesfontsize',16.5,'defaultaxeslinewidth',0.8,...
'defaultlinelength',2.0,'defaultpatchlinewidth',2.7,...
'defaultaxesfontweight','Bold')

global b;
rangob = ini:h:fin;
k = 0;
tspan = 0:0.05:400;
xmax = [];
for b = rangob
j = 1;
k = k + 1;
f = @(t,x) [-x(2)-x(3); x(1)+a*x(2); b+x(3)*(x(1)-c)];

```

```

    [t,x] = ode45(f,tspan,x0);
count = find(t>100);
x = x(count,:);
j = 1;
n = length(x(:,1));
for i=2 : n-1
if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
xmax(k,j)=x(i,1);
j=j+1;
end
end
if j>1
plot(b,xmax(k,1:j-1),'k. ');
end
hold on;
index(k)=j-1;
end
xlabel('Parametro de Bifurcacion b');
ylabel('x max');
title('Diagrama de Bifurcacion para b');
toc
endfunction

```

8. Programa bifurcacionRosslerC

```

function bifurcacionRosslerC(x0,a,b,ini,fin,h)
tic
global c;
rangoc = ini:h:fin;

```

```

k = 0; tspan = 0:0.1:500;
xmax = [];
for c = rangoc
f = @(t,x) [-x(2)-x(3); x(1)+a*x(2); b+x(3)*(x(1)-c)];
k = k + 1;
[t,x] = ode45(f,tspan,x0);
count = find(t>100);
x = x(count,:);
j = 1;
n = length(x(:,1));
for i=2 : n-1
if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
xmax(k,j)=x(i,1);
j=j+1;
end
end
if j>1
plot(c,xmax(k,1:j-1),'k.','MarkerSize',1);
end
hold on;
index(k)=j-1;
end
xlabel('Bifuracation parametro c');
ylabel('x max');
title('Diagrama de Bifurcacion para c');
toc
endfunction

```

9. Programa atractorlorenz

```
sigma=10;r=28;b=8/3;
Lorenz=@(t,x) [sigma*(x(2)-x(1));r*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);x(1)*x(2)-
b*x(3)];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xa]=ode45(Lorenz,[0 100],[15,20,30],options);
plot3(xa(:,1),xa(:,2),xa(:,3))
title('The Lorenz Attractor')
fontSize=15; xlabel('x(t)', 'FontSize',fontSize);
ylabel('y(t)', 'FontSize',fontSize);
zlabel('z(t)', 'FontSize',fontSize);
```

10. Programa chua

```
Chua=@(t,x)
[15*(x(2)-x(1)-(-5/7)*x(1)+(1/2)*(-8/7)-(-5/7))*(abs(x(1)+1)-abs(x(1)-
1))];x(1)-x(2)+x(3);-25.58*x(2)];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xb]=ode45(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
plot3(xb(:,1),xb(:,2),xb(:,3))
title('Chua's Double Scroll Attractor')
fontSize=15; xlabel('x(t)', 'FontSize',fontSize);
ylabel('y(t)', 'FontSize',fontSize);
zlabel('z(t)', 'FontSize',fontSize);
```

11. Programa ChuaCI

```
function ChuaCI(x0,y0,z0,a,b,h,va,vb,alfa,bet,gama)

    x(1)=x0;
    y(1)=y0;
    z(1)=z0;
    x2(1)=x0;
    y2(1)=y0+0.000001;
    z2(1)=z0;
    t=a:h:b;
    n=length(t);

    for k=1:1:n-1
        M1=f1(t(k),x(k),y(k),z(k),alfa,va,vb);
        K1=f2(t(k),x(k),y(k),z(k));
        L1=f3(t(k),x(k),y(k),z(k),bet,gama);
        M12=f1(t(k),x2(k),y2(k),z2(k),alfa,va,vb);
        K12=f2(t(k),x2(k),y2(k),z2(k));
        L12=f3(t(k),x2(k),y2(k),z2(k),bet,gama);

        M2=f1(t(k)+(h/2),x(k)+M1*(h/2),y(k)+K1*(h/2),z(k)+L1*(h/2),
        alfa,va,vb);
        K2=f2(t(k)+(h/2),x(k)+M1*(h/2),y(k)+K1*(h/2),z(k)+L1*(h/2));
        L2=f3(t(k)+(h/2),x(k)+M1*(h/2),y(k)+K1*(h/2),z(k)+L1*(h/2),bet,gama);
        M22=f1(t(k)+(h/2),x2(k)+M12*(h/2),y2(k)+K12*(h/2),z2(k)+L12*(h/2),
        alfa,va,vb);
        K22=f2(t(k)+(h/2),x2(k)+M12*(h/2),y2(k)+K12*(h/2),z2(k)+L12*(h/2));
        L22=f3(t(k)+(h/2),x2(k)+M12*(h/2),y2(k)+K12*(h/2),z2(k)+L12*(h/2),
        bet,gama);
```

```

M3=f1(t(k)+(h/2),x(k)+M2*(h/2),y(k)+K2*(h/2),z(k)+L2*(h/2),
alfa,va,vb);
K3=f2(t(k)+(h/2),x(k)+M2*(h/2),y(k)+K2*(h/2),z(k)+L2*(h/2));
L3=f3(t(k)+(h/2),x(k)+M2*(h/2),y(k)+K2*(h/2),z(k)+L2*(h/2),
bet,gama);
M32=f1(t(k)+(h/2),x2(k)+M22*(h/2),y2(k)+K22*(h/2),z2(k)+L22*(h/2),
alfa,va,vb);
K32=f2(t(k)+(h/2),x2(k)+M22*(h/2),y2(k)+K22*(h/2),z2(k)+L22*(h/2));
L32=f3(t(k)+(h/2),x2(k)+M22*(h/2),y2(k)+K22*(h/2),z2(k)+L22*(h/2),
bet,gama);

```

```

M4=f1(t(k)+h,x(k)+h*M3,y(k)+h*K3,z(k)+h*L3,alfa,va,vb);
K4=f2(t(k)+h,x(k)+h*M3,y(k)+h*K3,z(k)+h*L3);
L4=f3(t(k)+h,x(k)+h*M3,y(k)+h*K3,z(k)+h*L3,bet,gama);
M42=f1(t(k)+h,x2(k)+h*M32,y2(k)+h*K32,z2(k)+h*L32,alfa,va,vb);
K42=f2(t(k)+h,x2(k)+h*M32,y2(k)+h*K32,z2(k)+h*L32);
L42=f3(t(k)+h,x2(k)+h*M32,y2(k)+h*K32,z2(k)+h*L32,bet,gama);

```

```

x(k+1)=x(k)+(h/6)*(M1+2*M2+2*M3+M4);
y(k+1)=y(k)+(h/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4);
z(k+1)=z(k)+(h/6)*(L1+2*L2+2*L3+L4);
x2(k+1)=x2(k)+(h/6)*(M12+2*M22+2*M32+M42);
y2(k+1)=y2(k)+(h/6)*(K12+2*K22+2*K32+K42);
z2(k+1)=z2(k)+(h/6)*(L12+2*L22+2*L32+L42);
end
figure(1)
clf(1)
title('cursos temporales')
plot(t,x','r')

```

```

hold on
plot(t,y','b')
plot(t,z','g')
figure(2)
clf(2)
title('curso temporal de x')
plot(t,x','r')
hold on
plot(t,x2','g')
figure(3)
clf(3)
title('curso temporal de y')
plot(t,y','b')
hold on
plot(t,y2','y')
figure(4)
clf(4)
title('curso temporal de z')
plot(t,z','g')
hold on
plot(t,z2','k')
figure(5)
clf(5)
title('retrato fase')
plot3(z,x,y)
figure(6)
clf(6)
title('retrato fase con sensibilidad a condiciones iniciales')
plot3(z2,x2,y2)
end

```

```
function [sal]=f1(t,x,y,z,alfa,va,vb)
sal=alfa*(y-x-(vb*x+1/2*(va-vb)*(abs(x+1)-abs(x-1))));
end
```

```
function [sal]=f2(t,x,y,z)
sal=x-y+z;
end
```

```
function [sal]=f3(t,x,y,z,bet,gama)
sal=-bet*y-gama*z;
end
```

Bibliografía

- [1] Daniel Kaplan and Leon Glass. (1995). Understanding Nonlinear Dynamics. United States of America: Springer Science+Business Media, LLC .
- [2] Benoit B. Mandelbrot. (1977). The Fractal Geometry of Nature. United States of America: W. H. FREEMAN AND COMPANY.
- [3] Steven H. Strogatz. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos. U.S.: PERSEUS BOOKS.
- [4] Andrew Fowler. Mark McGuinness. (2019). Chaos An Introduction for Applied Mathematicians. Switzerland: Springer.
- [5] Sandip Banerjee. (2014). MATHEMATICAL MODELING Models, Analysis and Applications. U.S.: Taylor & Francis Group.
- [6] Kenan Taş. Dumitru Baleanu. (2019). Mathematical Methods in Engineering Theoretical Aspects. Switzerland: Springer.
- [7] Mark McGuinness, Young Hong, Duncan Galletly and Peter Larsen (2004). Arnolftongues in human cardiorespiratory system. 12 de Febrero de 2021. American Institute of Physics Sitio web: <http://chaos.alp.org/chaos/copyright/jsp>

- [8] Mantas Landauskas and Minvydas Ragulskis. (1de Septiembre de 2019). Clocking Convergence to Arnold Tongues-The H-rank Approach. Applied Mathematics and Information Science. An International Journal, Appl. Math. Inf. Sci. 13, No.5, 799-806.
- [9] Stefano Bregni. Synchronization of digital telecommunications networks, John Wiley & Sons, 2002
- [10] Paul Horowitz, Windfield hill. The art of electronics, 2nd edition, Cambridge Press University Press, 1980.
- [11] Chang y Yuang Chang T. y Chua L. O., Impulsive Control and Synchronization of Nonlinear Dynamical Systems and Application to Secure Comunication, 3, 645 (1997).