

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

**Construcción y generalización de los ciclos límite de sistemas
dinámicos reales, continuos, polinomiales y suficientemente diferenciables,
con ejemplos en el plano tridimensional**

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPLEJIDAD

PRESENTA

José Gerardo López Bonifacio

Director de la Tesis

M. en C. Juan Luis Martínez Ledesma

Ciudad de México, junio de 2021.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

*Gracias a todos los que siempre me apoyaron.
Muchas gracias por todo en verdad,
porque sin su apoyo nada de esto
habría sido posible de corazón.
Dedicado especialmente a mi querida familia,
profesores queridos y grandes amigos .
José G. López B.*

Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecer a toda mi familia; a mis padres: Soledad Bonifacio Lauro y José López Altamirano, por su gran amor, apoyo moral y económico de manera incondicional, y sus consejos que siempre tuvieron conmigo a pesar de las adversidades y que siempre creyeron en mí. Por alentarme a conseguir siempre mis metas ante cualquier obstáculo. A mis hermanos: Graciela Guadalupe López Bonifacio por ser una gran hermana y que ha estado siempre en las buenas y en las malas conmigo en todo momento y a Fernando Alan López Bonifacio, con quien he vivido momentos muy buenos, siempre me han apoyado en todo, muchas gracias por todo.

En forma especial, agradezco a mi asesor, profesor y amigo Juan Luis Martínez Ledesma, por haberme brindado todo el tiempo necesario y haberme enseñado tantas cosas durante esta tesis y en los cursos que llevé con él, así como todas las interesantes conversaciones y también darme la gran oportunidad de participar con él en varios de sus proyectos.

A mis profesores de la facultad: Quienes me enseñaron durante toda mi estancia en la carrera que las matemáticas son fascinantes, en especial a José Lino Samaniego Mendoza, Jefferson Edwin King Dávalos, Juan José Alba González, Norma Yanet Sánchez Torres, Bernardo Vargas Cárdenas por cambiar toda mi perspectiva que tenía acerca de las matemáticas con respecto a sus aplicaciones, y a José Francisco Valdés Galicia por dejarme ser partícipe en la investigación científica en el Instituto de Geofísica, UNAM en los temas de rayos cósmicos.

A mis profesores de la maestría: Damián Hernández Herrán, Fernando Ramírez Alatraste y José Luis Gutiérrez García por haberme brindado sus conocimientos, su apoyo, así como algunos de sus consejos, tanto para mi vida profesional, así como en mi vida personal.

A mis amigos de antaño de la preparatoria Víctor José Arana Rodríguez, Ana Santos Valle y Carolina Nava Jiménez con quienes sigo teniendo contacto y seguimos viéndonos esporádicamente para tener muchas convivencias juntos hasta la fecha. Y que fueron mi primera inspiración para estudiar ciencia en general.

A mis amigos de la facultad: Jairo Habid Neftalí Vera Guerrero por su gran amistad y por las aventuras que hemos vivido juntos, a Lizbeth Peñaloza Velasco por ser una buena amiga y que me cae muy bien, a Raymundo Hernández Aguilar por ser un gran apoyo en todos los sentidos de mi vida, a Humberto Alonso Villegas, Gerónimo Sereno Naiche y Adolfo Bertín Ruiz Cruz por todos los momentos de convivencia que hemos tenido y por su enorme apoyo moral y a José Alfredo Cobián Campos, que es un gran ser humano y un gran amigo y me ha brindado apoyo académico y personal. Les agradezco de corazón por ser una gran inspiración en varios sentidos, para seguir adelante en mi vida.

A mis compañeros de la maestría Carolina Contreras que es una gran amiga, porque me ha apoyado de manera incondicional, me ha ayudado de manera desinteresada y cuando puede me presta su ayuda, Sergio, Guillermina, Guillermo, Osvaldo, Karen y Luhma; por pasar tiempos increíbles e inolvidables en el salón de clases, convivencias padres y por tener pláticas interesantes y bastante ricas en información, muy amenas y felices. Espero se sigan cultivando aún más estas bonitas amistades.

También quiero agradecer de manera especial a mi amigo, profesor y colega José Alfredo Cobián Campos por haberme apoyado en todo este proceso dándome trabajo, consejos, incluyéndome en proyectos y además trabajar con él en cosas de computación, que me han servido para hacer más cosas dentro de la ciencia. Gracias de una manera especial por todo.

También quiero agradecer de manera especial a Sara Eunice Olivares Hernández a quien amo con todo mi ser por todo su apoyo, amor, cariño y su existencia; ha sido una gran fortaleza para mí siempre pensar en ella y amarla.

También quiero agradecer a Carolina Contreras quien me ha apoyado y valorado en todo el proceso de la tesis, y que me ha ayudado de manera desinteresada y me ha echado la mano en muchas situaciones. Gracias de manera especial.

También agradecer de corazón a Emilia Waldo por apoyarme, ayudarme y darme facilidad para todo el proceso de la titulación y apoyarme moralmente en todo sentido cuando lo necesitaba.

Finalmente, quiero dar un *agradecimiento* de manera especial al profesor, amigo y guía Juan Luis Martínez Ledesma, me brindó ayuda siempre que la requería y además el fue la parte esencial para el escrito de esta tesis de maestría, que sin su ayuda, nada de esto hubiera sido posible.

Por todo esto y por mucho más, gracias a cada uno de ustedes que me apoyaron e hicieron que este sueño se cristalizara en una hermosa realidad ya que todos contribuyeron de alguna manera a que esto se hiciera realidad.

Resumen

La presente tesis realiza una revisión, descripción y evaluación generales de los *sistemas dinámicos reales autónomos, suficientemente continuos y diferenciables, polinomiales, lineales o no lineales y conservativos o integrables* para construir *ciclos límite* en el plano \mathbb{R}^2 , posteriormente representarlos en el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, y extender estas ideas a los *2-ciclos límite* representándolos con el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$. Esta tesis se centra en *sistemas dinámicos* en espacios bidimensionales y tridimensionales por el poder gráfico y visual que se pretende sea intuitivo para dichas construcciones y generalizaciones, se utilizarán para estos casos ejemplos ilustrativos explicados lo más detallado posible, cuya solución en el *espacio-fase* es un polinomio que es una *curva cerrada*. Se toma aquí un punto de vista más descriptivo y no tan analítico. Hay estudios aislados de construcción de *ciclos límite* en exposiciones matemáticas y físicas con herramientas de cálculo tensorial, pero aquí sólo se recopilan tales estudios con un enfoque aplicado a los *r-ciclos límite* con $r = 1, 2$, se usa una notación tensorial para su representación en las *formas diferenciales*. Esta tesis hace énfasis en la necesidad de contar con más generalizaciones matemáticas para el tratamiento de los *r-ciclos límite*, así mismo, se generaliza la idea de *r-ciclos límite* en más dimensiones en el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ en las conclusiones finales.

Se espera en un futuro poder hacer trabajos de análisis más exhaustivos y más construcciones de los *r-ciclos límite* y hacerles un tratamiento matemático más profundo que se plasme en libros y en algunos artículos de investigación. En este sentido, se pretende que esta tesis sea como un punto de partida. Se ponen los avances más significativos de este trabajo en forma de conclusiones finales y lo que se aporta de nuevo en esta área de estudio.

This thesis carries out a general review, description and evaluation of the *autonomous real dynamical systems, sufficiently continuous and differentiable, polynomial, linear or non-linear and conservative or integrable* to construct *limit cycles* in the plane \mathbb{R}^2 , then represent them in the space of the *differential forms* $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, and extend these ideas to the *2-limit cycles* representing them with the space of the *differential forms* $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$. This thesis focuses on *dynamic systems* in two-dimensional and three-dimensional spaces due to the graphic and visual power that is intended to be intuitive for said constructions and generalizations. For these cases, illustrative examples explained as detailed as possible will be used, whose solution in the *phase-space* is a polynomial that is a *closed curve*. A more descriptive and not so analytical point of view is taken here. There are isolated studies of construction of *limit cycles* in mathematical and physical expositions with tensor calculus tools, but here only such studies are compiled with an approach applied to *r-limit cycles* with $r = 1, 2$, a tensor notation is used for its representation in *differential forms*. This thesis emphasizes the need to have more mathematical generalizations for the treatment of *r-limit cycles*, likewise, the idea of *r-limit cycles* is generalized in more dimensions in the space of the *differential forms* $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ in the final conclusions.

It is expected in the future to be able to carry out more exhaustive analysis work and more constructions of the *r-limit cycles* and to give them a deeper mathematical treatment that will be reflected in books and in some research articles. In this sense, this thesis is intended to be a starting point. The most significant advances of this work are put in the form of final conclusions and what is contributed again in this area of study.

Índice de figuras

1.1.	Etiquetas escalares y vectoriales para un triángulo, nótese las diferencias en la notación y en el tipo de elementos utilizados en ambas figuras. Tomada de [David2012].	4
1.2.	<i>Bivectores</i> y segmentos planos. Un <i>bivector</i> B puede ser dibujado como un segmento plano. Vectores con la misma dirección que pueden ser representados por segmentos planos en planos paralelos. La <i>magnitud</i> de B es un escalar denotado por $\ B\ $. La magnitud de B es igual al área del correspondiente segmento plano, la forma del segmento plano no está asociado con ninguna propiedad de B . Sin embargo, una forma circular sugiere el hecho de que B no distingue ninguna <i>dirección</i> en el plano de ninguna otra, mientras que un paralelogramo indica una relación del segmento plano con el segmento de línea. La <i>orientación</i> del <i>bivector</i> (y el plano correspondiente) se puede indicar mediante una flecha que asigna un “sentido” a la curva que limita el segmento plano. Un <i>bivector</i> B y su negativo, denotado por $-B$, pueden representarse como la misma figura, pero con <i>orientación opuesta</i> . Las dos <i>orientaciones</i> del plano (o <i>bivector</i>) se distinguen por las palabras “en el sentido de las agujas del reloj” y “en el sentido contrario a las agujas del reloj”. Al igual que un vector, un <i>bivector</i> no debe considerarse que tenga un plano. Los segmentos planos con la misma <i>magnitud</i> y <i>dirección</i> pueden considerarse como representaciones diferentes de un mismo <i>bivector</i> sin importar dónde se encuentren; por lo que pueden ser etiquetados por uno y el mismo símbolo <i>bivector</i> . Los segmentos planos que no están en planos paralelos deben estar etiquetados con diferentes <i>símbolos bivectores</i> incluso si tienen las mismas <i>magnitudes</i> . Tomada de [David2012].	4
1.3.	La “regla del paralelogramo” para la <i>multiplicación exterior</i> . Nota que el orden de las flechas en la frontera determina una <i>orientación</i> para el paralelogramo. Las flechas indican el camino de un pie que primero barre un segmento de línea y ahí, como el segmento de línea se mueve, en un borde del paralelogramo. Tomada de [David2012].	5
1.4.	<i>Orientaciones</i> relativas de vectores y <i>bivectores</i> . El mismo <i>bivector</i> se obtiene del <i>producto externo</i> de cualquier par de vectores que marcan segmentos de línea orientados consecutivos que delimitan un paralelogramo orientado. Los segmentos de línea dirigida en lados opuestos de un paralelogramo orientado corresponden a vectores de orientación opuesta. Tomada de [David2012].	5
1.5.	<i>Regla distributiva</i> para el <i>producto exterior</i> . Para probar la <i>regla distributiva</i> , exprese \mathbf{v}_2 como la suma de una parte $\mathbf{v}_{2\parallel}$ colineal con $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ y una parte $\mathbf{v}_{2\perp}$ ortogonal a $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Haga lo mismo para \mathbf{v}_3 y observe que $\mathbf{v}_{2\perp} = -\mathbf{v}_{3\perp}$, entonces $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{2\perp}) + (\mathbf{v}_{3\parallel} + \mathbf{v}_{3\perp})$ y $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{3\parallel}) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel}$. Esto reduce la <i>regla distributiva</i> a la regla usual para agregar áreas, ya que todos los <i>bivectores</i> en la ecuación son codireccionales. Por lo tanto, si $\mathbf{v}_{2\parallel}$ y $\mathbf{v}_{3\parallel}$ tienen la misma <i>orientación</i> que $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, que es el caso en el diagrama a continuación, entonces $ \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{3\parallel}) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel} $. Sin embargo, puede ocurrir que la <i>orientación</i> de $\mathbf{v}_{3\parallel}$ sea opuesta a la de $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, en cuyo caso la <i>orientación</i> de $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ es opuesta a la de $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel}$. $ \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{3\parallel}) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2\parallel} - \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel} $. Por el se ve diagrama que, en general, $ \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \leq \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 $, con igualdad solo si \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 son coplanares. Las cantidades $ \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 $ y $ \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 $ son áreas y se pueden agregar como cualquier otro escalar. Pero $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3$ son “áreas dirigidas” y se agregan “como vectores”. Tomada de [David2012].	6
1.6.	La “regla del paralelepípedo” para el <i>producto exterior</i> . El desplazamiento de un paralelogramo orientado barre un paralelepípedo orientado. El desplazamiento en la dirección opuesta arrastra un paralelepípedo con orientación opuesta. Tomada de [David2012].	6
1.7.	Se muestra gráficamente la <i>anticonmutatividad</i> de las p -formas con respecto al <i>producto cuña</i> \wedge . Imagen creada con LibreOffice 6.3.1, en LibreOffice Writer.	11
1.8.	Un conjunto abierto con forma de <i>estrella</i> respecto a $\mathbf{0}$. Tomado de [Michael1988]	19
2.1.	El <i>espacio-fase</i> del <i>sistema dinámico</i> de la ecuación (2.5). Imagen hecha con pplane8.m para la versión 7.7 de MatLab.	30
2.2.	Curva algebraica cerrada $x^2(t) + y^2(t) = 1$ del <i>sistema dinámico</i> (2.7). Este representa el ciclo límite . Imagen hecha con GeoGebra Clásico 6.	31
2.3.	El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.7).	31
2.4.	El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.15). nótese que hay una órbita homoclínica y adentro de esta hay órbitas cerradas	34
2.5.	La curva algebraica cerrada de $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ al elegir $\mathcal{C} = \frac{1}{8}$. Esta es la representación geométrica y su ecuación algebraica del ciclo límite de la ecuación (2.16).	35
2.6.	El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.16).	35
2.7.	El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.17).	36
2.8.	Nótese que la solución en el espacio-fase representaría en gráficamente un paraboloides de revolución, esto es para toda $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, nótese que si se corta como jamón al paraboloides de revolución de la subfigura (2.8a), con cuchillas paralelas al plano XY, estos serían círculos concéntricos que puestos en el plano cartesiano serían representados por la subfigura (2.8b), la subfigura (2.8b) y la figura (2.1) en realidad representarían las órbitas o curvas solución del sistema dinámico (2.5), solo que el primero está en el plano cartesiano y el otro en un espacio de fases	38
2.9.	Un ejemplo de una <i>curva de Jordan</i> , la curva es cerrada, la parte interna se pinta de un color distinto para distinguirlo de la parte externa.	38

2.10. El mismo **sistema dinámico**, pero con la parte **conservativa** multiplicada por distintas constantes, nótese que la dinámica del **plano-fase** de cada uno de ellos es muy distinta entre sí, con solo cambiar en la multiplicación los valores numéricos en la parte **hamiltoniana** del sistema. Esto solo nos hace ver que el polinomio que multiplica a la parte conservativa debe de ser siempre uno adecuado que forme un **ciclo límite**. 44

2.11. Cuatro ejemplos de **sistemas dinámicos** construidos con nuestras técnicas y la ecuación (2.29), nótese que en todas se forman *ciclos límite*, excepto en la subgráfica (2.11d), esto es debido a que a pesar de que se cumplen casi todas las hipótesis, existe una que no cumple y eso hace que no se forme un **ciclo límite**, esto depende de la elección del polinomio, por eso se dice que debe de ser adecuado para que se cumplan todas las hipótesis. 45

2.12. El **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.45), nótese la singularidad de que las **curvas algebraicas** se cortan en $x(t) = 0$ y en $y(t) = 0$, si empieza en cualquier punto distinto de $x(t) = y(t) = 0$. . . 48

2.13. **Curva algebraica** tomada de la **función de Hamilton** de la ecuación (2.47), se elige una $\mathcal{C} = \frac{1}{4}$ para obtener una **órbita cerrada** en el **espacio-fase**. 49

2.14. El **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.48), nótese que existe un **conjunto límite** que sería como una especie **semiciclo límite**, pero sería más bien una unión de **conjuntos límites conexos finitos**. 50

2.15. El **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.49), nótese que son **órbitas cerradas aisladas** en el **espacio-fase**. 51

2.16. El **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.47). 51

2.17. Figuras que representan las soluciones como **superficies de nivel** de la **distribución bivectorial** (2.56). Imágenes hechas con el software Surfer 1.7.0 para Windows de 64 bits. 56

2.18. Figuras que representan las soluciones del sistema (2.62) como **superficies de nivel** de la **distribución real bivectorial**. 61

2.19. Ejemplo que muestra un **punto interior** y otro **punto exterior** en la curva, con sus *orientaciones* y los cortes de la recta transversal con la circunferencia. Nótese las intersecciones de la recta transversal con las **curvas algebraicas cerradas**. 64

2.20. Curva algebraica cerrada regular y simple en el plano bidimensional. Nótese que existe un *interior* y un *exterior* marcados con puntitos azul y rojo respectivamente a la *curva cerrada algebraica* elegida. Imagen tomada de https://pbs.twimg.com/media/DSybx_uWsAA2ph_.jpg:large. 65

2.21. La esfera cornuda de Alexander. Tomado de [Fernando2000]. Un caso patológico que muestra la dificultad de encontrar un *interior* y un *exterior* en \mathbb{R}^2 65

2.22. Figuras que representan las soluciones como **superficies de nivel** de la **distribución bivectorial** (2.72), nótese en este caso que todos estos representan **superficies suaves regulares simples y sin asas**, esto será necesario más adelante para la construcción de **2-ciclos límite**. 70

2.23. Figuras que representan las soluciones como **superficies de nivel** de la **distribución bivectorial**, nótese en este caso que este representa una **superficie cerrada**, esto será necesario más adelante para la construcción de **2-ciclos límite**. 71

2.24. El **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación 2.72. 71

2.25. Se muestra a continuación en esta imagen lo que se llaman **variedades locales integrables** a modo de esquema general. Imagen tomada de [Ralph2012]. 73

2.26. Gráfico para una foliación. Imagen tomada de [Ralph2012]. 73

2.27. **Variedad integral** que representa a la ecuación (2.87). 77

2.28. **Variedad integral** que representa a la ecuación (2.101). La principal diferencia que radica con la figura (2.27) es que para poder llegar la solución $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ ya nos daban el **trivector**, solo bastaba encontrar su **bivector asociado** teniendo en cuenta que este era **cocerrado**, en este caso la ecuación (2.95) no es **cocerrada**, pero si al **bivector** (2.95) se le multiplica por un **factor integrante**, que en este caso fue encontrado y dado por la ecuación (2.98), entonces uno puede encontrar que su solución es el mismo que el del ejemplo anterior. Recordando que es la solución de $\mu(\mathbf{x})\mathbb{B}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}_1(\mathbf{x})$ y no de $\mathbb{B}(\mathbf{x})$ en sí mismo. 82

2.29. **Variedad integral** que representa a la ecuación (2.102). 82

2.30. **Variedad integral** que representa a la ecuación 2.102. 83

Índice de tablas

2.1.	Tabla que muestra todas las construcciones de 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite a partir de sistemas dinámicos conservativos o integrables . Se pueden derivar otras construcciones a partir de las ecuaciones (2.4), (2.14), (2.29) y (2.44).	52
2.2.	Tabla que muestra todas las generalizaciones de 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite a partir de sistemas dinámicos conservativos o integrables	52
2.3.	Puntos singulares no degenerados de f en el espacio tridimensional y sus índices respectivos.	72
2.4.	Clasificación de punto singulares no degenerados de f en el espacio tridimensional y sus respectivos índices.	72
2.5.	Tabla que muestra todas las generalizaciones de 2-ciclos límite a partir de distribuciones bivectoriales cocerradas	79
2.6.	Tabla que muestra todas las generalizaciones de 2-ciclos límite o 2-semiciclos límite a partir de distribuciones bivectoriales integrables	80
3.1.	Tabla que muestra todas las construcciones encontradas de 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite a partir de sistemas dinámicos conservativos o integrables . Se pueden derivar otras construcciones a partir de las ecuaciones (2.4), (2.14), (2.29) y (2.44).	85
3.2.	Tabla que muestra todas las generalizaciones de 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite a partir de sistemas dinámicos conservativos o integrables	85
3.3.	Tabla que muestra todas las generalizaciones de 2-ciclos límite a partir de distribuciones bivectoriales cocerradas	86
3.4.	Tabla que muestra todas las generalizaciones de 2-ciclos límite o 2-semiciclos límite a partir de distribuciones bivectoriales integrables	86
B.1.	Se muestra tanto la notación general como la especial que se usa en esta tesis.	95

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Lista de figuras	III
Lista de tablas	V
Índice general	VII
Introducción	VIII
1. Preliminares matemáticos	1
1.1. Introducción de álgebra geométrica	1
1.2. Formas diferenciales	10
1.3. Elementos básicos de cálculo tensorial	22
2. Construcción de ciclos límite en dos dimensiones, su representación con el espacio de las formas diferenciales $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ y su extensión al caso de los 2-ciclos límite representados con el espacio de las formas diferenciales $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$	28
2.1. Caso bidimensional. Ejemplos	28
2.2. Caso tridimensional. Ejemplos	52
3. Conclusiones finales.	84
3.1. Generalización en el espacio $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$	84
3.2. Comentarios	85
A. Definiciones convenientes	89
B. Notación	93
Bibliografía	95

Introducción

“Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero sin excederse en ello.”

Albert Einstein

El propósito general del trabajo intitulado: *Construcción y generalización de los ciclos límite de sistemas dinámicos reales, continuos, polinomiales y suficientemente diferenciables, con ejemplos en el plano tridimensional*, es para la construcción de estos *ciclos límite* usuales, a partir de *sistemas dinámicos autónomos reales, suficientemente continuos y diferenciables*¹, *polinomiales, lineales o no lineales y conservativos o integrables* en el plano \mathbb{R}^2 y la extensión (generalización) propuesta en los espacios de las *formas diferenciales* de los *r-ciclos límite* ($\Lambda^r(\mathbb{R}^r)$), particularmente en dos y en tres dimensiones, porque es posible visualizar geoméricamente estas formulaciones e interpretaciones. El interés primario es la de desarrollar más generalizaciones apropiadas para las *ciencias de la complejidad* y extender más los conocimientos en el campo de la *dinámica no lineal* en el tema de los *ciclos límite*. En este trabajo se harán explicaciones y ejemplos lo más detallado posible. Estos serán más descriptivos e ilustrativos, sobre todo, que nos ayuden a visualizar de manera intuitiva las generalizaciones. Ejemplos desarrollados y un orden progresivo de los temas de menor a mayor grado de dificultad serán los elementos distintivos de esta tesis.

Para la *metodología* de esta tesis, el cómo fue hecha la investigación surgió en todas las clases de *dinámica no lineal* con Juan Luis Martínez Ledesma; él planteó, formuló y construyó una posible extensión de los *r-ciclos límite* en los espacios de las *formas diferenciales*, a partir de *sistemas dinámicos reales, suficientemente diferenciables y continuos, polinomiales y conservativos*, así que nos pusimos manos a la obra en este escrito para poder sacar ideas y cuestiones notables para la construcción y generalización de los *ciclos límite*, el cuándo fue hecha la investigación surgió a partir del año 2017, como por octubre y noviembre, al plantearnos lo que comenté hace un momento renglones arriba, sin embargo, el escrito como tal empieza a surgir en el año 2018, a principios de dicho año (por febrero o marzo), me decanté por escribir este tema porque me lo propuso Juan Luis y me llamó el hecho de poder contribuir a más generalizaciones y ver el alcance de construir los *ciclos límite* y, finalmente, dónde fue hecha la investigación; esta obra fue hecha en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, en el Plantel de la Colonia del Valle, estas ideas surgieron en el salón 005 del edificio que está cercano al posgrado de ciencias genómicas. Esto es a *grosso modo* las ideas de este escrito.

Como *anticipo* de esta tesis, encontrarán al principio, las teorías matemáticas para abordar el tema de los *r-ciclos límite* de la manera más ordenada posible; una vez terminada esta parte, se entra al *caso bidimensional*, en el que se construyen *ciclos límite* en el plano \mathbb{R}^2 , se hacen tres construcciones empezando de menor a mayor grado de dificultad, con sus respectivos ejemplos explicativos y al final se utiliza notación tensorial para representar los *ciclos límite* conocidos a los *1-ciclos límite* en el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$. Luego se aborda el *caso tridimensional*, en el que se utilizaron los principios del cálculo tensorial y álgebra geométrica para construir los *2-ciclos límite* en el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$. Al final en el caso *n-dimensional*, se hace una breve exposición de cómo llevar a la generalización los *r-ciclos límite* en el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$, las ideas son similares en más dimensiones, pero no se pueden visualizar. Terminó con las conclusiones de esta tesis acerca de su relevancia, importancia, posibles aplicaciones y comentarios finales.

Con el fin de hacer más accesible el seguimiento de este trabajo, me he apegado a estos principios básicos, siguiendo esta pequeña guía:

1. Incorporo la tecnología, como gráficos de los espacios-fase en MatLab, el programa Surface para la graficación de superficies en $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$, la utilización de GeoGebra para las partes gráficas; para animar la exposición de los temas que presento aquí, *no* con el fin de restarle valor a las matemáticas o de reemplazarlas como tal, sino para apoyarlas y hacer más accesible la tesis.
2. Los teoremas, definiciones, proposiciones y observaciones se establecen como textualmente está en los libros. Debido a que la mayoría de las demostraciones están en los libros expuestos, o, con la exposición que dan se pueden demostrar sus teoremas y los cuales se ponen en la bibliografía, solo se demuestran los teoremas que se usarán en toda la tesis.
3. La exposición de esta tesis es explicativa, introductoria, ilustrativa y descriptiva, muestro que los *r-ciclos límite* existen visualmente y se dan ejemplos lo más detallado posible y suficientemente extensos. Aunque se aplica algo de álgebra y cálculo para mostrar que algebraicamente son *ciclos límite* o **r-ciclos límite**.

Para alcanzar los objetivos planeados, se han incorporado las siguientes características:

IMÁGENES Y DIBUJOS

A lo largo de la tesis titulada como: *Generalización de los ciclos límite de sistemas dinámicos reales, continuos, polinomiales y suficientemente diferenciables, con ejemplos en el plano tridimensional* se utilizan imágenes y dibujos, *no* solamente como instrumento para el aprendizaje, sino también como un instrumento notable en la solución de problemas. Se entiende más el contexto de las cosas con un gráfico o imagen que haciendo simplemente abstracciones matemáticas, pues las personas son más visuales que abstractas en términos generales.

REDACCIÓN EN MATEMÁTICAS

Los ejemplos que se presentan a lo largo de todo este escrito tienen una redacción verbal y matemática extensa, pero intuitivas, con el fin de que cada ejemplo sea lo bastante significativo como para abarcar bien lo que se plantea en la teoría. Esto es,

¹En realidad la interpretación de “función suficientemente diferenciable” depende del contexto; se refiere a que la función es tantas veces diferenciable para poder manipularla como nos interese; si, por ejemplo, es una curva y se quiere hallar el triedro de Frénet, se refiere a que es tres veces diferenciable; si sólo se quieren hallar sus puntos críticos, uno se refiere a que simplemente existe su primera derivada, lo mismo sucede con suficientemente continuo, si se quiere sacar la segunda derivada de una función, al menos tendría que ser tres veces continua, en la función misma, su primer derivada y su segunda derivada.

me apego al manejo de los operadores, las operaciones y de los teoremas, en lugar de darlo de manera puramente abstracta, puesto que se utilizan en el segundo capítulo (2). Y los ejemplos tienen una explicación y contexto para que se note lo que se hace paso a paso.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Los ejemplos, están cuidadosamente escogidos y ordenados para la construcción de los temas que se presentan, con la finalidad de entender el uso de los teoremas, proposiciones o las construcciones que se hacen. Los ejemplos están escritos, y sirven como modelos de resolución de problemas, muestran un concepto, definición o teorema particular, aunque no en todos los casos, solo lo que se necesita manejar para poder construir o generalizar los *ciclos límite* o *r-ciclos límite*; son prototipos de las ideas expuestas en los teoremas, proposiciones, o en los mismos ejemplos.

ASPECTOS PEDAGÓGICOS

Uso letras en negritas y en cursivas (a veces combinando ambas), esto con el fin de llamar la atención del lector para hacer énfasis en los términos y conceptos notables. También se separan los teoremas, definiciones, observaciones, ejemplos y proposiciones del texto normal o escrito con entornos propios de $\text{\LaTeX}2\epsilon$ para ver de manera estructurada los conceptos y tener separación entre cada elemento utilizado en esta tesis.

El *propósito* de esta tesis es mirar a otros horizontes para hacer crecer más este conocimiento, poder fijarnos en otras generalizaciones y métodos para la resolución de problemas nuevos, o no nuevos, pero con un enfoque distinto a lo que se estudia en los *sistemas dinámicos*, siento que estas nuevas ideas podrían ayudar más en otros ámbitos de las matemáticas, ciencias de la complejidad y de áreas del conocimiento tales como la biología, por ejemplo.

Capítulo 1

Preliminares matemáticos

En este primer capítulo (1) se ponen los tópicos necesarios para el segundo capítulo (2). Se empieza con la primera sección (1.1) que será una introducción del *álgebra geométrica*, luego se exponen el álgebra y el cálculo *p-formas* o *formas diferenciales*, en la segunda sección (1.2) se hace una introducción a los *elementos tensoriales* en la tercera sección (1.3) para usarlos en el segundo capítulo (2) de esta tesis y en la tercera sección (1.1) se hace una introducción histórica y elemental del *álgebra geométrica*. Estas son las teorías para abordar los *r-ciclos límite*.

1.1. Introducción de álgebra geométrica

El *álgebra geométrica* es una teoría matemática que fue creada por el matemático Hermann Günther Grassman (1809 - 1877) y el matemático inglés William Kingdom Clifford (1845 - 1879) con el propósito de crear un cálculo cuyos símbolos representaran objetos geométricos (como puntos, líneas, superficies o volúmenes) y se pudieran manipular algebraicamente de forma independiente de las coordenadas. Es decir, crear abstractamente con símbolos propios del álgebra y operaciones que fungieran como las dadas por la geometría, pero sin contar con las figuras de manera necesaria y generalizar esta idea geométrica a mayores dimensiones usando sólo el álgebra y sus axiomas para generalizar la idea a *multivectores*.

El *álgebra geométrica* fue olvidada tras la muerte de Clifford, y el que tendría que haber sido su lugar en los planes de estudio fue ocupado (y así sigue siendo hasta la fecha) por el *álgebra vectorial* de Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903). El *álgebra vectorial* de Gibbs presta sus servicios en física e ingeniería, pero tiene limitaciones: si bien el *producto escalar* de vectores existe en cualquier *dimensión*, el *producto vectorial* de Gibbs es exclusivo del espacio tridimensional. El *álgebra geométrica* de Grassman y de Clifford, en cambio, no está limitada por el número de *dimensiones* del espacio en que se trabaje. Por otro lado, en el álgebra de Gibbs sólo hay escalares y vectores, mientras que en el *álgebra geométrica* hay además *bivectores*, *trivectores*, *cuadrivectores*... Lo que haga falta, hasta la *dimensión* del *espacio vectorial* sobre el que se trabaje.

El *álgebra geométrica* fue rescatada (bajo la denominación de *álgebra de Clifford*) por Paul A. M. Dirac (1902 - 1984) para su ecuación relativista del electrón. Pero también es una *álgebra de Clifford* la llamada *álgebra de Paul*, unas matrices utilizadas en mecánica cuántica en el contexto del espín. Sin embargo, las representaciones matriciales empleadas por Paul y Dirac, dejaban oculta la transparente interpretación geométrica de la formulación original de Grassmann y Clifford. No ha sido sino hasta hace relativamente poco tiempo que David Hestenes (1933 - hasta la fecha), el principal defensor e impulsor del redescubrimiento del *álgebra geométrica* de Grassmann y Clifford, ha venido destacando su papel como lenguaje unificado para las matemáticas y la física.

Se trata de una teoría matemática todavía no muy conocida, pero que no sólo atrae cada vez más líneas y grupos de investigadores, sino que ofrece un enorme interés desde el punto de vista pedagógico. Y es que, aunque ciertamente el *álgebra geométrica* es más compleja que el *álgebra vectorial* de Gibbs, su riqueza le permite hacer una larga exploración de diferentes temas de matemáticas (como la teoría de determinantes, o la geometría proyectiva), de aplicaciones en Física (mecánica clásica, electromagnetismo, relatividad y mecánica cuántica), o aplicaciones a la ingeniería y robótica. Que solo se han dado apenas en pleno siglo XXI.

Dado un *espacio vectorial* de *dimensión* finita V sobre un *campo* \mathcal{F} con una *forma bilineal simétrica* (el *producto interno* o *interior*, por ejemplo, la *métrica euclidiana* o *lorentziana*) $g : V \times V \rightarrow \mathcal{F}$, el *álgebra geométrica* para este espacio cuadrático es el *álgebra de Clifford* $Cl(V, g)$. Solo se considerará el caso en que el *campo* son los números reales, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, todos esos conceptos y más están metidos dentro del *álgebra geométrica* por lo geométrico y algebraico. La notación $\mathcal{G}(p, q)$ o \mathcal{G}_n se usará para describir un *álgebra geométrica* que se conceptualizará casi hasta el final.

El producto en el álgebra se llama el *producto geométrico*, y el producto en el *álgebra exterior* contenida se llama el *producto exterior* (a menudo llamado el *producto externo* y menos a menudo la *cuña*). Se denotan estos respectivamente por *yuxtaposición* (es decir, suprimir cualquier símbolo explícito de multiplicación) y el símbolo \wedge . La definición anterior del *álgebra geométrica* es abstracta, por lo que se define cada palabra, para resumir las propiedades del *producto geométrico* mediante un conjunto de axiomas.

El primer concepto es el de *campo*, por lo que se define a continuación.

Definición 1.1. Se dice que \mathcal{F} es un **campo** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall a, b \in \mathcal{F}$, se tiene que $a + b \in \mathcal{F}$, (*cerradura de la suma*),
2. $\forall a, b, c \in \mathcal{F}$, se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$, (*propiedad asociativa de la suma*),
3. $\forall a \in \mathcal{F}$, $\exists 0 \in \mathcal{F}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$, (*elemento neutro en la suma*),
4. Para cada $a \in \mathcal{F}$, $\exists -a \in \mathcal{F}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$, (*elemento inverso en la suma*),
5. $\forall a, b \in \mathcal{F}$, se cumple que $a + b = b + a$, (*propiedad conmutativa de la suma*),
6. $\forall a, b \in \mathcal{F}$, se tiene que $ab \in \mathcal{F}$, (*cerradura del producto*),
7. $\forall a, b, c \in \mathcal{F}$, se cumple que $(ab)c = a(bc)$, (*propiedad asociativa del producto*),

8. $\forall a \in \mathcal{F}, \exists 1 \in \mathcal{F}$, tal que $a1 = 1a = a$, (elemento neutro del producto),
9. Para cada $a \in \mathcal{F}, \exists a^{-1} \in \mathcal{F}$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, (elemento inverso del producto),
10. $\forall a, b \in \mathcal{F}$, se cumple que $ab = ba$, (propiedad conmutativa de la suma),
11. $\forall a, b, c \in \mathcal{F}$, se cumple que $a(b+c) = ab+ac$. (propiedad distributiva).

El segundo concepto es el de *espacio vectorial*, por lo que se define a continuación (las letras en negro denotarán vectores, para su manejo).

Definición 1.2. Se dice que V es un **espacio vectorial** sobre el **campo** \mathcal{F} , si cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, se tiene que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$, (cerradura de la suma),
2. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, se cumple que $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$, (propiedad asociativa de la suma),
3. $\forall \mathbf{v} \in V, \exists \mathbf{0} \in V$, tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$, (elemento neutro en la suma),
4. Para cada $\mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V$, tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, (elemento inverso en la suma),
5. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, se cumple que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$, (propiedad conmutativa de la suma),
6. $\forall a \in \mathcal{F}$ y $\forall \mathbf{v} \in V$, se tiene que $a\mathbf{v} \in V$, (cerradura del producto por escalar),
7. $\forall a, b \in \mathcal{F}$ y $\forall \mathbf{v} \in V$, se cumple que $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$, (propiedad asociativa del producto por escalar),
8. $\forall \mathbf{v} \in V, \exists 1 \in \mathcal{F}$, tal que $1\mathbf{v} = \mathbf{v}1 = \mathbf{v}$, (elemento neutro del producto por escalar),
9. $\forall a \in \mathcal{F}$, y $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, se cumple que $a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2$, (distributividad sobre vectores),
10. $\forall a, b \in \mathcal{F}$, y $\forall \mathbf{v} \in V$, se cumple que $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$. (Distributividad sobre escalares).

El tercer concepto es el *producto interno* de vectores, por lo que se define a continuación.

Definición 1.3. Se dice que $g : V \times V \rightarrow \mathcal{F}$ es un **producto interno** (que se denotará por $\langle \cdot, \cdot \rangle$), donde $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall a, b \in \mathcal{F}$, y $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$; se cumple que $\langle a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = a\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle + b\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, (linealidad),
2. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, se cumple que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}$, (hermiticidad),
3. $\forall \mathbf{v} \in V$, se cumple que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. (definida positiva).

Estás tres propiedades en la definición (1.3) convierten a nuestro *producto interno* en una forma sesquilineal, hermitica y definida positiva; pero si se pide que $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, entonces nuestro *producto interno* es bilineal, simétrica y definida positiva, y si se toma la *métrica euclidiana usual*, entonces nuestro *producto interno* se convierte en un *producto escalar*, ¿por qué es tan notable el *producto escalar*? Porque a diferencia de un *producto interno* general, el *producto escalar* tiene una geometría y sus interpretaciones son notables en las proyecciones escalares y vectoriales, en muchas leyes o reglas geométricas y trigonométricas y en un gran significado dentro de la geometría analítica y euclidiana que explica la medidas de distancia a un punto, a una recta, plano o hiperplano y todas sus relaciones posibles entre sí.

Un concepto son las *métricas*, se sabe que todo *producto interior* induce de forma natural una *métrica*, debido a ser definida positiva, se da la siguiente definición de *métrica*:

Definición 1.4. Una *métrica* sobre un conjunto V es una función (llamada **función distancia** o simplemente **distancia**)

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

donde $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ es el conjunto de los números reales positivos (no se puede poner \mathbb{R} porque la **distancia** no puede ser negativa), y tal que, para cualesquiera $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \geq 0$, (no-negativa, o axioma de separación),
2. $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ si y sólo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, (axioma de coincidencia),
3. $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$, (simetría),
4. $d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \leq d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ (desigualdad triangular).

Las condiciones 1 y 2 juntas definen una función definida positiva. La primera condición es una consecuencia de las otras tres.

La definición (1.4) *métrica* conlleva al concepto de *espacio métrico*, puesto que los espacios euclidianos \mathbb{R}^n son también *espacios métricos* en donde pueden medirse distancias, áreas, volúmenes.

Definición 1.5. Un **espacio métrico** es un conjunto M (a cuyos elementos se les denomina puntos) con una función distancia asociada (también llamada una *métrica*) $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales). Decir d es una distancia sobre M es decir que se cumplen la condiciones o propiedades de la definición (1.4).

Un *espacio métrico* tiene topologías que nos sirven para el estudio de nuestros *sistemas dinámicos autónomos reales*, *suficientemente continuos y diferenciables*, *polinómiales y conservativos*, por lo que se presenta una definición con algunas de estas propiedades asociadas a un *espacio métrico*.

Definición 1.6. Sea (M, d) un espacio métrico, y sean $a \in M$ y $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ un punto de M y un número real positivo o cero, respectivamente:

1. Se llama **bola** (abierta) centrada en a y de radio r , al subconjunto de $M : \{x \in M | d(x, a) < r\}$, denotado como $B(a, r)$, o como $B_r(a)$,
2. Se llama **bola cerrada** centrada en a y de radio r , al subconjunto de $M : \{x \in M | d(x, a) \leq r\}$, denotado como $B_c(a, r)$, $\bar{B}(a, r)$ o $\bar{B}_r(a)$,
3. En análisis funcional la terminología puede llevar una confusión, pues a la **bola abierta** de radio r y centro a se la suele denotar por $U(a, r)$ o por $U_r(a)$, mientras a la **bola cerrada** de centro a y radio r se la denota por $B(a, r)$ o por $B_r(a)$,
4. Algunos autores utilizan la expresión **disco** en lugar de **bola**, así es que se puede hablar en términos de **disco abierto** y **disco cerrado**. Esta terminología se utiliza en Variable Compleja, y cuando se considera la distancia euclídea sobre el conjunto \mathbb{R}^2 ,
5. Se llama **esfera** centrada en a y de radio r , al subconjunto de $M : \{x \in M | d(x, a) = r\}$, denotado usualmente como $S(a, r)$, o $S_r(a)$.

Las definiciones (1.4) y (1.6) generales de métricas sobre un espacio euclidiano \mathbb{R}^n nos define una *métrica euclidiana*, que es la usual. La *desigualdad triangular* desempeñará un papel necesario.

Definición 1.7. Sea $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una **base ortonormal** en la que un vector $\mathbf{v} \in V$ viene dado por sus componentes en esta base, $\mathbf{v}_\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, entonces la **norma** de dicho vector viene dada por:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

En la definición (1.7) se mencionó el concepto de *norma*, se define un *operador norma* que determine la *longitud* o *magnitud del vector* bajo consideración ya que no es un problema trivial; desde la aparición de las geometrías no euclídeas para las que surgen, asociada al concepto de *longitud*, la noción de *geodésica*¹. Para ampliar estas ideas conviene conocer la *geometría riemanniana* y la *geometría diferencial*.

Definición 1.8. Sea $\mathbf{v} \in V$ cualquier vector de un **espacio vectorial** sobre un **cuerpo** \mathcal{F} . Se dice que $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es un *operador* que define la **norma** de \mathbf{v} , que se denotará como $\|\mathbf{v}\|$, si cumple:

1. $\forall \mathbf{v} \in V$ su norma ha de ser no negativa, y será cero si y sólo si \mathbf{v} es el vector cero: $\|\mathbf{v}\| > 0$ si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
2. $\forall \mathbf{v} \in V$ y $\forall \lambda \in \mathcal{F}$ se satisface que: $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$,
3. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ se cumple que $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$ (*desigualdad triangular*).

Cualquier operador que cumpla estas tres condiciones, y en cualquier geometría, será un **operador norma**.

Si se toma el *producto escalar*, se pueden deducir las siguientes propiedades. Esto para definir un *álgebra geométrica* y este concepto es necesario.

Teorema 1.1. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un **producto escalar**, con $(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$, entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$, con $\theta \in [0, \pi]$,
2. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$, (*conmutatividad del producto escalar*),
3. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$, (*distributividad del producto escalar*),
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $a(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (a\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (a\mathbf{v}_2)$, (*asociatividad respecto al producto por escalar*),
5. $\forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$, y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$, si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, (*definida positiva*),
6. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $\exists \mathbf{v} \in V$, tal que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, (*caracterización triangular*),
7. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in V$ con **caracterización triangular**, se tiene que $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$,
8. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in V$ con **caracterización triangular**, se tiene que $v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(\angle V)$, donde V es el vértice opuesto al vector \mathbf{v} , con $v = \|\mathbf{v}\|$, $v_1 = \|\mathbf{v}_1\|$, $v_2 = \|\mathbf{v}_2\|$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -v_1v_2 \cos(\angle V)$, (*ley de los cosenos*),
9. Si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ entonces $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

El teorema (1.1) está en ([David2012], pp. 17 - 20), no demostrado, pero tiene observaciones y explicaciones de cada inciso. Estas demostraciones, generalmente suelen estar en libros de geometría analítica, álgebra lineal y en cálculo diferencial e integral.

¹En el apéndice (A) se da el concepto de *geodésica* en la definición (A.18).

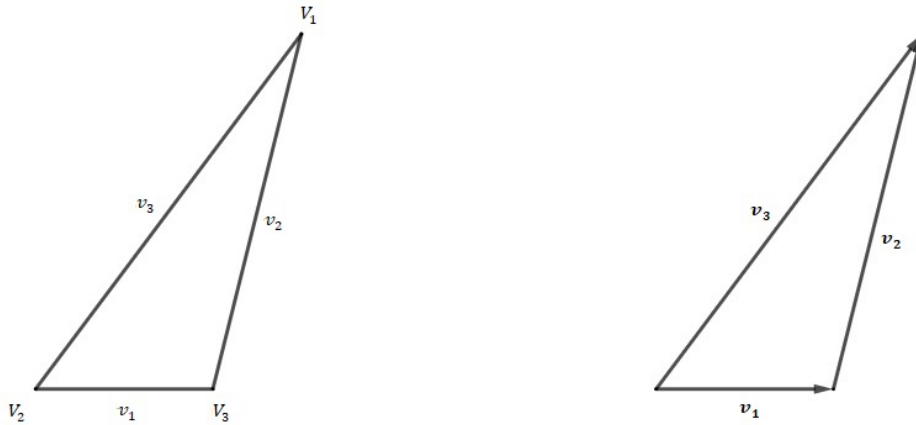


Figura 1.1. Etiquetas escalares y vectoriales para un triángulo, nótese las diferencias en la notación y en el tipo de elementos utilizados en ambas figuras. Tomada de [David2012].

El álgebra de los escalares y los vectores basados en las reglas que se acaban de mencionar son aceptados de manera general por físicos y matemáticos. Esta álgebra es incapaz de proporcionar una expresión completa de ideas geométricas. Sin embargo, no hay un consenso sobre cómo superar esta limitación. Existe una gran proliferación de diferentes sistemas matemáticos diseñados para expresar ideas geométricas (*álgebra tensorial, álgebra matricial, álgebra de espín o espinorial*) por nombrar solo algunas. Podría pensarse que esta profusión de sistemas revela la riqueza de las matemáticas. Más bien revela una confusión generalizada: confusión sobre los objetivos y principios del *álgebra geométrica*.

El principio de que el producto de dos vectores debe describir sus direcciones relativas preside la definición del *producto interno*. Pero el *producto interno* no alcanza el cumplimiento completo de ese principio, porque no expresa el hecho geométrico de que dos líneas no paralelas determinan un plano o, mejor, que dos segmentos de línea dirigidos no colineales determinan un paralelogramo. La posibilidad de dar a esta característica de la geometría una expresión algebraica directa se hace evidente cuando el paralelogramo se considera como una especie de “producto geométrico” de sus lados. Pero para hacer de esta posibilidad una realidad, la noción de número debe volver a generalizarse.

Un paralelogramo puede considerarse como un segmento plano dirigido. Así como se inventaron los vectores para caracterizar la noción de un segmento de línea dirigida, también se puede introducir un nuevo tipo de número dirigido, llamado *bivector* o *2-vector*, para caracterizar la noción de segmento plano dirigido [Figura (1.2)]. Como un vector, un *bivector* tiene *magnitud, dirección y orientación*, y solo estas propiedades. Pero aquí la palabra “dirección” debe entenderse en un sentido más general de lo que es usual, así como la *dirección* de un vector corresponde a una línea (orientada recta), así la *dirección* de un *bivector* corresponde a un plano (orientado). La distinción entre estos dos tipos de *dirección* implican la noción geométrica de *dimensión* o grado. Por consiguiente, se dice que la *dirección* de un *bivector* es bidimensional para distinguirla de la *dirección* unidimensional de un vector. Y a veces es conveniente llamar a un vector un *1-vector* para enfatizar su *dimensión*. Además, un escalar puede considerarse como un vector cero, para indicar que es un número de 0 *dimensiones*. Como ya se mostró, la única propiedad direccional de un escalar es su *orientación*, la *orientación* puede considerarse como una *dirección* de 0 *dimensiones*. Así, la idea de los números con diferentes dimensiones geométricas comienza a tomar forma.

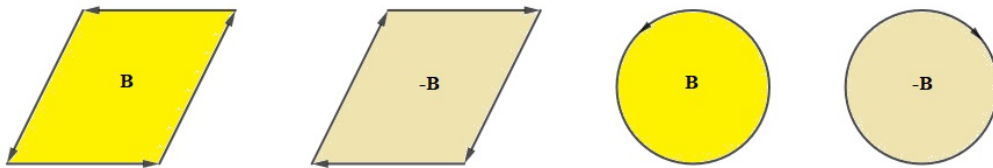


Figura 1.2. *Bivectores* y segmentos planos. Un *bivector* B puede ser dibujado como un segmento plano. Vectores con la misma dirección que pueden ser representados por segmentos planos en planos paralelos. La *magnitud* de B es un escalar denotado por $\|B\|$. La *magnitud* de B es igual al área del correspondiente segmento plano, la forma del segmento plano no está asociado con ninguna propiedad de B . Sin embargo, una forma circular sugiere el hecho de que B no distingue ninguna *dirección* en el plano de ninguna otra, mientras que un paralelogramo indica una relación del segmento plano con el segmento de línea. La *orientación* del *bivector* (y el plano correspondiente) se puede indicar mediante una flecha que asigna un “sentido” a la curva que limita el segmento plano. Un *bivector* B y su negativo, denotado por $-B$, pueden representarse como la misma figura, pero con *orientación opuesta*. Las dos *orientaciones* del plano (o *bivector*) se distinguen por las palabras “en el sentido de las agujas del reloj” y “en el sentido contrario a las agujas del reloj”. Al igual que un vector, un *bivector* no debe considerarse que tenga un plano. Los segmentos planos con la misma *magnitud* y *dirección* pueden considerarse como representaciones diferentes de un mismo *bivector* sin importar dónde se encuentren; por lo que pueden ser etiquetados por uno y el mismo símbolo *bivector*. Los segmentos planos que no están en planos paralelos deben estar etiquetados con diferentes *símbolos bivectores* incluso si tienen las mismas *magnitudes*. Tomada de [David2012].

En la geometría ordinaria, los conceptos de línea y plano desempeñan roles similares. De hecho, difícilmente se puede decir que un concepto tenga algún significado aparte del otro, y los significados matemáticos de “línea” y “plano” se determinan únicamente mediante la especificación de las relaciones entre ellos. Para dar a los “planos” y “líneas” una representación algebraica igual, la noción de número dirigido debe ampliarse para incluir la noción de *bivector* así como el vector, y las relaciones de las líneas con los planos deben reflejarse en las relaciones de los vectores con los *bivectores*. Puede ser una idea señalar que tanto la línea como el plano, consisten en un conjunto de puntos en una relación definida entre sí. Es la naturaleza de esta relación la que distingue la línea del plano. Un solo vector caracteriza completamente la relación direccional de puntos en una línea dada. Un solo *bivector* caracteriza completamente la relación direccional de puntos en un plano dado. En otras palabras, un *bivector* no describe un conjunto de puntos en un plano, sino que describe la *propiedad direccional*, que especifica el plano en el que están los puntos “en”, por lo tanto, la noción de un plano como una relación se puede separar de la noción de un plano como un conjunto de puntos.

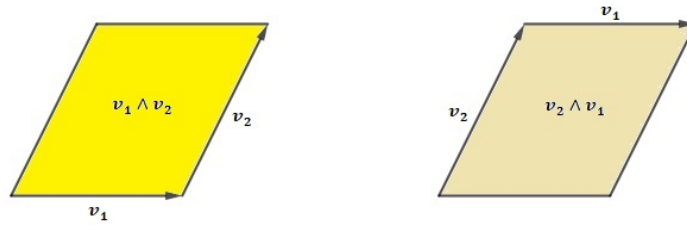


Figura 1.3. La “regla del paralelogramo” para la *multiplicación exterior*. Nota que el orden de las flechas en la frontera determina una *orientación* para el paralelogramo. Las flechas indican el camino de un pie que primero barre un segmento de línea y ahí, como el segmento de línea se mueve, en un borde del paralelogramo. Tomada de [David2012].

“En matemáticas, un **bivector** o **2-vector** es una cantidad en álgebra exterior o álgebra geométrica que extiende la idea de los escalares y los vectores. Si un escalar se considera una cantidad de orden cero, y un vector es una cantidad de orden uno, entonces se puede considerar que un bivector es de orden dos”.

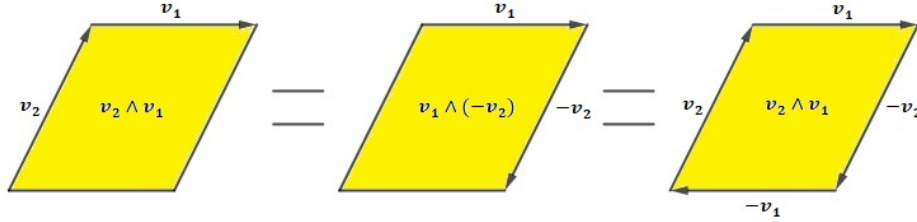


Figura 1.4. Orientaciones relativas de vectores y bivectores. El mismo bivector se obtiene del *producto externo* de cualquier par de vectores que marcan segmentos de línea orientados consecutivos que delimitan un paralelogramo orientado. Los segmentos de línea dirigida en lados opuestos de un paralelogramo orientado corresponden a vectores de orientación opuesta. Tomada de [David2012].

Teorema 1.2. Las siguientes propiedades de los bivectores se cumplen:

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2; \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, donde B es un plano orientado,
2. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2; \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, (inversión de la orientación),
3. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2; \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \wedge (-\mathbf{v}_2) = (-\mathbf{v}_2) \wedge (-\mathbf{v}_1) = (-\mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$,
4. $\forall B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2); \|B\| = \|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \sin \theta$, con $\theta \in [0, \pi]$,
5. $C = \lambda B$; con $B, C \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, (homotecia de bivectores),
6. $\|C\| = |\lambda| \|B\|$; con $B, C \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, y $\lambda \in \mathbb{R}$,
7. $\forall B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2); (1)B = B$ y $(-1)B = -B$,
8. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, y $\lambda \in \mathbb{R}; \lambda(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) = (\lambda \mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \wedge (\lambda \mathbf{v}_2)$,
9. $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$; donde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, (colinealidad),
10. $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^2$,
11. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$; se cumple que $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3$, (propiedad distributiva del producto exterior),
12. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$; se cumple que $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_2$, siempre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ cumplan con la **caracterización triangular**,
13. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$; se cumple que $\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3\| = \|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| + \|\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_2\|$, siempre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ cumplan con la **caracterización triangular**,
14. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2; \frac{\sin V_1}{v_1} = \frac{\sin V_2}{v_2} = \frac{\sin V_3}{v_3}$, donde V_1, V_2 y V_3 son los vértices opuestos de los lados v_1, v_2 y v_3 respectivamente de un triángulo cualquiera como en la figura (1.1).

El teorema (1.2) se encuentra en ([David2012], pp. 22 - 26) no demostrado, pero hay explicaciones de cada inciso, sin embargo, estos pueden ser demostrados con las definiciones, teoremas y proposiciones de la sección (1.2). Por ahora se explica cada uno de los puntos del teorema (1.2); la propiedad 1 nos dice que dado que el bivector B correspondiente a este paralelogramo está determinado de manera única por esta construcción geométrica, puede ser considerado como un tipo de “producto” de los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Una “cuña” se usa para denotar este nuevo tipo de multiplicación para distinguirla del “punto” que denota el producto interno de los vectores. Se dice que el bivector $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ es el *producto externo* de los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . La propiedad 2 nos dice que invertir el orden de los vectores en un producto externo “invierte” la *orientación* del bivector resultante, es decir, el paralelogramo obtenido al “barrer \mathbf{v}_2 a lo largo de \mathbf{v}_1 ” difiere solo en *orientación* del paralelogramo obtenido al “barrer \mathbf{v}_1 lo largo de \mathbf{v}_2 ”; la propiedad 3 nos dice la relación de la *orientación* del vector con la *orientación* del bivector, esta regla, como las demás, se deriva de la correspondencia de vectores y bivectores con segmentos de línea orientados y segmentos de plano, ver la figura (1.4).

La propiedad 4 nos dice que la magnitud del bivector $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ es el área del paralelogramo correspondiente, la propiedad 5 nos dice que la *multiplicación escalar* se puede definir para los bivectores de la misma manera que para los vectores, la propiedad 6 nos dice que la magnitud de B está dilatada por la magnitud de A , y la dirección de C es la misma que la de B si λ es positiva, u opuesta a ella si λ es negativa. La propiedad 7 nos dice como se usa la multiplicación por la unidad de los escalares uno y menos uno; los bivectores que son múltiplos escalares entre sí se dicen que son codireccionales, la propiedad 8 nos dice

la relación entre las *multiplicaciones escalares* de vectores y *bivectores*, la ecuación expresa el hecho de que la dilatación de un lado de un paralelogramo dilata su área en la misma cantidad. La propiedad 9 nos dice que el *producto externo* de los vectores distintos de cero es cero si y sólo si son colineales; la propiedad 10 nos dice que si $\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_1$, ya que, si \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son colineales, entonces “barrer \mathbf{v}_1 lo largo de \mathbf{v}_2 ” no produce ningún paralelogramo.

La propiedad 11 nos dice que la relación de la suma con las *multiplicaciones externas* cumplen con la distributividad, la propiedad 12 nos dice que si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y \mathbf{v}_3 cumplen con la *caracterización triangular*, entonces, hay tres formas diferentes de expresar el mismo *bivector* como producto de vectores, la propiedad 13 nos dice que hay tres formas diferentes de expresar su magnitud y la propiedad 14 nos dice que existe una fórmula que nos relaciona los vértices con sus lados, comúnmente conocido como la “*ley de los senos*”. Todas las fórmulas de trigonometría plana y esférica se pueden derivar y expresar de manera compacta utilizando *productos internos* y *externos*.

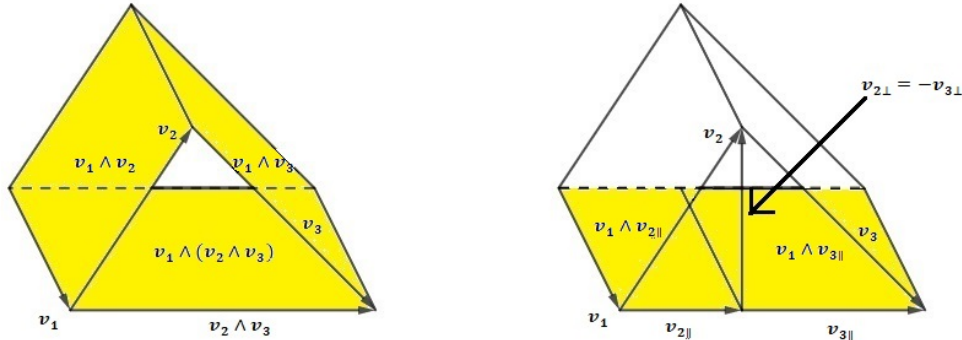


Figura 1.5. Regla distributiva para el producto exterior. Para probar la regla distributiva, exprese \mathbf{v}_2 como la suma de una parte $\mathbf{v}_{2\parallel}$ colineal con $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ y una parte $\mathbf{v}_{2\perp}$ ortogonal a $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Haga lo mismo para \mathbf{v}_3 y observe que $\mathbf{v}_{2\perp} = -\mathbf{v}_{3\perp}$, entonces $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{2\perp}) + (\mathbf{v}_{3\parallel} + \mathbf{v}_{3\perp})$ y $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{3\parallel}) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel}$. Esto reduce la regla distributiva a la regla usual para agregar áreas, ya que todos los bivectores en la ecuación son codireccionales. Por lo tanto, si $\mathbf{v}_{2\parallel}$ y $\mathbf{v}_{3\parallel}$ tienen la misma orientación que $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, que es el caso en el diagrama a continuación, entonces $|\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)| = |\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{3\parallel})| = |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2\parallel}| + |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel}|$. Sin embargo, puede ocurrir que la orientación de $\mathbf{v}_{3\parallel}$ sea opuesta a la de $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, en cuyo caso la orientación de $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ es opuesta a la de $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel}$. $|\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)| = |\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{3\parallel})| = |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{2\parallel}| - |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_{3\parallel}|$. Por el se ve diagrama que, en general, $|\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)| \leq |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2| + |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3|$, con igualdad solo si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y \mathbf{v}_3 son coplanares. Las cantidades $|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2|$ y $|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3|$ son áreas y se pueden agregar como cualquier otro escalar. Pero $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3$ son “áreas dirigidas” y se agregan “como vectores”. Tomada de [David2012].

La teoría del *producto exterior* como se describe hasta ahora exige una generalización. Al igual que un segmento plano es barrido por un segmento de línea en movimiento, un “segmento espacial” es barrido por un segmento plano en movimiento. Por lo tanto, los puntos en un paralelogramo orientado especificado por el *bivector* $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ moviendo una distancia y dirección especificada por un vector \mathbf{v}_3 barren un paralelepípedo orientado [Figura (1.6)], que puede caracterizarse por un nuevo tipo de número dirigido T llamado *trivector* o *3-vector*. Las propiedades de T se fijan considerándola igual al *producto externo* del *bivector* $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ con el vector \mathbf{v}_3 .

Teorema 1.3. Las siguientes propiedades de los trivectores se cumplen:

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2; (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = T$, donde T es un paralelogramo orientado.
2. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2; (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)$, (propiedad asociativa del producto externo)
3. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2; (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_3 = (-\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = -T$,
4. Si $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ se encuentran sobre un mismo plano, (coplanaridad)

El teorema (1.3) se encuentra en ([David2012], pp. 26 - 28) no demostrado, pero hay una explicación de cada propiedad, y puede ser demostrado con las definiciones, teoremas y proposiciones de la sección (1.2). El estudio de los *trivectores* conduce a resultados análogos a los obtenidos para los *bivectores*, sin embargo, la propiedad 2 del teorema (1.3) nos dice que la *multiplicación externa* debería obedecer la regla asociativa, la propiedad 3 nos dice que esta es una instancia de la regla general de que la *orientación* de un producto se invierte al invertir la *orientación* de uno de sus factores y la propiedad 4 nos dice que si \mathbf{v}_3 “se encuentra en el plano de $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ ”, entonces “barrer $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ a lo largo de \mathbf{v}_3 ” no produce un objeto tridimensional. Es una forma algebraica de decir que tres líneas (con las direcciones denotadas por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$) se encuentran en el mismo plano.

Los aspectos esenciales de la *multiplicación externa* y las nociones generalizadas de número y dirección que conlleva ahora se han establecido. No se logran conocimientos nuevos sobre las relaciones entre el álgebra y la geometría al considerar el *producto externo* de cuatro o más vectores.

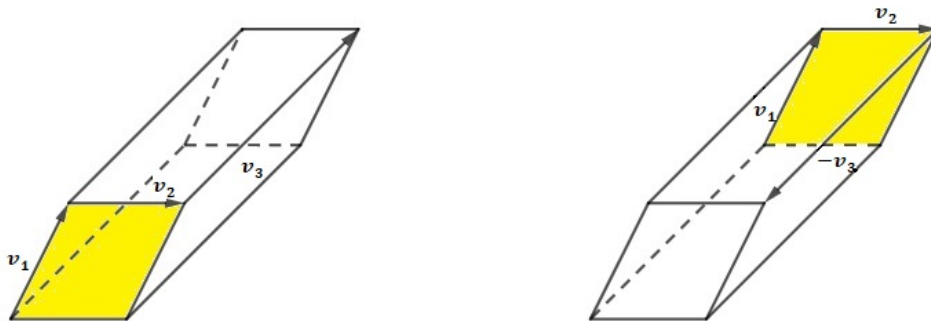


Figura 1.6. La “regla del paralelepípedo” para el producto exterior. El desplazamiento de un paralelogramo orientado barre un paralelepípedo orientado. El desplazamiento en la dirección opuesta arrastra un paralelepípedo con orientación opuesta. Tomada de [David2012].

El *producto externo* fue inventado por Hermann Grassmann y, se convirtió en una teoría matemática completa antes de mediados del siglo XIX. A su teoría se le ha otorgado un lugar prominente en las matemáticas solo en los últimos cuarenta años. El mismo Grassmann fue el único que lo usó durante las dos primeras décadas posteriores a su publicación. Surge del hecho de que la comprensión de Grassmann de la naturaleza abstracta de las matemáticas estaba por delante de su tiempo. Fue la primera persona en llegar a la concepción moderna del álgebra como un sistema de reglas que se relacionan con entidades por lo demás indefinidas. Se dio cuenta de que la naturaleza del *producto exterior* podría definirse especificando las reglas a las que obedece, especialmente las reglas distributivas, asociativas y anticonmutativas dadas anteriormente. Explicó, esta visión significativa. Y demostró su necesidad al mostrar, por primera vez, cómo el álgebra abstracta puede llevarnos más allá del espacio tridimensional de la experiencia a una concepción del espacio con cualquier número de dimensiones. Desafortunadamente, en su entusiasmo por los desarrollos abstractos, Grassmann no enfatizó el origen geométrico y la interpretación de sus reglas.

El invento de Hermann Grassmann fue sembrado por su padre, Günther, quien en 1824, cuando Hermann tenía 15 años, publicó estas palabras en un libro destinado a la instrucción elemental:

“*El rectángulo en sí mismo es el verdadero producto geométrico, y su construcción es en realidad una multiplicación geométrica... Un rectángulo es el producto geométrico de su base y altura, y este producto se comporta en la misma pared que el producto aritmético*”.

Grassmann elaboró esta idea en forma extensa y debió haberla defendido con entusiasmo para su hijo pequeño. Sin embargo, la idea de Günther es apenas una forma novedosa de expresar la idea central del Libro II de los Elementos de Euclides. Los griegos hicieron un uso frecuente de la correspondencia entre el producto de los números y la construcción de un paralelogramo desde su base y altura. Por ejemplo, Euclides representó la regla distributiva del álgebra como adición de áreas y la probó como un teorema geométrico. Esta correspondencia entre aritmética y geometría fue rechazada por Descartes e ignorada por los matemáticos que le siguieron. Sin embargo, Descartes simplemente asoció la multiplicación aritmética con una construcción geométrica diferente. La idea griega permaneció inactiva hasta que fue nuevamente expresada en fuertes términos aritméticos por Günther Grassmann. Pero el avance significativo, desde la idea de un *producto geométrico* hasta su expresión algebraica completa mediante la *multiplicación externa*, fue hecho por su hijo.

Hermann Grassmann completó la formulación algebraica en geometría griega iniciada por Descartes. La teoría griega de relación y proporción ahora se incorpora a las propiedades de los escalares y la *multiplicación escalar*. La idea griega de proyección está incorporada en el *producto interior*. Y el *producto geométrico* griego se expresa por *multiplicación externa*. La invención de un sistema de números dirigidos para expresar nociones geométricas griegas hace posible, una apreciación más profunda de los logros griegos. Solo a la luz del *producto exterior* de Grassmann es posible comprender que la distinción griega entre número y magnitud tiene un significado geométrico real. Corresponde aproximadamente a la distinción entre escalar y vector. En realidad, las magnitudes griegas se agregaron como escalares, pero se multiplicaron como vectores, por lo que la multiplicación de magnitudes griegas involucra las nociones de dirección y dimensión, y Euclides acertó al distinguirla de la multiplicación de los “números griegos” (nuestros escalares). En la obra de Grassmann las nociones de *dirección, dimensión, orientación y magnitud escalar* cobran sentido. No hubiera sido imposible sin la distinción anterior de los griegos, y quizás sin su nueva formulación en términos casi aritméticos por parte de Günther.

Los vectores, entendidos geoméricamente como “segmentos lineales orientados”, serán los generadores del álgebra, es decir, cualquier elemento de un *álgebra geométrica* se puede formar a partir de sumas y productos de vectores. Los números reales serán también elementos del álgebra. Habrá otros axiomas que expresen las propiedades de linealidad y, finalmente, el *axioma de contracción*, el que da a las *álgebras de Clifford* su característica distintiva respecto a otras álgebras asociativas. A partir de los axiomas, se comenzarán a analizar el producto de dos vectores para posteriormente establecer las relaciones con la geometría.

Definición 1.9. Se denota un **álgebra geométrica** como $\mathcal{G}(p, q)$ o \mathcal{G}_n , donde n es la **dimensión del espacio vectorial** V . Si la **dimensión del espacio vectorial** es n , entonces la **dimensión** de \mathcal{G}_n es 2^n . Y (p, q) representa la **signatura** de \mathcal{G} . Por otra parte, $Cl(V, g)$, $Cl_{(n,s)}$ o $\mathcal{G}_{(p,q)}$ son notaciones utilizadas en la literatura clásica del **álgebra geométrica**.

Grassmann fue la persona en definir la multiplicación especificando un conjunto de reglas algebraicas. Al examinar sistemáticamente varias reglas posibles, descubrió varios otros tipos de multiplicación además de sus *productos internos* y *externos*. Sin embargo, pasó por alto que hay un tipo de *producto geométrico* del cual se pueden obtener todos los demás *productos geométricos* significativos. Todos los datos geométricos para descubrir un producto de este tipo se han mencionado anteriormente.

Ya se ha señalado que los *productos internos* y *externos* parecen complementarse entre sí al describir relaciones geométricas independientes. Esta circunstancia merece el estudio más cuidadoso. El enfoque es considerar la posibilidad de introducir un nuevo tipo de producto $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ mediante la ecuación.

Definición 1.10. Para los vectores \mathbf{v}_1 y $\mathbf{v}_2 \in V$, se puede escribir el **producto geométrico** de cualesquiera dos vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 como la suma de un **producto simétrico** (el producto interno) y un **producto antisimétrico** (el producto exterior):

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$$

Aquí el escalar $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ se ha agregado al bivector $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$. Puede parecer absurdo agregar dos números dirigidos con productos diferentes. Eso puede haber demorado a Grassmann a considerarlo. Durante siglos, la idea de que solo puedes agregar “cosas similares” ha sido implacablemente impresa. Es un tipo de tabú matemático: “es obvio que no puede agregar manzanas y naranjas o pies y pies cuadrados”. Por el contrario: “solo es obvio que la adición de manzanas y naranjas no suele ser algo práctico, a menos que esté haciendo una ensalada.”

Desaparece cuando la definición (1.10) se puede justificar en la forma abstracta “Grassmanniana” que se ha convertido en el procedimiento matemático estándar en la actualidad. Todo lo que las matemáticas requieren es que las relaciones y operaciones indicadas estén bien definidas y se empleen consistentemente. El significado matemático de agregar escalares y *bivectores* se determina al especificar que dicha adición satisface las reglas conmutativas y asociativas habituales. El uso del “signo igual” en la definición (1.10) se justifica suponiendo que obedece las mismas reglas que rigen la igualdad en el *álgebra escalar*. Ahora se puede demostrar que las propiedades del nuevo producto están casi completamente determinadas por el requisito obvio de que sean consistentes con las propiedades ya acordadas a los *productos internos* y *externos*.

Teorema 1.4. Las siguientes propiedades del **producto geométrico** se cumplen:

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$; se cumple que $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$,
2. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$; si $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$,
3. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$; si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, entonces $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$,
4. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$; se cumple que $\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3$, (distributividad izquierda del producto geométrico),
5. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$; se cumple que $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$, (distributividad derecha del producto geométrico),
6. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$; se cumple que $\lambda(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = (\lambda\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1(\lambda\mathbf{v}_2)$, (asociatividad del producto por escalar),
7. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$; se cumple que $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}\lambda$, (conmutatividad del producto por escalar),
8. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$; se tiene que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1)$,
9. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$; se tiene que $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1)$,
10. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$; se cumple que $\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$, (asociatividad del producto geométrico),
11. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$; se cumple que $\mathbf{v} \cdot A = \frac{1}{2}(\mathbf{v}A - A\mathbf{v}) = -A \cdot \mathbf{v}$,
12. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$; se cumple que $\mathbf{v} \wedge A = \frac{1}{2}(\mathbf{v}A + A\mathbf{v}) = A \wedge \mathbf{v}$,
13. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$; se tiene que $\mathbf{v}A = \mathbf{v} \cdot A + \mathbf{v} \wedge A$,
14. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$; se cumple que $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2$.

El teorema (1.4) se encuentra en ([David2012], pp. 31 - 34) en donde demuestran varios de los incisos (se demuestran los otros de manera análoga), además de hay explicaciones de cada inciso y su significado. Ahora se explican brevemente las propiedades del teorema (1.4); la propiedad 1 implica una relación entre $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$, la propiedad 2 nos da la regla conmutativa o simétrica si $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, la propiedad 3 es análoga a la propiedad 2, pero en este caso nos da la regla anticonmutativa o antisimétrica si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, las propiedades 4 y 5 nos dicen que el producto geométrico debe obedecer las propiedades distributiva izquierda y derecha respectivamente, la propiedad 6 nos da la relación de la multiplicación escalar con el producto geométrico, la propiedad 7 nos dice que la multiplicación escalar y vectorial son mutuamente conmutativas. Las propiedades 8 y 9 nos señala el camino hacia una gran simplificación. En lugar de considerar (1.10) como una definición de $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$, considere $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ como fundamental y considere (1.4) propiedades 8 y 9 como las definiciones de $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$. Se reduce a dos tipos de multiplicación de vectores a uno. Hay que notar que por la propiedad 8, la conmutatividad del producto interno surge de la conmutatividad de la adición, y por la propiedad 9 la anticonmutatividad del producto externo surge de la anticonmutatividad de la sustracción. Las propiedades algebraicas del producto geométrico de dos vectores ya han sido determinadas. Las propiedades correspondientes de los productos internos y externos pueden derivarse de las propiedades 8 y 9 del teorema (1.4) simplemente invirtiendo los argumentos ya dados.

La propiedad 10 nos dice que este producto cumple con la regla asociativa, la propiedades 11 y 12 nos da la relación del producto de un vector con un bivector, la propiedad 13 nos dice que debe considerarse como idéntico al producto externo de vector y bivector que ya se ha introducido por razones geométricas y que se debe considerar una generalización del producto interno de los n -vectores, y finalmente, la propiedad 14 nos muestra que la multiplicación interna de un vector con un bivector da como resultado un vector.

Para empezar, el álgebra debe incluir los elementos graduales 0 -vector, 1 -vector, 2 -vector y 3 -vector para representar las propiedades direccionales de puntos, líneas, planos y espacio. Se introdujeron tres tipos de multiplicación, los *productos escalares*, *internos* y *externos*, para expresar las relaciones entre los elementos. Pero se vio que los *productos internos* y *externos* deben reducirse a un solo *producto geométrico* si se permite que se agreguen elementos de diferente grado (o dimensión). Por este motivo, se considera que el álgebra debe incluir elementos de “grado mixto”, como:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=0}^r \langle \mathbf{M} \rangle_i = \langle \mathbf{M} \rangle_0 + \langle \mathbf{M} \rangle_1 + \cdots + \langle \mathbf{M} \rangle_r. \quad (1.1)$$

Aquí se usa la notación \mathbf{M} como la inicial de la palabra *multivector*, se da una definición, ya que un *álgebra geométrica* es una *álgebra graduada*,

Definición 1.11. Sea G un grupo abeliano, un **álgebra G -graduada** es un álgebra con la descomposición en suma directa

$$A = \bigoplus_{i \in G} A_i$$

tal que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Un elemento del i -ésimo subespacio A_i se dice elemento de grado i homogéneo o puro.

Los elementos de una *álgebra geométrica* asociada a un espacio vectorial de n dimensiones se pueden ver como suma de diferentes términos, comenzando por una parte escalar, de grado 0, que tendrá una única componente, una parte vectorial, de grado 1, que tendrá n componentes, una parte bivectorial, de grado 2, que tendrá $\binom{n}{2}$ componentes... Y así hasta llegar

a una parte n -vectorial con sólo una componente (ya que $\binom{n}{n} = 1$). Se muestra un ejemplo.

Ejemplo 1.1. Caso $n = 2$.

Sea $\mathbf{M} = a + \mathbf{v} + A = a + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$. En un multivector genérico \mathbf{M} del álgebra geométrica asociada al espacio bidimensional, \mathcal{G}_2 , se pueden distinguir tres partes: una escalar (real), una vectorial y una bivectorial:

1. La parte escalar, de grado 0, es un número real a .

$$a = \langle \mathbf{M} \rangle_0 = \langle \mathbf{M} \rangle$$

La notación $\langle \mathbf{M} \rangle_m$ indica que se quedara con la parte de grado m del **multivector** \mathbf{M} . En el caso $m = 0$, lo más habitual es no indicar la m y ya se entiende que vale 0: $\langle \mathbf{M} \rangle$ es la parte de grado 0, o parte escalar, de \mathbf{M} .

2. La parte vectorial \mathbf{v} , de grado 1, consta de dos componentes λ_1, λ_2 que multiplican a los respectivos vectores de la **base ortonormal**:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{M} \rangle_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$$

En este caso, $\langle \mathbf{M} \rangle_1$ indica la parte de grado 1, o parte vectorial, de \mathbf{M} . Por tanto, la parte vectorial vendrá descrita por dos componentes en función de los elementos de la base de vectores.

3. La parte **bivectorial** B , de grado 2, que resultará de multiplicar un escalar por el **bivector** $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$:

$$B = \langle \mathbf{M} \rangle_2 = \beta \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$$

Por tanto, se tiene una única componente **bivectorial**. $\langle \mathbf{M} \rangle_2$ indica la parte de grado 2, o parte **bivectorial**, de \mathbf{M} .

Considerando el álgebra \mathcal{G}_2 como espacio lineal, este tiene cuatro dimensiones, al poderse describir sus elementos con cuatro componentes reales: a, λ_1, λ_2 y β .

El **álgebra geométrica** \mathcal{G}_2 , como todas las **álgebras geométricas**, es una **álgebra graduada**: en ella hay elementos de grado 0, los escalares (números reales); elementos de grado 1, los vectores (segmentos orientados); y elementos de grado 2, los **bivectores** (superficies orientadas). Cualquier **multivector** de \mathcal{G}_2 es una suma de estos tres tipos de elementos.

Nótese que la **dimensión** de \mathcal{G}_2 es $2^2 = 4$, donde la **dimensión** respectiva de \mathbb{R}^2 es 2, ya que:

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \sum_{i=1}^3 \binom{2}{k-1} = 1 + 2 + 1 = 4$$

Los elementos de este *espacio vectorial*, o vectores, se interpretarán geoméricamente como segmentos lineales orientados sin que importe para su distinción el punto de origen o aplicación, lo que en Física se conoce como *vectores libres*. A partir de ellos se construyen, mediante productos y sumas, el resto de objetos del *álgebra geométrica*. Un sistema de axiomas definirá un *producto geométrico* entre cualquier par de elementos del álgebra, llamado también *producto de Clifford*, que abarca tanto los productos de números reales entre sí como los productos de reales por vectores y que se generaliza a todos los tipos de elementos del álgebra. Por otra parte, la operación suma también se generaliza, extendiéndose a la suma de cualquier tipo de *multivector*.

Definición 1.12. Las siguientes propiedades para un álgebra geométrica, que se denotará como \mathcal{G}_n , se cumplen:

1. $\forall A, B \in \mathcal{G}_n$; se cumple que $A + B = B + A$, (conmutatividad en la suma de multivectores)
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{G}_n$; se cumple que $(A + B) + C = A + (B + C)$, (asociatividad en la suma de multivectores)
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{G}_n$; se cumple que $(AB)C = A(BC)$, (asociatividad en el producto de multivectores)
4. $\forall A, B, C \in \mathcal{G}_n$; se cumple que $A(B + C) = AB + AC$, (distributividad izquierda en multivectores)
5. $\forall A, B, C \in \mathcal{G}_n$; se cumple que $(A + B)C = AC + BC$, (distributividad derecha en multivectores)
6. $\forall A \in \mathcal{G}_n, \exists 0 \in \mathcal{G}_n$, tal que $A + 0 = 0 + A = A$, (elemento neutro en la suma de multivectores)
7. $\forall A \in \mathcal{G}_n, \exists 1 \in \mathcal{G}_n$, tal que $A1 = 1A = A$, (elemento neutro en el producto de multivectores)
8. Para cada $A \in \mathcal{G}_n, \exists -A \in \mathcal{G}_n$, tal que $A + (-A) = (-A) + A = 0$, (existencia de inversos en la suma de multivectores)
9. $\forall A \in \mathcal{G}_n, \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}$; se cumple que $\lambda A = A\lambda$, (conmutatividad de la multiplicación por escalar sobre un multivector)
10. $\forall \mathbf{v}_1 \in V$, con $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, se cumple que $\mathbf{v}_1^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 > 0$
11. $\forall \mathbf{v} \in V$, y $A_k \in \mathcal{G}_n$, se cumple que $\mathbf{v} \cdot A_k = \frac{1}{2}[\mathbf{v}A_k - (-1)^k A_k \mathbf{v}]$,
12. $\forall \mathbf{v} \in V$, y $A_k \in \mathcal{G}_n$, se cumple que $\mathbf{v} \wedge A_k = \frac{1}{2}[\mathbf{v}A_k + (-1)^k A_k \mathbf{v}]$,
13. $\forall \mathbf{v} \in V$, y $A_k \in \mathcal{G}_n$, se tiene que $\mathbf{v}A_k = \mathbf{v} \cdot A_k + \mathbf{v} \wedge A_k$,
14. $\forall \mathbf{v} \in V$, y $A_k \in \mathcal{G}_n$, $\mathbf{v} \cdot A_k$ es un $(\mathbf{k} - 1)$ -vector,
15. $\forall \mathbf{v} \in V$, y $A_k \in \mathcal{G}_n$, $\mathbf{v} \wedge A_k$ es un $(\mathbf{k} + 1)$ -vector,
16. Si $A_3 \in \mathcal{G}_3$, entonces, $\forall \mathbf{v} \in V$; se cumple que $\mathbf{v} \wedge A_3 = \mathbf{0}$
17. $\mathbf{v}A_3 = A_3 \mathbf{v}$, con $A_3 \in \mathcal{G}_3, \forall \mathbf{v} \in V$,
18. $AA^{-1} = 1$, con $A \in \mathcal{G}_n$
19. $\forall \mathbf{v} \in V$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^{-1} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$

La definición (1.12) se encuentra en ([David2012], pp. 35 - 37). Se explica la definición (1.12) por partes; las propiedades 1 y 2 pueden ser considerados como el **Axioma 0**, la propiedad 3 puede ser considerado como el **Axioma 1**, las propiedades 4 y 5 pueden ser considerados como el **Axioma 2**, la propiedad 9 puede ser considerado como el **Axioma 3**, la propiedad 7 puede ser considerado como el **Axioma 4**, y finalmente, la propiedad 10 puede ser considerada como el **Axioma 5** o **axioma de contracción**, dependiendo de las referencias que se consulten, pueden haber más o menos axiomas que se aceptan dentro de un *álgebra geométrica*. Muchas operaciones del álgebra elemental, como “racionalizar el denominador”, son igualmente provechosos en el álgebra geométrica. Sin embargo, se debe tener en cuenta que algunos multivectores no tienen inversos multiplicativos, por lo que es imposible dividirlos. Es por este motivo, que uno debe tener cuidado con la propiedad 18.

1.2. Formas diferenciales

Se considerará la notación de los libros de [Mikio2003], así como [Michael1988] y [Claudio1995], enumerando las definiciones, teoremas, proposiciones, observaciones y ejemplos.

Primero se presentan las definiciones generales, algunas de ellas seguidos de ejemplos, cuando se considere apropiado. **En lo que concierne, de aquí en adelante se estará trabajando en el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$, es decir, todo será en los espacios vectoriales² comunes reales n-dimensionales.**

Este capítulo empieza introduciendo los *tensores*, que son necesarios para construir las *formas diferenciales*, ya conocidos. Sea V un espacio vectorial (sobre \mathbb{R}), se indicará por V^p el producto de p factores $V \times \dots \times V$,

Definición 1.13. Una función $T : V^p \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **multilineal** si para cada i con $1 \leq i \leq p$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_p) &= T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) + T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_p), \\ T(v_1, \dots, av_i, \dots, v_p) &= aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p). \end{aligned}$$

Una función multilineal $T : V^p \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *tensor de orden p* en V (o en forma breve *p -tensor*). Al conjunto de todos los tensores de orden p , se denotará por $\Omega^p(V)$.

Teorema 1.5. $\Omega^p(V)$ es un **espacio vectorial** (sobre \mathbb{R}) si para $S, T \in \Omega^p(V)$ y $a \in \mathbb{R}$ se definen la **cerradura de la suma** y la **multiplicación** como:

$$\begin{aligned} (S + T)(v_1, \dots, v_p) &= S(v_1, \dots, v_p) + T(v_1, \dots, v_p), \\ (aS)(v_1, \dots, v_p) &= a \cdot S(v_1, \dots, v_p). \end{aligned}$$

El teorema (1.5) está en ([Michael1988], p. 69), no demostrado, pero con la definición (1.13) se puede demostrar. Hay también una operación que conecta los diversos espacios $\Omega^p(V)$ entre sí.

Definición 1.14. Si $S \in \Omega^p(V)$ y $T \in \Omega^q(V)$, se define el **producto tensorial** $S \otimes T \in \Omega^{p+q}(V)$ por

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) = S(v_1, \dots, v_p) \cdot T(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}).$$

La definición (1.14), no requiere un ejemplo. Obsérvese que el orden de los factores S y T es crucial aquí, puesto que $S \otimes T$ y $T \otimes S$ están lejos de ser iguales ([Michael1988], p. 70). Las siguientes propiedades de \otimes se cumplen siempre:

Teorema 1.6. Las siguientes propiedades entre la **suma tensorial** y el **producto tensorial** del teorema (1.5) y de la definición (1.14) se cumplen:

- $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$, $\forall S_1, S_2 \in \Omega^p(V)$ y $T \in \Omega^q(V)$,
- $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$, $\forall S, S \in \Omega^p(V)$ y $T_1, T_2 \in \Omega^q(V)$,
- $(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T)$, $\forall S \in \Omega^p(V)$ y $T \in \Omega^q(V)$,
- $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$, $\forall S \in \Omega^p(V)$; $T \in \Omega^q(V)$ y $U \in \Omega^r(V)$.

El teorema (1.6) está en ([Michael1988], p. 70) no demostrado, pero con las definiciones (1.13), (1.14) y el teorema (1.5), se puede demostrar el teorema (1.6). $(S \otimes T) \otimes U$ y $S \otimes (T \otimes U)$ se acostumbran a designar simplemente por $S \otimes T \otimes U$. Los productos de orden superior $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$ se definen de forma análoga, si se usa el cuarto inciso del teorema (1.6) como definición. $\Omega^1(V)$ es precisamente el *espacio dual* V^* ([Michael1988], p. 70). La operación \otimes permite expresar los otros *espacios vectoriales* $\Omega^k(V)$ por medio de $\Omega^1(V)$.

Teorema 1.7. Sea v_1, v_2, \dots, v_n una **base**³ de V , y sea $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ la **base dual**⁴, con la hipótesis $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Entonces, el conjunto de todos los **productos tensoriales** de p factores

$$\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_p} \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$$

es una **base** para $\Omega^p(V)$, que además tiene **dimensión**⁵ n^p .

El teorema (1.7) está en ([Michael1988], pp. 70 - 71), el cuál está completamente demostrado.

Definición 1.15. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$. Una **\mathbf{p} -forma** (*pe forma*) en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

²El término y concepto de *espacio vectorial* se presenta en la sección (1.1) en la definición (1.2).

³En el apéndice (A) se da el concepto de *base* en la definición (A.1).

⁴En el apéndice (A) se da el concepto de *base dual* en la definición (A.4)

⁵En el apéndice (A) se da el concepto de *dimensión* en la definición (A.2).

Habiendo $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ sumandos en esta expresión, donde $g_{i_1 i_2 \dots i_p}$ son funciones reales diferenciables definidas en U .

En la definición (1.21) y el teorema (1.12) se demuestra por qué hay $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ sumandos en la expresión. El teorema (1.12) demuestra que las p -formas tienen una dimensión de $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, debido a su *anticonmutatividad*⁶, esto pasa, porque se eliminan y se suman términos en las p -formas. Se presenta un ejemplo.

Ejemplo 1.2. Una **2-forma** (dos forma) definida en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una expresión del tipo

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \cdot dx_i \wedge dx_j$$

Donde $f_{ij} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, son funciones diferenciables. Como en los casos anteriores si estas funciones son de clase \mathcal{C}^k se dice que la **2-forma** ω es de clase \mathcal{C}^k .

Se advierte que las expresiones dx_i que han aparecido en las 1-formas y en las 2-formas son... ¡Simplemente expresiones! [así fueron definidas, en la definición (1.15)]. Las expresiones dx_i tienen un carácter *anticonmutativo* cuando se multiplican entre sí. De hecho, se define la anticonmutatividad entre dos diferenciales dx_i y dx_j como,

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

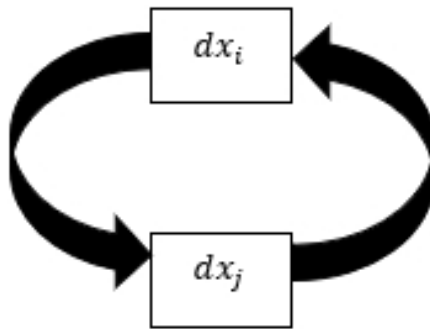


Figura 1.7. Se muestra gráficamente la *anticonmutatividad* de las p -formas con respecto al *producto cuña* \wedge . Imagen creada con LibreOffice 6.3.1, en LibreOffice Writer.

Para todo i, j . Una consecuencia inmediata de este hecho es que el producto cuña entre dos diferenciales es

$$dx_i \wedge dx_i = \mathbf{0}$$

Definición 1.16. Si ω y ω' son dos **p-formas**

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$\omega' = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g'_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Entonces ω es igual a ω' , lo cual se escribe como $\omega = \omega'$, si

$$g_{i_1 i_2 \dots i_p} = g'_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

para todo conjunto de índices i_1, i_2, \dots, i_p .

No se considerará para la definición (1.16) un ejemplo. Se pasan a considerar ahora las operaciones básicas que se efectúan entre p -formas de una manera general.

Definición 1.17. Sean ω, η dos **p-formas** en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$\eta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} h_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Se define la **suma** de ω y η , denotada por $\omega + \eta$, como la **p-forma** en el conjunto abierto U dada por

$$\omega + \eta = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (g_{i_1 i_2 \dots i_p} + h_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Para la definición (1.17) se considera un ejemplo, para ver la operación *suma* de p -formas.

Ejemplo 1.3. Sea ω la **2-forma** en \mathbb{R}^3

$$\omega = e^{x_1} dx_1 \wedge dx_2 - x_1 x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3 + (x_1^2 - x_1 x_2) dx_2 \wedge dx_3$$

⁶En la figura (1.7) se explica gráficamente lo que es la anticonmutatividad.

y sea η la **2-forma** en \mathbb{R}^3

$$\eta = x_2x_3 \sin x_1 dx_1 \wedge dx_2 + 5000x_2^5 dx_1 \wedge dx_3 - (x_1 + x_2 + x_3) dx_2 \wedge dx_3.$$

La **suma** de estas formas es la **2-forma** en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \omega + \eta &= (e^{x_1} + x_2x_3 \sin x_1) dx_1 \wedge dx_2 + (5000x_2^5 - x_1x_2x_3) dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + (x_1^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 - x_3) dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

A pesar de su necesidad, el *producto interior*⁷ tiene menos interés que el de otra función familiar presente en las más variadas teorías: el tensor $\det \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$. Al intentar generalizar esta función, se recuerda que al cambiar dos columnas de una matriz cambia el signo de su *determinante*⁸. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1.18. Un tensor de orden p , $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ se denomina **alternado** si

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p), \forall v_1, \dots, v_p \in V.$$

(En esta igualdad de la definición (1.18) se han intercambiado v_i y v_j y las otras v se han dejado fijas). El conjunto de todos los *tensores de orden p alternados*, es un *subespacio*⁹ ([Michael1988], p. 72) $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ de $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$. Puesto que para la formación de un *determinante* se requiere mucho trabajo, no es inusual que los *tensores de orden p alternados* sean complicados de escribir. Hay, sin embargo, un método uniforme para expresarlos todos. Recuérdese que el signo de una *permutación*¹⁰ σ , indicado por $\text{sgn}^{11} \sigma$, es $+1$ si σ es par y -1 si σ es impar.

Definición 1.19. Si $T \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, se define $\text{Alt}(T)$ por

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn} \sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}),$$

donde S_p el conjunto de todas las **permutaciones** de los números de 1 a p .

Los *tensores* enunciados en la definición (1.19) son llamados comúnmente como *tensores totalmente antisimétricos* ([Michael1988], p. 72). Estos son necesarios para construir el *producto exterior* (también conocido como *producto cuña* o *producto externo*, aunque estos dos nombres son menos comunes) entre dos *tensores* cualesquiera; nuevamente, no se considera un ejemplo explícito. De esta manera, se incluye la siguiente definición.

Definición 1.20. Una forma diferencial de orden p o una **p -forma** es un **tensor totalmente antisimétrico de tipo $(0, p)$**

En la sección (1.3) se explica lo que significa un tensor sea de cierto tipo. La definición (1.20) nos permite definir más operaciones. Se enuncia este teorema, ya que en él se definirá un producto diferente en las *p -formas*.

Teorema 1.8. Las siguientes propiedades se cumplen:

1. Si $T \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\text{Alt}(T) \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$,
2. Si $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\text{Alt}(\omega) = \omega$,
3. Si $T \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$.

El teorema (1.8) está en ([Michael1988], pp. 72 - 73), el cuál está demostrado. Para determinar la dimensión de $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, se necesitará un teorema análogo al teorema (1.7). Si $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $\omega \otimes \eta$, en general no está en $\Lambda^{p+q}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.21. Sean $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$, se define el **producto exterior** $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{p+q}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

La definición (1.21), relaciona el *producto exterior* con el *producto tensorial*. Ahora se da con la definición (1.21) un teorema de los *p -tensores* que relaciona el *producto exterior* y los *p -tensores alternados*.

Teorema 1.9. Las siguientes propiedades se cumplen:

1. Si $S \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ y $\text{Alt}(S) = 0$, entonces

$$\text{Alt}(S \otimes T) = \text{Alt}(T \otimes S) = 0.$$

2. $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \tau) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \tau) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \tau))$.

3. Si $\omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, $\eta \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$, y $\tau \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \tau = \omega \wedge (\eta \wedge \tau) = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \tau).$$

⁷En la sección (1.1) se da el concepto en la definición (1.9). *producto interno* es lo mismo que *producto interior*, son sinónimos, en este caso porque son equivalentes en \mathbb{R}^n .

⁸En matemáticas, se define el *determinante* como una *forma multilineal alternada* de un *campo*. Es decir, un *tensor totalmente antisimétrico*, su concepto se da en la definición (1.20).

⁹En el apéndice (A) se da el concepto de *subespacio* en la definición (A.3)

¹⁰En el apéndice (A) se da el concepto de *permutación* en la definición (A.6)

¹¹La paridad o signatura de una permutación vale 1 si esta es par y -1 si es impar. Es suficiente y necesario en *álgebra multilineal*, sobre todo en el cálculo de *determinantes*.

El teorema (1.9) está en ([Michael1988], pp. 73 - 75), el cuál está demostrado. Teniendo las propiedades del teorema (1.9), y puesto que se han definido las p -formas, se redefine el *producto exterior* en términos de las p -formas en sentido notacional.

Definición 1.22. Sean ω una \mathbf{p} -forma en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y f una $\mathbf{0}$ -forma, es decir

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

y $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se define el **producto** de la \mathbf{p} -forma ω por la $\mathbf{0}$ -forma f en U , denotado por $f\omega$, como la \mathbf{p} -forma en U dada por

$$f \wedge \omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} f g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

No se presenta un ejemplo de la definición (1.22). Una operación más general que la *multiplicación* de p -formas por 0 -formas dada anteriormente, es la *multiplicación* de una p -forma por una q -forma, así que se presenta la siguiente definición:

Definición 1.23. Sean ω una \mathbf{p} -forma en U conjunto abierto y η una \mathbf{q} -forma, es decir

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n} h_{j_1 j_2 \dots j_q} \cdot dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Se define el **producto** de ω y η , denotado por $\omega \wedge \eta$, como la $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ -forma en U dada por

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n}} g_{i_1 i_2 \dots i_p} h_{j_1 j_2 \dots j_q} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Para operar correctamente la definición (1.23), se necesita otra definición, que nos permitirá reducir muchas de las sumas término a término, ya que el *producto exterior* es un producto particular que requiere de ciertas propiedades que los *tensores totalmente antisimétricos* tienen, lo que permite sumar términos similares salvo por signos en las *permutaciones* o eliminar los que posean dos términos diferenciales iguales.

Definición 1.24. Se define de manera general, en n dimensiones el **símbolo de Levi-Civita**, también llamado el **símbolo de permutación** o **tensor de Levi-Civita**, como sigue:

$$\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ es una permutación par de } (1, 2, \dots, n), \\ -1 & \text{si } (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{si dos índices son los mismos.} \end{cases}$$

Se aplican ahora las definiciones (1.23) y (1.24) juntas, en un ejemplo para los *productos exteriores*.

Ejemplo 1.4. Considérese ahora la $\mathbf{1}$ -forma en \mathbb{R}^3 , τ , dada por

$$\tau = 3x_2 dx_1 + 5dx_2 - x_1 x_3 dx_3.$$

El **producto** de η por τ será una $(\mathbf{2} + \mathbf{1})$ -forma en \mathbb{R}^3 . Donde η está dada por

$$\eta = x_2 x_3 \operatorname{sen} x_1 dx_1 \wedge dx_2 + 5000x_2^5 dx_1 \wedge dx_3 - (x_1 + x_2 + x_3) dx_2 \wedge dx_3.$$

Se puede proceder como sigue

$$\begin{aligned} \eta \wedge \tau &= (x_2 x_3 \operatorname{sen} x_1 dx_1 \wedge dx_2 + 5000x_2^5 dx_1 \wedge dx_3 - (x_1 + x_2 + x_3) dx_2 \wedge dx_3) (3x_2 dx_1 + 5dx_2 - x_1 x_3 dx_3) \\ &= 3x_2^2 x_3 \operatorname{sen} x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + 5x_2 x_3 \operatorname{sen} x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 - x_1 x_2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + 15000x_2^6 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + 25000x_2^5 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 - 5000x_1 x_2^5 x_3 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\ &\quad - (3x_1 x_2 + 3x_2^2 + 3x_2 x_3) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 - (5x_1 + 5x_2 + 5x_3) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + (x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3 \\ &= -x_1 x_2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 25000x_2^5 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2 - (3x_1 x_2 + 3x_2^2 + 3x_2 x_3) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &= (-x_1 x_2 x_3^2 - 25000x_2^5 - 3x_1 x_2 - 3x_2^2 - 3x_2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Se ponen algunas propiedades de la *suma* de p -formas y del *producto* de éstas por 0 -formas.

Teorema 1.10. Sean ω_1, ω_2 y ω_3 tres \mathbf{p} -formas en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y ϕ y ψ dos $\mathbf{0}$ -formas en U . Entonces:

- $\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1$
- $\omega_1 + (\omega_2 + \omega_3) = (\omega_1 + \omega_2) + \omega_3$
- $\omega_1 + \mathbf{0} = \omega_1$ (en donde $\mathbf{0}$ es la \mathbf{p} -forma cero)
- Dada la \mathbf{p} -forma ω_1 , existe una \mathbf{p} -forma $(-\omega_1)$ tal que $\omega_1 + (-\omega_1) = (-\omega_1) + \omega_1 = \mathbf{0}$
- $\phi \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \phi \wedge \omega_1 + \phi \wedge \omega_2$

- $(\phi + \psi) \wedge \omega_1 = \phi \wedge \omega_1 + \psi \wedge \omega_1$
- $\phi \wedge (\psi \wedge \omega_1) = \psi \wedge (\phi \wedge \omega_1) = (\phi \wedge \psi) \wedge \omega_1$
- $1 \wedge \omega_1 = \omega_1$ (donde 1 es la **0-forma** $1 : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, 1(x) = 1 \forall x \in U$)

El teorema (1.10) está en ([Claudio1995], pp. 953 - 954), el cuál está parcialmente demostrado¹². Nótese el comportamiento algebraico del conjunto de las p -formas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, respecto del conjunto de las 0 -formas en U , es exactamente el mismo que el comportamiento algebraico de las n -ésimas coordenadas de \mathbb{R}^n , respecto de los números reales. Este último le da la estructura de “espacio vectorial sobre \mathbb{R}^n ”. Por comparación, se ve que todas las propiedades se cumplen considerando los vectores como p -formas y los escalares como 0 -formas. La única diferencia es que las 0 -formas no constituyen un campo (no todas las cero formas no nulas poseen *inversos multiplicativos*). La estructura algebraica que poseen las 0 -formas es una estructura más débil que la de *campo*¹³, llamada *anillo*¹⁴ (conmutativo con unidad). Cuando se tiene un conjunto V y un *anillo* A (“de escalares”), y se cumplen todas las propiedades del teorema (1.10) de la definición de *espacio vectorial*, se dice que V es un *módulo*¹⁵ (sobre A). En nuestro caso, entonces, el conjunto de las p -formas en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, que se denotará como $\Lambda^p(U \subseteq \mathbb{R}^n)$, forma un *módulo sobre el anillo* de las 0 -formas en U , $\Lambda^0(U \subseteq \mathbb{R}^n)$. En el teorema siguiente se establecen algunas propiedades adicionales de las operaciones entre p -formas ya definidas.

Teorema 1.11. Sean ω_1 y ω_2 dos **p-formas** en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, η una **q-forma** en U y τ una **r-forma** en U . Entonces:

- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
- $\eta \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \eta \wedge \omega_1 + \eta \wedge \omega_2$
- $\omega_1 \wedge (\eta \wedge \tau) = (\omega_1 \wedge \eta) \wedge \tau$
- $\eta \wedge \tau = (-1)^{qr} \tau \wedge \eta$

El teorema (1.11) está en ([Claudio1995], pp. 955 - 956), se demuestra el último inciso. Naturalmente, tanto $\omega_1 \wedge (\eta \wedge \tau)$ como $(\omega_1 \wedge \eta) \wedge \tau$ se indican simplemente por $\omega_1 \wedge \eta \wedge \tau$, y un producto de orden superior $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_s$ se define de manera análoga. Si v_1, \dots, v_n es una *base* para V y ϕ_1, \dots, ϕ_n es la *base dual*, una *base* para $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ se puede construir ahora el siguiente teorema (que es análogo al teorema (1.7), pero para *tensores totalmente antisimétricos* con el *producto cuña*).

Teorema 1.12. El conjunto de todos los

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

es una *base* para $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, que por tanto tiene **dimensión**

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

El teorema (1.12) está en ([Michael1988], p. 75), que está demostrado. Como \mathbb{R}^n tiene *dimensión* n , se deduce del teorema (1.12) que $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ tiene *dimensión* 1. Así todos los *tensores de orden n alternados* en \mathbb{R}^n son múltiplos de uno no nulo. Puesto que el *determinante* es un ejemplo de un elemento de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ no es inusual encontrarlo en el siguiente teorema. Se puede demostrar que el *determinante* es el único *tensor totalmente antisimétrico* de grado n .

Teorema 1.13. Sea v_1, \dots, v_n una *base* para V , y sea $\omega \in \Lambda^n(V)$. Si $\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ son n vectores de V , entonces

$$\omega(\omega_1, \dots, \omega_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \dots, v_n).$$

El teorema (1.13) está en ([Michael1988], p. 76), que está demostrado. El teorema (1.13) muestra que un $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ no nulo separa al conjunto de las *bases* de \mathbb{R}^n en dos grupos disjuntos, aquellas con $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ y aquellas para las cuales $\omega(v_1, \dots, v_n) < 0$; si v_1, \dots, v_n y w_1, \dots, w_n son dos bases y $A = (a_{ij})$ está definido por $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, entonces v_1, \dots, v_n

y w_1, \dots, w_n están en el mismo grupo si y sólo si $\det A > 0$. Este criterio es independiente de ω y puede utilizarse siempre para dividir las *bases* de V en dos grupos disjuntos. Cada uno de estos grupos es una *orientación* de V . La *orientación* a la que pertenece una *base* v_1, \dots, v_n se indica por $[v_1, \dots, v_n]$ y la otra *orientación* se indica por $-[v_1, \dots, v_n]$ [Michael1988].

Definición 1.25. En \mathbb{R}^n se define la **orientación usual** por $[e_1, \dots, e_n]$. La **orientación en un espacio vectorial real** es la *elección arbitraria* de qué **bases ordenadas** están **orientadas “positivamente”** y qué **bases** están **orientadas “negativamente”**¹⁶.

El hecho de que $\dim(\Lambda^n(\mathbb{R}^n)) = 1$ es por el teorema (1.12), puesto que \det se define frecuentemente como el único elemento $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$. Para un espacio general V no existe otro criterio de esta clase para distinguir un particular $\omega \in \Lambda^n(V)$. Supóngase, sin embargo, que se ha dado un *producto interior* T para V . Si v_1, \dots, v_n y w_1, \dots, w_n son dos *bases* que no son *ortonormales*¹⁷ con respecto a T , y la *matriz* $A = (a_{ij})$ está definida por $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ entonces

¹²Parcialmente demostrado, significa que solo se demuestran algunos incisos del teorema (1.10)

¹³En la sección (1.1) se presenta el concepto de *campo* en la definición (1.1).

¹⁴En el apéndice (A) se presenta el concepto de *anillo conmutativo unitario* en la definición (A.9).

¹⁵En el apéndice (A) se presenta el concepto de *módulo* en el sentido de las *estructuras algebraicas* en la definición (A.10).

¹⁶Todo esto puede ser encontrado en ([Leo2009], pp. 32 - 35)

¹⁷En el apéndice (A) se da el concepto de *base ortonormal* en la definición (A.5).

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = T(\omega_i, \omega_j) &= \sum_{k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} T(v_k, v_l) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kl}.\end{aligned}$$

En otras palabras, si A^T designa la *matriz transpuesta* de la *matriz* A , entonces se tiene $A \cdot A^T = Id$, de manera que $\det A = \pm 1$. Se sigue del teorema (1.13) que si $\omega \in \Lambda^n(V)$ satisface $\omega(v_1, \dots, v_n) = \pm 1$, entonces $\omega(w_1, \dots, w_n) = \pm 1$. Si se ha dado una *orientación* μ para V , se deduce que existe una única $\omega \in \Lambda^n(V)$ tal que $\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$ siempre que v_1, \dots, v_n sea una *base ortonormal* tal que $[v_1, \dots, v_n] = \mu$. Esta única ω se denomina *elemento de volumen* de V , determinado por el *producto interior* T y la *orientación* μ . Obsérvese que \det es el *elemento de volumen* de \mathbb{R}^n determinado por el *producto interior* usual y la *orientación usual*, y que $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ es el volumen del paralelepípedo engendrado por los segmentos de recta que van del origen a cada uno de los v_1, \dots, v_n .

Si $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ y φ está definida por

$$\varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix},$$

entonces $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$; por tanto existe una única $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle w, z \rangle = \varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix},$$

Este z se designa por $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ y se denomina el *producto vectorial* de v_1, \dots, v_{n-1} . Las siguientes propiedades se deducen inmediatamente de la proposición (1.1):

Proposición 1.1. *Las siguientes propiedades son válidas:*

- $v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \text{sgn } \sigma \cdot v_1 \times \dots \times v_{n-1}$,
- $v_1 \times \dots \times av_i \times \dots \times v_{n-1} = a \cdot (v_1 \times \dots \times v_{n-1})$,
- $v_1 \times \dots \times (v_i + v'_i) \times \dots \times v_{n-1} = v_1 \times \dots \times v_i \times \dots \times v_{n-1} + v_1 \times \dots \times v'_i \times \dots \times v_{n-1}$.

La proposición (1.1) está en ([Michael1988], p. 77), solo enunciado, pero son las propiedades generales de un *determinante*. Es normal en matemáticas tener un “producto” que dependa de más de dos factores. En el caso de dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$ se obtiene el producto cruz $v \times w \in \mathbb{R}^3$. Por esta razón se dice muchas veces que el *producto vectorial* sólo se puede definir en \mathbb{R}^3 .

Se estudiará una operación que se efectúa en las p -formas, llamada *derivada exterior* (o *diferencial exterior*), que es “derivar” p -formas, para producir nuevas *formas diferenciales*, para comenzar, se empieza por considerar una 0 -forma ω en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, esta es entonces una función (de al menos clase \mathcal{C}^2 , para que sea continua en $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ y también en $\Lambda^{p+1}(\mathbb{R}^n)$), $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se define entonces por la definición de *derivada exterior* de una 0 -forma ω en U , dada por la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denotada por $d\omega$, como la 1 -forma en el abierto U .

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Teniendo en cuenta una 0 -forma ω en un abierto U , a una 1 -forma $d\omega$ en el abierto U con la *derivada exterior*, entonces se puede definir lo siguiente:

Definición 1.26. *Sea ω la p -forma en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Donde, como se sabe, las funciones $g_{i_1 i_2 \dots i_p}$ son al menos de clase \mathcal{C}^2 , para que ω sea continua en $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ y también en $\Lambda^{p+1}(\mathbb{R}^n)$, definidas en el conjunto abierto U de \mathbb{R}^n . Viendo a estas como 0 -formas en U , se define la *derivada exterior* (o *diferencial exterior*) de la p -forma ω , denotada por $d\omega$, como la $(p + 1)$ -forma en el abierto U

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} dg_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

O bien, de forma más explícita

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Nótese que muchos de estos $n \binom{n}{p}$ términos que aparecen en $d\omega$ se pueden hacer cero: basta que el índice j de dx_j esté contenido dentro de los p enteros i_1, i_2, \dots, i_p para que $dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ sea igual a cero. Se pone un teorema, que tiene que ver con la discusión de la *derivada exterior*.

Teorema 1.14. Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces

$$df = D_1 f dx_1 + D_2 f dx_2 + \cdots + D_n f dx_n.$$

Con la notación clásica,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

El teorema (1.14) está en ([Michael1988], p. 82), que está demostrado. Se muestra un ejemplo, utilizando la definición (1.26) y el teorema (1.14).

Ejemplo 1.5. Sea ω la **1-forma** en \mathbb{R}^3

$$\omega = (x_1 + x_2 + x_3)dx_1 + x_1x_2x_3dx_2 + x_3^2dx_3.$$

La **derivada exterior** (o **diferencial exterior**) de ω será la **2-forma** en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} d\omega &= dg_1 dx_1 + dg_2 dx_2 + dg_3 dx_3 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_2 + x_3)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + x_2 + x_3)dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 + x_2 + x_3)dx_3 \right] \wedge dx_1 \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1x_2x_3)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1x_2x_3)dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_2x_3)dx_3 \right] \wedge dx_2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_3^2)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3^2)dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3^2)dx_3 \right] \wedge dx_3 \\ &= (dx_1 + dx_2 + dx_3) \wedge dx_1 + (x_2x_3dx_1 + x_1x_3dx_2 + x_1x_2dx_3) \wedge dx_2 + (0dx_1 + 0dx_2 + 3x_3^2dx_3) \wedge dx_3 \\ &= dx_1 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge dx_1 + dx_3 \wedge dx_1 + x_2x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_3dx_2 \wedge dx_2 + x_1x_2dx_3 \wedge dx_2 + 3x_3^2dx_3 \wedge dx_3 \\ &= dx_2 \wedge dx_1 + dx_3 \wedge dx_1 + x_2x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2dx_3 \wedge dx_2 \\ &= (x_2x_3 - 1)dx_1 \wedge dx_2 - dx_1 \wedge dx_3 - x_1x_2dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Con el siguiente teorema se presentan las propiedades que tiene la *diferencial exterior*.

Teorema 1.15. Sean ω_1 y ω_2 dos **p-formas** en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

El teorema (1.15) está en ([Claudio1995], pp. 959 - 960), que está demostrado. Es decir, el teorema (1.15) nos dice que la *derivada exterior* abre sumas. En general, si $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ son k *p-formas* en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene

$$d(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k) = d\omega_1 + d\omega_2 + \cdots + d\omega_k$$

lo cual se prueba (por inducción sobre k) aplicando el teorema (1.15). En el teorema siguiente se establece el comportamiento de la *diferencial exterior* ante un *producto de formas diferenciales*.

Teorema 1.16. Sea ω una **p-forma** en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una η una **q-forma** en el abierto U , Entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

El teorema (1.16) está en ([Claudio1995], pp. 960 - 961), que está demostrado. Se muestra un ejemplo de los teoremas (1.15) y (1.16) simultáneamente.

Ejemplo 1.6. Considere la **1-forma** ω en \mathbb{R}^4

$$\omega = x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_4$$

y la **2-forma** η en \mathbb{R}^4

$$\eta = 3x_1x_2 dx_1 \wedge dx_3 + 5x_3x_4 dx_2 \wedge dx_4$$

El producto $\omega \wedge \eta$ es la **3-forma** en \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= 3x_1x_2^2 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 5x_2x_3x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 3x_1x_2x_3 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + 5x_3^2 dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 3x_1^2 x_2 dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 5x_1x_3x_4 dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &= 5x_2x_3x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 3x_1x_2x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 3x_1^2 x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

Las *derivadas exteriores* (o *diferenciales exteriores*) de estas *formas diferenciales* son

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x_2)dx_1 + d(x_3)dx_2 + d(x_1)dx_4 \\ &= dx_2 \wedge dx_1 + dx_3 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_4 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\eta &= d(3x_1x_2)dx_1 \wedge dx_3 + d(5x_3x_4)dx_2 \wedge dx_4 \\ &= 3x_2 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 3x_1 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 5x_4 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 5x_3 dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &= -3x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 5x_4 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

Y por último la **diferencial exterior** de $\omega \wedge \eta$ es

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \eta) &= d(5x_2x_3x_4)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - d(3x_1x_2x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + d(3x_1^2x_2)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
 &= (5x_3x_4dx_2 + 5x_2x_4dx_3 + 5x_2x_3dx_4) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\
 &\quad - (3x_2x_3dx_1 + 3x_1x_3dx_2 + 3x_1x_2dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (6x_1x_2dx_1 + 3x_1^2dx_2) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
 &= 5x_2x_4dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 3x_1^2dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
 &= 5x_2x_4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - 3x_1^2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\
 &= (5x_2x_4 - 3x_1^2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4
 \end{aligned}$$

Según la fórmula del teorema (1.16), esta forma debe ser igual a $(d\omega) \wedge \eta + (-1)^1\omega \wedge d\eta$. Se hará esta cuenta

$$\begin{aligned}
 (d\omega) \wedge \eta - \omega \wedge d\eta &= (-dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_4)(3x_1x_2dx_1 \wedge dx_3 + 5x_3x_4dx_2 \wedge dx_4) \\
 &\quad - (x_2dx_1 + x_3dx_2 + x_1dx_4)(-3x_1dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 5x_4dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) \\
 &= -(-5x_2x_4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - 3x_1^2dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \\
 &= (5x_2x_4 - 3x_1^2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4
 \end{aligned}$$

lo que comprueba la validez de la fórmula del teorema (1.16)

Se toman ahora tres formas en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dígase ω una p -forma, η_1 una q_1 -forma y η_2 una q_2 -forma, con la propiedad asociativa del producto de **formas** (teorema (1.11), la tercera propiedad), y la fórmula establecida en el teorema (1.16), se tiene que

$$d\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = d((\omega \wedge \eta_1) \wedge \eta_2) = d(\omega \wedge \eta_1) \wedge \eta_2 + (-1)^{(p+q_1)}\omega \wedge \eta_1 \wedge d\eta_2 = [(d\omega) \wedge \eta_1 + (-1)^p\omega \wedge d\eta_1] \wedge \eta_2 + (-1)^{(p+q_1)}\omega \wedge \eta_1 \wedge d\eta_2 = (d\omega) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^p\omega \wedge d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{(p+q_1)}\omega \wedge \eta_1 \wedge d\eta_2$$

En general, si ω es una p -forma en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y η_i son q_i -formas en el abierto U , $i = 1, 2, \dots, k$, entonces la **diferencial exterior** del **producto** de estas $(k+1)$ formas diferenciales está dada por la siguiente fórmula, que generaliza la establecida en el teorema (1.16).

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k) &= (d\omega) \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_k \\
 &\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^{p+q_1+\dots+q_{j-1}} \omega \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{j-1} \wedge (d\eta_j) \wedge \eta_{j+1} \wedge \dots \wedge \eta_k
 \end{aligned}$$

Se enuncia el próximo teorema, en el que se establece una nueva propiedad de la *diferencial exterior*. Este será demostrado, ya que se utiliza en esta tesis.

Teorema 1.17. Sea ω una p -forma en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $d(d\omega) = \mathbf{0}$.

Demostración. Es suficiente mostrar que la fórmula vale para **0-formas** en el abierto U , pues en tal caso, siendo la forma ω

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

se tendría, según la definición de diferencial exterior (aplicada a la forma ω)

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

se tendría, según la definición de diferencial exterior (aplicada a la forma $d\omega$)

$$d(d\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\sum_{i=1}^j \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_j \right) \wedge dx_i \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Siendo las funciones $g_{i_1 i_2 \dots i_p}$'s 0 -formas en el abierto U , basta probar que la *derivada exterior* de la *derivada exterior* de éstas es igual a $\mathbf{0}$. Sea entonces $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una 0 -forma en el abierto U . Se tiene que

$$\begin{aligned}
 d(dg_{i_1 i_2 \dots i_p}) &= d \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_j \right) \\
 &= d \left(\frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_n} dx_n \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n d \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \right) \cdot dx_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_i} \right) \cdot dx_j \right) \wedge dx_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i
 \end{aligned}$$

La suma anterior que contiene en principio n^2 términos, se puede considerar como la suma de: **a.** los términos en que $i = j$; **b.** los términos en que $i < j$; **c.** los términos en que $i > j$. Pues los términos en que $i = j$ serán igual a cero, pues aparecerá $dx_i \wedge dx_i$ en cada uno de ellos (por la anticonmutatividad del producto cuña, una consecuencia inmediata es que $dx_i \wedge dx_i = \mathbf{0}$). Se separará entonces la suma anterior como

$$\sum_{i < j} \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \sum_{i > j} \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$

Expresión que es igual a (cambiándole los nombres a los índices en la segunda suma)

$$\sum_{i < j} \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j.$$

Y utilizando el hecho de que $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ (anticonmutatividad del producto cuña) se tiene finalmente que

$$d(dg_{i_1 i_2 \dots i_p}) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot dx_j \wedge dx_i.$$

Si se recuerda que las $g_{i_1 i_2 \dots i_p}$'s son al menos de clase \mathcal{C}^2 , para las *formas diferenciales* (pues deben de serlo para derivarlo y deben estar bien definidas en su derivada, para poder derivarlo una segunda vez), entonces, según el *teorema de Schwarz* (sobre la igualdad de las derivadas parciales mixtas cuando son continuas), todos los términos de la suma anterior son iguales a cero. Así que

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\sum_{i=1}^j \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_j \right) \wedge dx_i \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot dx_j \wedge dx_i \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} (0 \cdot dx_j \wedge dx_i) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

La fórmula del teorema (1.17), se suele escribir como

$$d^2 = \mathbf{0}$$

Esta es, sin duda, una fórmula que involucra conceptos y propiedades necesarios de las p -formas.

Así, la *derivada exterior* de la *derivada exterior* de cualquier *forma* es igual a la forma cero. Esta situación nos plantea de manera natural la siguiente pregunta: si la *derivada exterior* de alguna p -forma es igual a cero, ¿es esta forma la *derivada exterior* de alguna $(p-1)$ -forma? Es decir, si la p -forma η es tal que $d\eta$ sea igual a cero, ¿es η la diferencial exterior de alguna $(p-1)$ -forma ω ? Obsérvese que en tal caso se tendría $0 = d\eta = d(d\omega)$, cosa que se sabe que ocurre con todas las formas ω . Esta es una pregunta de respuesta no trivial. Antes de responder a tales preguntas, se dan algunas definiciones.

Definición 1.27. Una forma ω se denomina **cerrada** si $d\omega = \mathbf{0}$.

Definición 1.28. Una p -forma ω se denomina **exacta** si $\omega = d\eta$, para una cierta η .

El teorema (1.17), muestra que toda forma *exacta* es *cerrada*, y es natural preguntarse, recíprocamente, si cada forma *cerrada* es *exacta*. Si ω está definido solo en un subconjunto de \mathbb{R}^n , puede ocurrir que una tal función no exista. Este ejemplo nos da justo ese resultado:

Ejemplo 1.7. El ejemplo clásico es la **1-forma**

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Esta **1-forma** se acostumbra a indicar por $d\eta$, donde η está definida por la siguiente función

$$\eta(x,y) = \begin{cases} \tan^{-1} y/x & \text{si } x < 0, \\ \pi + \tan^{-1} y/x & \text{si } x > 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0, \\ 3\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Puesto que es igual a $d\eta$ en el conjunto $D = \{(x,y) : x < 0, \text{ o } x \geq 0 \text{ y } y \neq 0\}$, donde $\eta(x,y)$ está definida. Obsérvese, sin embargo, que $\eta(x,y)$ no puede estar definida con continuidad en todo \mathbb{R}^2 . Si $\omega = df$ para alguna función $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \eta(x,y)}{\partial y}$, así que $f(x,y) = \eta(x,y) + C$, lo que muestra que una tal $f(x,y)$ no puede existir.

Supóngase que $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot dx_i$ es una 1-forma en \mathbb{R}^n y ω resulta ser igual a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$. Se puede, suponer que $f(0) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t\vec{x}) dt \\ &= \int_0^1 f_t(t\vec{x}) \cdot \vec{x} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n D_i f(t\vec{x}) \cdot x_i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t\vec{x})}{\partial x_i} \cdot x_i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(t\vec{x}) \cdot x_i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n g_{i_1 i_2 \dots i_p}(t\vec{x}) \cdot x_i dt. \end{aligned}$$

Esto sugiere que para encontrar f , dada ω , se considere la función $I\omega$, definida por

$$I\omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n g_{i_1 i_2 \dots i_p}(t\vec{x}) \cdot x_i dt.$$

Obsérvese que la definición de $I\omega$ tiene sentido si ω está definida sólo en un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que siempre que $x \in U$, el segmento de recta de 0 a x esté contenido en U ; un conjunto abierto con esta propiedad se dice que tiene forma de *estrella* respecto a 0 [Figura (1.8)]. Un teorema prueba que (en un conjunto abierto con forma de *estrella*) se tiene $\omega = d(I\omega)$ siempre que ω satisfaga la condición necesaria $d\omega = \mathbf{0}$. El cálculo, así como la definición de $I\omega$, pueden generalizarse considerablemente.

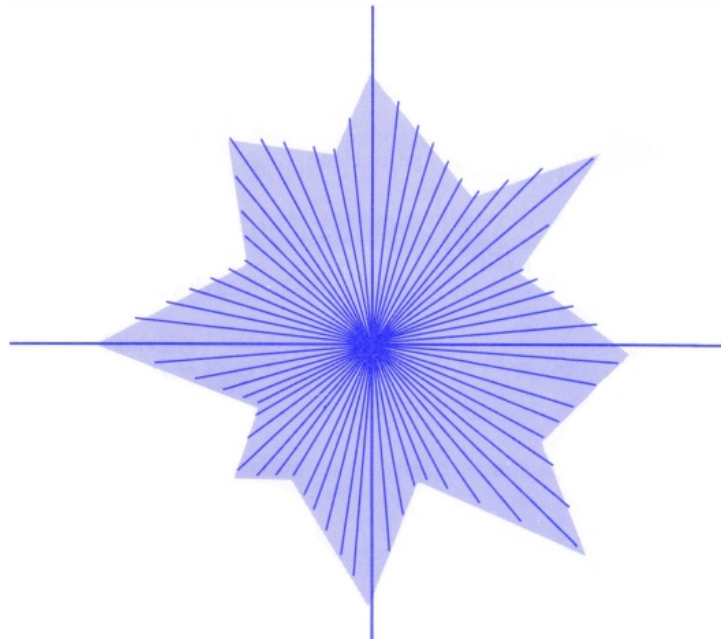


Figura 1.8. Un conjunto abierto con forma de *estrella* respecto a $\mathbf{0}$. Tomado de [Michael1988]

Teorema 1.18 (Lema de Poincaré). *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto con forma de **estrella** respecto de 0, entonces toda forma cerrada en U es exacta.*

Demostración. Se define una función I en la que a cada p -forma le corresponde una $(p - 1)$ -forma (para cada p), tal que $I(0) = 0$ y $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ para cada forma ω . Se deduce que $\omega = d(I\omega)$ si $d\omega = \mathbf{0}$. Sea

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p}(t\vec{x}) \cdot dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Puesto que el abierto U tiene forma de *estrella* se puede definir

$$I\omega(\vec{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{p-1} g_{i_1 i_2 \dots i_p}(t\vec{x}) dt \right) x_{i_j} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

(El símbolo $\widehat{\phantom{dx_{i_j}}}$ sobre dx_{i_j} indica que este término se omite). La demostración de que $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ se hace mediante cálculo, para tener que

$$\begin{aligned}
d(I\omega) &= p \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\int_0^1 t^{p-1} g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}}) dt \right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_{i_j} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

El factor t^p aparece, en vez del factor t^{p-1} , porque hay que recordar que $I\omega$ está en función de x , según la definición de ω que se propuso para la construcción, de modo que se usa la regla de la derivada de un producto de funciones. Se tiene también

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Aplicando I a la $(p+1)$ -forma $d\omega$, se obtiene

$$\begin{aligned}
I(d\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_{i_j} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Sumando las ecuaciones (1.2) y (1.3) se eliminan las sumas triples, y se obtiene que

$$\begin{aligned}
I(d\omega) + d(I\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_{i_j} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&+ p \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\int_0^1 t^{p-1} g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}}) dt \right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_{i_j} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&= p \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\int_0^1 t^{p-1} g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}}) dt \right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})}{\partial x_k} dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^p g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}})] dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 i_2 \dots i_p}(\vec{t\vec{x}}) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

□

El hecho de que exista un conjunto abierto en *forma de estrella* significa que dicho conjunto es *contractible*, así, se tiene que dar un esbozo del tema y ver los conceptos que están involucrados en el Lema de Poincaré (1.18).

Definición 1.29. Un espacio topológico X es **contractible** si tiene el tipo de **homotopía** de un punto, es decir, si existe una equivalencia homotópica entre el espacio X y un espacio $\{q\}$ formado por un solo punto.

En la definición (1.29), están involucrados dos conceptos básicos, el de *espacio topológico* y el de *homotopía*.

Definición 1.30. Se llama **espacio topológico** al par ordenado (X, τ) formado por un conjunto X y una topología τ sobre X , es decir, una colección de subconjuntos de X que cumplen las tres propiedades siguientes:

1. El conjunto vacío \emptyset y X están en τ , $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ ¹⁸,
2. La intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de τ está en τ ,
3. La unión de cualquier subcolección de conjuntos de τ está en τ . Esta condición también se escribe como: $\forall U \subset \tau, \bigcup_{B \in U} B \in \tau$.

A los conjuntos pertenecientes a la topología τ se les llama **conjuntos abiertos** o simplemente **abiertos** de (X, τ) ; y a sus complementos en X , **conjuntos cerrados**.

¹⁸Con que \emptyset o X estén es suficiente, porque existe un corolario en Teoría de Conjuntos que demuestra que los complementos están en la topología, aquí solo se muestra de definición del libro ([James2002], p. 86)

Definición 1.31. Si f y g son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y , se dice que f es **homotópica** a g si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ (aquí $I = [0, 1]$). La aplicación H se conoce como **homotopía** entre f y g . Si dos aplicaciones f y g son **homotópicas**, se escribe $f \cong g$. Si $f \cong g$ y g es una aplicación constante, se dice que f es **homotópicamente nula**.

Es decir, dos aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro se dicen *aplicaciones homotópicas* si una de ellas puede “deformarse continuamente” en la otra. Si dos aplicaciones f y g son homotópicas, se escribe $f \cong g$; lo que significa esta relación es efectivamente una relación de equivalencia sobre el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y . Las clases de equivalencia se denominan *clases de homotopía de aplicaciones* ([Allen2005], pp. 3 - 4). Se dice que dos espacios X, Y tienen el mismo tipo homotópico, si existe un par de aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} X$ tales que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicos a Id_X e Id_Y respectivamente ([Allen2005], pp. 3 - 4). Un *espacio topológico* que tiene el mismo tipo *homotópico* que un *conjunto unitario* (En matemáticas, un conjunto unitario es un conjunto con un único elemento. Por ejemplo, el conjunto $\{0\}$ es un conjunto unitario) se dice *contractible*. Junto a la definición (1.29), hay algunas propiedades del hecho de que un espacio sea *contractible a un punto*.

Proposición 1.2. Un espacio contractible verifica las siguientes propiedades:

- Es conexo por caminos.
- Su grupo fundamental de homotopía es trivial.
- Como consecuencia de las dos propiedades anteriores, es simplemente conexo.

Esta proposición se tomó del libro ([Allen2005], Capítulo 1), demuestra varios resultados para demostrar las propiedades mostradas en la proposición (1.2), presentados en corolarios y teoremas en el libro. Aquí solo se toman las propiedades necesarias, pues se trabajará con objetos matemáticos que cumplan estas propiedades y, por tanto, tengan un comportamiento aprovechable.

Definición 1.32. Un conjunto conexo es un subconjunto $C \subseteq X$ de un espacio topológico (X, τ) (donde τ es la colección de conjuntos abiertos del espacio topológico) que no puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos de la topología. Intuitivamente, un conjunto conexo es el que aparece como una sola pieza, que no se puede “dividir” o “particionar”. En el caso de que un conjunto no sea conexo, se dice que es **disconexo**. Esto es:

$C \subseteq X$ es un conjunto conexo si y sólo si

$$A, B \in \tau, A \cap B \cap C = \emptyset, C \subseteq A \cup B \text{ implica } C \subseteq A \vee C \subseteq B.$$

Nótese que si $C = X$ y cumple lo anterior, entonces se dice que (X, τ) es un espacio topológico conexo.

Otra definición, a partir de la *conexidad* es la siguiente.

Definición 1.33. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una curva en X es una aplicación continua $f : [0, 1] \rightarrow X$. (En realidad, puede ser cualquier intervalo $[a, b]$, pero siempre se puede normalizar y llevar a $[0, 1]$).

Se dice que (X, τ) es un espacio conexo por caminos si y solamente si: $\forall x, y \in X, \exists f : [0, 1] \rightarrow X$ continua (es decir, una curva) tal que $f(0) = x, f(1) = y$.

Es decir, si cada par de puntos, estos pueden ser unidos mediante una curva, o “conectados por un camino”.

Se define lo que es el grupo fundamental. Se puede asociar a cada punto p de un espacio topológico X un grupo que nos informa sobre la estructura 1-dimensional de la porción de espacio que rodea a este punto. Los elementos de este grupo, llamado grupo fundamental de X relativo al punto base p , son clases de equivalencia de lazos (curvas cerradas) con origen en el punto p .

Definición 1.34. Hay distintas maneras de definir el grupo fundamental, aquí los más comunes:

- **definición por lazo:** Sea X un espacio topológico, y p un punto fijo de X . Un lazo con base en p es una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ que verifica $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

El producto $\alpha * \beta$ de dos lazos α y β se define como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esto es, el lazo $\alpha * \beta$ primero recorre el camino de α , pero a “doble velocidad” y después el de β , también a doble velocidad.

- **definición por clases de equivalencia:** Las clases de homotopía son las clases de equivalencia debidas a la relación de ser homotópico. Dos lazos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ con base en un punto común p son homotópicos si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$H(s, 0) = \alpha(s)$$

$$H(s, 1) = \beta(s)$$

$$H(0, t) = p$$

$$H(1, t) = p.$$

Intuitivamente una clase de homotopía representa un paquete de curvas que son deformables entre sí.

- **definición por grupo fundamental:** El producto de dos clases de homotopía de lazos $[f]$ y $[g]$ se define como $[f * g]$. Puede demostrarse que este producto está bien definido al ser independiente de la elección de representantes. Este producto nos permite obtener una estructura de grupo¹⁹: el elemento neutro será la clase $[\gamma]$ del lazo trivial definido como $\gamma(t) = p$ para todo t ; el inverso de la clase de un lazo $[f]$ será la clase del mismo lazo recorrido en sentido contrario (es decir, g es el elemento simétrico de f si y solo si $f(t) = g(1 - t)$ para todo $t \in [0, 1]$).

El **grupo fundamental** de un espacio topológico X basado en un punto $p \in X$, notado como $\pi_1(X, p)$, es el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas con la operación **juxtaponer** clases.

Nos queda por definir lo que es un *conjunto simplemente conexo*.

Definición 1.35. Se dice que un espacio topológico es **simplemente conexo** cuando es **conexo por caminos** y su **grupo fundamental** es el grupo trivial. Es decir, toda aplicación continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ que sea un **lazo**, es decir, que verifique $f(0) = f(1) = p$ para algún punto $p \in X$, es **contractible** de forma continua a dicho punto mediante una **homotopía** $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = f(s)$ y $H(s, 1) = p$.

Un objeto es *simplemente conexo* si está formado por una sola pieza y no contiene agujeros que lo atraviesen.

1.3. Elementos básicos de cálculo tensorial

Una vez demostrado el *Lema de Poincaré*, se generalizan las ideas para hacer un uso de otros conceptos en el estudio de los *sistemas dinámicos autónomos reales, suficientemente continuos y diferenciables, polinomiales*, que se analizarán en el capítulo (2) y sus secciones correspondientes (2.1) y (2.2) respectivamente, ahora se verá lo que es un *tensor* de la forma (q, p) . Se empieza pues, con la siguiente definición.

Dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo K , recuérdese que su espacio dual V^* es el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : V \rightarrow K$. El *espacio dual* es un espacio vectorial de la misma dimensión que V . Refiérase normalmente a los elementos de V de V^* como vectores y covectores, respectivamente.

Definición 1.36. Sea V un espacio vectorial y sea V^* su espacio dual. Un **tensor del tipo (q, p)** es una **transformación multilineal** T tal que

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p \text{ veces}} \rightarrow K,$$

$$(w^1, \dots, w^q, v_1, \dots, v_p) \mapsto T(w^1, \dots, w^q, v_1, \dots, v_p)$$

Se sabe entonces que un *tensor* es *multilineal*, pues por la definición (1.13), inclusive el del tipo (q, p) , a la estructura $(T_r^q, +, \cdot, \otimes, \mathbb{R})$ es un *álgebra* llamada, comúnmente, como *álgebra tensorial*. Entonces, un *tensor del tipo (q, p)* es un objeto *multilineal* que mapea q elementos de T_p^*M (el espacio cotangente) y p elementos de T_rM (espacio tangente) a un número real. $T_{p,r}^q(M)$ denota el conjunto del tipo (q, p) *tensores* en $r \in M$. Un elemento de $T_{p,r}^q(M)$ está escrito en términos de las *bases* descritas con anterioridad como,

$$T = T_{v_1, \dots, v_p}^{w^1, \dots, w^q} \cdot dx^{w^1} \otimes \cdots \otimes dx^{w^q} \otimes dx_{v_1} \otimes \cdots \otimes dx_{v_p} \quad (1.4)$$

Es decir, se tiene que si $v_1, \dots, v_p \in V$ y $w^1, \dots, w^q \in V^*$, son *transformaciones lineales* en el *espacio vectorial* V , se sigue que

$$T(w^1, \dots, w^q, \alpha v + \beta w, v_1, \dots, v_p) = \alpha T(w^1, \dots, w^q, v, v_1, \dots, v_p) + \beta T(w^1, \dots, w^q, w, v_1, \dots, v_p).$$

para cada entrada del *tensor*.

Esta es una *función lineal* de $\otimes^q T_r^*M \otimes^p T_rM$ a \mathbb{R} . Suele llamarse a los índices superiores de un *tensor* *índices covariantes* y a los inferiores, *índices contravariantes*. Así la *contracción* queda definida entre *índices covariantes* con *índices contravariantes*.

Observación 1.1. Del mismo modo, se suele llamar a los vectores dx^{w^i} **vectores covariantes** o **uno-formas** y a los dx_{v_j} **vectores contravariantes** o simplemente **vectores**.

La definición (1.24) se le conoce también como el *tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita*, la diferencia entre el *símbolo* y el *tensor de Levi-Civita* radica en que en el *tensor* existe un factor de $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}$. Con el *tensor de Levi-Civita* se puede definir el *operador de Hodge*. Este operador es usado para poder simplificar la notación. Se va a escribir su definición y luego se darán algunos ejemplos, justo aquí aparece un factor debido al *elemento de volumen* de una *p-forma*.

Definición 1.37. El **operador * de Hodge** o transformación de dualidad es una función que mapea $* : \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^{n-p}(V)$, como sigue

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \epsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} dx_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$

donde $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ es el **tensor de Levi-Civita**.

En la definición (1.37) hay un factor, esto es debido a que se trata del factor del *tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita* que es el *elemento de volumen*, aunque no es la definición requerida, ya que tiene que ver con las *métricas tensoriales* que se utilicen en realidad. En una *variedad riemanniana*²⁰ o *pseudoriemanniana*²¹ de *dimensión* n se debe definir el *dual de Hodge* de una *p-forma* β como la $(n-p)$ -*forma* $*\beta$ tal que.

$$\forall \alpha : \alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega.$$

¹⁹En la definición (A.8) se da el concepto de grupo. Apéndice (A).

²⁰En el Apéndice (A) se da el concepto de *variedad de Riemann* en la definición (A.12).

²¹En el apéndice (A) se da el concepto de *variedad subriemanniana* en la definición (A.13).

con $\langle \alpha | \beta \rangle$ el producto escalar de las formas y

$$\omega = \epsilon \sqrt{|g_{\mu\nu}|} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

es la n -forma de volumen, siendo $g_{\mu\nu}$ el determinante del tensor métrico y $\epsilon = \text{sgn}(g_{\mu\nu})$. De aquí la relación

$$**\alpha = (-1)^{k(n-k)} \epsilon \alpha$$

En particular $\epsilon = 1$ en una variedad de Riemann y $\epsilon = -1$ en una variedad Lorentz-Minkowski $(n-1, 1)$. Se da el siguiente teorema, para espacios en $V = \mathbb{R}^n$, para operar la definición (1.37).

Teorema 1.19 (Cálculo efectivo de la estrella de Hodge). *Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta y orientada de dimensión n , y sea $r \in M$. Sea w^1, \dots, w^n una base ortonormal positivamente orientada $T_r^*(M)$, con respecto al producto inducido de 1-formas en r , g^1 . Entonces, sobre p -formas, el operador estrella de Hodge viene determinado por*

$$*(\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_{n-p}}$$

donde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-p} \end{pmatrix}$ es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$.

El teorema (1.19) está en ([Jose2015], p. 7), que está demostrado. El teorema (1.19) soluciona muchos de los problemas de la definición (1.37), debido a que \mathbb{R}^n es una variedad riemanniana y nuestros sistemas dinámicos están en \mathbb{R}^n , con la métrica euclidiana usual, el cuál induce un producto natural en las formas diferenciales, lo que significa que nuestro producto interior en las p -formas está dada por el determinante de la matriz de Gram, y debido a que la dimensión es n el determinante es mayor a cero. Es decir, es la función signatura de una permutación, debido a la orientación y a que se trata de una base ortonormal positivamente orientada, en otras palabras, la base es ortogonal y de norma 1. Esto significa definir lo siguiente.

Definición 1.38. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Dadas dos bases (ordenadas) de V , $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$, se dice que β y β' tienen la misma orientación si la transformación lineal $T: V \rightarrow V$ dada por $T(v_i) = v'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, tiene $\det T > 0$.*

Puesto que la base es ortonormal, por la definición (1.38), $\det T = 1$, lo que determina el signo de las formas diferenciales en el dual de Hodge, es la orientación de las bases. De este modo, el teorema (1.19) define al operador con la función signatura. La definición (1.37) es posible gracias a la dualidad que existe entre los espacios vectoriales de p -formas Λ^p y Λ^{n-p} , ambas son de la misma dimensión. Es por eso que la aplicación del operador de Hodge dos veces a una p -forma, es proporcional a la p -forma, es decir, se regresa al lugar de origen. Este operador también se le conoce como el operador estrella de Hodge o la estrella de Hodge. Se enuncia a continuación el siguiente teorema.

Teorema 1.20. *El operador de Hodge $*$ satisface las siguientes propiedades, para $\omega, \eta \in \Lambda^p(M)$*

1. $*[*\omega] = (-1)^{p(n-p)}\omega$,
2. $\omega \wedge *\eta = \eta \wedge *\omega = \langle \omega, \eta \rangle v_M$,
3. $*(\omega \wedge *\eta) = *(\eta \wedge *\omega) = \langle \omega, \eta \rangle$.

El teorema (1.20) está en ([Diosel2011], pp. 3-4), que está demostrado. Se verán dos ejemplos para ver el teorema (1.19). En \mathbb{R}^n , que es una variedad riemanniana.

Ejemplo 1.8. *Sea $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 con el producto interior euclidiano, entonces $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$ es una base ortonormal de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, y $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$ es una base ortonormal de $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$. De esta forma:*

$$*(e_2 \wedge e_3) = e_1, \quad *(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \quad y \quad *(e_1 \wedge e_2) = e_3;$$

Aquí se debe de notar que para $e_2 \wedge e_3 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, se tiene que $*(e_2 \wedge e_3) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

Este otro ejemplo está dado en \mathbb{R}^4 , se utilizó la signatura para encontrar el signo del dual de cada elemento en la base que se menciona.

Ejemplo 1.9. *Sea $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de \mathbb{R}^4 con el producto interior euclidiano, entonces $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ es una base ortonormal para $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ y $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$ es una base ortonormal para $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$. Luego, en $\Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ se tiene que:*

$$*(e_1) = -e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad *(e_2) = e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad *(e_3) = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \quad y \quad *(e_4) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

Y para $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ se tiene que:

$$*(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4, \quad *(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \wedge e_4, \quad *(e_1 \wedge e_4) = e_2 \wedge e_3, \quad *(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4, \quad *(e_2 \wedge e_4) = -e_1 \wedge e_3 \quad y \quad *(e_3 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_2.$$

La aplicación del operador de Hodge a una p -forma, consiste en quitar todos los elementos de la base que tiene la p -forma y poner todos los restantes, los que no se usan, en el orden que nos da el tensor de Levi-Civita. Las funciones que van enfrente de la base no son afectadas por el operador de Hodge, hay un aparente conflicto entre las definiciones en el “cálculo de la estrella de Hodge” y los “ejemplos”, ya que este operador depende en gran medida de la base, el producto interior definido y la métrica tensorial que se utilice; así como la orientación de la base y el espacio en donde se utilice, para mayor información acerca de sus construcción con subíndices y superíndices, revise [Theodore2011]. Con este operador se define otro operador diferencial, llamado la codiferencial.

Definición 1.39. *La codiferencial exterior o derivada exterior adjunta se define por $\delta = (-1)^{np+n+1} * [d(*\omega)]$ para espacios n -dimensionales y para p -formas. Se tiene que $\delta = -*[d(*\omega)]$ en espacios de dimensión par y $\delta = (-1)^p * [d(*\omega)]$ en espacios de dimensión impar.*

Como en el caso de la *derivada exterior* o *diferencial exterior*, la doble aplicación de la *codiferencial* o *coderivada* es cero. Esto nos da el siguiente teorema, que también se demuestra por su condición necesaria y suficiente.

Teorema 1.21. $\delta(\delta\omega) = 0$, con $\omega \in \Lambda^p$.

Demostración. Sea $\omega \in \Lambda^p$, aplicando la **coderivada** se obtiene que:

$$\begin{aligned}\delta(\delta\omega) &= \delta((-1)^{np+n+1} * [d(*\omega)]) \\ &= (-1)^{np+n+1} * [d(* \{(-1)^{np+n+1} * [d(*\omega)]\})] \\ &= (-1)^{2(np+n+1)} * [d * \{*[d(*\omega)]\}] \\ &= (-1)^{2(np+n+1)} * [d(-1)^{p(n-p)} d(*\omega)] \\ &= (-1)^{2(np+n+1)} (-1)^{p(n-p)} * [dd(*\omega)] \\ &= (-1)^{2(np+n+1)} (-1)^{p(n-p)} * d^2(*\omega) \\ &= (-1)^{2(np+n+1)} (-1)^{p(n-p)} * \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

Se pone una observación, para los *diagramas conmutativos*²². Se harán hasta el final, en las conclusiones.

Observación 1.2. *Se tiene entonces que:*

$$\begin{aligned}d : \Lambda^p &\longrightarrow \Lambda^{p+1} \\ \delta : \Lambda^p &\longrightarrow \Lambda^{p-1}\end{aligned}$$

Utilizando la definición de la **diferencial** y la **codiferencial** se puede definir otro operador diferencial que se llama **Laplaciano**, o más comúnmente, llamado el **operador de Laplace-Beltrami**. En ciertos casos este operador es el **Laplaciano** en álgebra vectorial, de hecho, es una generalización de este para cualquier **variedad**²³ de cualquier **dimensión**. Ya que se relacionan la **derivada exterior** y la **derivada exterior adjunta**.

Se define todo en \mathbb{R}^n , para que nuestros **sistemas dinámicos** siempre estén en esa **variedad riemanniana**. Más generalmente, se puede definir el **operador diferencial laplaciano** en las secciones del haz de **p-formas** en una **variedad pseudoriemanniana**. En una **variedad de Riemann** es un **operador elíptico**, mientras que en una **variedad de Lorentz** es un **operador hiperbólico**. El **operador de Laplace-de Rham-Beltrami** se define por

$$\nabla^2 = d\delta + \delta d = (d + \delta)^2$$

donde d es la **derivada exterior** y δ es la **codiferencial**, en calidad de $(-1)^{kn+n-1} * d*$ en **p-formas**, donde $*$ es la **estrella de Hodge**.

Se pone un ejemplo, para ver la definición (1.39) y la definición (1.38). Aquí ambas definiciones coinciden, aunque no siempre es el caso. De aquí la dificultad del uso de la definición (1.37) a la hora de hacer cálculos.

Ejemplo 1.10. Sea $\omega = (3xy - x^2 - y^2)dx + (x^2y - y^2x)dy$, entonces $\omega \in \Lambda^1$, $f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2 \in \mathbb{R}^2$ y $g(x, y) = x^2y - y^2x \in \mathbb{R}^2$, se calcula la **codiferencial exterior** de ω . Sea $n = 2$ la **dimensión** y $p = 1$ la **1-forma**, con esto se tienen todos los elementos para calcular:

$$\begin{aligned}\delta\omega &= *[d(*\omega)] \\ &= *[d*(3xy - x^2 - y^2)dx + (x^2y - y^2x)dy)] \\ &= *[d*(3xy - x^2 - y^2)dx + *(x^2y - y^2x)dy)] \\ &= *[d((3xy - x^2 - y^2) * dx + (x^2y - y^2x) * dy)] \\ &= *[d((3xy - x^2 - y^2) \frac{1}{1!} \epsilon_{12} dy + (x^2y - y^2x) \frac{1}{1!} \epsilon_{21} dx)] \\ &= *[d((3xy - x^2 - y^2)dy - (x^2y - y^2x)dx)] \\ &= *[d(3xy - x^2 - y^2)dy - d(x^2y - y^2x)dx] \\ &= *[(3y - 2x)dx \wedge dy - (x^2 - 2xy)dy \wedge dx] \\ &= *[(3y - 2x)dx \wedge dy + (x^2 - 2xy)dx \wedge dy] \\ &= *(3y - 2x + x^2 - 2xy)dx \wedge dy \\ &= (3y - 2x + x^2 - 2xy) * dx \wedge dy \\ &= (3y - 2x + x^2 - 2xy) \frac{1}{0!} \epsilon_{12} \\ &= 3y - 2x + x^2 - 2xy\end{aligned}$$

Se necesitarán de más definiciones para el estudio de los *sistemas dinámicos autónomos reales*, *suficientemente continuos* y *diferenciables*, *polinomiales* y *conservativos* o *integrables*.

Definición 1.40. El **Laplaciano** o el **operador de Beltrami-Laplace** ∇ sobre una variedad, es una función $\nabla : \Lambda^p \longrightarrow \Lambda^p$ definida por $\nabla = d\delta + \delta d$

Se verá un ejemplo, para la definición (1.40). Se hará en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.11. Sea $M = \mathbb{R}^2$. Entonces una base para $\Lambda^0 \supset \{1\}$. Análogamente para $\Lambda^1 \supset \{dx, dy\}$, y para $\Lambda^2 \supset \{dx \wedge dy\}$. También se puede obtener la aplicación $*$ esta nos da:

$$*1 = dx \wedge dy; \quad *dx = dy; \quad *dy = -dx; \quad *dx \wedge dy = 1.$$

Para la **diferencial** se obtiene que:

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

²²En el apéndice (A) se da el concepto de *diagrama conmutativo* en la definición (A.14).

²³En el apéndice (A) se da el concepto de **variedad** en la definición (A.15).

Y para la **codiferencial** se obtiene que:

$$\delta f(x, y) = - * [d(*f(x, y))] = - * [df(x, y)dx \wedge dy] = - * [\mathbf{0}] = \mathbf{0}$$

Y finalmente, para el **Laplaciano** se obtiene que

$$\nabla f(x, y) = (d\delta + \delta d)f(x, y) = d(\mathbf{0}) + \delta(f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy) = - * [d(*f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy)] = - * [df_x(x, y)dy - f_y(x, y)dx] = - * [f_{xx}(x, y)dx \wedge dy - f_{yy}(x, y)dy \wedge dx] = - * [f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)dx \wedge dy] = -(f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)).$$

En función de la acción de los operadores sobre las p -formas, se pueden clasificar las p -formas de la siguiente manera:

Definición 1.41. Una **p-forma** $\omega \in \Lambda^p$ se dice:

- **Armónica** si $\nabla\omega = \mathbf{0}$,
- **Cerrada** si $d\omega = \mathbf{0}$,
- **Cocerrada** si $\delta\omega = \mathbf{0}$,
- **Exacta** si $\omega = d\eta$, con $\eta \in \Lambda^{p-1}$,
- **Coexacta** si $\omega = \delta\eta$, con $\eta \in \Lambda^{p+1}$.

Se verá la *derivada de Lie* y los *corchetes de Lie* que se utilizan para la sección (2.1). Se define primero el *corchete de Poisson* y se enuncian algunas propiedades, esto es porque se puede derivar el *corchete de Lie* de manera natural a partir del *corchete de Poisson*, de hecho, muchas de sus propiedades son similares.

Definición 1.42. Sean $f(x_i, y_i), g(x_i, y_i) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, el **corchete de Poisson** se puede expresar como:

$$\{f, g\}_{x_i, y_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

A continuación, se enumeran algunas de las propiedades del *corchete de Poisson*:

Proposición 1.3. Las siguientes propiedades para el **corchete de Poisson** son válidas:

- Sean $f(x_i, y_i), g(x_i, y_i), h(x_i, y_i) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, se tiene que $\{\alpha f + \beta g, h\}_{x_i, y_i} = \alpha\{f, h\}_{x_i, y_i} + \beta\{g, h\}_{x_i, y_i}$,
- Sean $f(x_i, y_i), g(x_i, y_i), h(x_i, y_i) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, se tiene que $\{f, \alpha g + \beta h\}_{x_i, y_i} = \alpha\{f, g\}_{x_i, y_i} + \beta\{f, h\}_{x_i, y_i}$, (es decir, $\{*, *\}$ es bilineal),
- Sean $f(x_i, y_i), g(x_i, y_i) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se tiene que $\{f, g\}_{x_i, y_i} = -\{g, f\}_{x_i, y_i}$, (es decir, $\{*, *\}$ es antisimétrica),
- Sean $f(x_i, y_i), g(x_i, y_i), h(x_i, y_i) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se tiene que $\{f, \{g, h\}\}_{x_i, y_i} + \{h, \{f, g\}\}_{x_i, y_i} + \{g, \{h, f\}\}_{x_i, y_i} = 0$, (identidad de Jacobi),
- Sean $f(x_i, y_i), g(x_i, y_i), h(x_i, y_i) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se tiene que $\{f, gh\}_{x_i, y_i} = \{f, g\}_{x_i, y_i}h + g\{f, h\}_{x_i, y_i}$, (identidad de Leibnitz).

La proposición (1.3) está en ([Vladimir2007], pp. 30 - 32), no demostrado. Una propiedad de las *variedades* es que el conmutador de las operaciones de *derivada de Lie* sobre 2 -campos vectoriales es equivalente a la *derivada de Lie* respecto de algún *campo vectorial*²⁴, que se será su *corchete de Lie*. En matemática, una *derivada de Lie* es una derivación en el álgebra de funciones diferenciables sobre una *variedad diferenciable*²⁵ \mathcal{M} , cuya definición puede extenderse al álgebra tensorial de la *variedad*. Se obtiene entonces lo que en topología diferencial se denomina *derivación tensorial*: una aplicación \mathbb{R} -lineal sobre el conjunto de *tensores de tipo* (p, q) , que preserve el tipo tensorial y satisfice la regla del producto de Leibniz y que conmuta con las contracciones.

Para definir la *derivada de Lie* sobre el conjunto de *tensores de tipo* (p, q) bastará con definir su acción sobre funciones y sobre campos de vectores: Así, si X es un *campo diferenciable* de vectores, se define la *derivada de Lie* con respecto a X como la única *derivación tensorial* tal que:

- $\mathfrak{L}_X(f) = X(f)$, para toda *función diferenciable* f .
- $\mathfrak{L}_X(Y) = [X, Y]$, para todo *campo diferenciable* Y , donde $[*, *]$ es el *corchete de Lie*.

Se tiene la siguiente definición:

Definición 1.43. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dos **campos vectoriales** sobre una **variedad** \mathcal{M} , y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ y $\alpha \in \Lambda^n(\mathcal{M})$, se define la **derivada de Lie** con respecto a X como la única **derivación tensorial** tal que

- $\mathfrak{L}_X(f) = X(f) = \sum_{i=1}^n \chi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,
- $\mathfrak{L}_X(Y(f)) = X[Y(f)] - Y[X(f)] = [X, Y](f), \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,
- $\mathfrak{L}_X d\alpha = d\mathfrak{L}_X\alpha, \forall \alpha \in \Lambda^n(\mathcal{M})$.

La derivada así definida satisfará automáticamente las propiedades citadas de una *derivación tensorial*:

- La regla del producto $\mathfrak{L}_X(S \otimes T) = \mathfrak{L}_X(S) \otimes T + S \otimes \mathfrak{L}_X(T)$.

²⁴Se da el concepto de *campo vectorial* en la definición (2.11).

²⁵En el apéndice (A) se da el concepto de *variedad diferenciable* en la definición (A.16).

- conmutará con las contracciones.

Definición 1.44. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dos **campos vectoriales** sobre una **variedad** \mathcal{M} , se define el **corchete de Lie** de los **campos** X e Y , denotado por $[X, Y]$ como el **único campo** de vectores que cumple que:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Su expresión en su sistema de coordenadas asociado a una carta local x^ν es:

$$[X, Y]^i = \sum_{j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \left(Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \right)$$

donde n es la **dimensión** de \mathcal{M} .

El **corchete de Lie** de 2-campos constituye un caso particular de una operación más general: la **derivada de Lie** de un **tensor** cualquiera $\mathfrak{L}_X T$ a lo largo de la dirección que marque un **campo** X . Cuando T es un **campo** de vectores Y , se recupera el **corchete de Lie**

$$\mathfrak{L}_X Y = [X, Y].$$

A continuación, se enumeran todas las propiedades del **corchete de Lie**:

Proposición 1.4. Las siguientes propiedades para el **corchete de Lie** son válidas:

- $\forall X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$, se tiene que $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y]$,
- $\forall Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$, se tiene que $[X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2]$, (es decir, $[\ast, \ast]$ es bilineal),
- $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, se tiene que $[X, Y] = -[Y, X]$, (es decir, $[\ast, \ast]$ es antisimétrica),
- $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, se tiene que $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, (identidad de Jacobi),
- $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$, se tiene que $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

La proposición (1.4) se encuentra en ([Barret1983], p. 66), no demostrado. Esta última igualdad destaca que aunque el corchete sea \mathbb{R} -bilineal, no es bilineal sobre las **funciones diferenciables**. Como consecuencia, el corchete no tendrá carácter tensorial, es decir, el valor del vector $[X, Y]_p$ no solo dependerá del valor de los vectores X_p e Y_p (no se podrá definir el **corchete de Lie** de dos vectores), sino de los **campos** X e Y . Como consecuencia inmediata de la antisimetría, $[X, X] = 0$ para cualquier **campo** X .

El **espacio vectorial** de todas las **derivadas de Lie** en \mathcal{M} forma a su vez un **álgebra de Lie dimensionalmente infinito** con respecto al **corchete de Lie**. Se realizan algunos cálculos típicos en **variedades diferenciables**, para ello, se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.12. Sean los **campos vectoriales** $X = -4y \frac{\partial}{\partial x} + 9y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ y $Y = -\frac{\partial}{\partial y} + 3x \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ y sea la **1-forma** $\alpha = 2xyz - zdx$. En este caso se trabaja con la **variedad** $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ (en física se escribiría $X(x, y, z) = (-4y, 9x, 1)$ o $\vec{Y} = (0, -1, 3x)$).

Se empieza calculando un **corchete de Lie**. ¿Cómo queda el cálculo de $[X, Y]$? Si se escribe el corchete con los **campos concretos**, nos queda:

$$[X, Y] = \left[-4y \frac{\partial}{\partial x} + 9y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial y} + 3x \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Lo primero que se hace es aplicar que el **corchete de Lie** es bilineal, por lo que la expresión anterior queda:

$$\left[-4y \frac{\partial}{\partial x}, -1 \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[-4y \frac{\partial}{\partial x}, 3x \frac{\partial}{\partial z} \right] + \left[9y \frac{\partial}{\partial y}, -1 \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[9y \frac{\partial}{\partial y}, 3x \frac{\partial}{\partial z} \right] + \left[1 \frac{\partial}{\partial z}, -1 \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial z}, 3x \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Se puede demostrar que si $g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, entonces:

$$[gX, hY] = gX(h)Y - hY(g)X + gh[X, Y],$$

Por lo que, si se aplica a nuestro caso concreto, nos queda:

$$\begin{aligned} & -4y \frac{\partial(-1)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - (-1) \frac{\partial(-4y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + (-4y)(-1) \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \\ & -4y \frac{\partial(3x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} - 3x \frac{\partial(-4y)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + (-4y)(3x) \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right] + \\ & 9x \frac{\partial(-1)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - (-1) \frac{\partial(9x)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + (9x)(-1) \left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \\ & 9x \frac{\partial(3x)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - (3x) \frac{\partial(9x)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + (9x)(3x) \left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] + \\ & 1 \frac{\partial(-1)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - (-1) \frac{\partial(1)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + (1)(-1) \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \end{aligned}$$

$$1 \frac{\partial(3x)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - (3x) \frac{\partial(1)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + (1)(3x) \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Realizando las derivadas parciales indicadas $\left(\frac{\partial(-1)}{\partial x} = 0, \frac{\partial(-4y)}{\partial y} = -4, \dots \right)$ y teniendo en cuenta que el **corchete de Lie** de campos coordenados es nula, nos queda:

$$[X, Y] = -4 \frac{\partial}{\partial x} - 12y \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3).$$

Se va ahora a calcular $d\alpha$. Para empezar, se aprovecha que es lineal, por lo que:

$$d\alpha = d(2xydz - zdx) = d(2xydz) - d(zdx)$$

y ahora se aplica la definición (1.26) del operador **diferencial exterior** a cada sumando:

$$d(2xy) \wedge dz - d(z) \wedge dx$$

finalmente, como la **diferencial exterior** sobre funciones es la diferencial ordinaria, aplicando las propiedades distributiva, antisimétrica y $d^2 = \pm 0$, nos queda

$$(2ydx + 2xdy) \wedge dz - dz \wedge dx = 2ydx \wedge dz + 2xdy \wedge dz + dx \wedge dz$$

Por lo que, finalmente, nos queda que

$$d\alpha = (2y + 1)dx \wedge dz + 2xdy \wedge dz$$

Ya nos apareció la **derivada de Lie** como los, ¿Cómo se calcularía $L_{[X,Y]}\beta$ con $\beta = d\alpha$? Primero se necesita calcular el **corchete de Lie** de los campos dados:

$$Z := [X, Y] = -4 \frac{\partial}{\partial x} - 12y \frac{\partial}{\partial z}$$

y que es otro **campo vectorial**, a continuación se necesita la **2-forma** resultante de calcular la **diferencial exterior** de la **1-forma**:

$$\beta = (2y + 1)dx \wedge dz + 2xdy \wedge dz$$

y finalmente calcular la **derivada de Lie** de la **forma** respecto del **campo**. De manera que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_Z \beta &= \mathfrak{L}_Z[(2y + 1)dx \wedge dz + 2xdy \wedge dz] = \\ &= \mathfrak{L}_Z[(2y + 1)dx \wedge dz] + \mathfrak{L}_Z(2xdy \wedge dz) = \\ &= \mathfrak{L}_Z(2y + 1)dx \wedge dz + (2y + 1)\mathfrak{L}_Z(dx) \wedge dz + (2y + 1)dx \wedge L\mathfrak{L}_Z(dz) + \\ &= \mathfrak{L}_Z(2x)dy \wedge dz + 2x\mathfrak{L}_Z(dy) \wedge dz + 2xdy \wedge \mathfrak{L}_Z(dz). \end{aligned}$$

Para evitar errores, se calcula separadamente cada **derivada de Lie**:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_Z(2y + 1) &= Z(2y + 1) = [X, Y](2y + 1) = \left(-4 \frac{\partial}{\partial x} - 12y \frac{\partial}{\partial z} \right) (2y + 1) = \\ &= -4 \frac{\partial}{\partial x} (2y + 1) - 12y \frac{\partial}{\partial z} (2y + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{L}_Z(dx) = d\mathfrak{L}_Z x = d([X, Y](x)) = d\left(-4 \frac{\partial}{\partial x} x - 12y \frac{\partial}{\partial z} x\right) = d(-4) = 0$$

$$\mathfrak{L}_Z(dz) = d\mathfrak{L}_Z z = d([X, Y](z)) = d\left(-4 \frac{\partial}{\partial x} z - 12y \frac{\partial}{\partial z} z\right) = -12dy$$

$$\mathfrak{L}_Z(2x) = [X, Y](2x) = -4 \frac{\partial}{\partial x} 2x - 12y \frac{\partial}{\partial z} 2x = -8$$

$$\mathfrak{L}_Z(dy) = d\mathfrak{L}_Z y = d([X, Y](y)) = d\left(-4 \frac{\partial}{\partial x} y - 12y \frac{\partial}{\partial z} y\right) = 0$$

$$\mathfrak{L}_Z(dz) = -12dy$$

Por lo que, finalmente, se tiene que:

$$-12(2y + 1)dx \wedge dy - 24dy \wedge dy - 8dy \wedge dz$$

y como $d^2 = \mathbf{0}$, nos queda:

$$-12(2y + 1)dx \wedge dy - 8dy \wedge dz$$

Capítulo 2

Construcción de ciclos límite en dos dimensiones, su representación con el espacio de las formas diferenciales $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ y su extensión al caso de los 2-ciclos límite representados con el espacio de las formas diferenciales $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$

Los *sistemas dinámicos* con los que se trabajarán serán *autónomos* (independientes del tiempo), en el campo de los *números reales*, de funciones *polinomiales n-dimensionales*, *suficientemente continuos y diferenciables*, en realidad, la interpretación de "función suficientemente continuo y diferenciable" depende del contexto; se refiere a que la función es tantas veces diferenciable y/o continua para poder manipularla como nos interese; si por ejemplo, es una curva y se quiere hallar el triedro de Frenet, se diría a que es tres veces diferenciable; si sólo se quiere hallar sus puntos críticos, se diría que existe su primera derivada, *lineales o no lineales* y *conservativos o integrables* (estos términos de conservativos o integrables se aclararán en la sección (2.1)). En esta sección (2.1) se utilizarán *sistemas bidimensionales*, en la sección (2.2) se utilizarán *sistemas tridimensionales* y en las conclusiones se utilizarán a grandes rasgos los *sistemas n-dimensionales*.

2.1. Caso bidimensional. Ejemplos

Definición 2.1. *Un sistema de ecuaciones diferenciales se denomina sistema hamiltoniano o sistema conservativo si existe una función real $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ que verifica, $\forall x(t)$ e $y(t)$, que:*

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y} \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x}.\end{aligned}$$

A la función $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ se le denomina **función de Hamilton** para el sistema.

Se da esta siguiente definición, que se trata acerca de la *función de Hamilton* y sus soluciones.

Definición 2.2. *Una función de valor real $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ de dos variables $x(t)$ y $y(t)$ es una **cantidad conservada** para un sistema de ecuaciones diferenciales, si $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ es constante a lo largo de todas las curvas solución del sistema. Es decir, si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema, entonces $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ es constante. En otras palabras,*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{H}(x(t), y(t)) = 0.$$

Se da la definición de *puntos fijos* o *puntos críticos*, a continuación:

Definición 2.3. *Las singularidades \mathbf{x}^* para las cuales $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ son llamadas **puntos fijos** o **puntos críticos** del sistema.*

Las letras en negrita \mathbf{x} y $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ de la definición (2.3) significarán vectores. De ahora en adelante, se dirá *puntos críticos* en estos estudios, en vez de *puntos fijos*.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Si se designa $\mathbb{X}_{(2.1)}(x(t), y(t)) = (f_1(x(t), y(t)), f_2(x(t), y(t)))$ el *campo vectorial* asociado al sistema dinámico (2.1), y puesto que se cumple $\nabla \cdot \mathbb{X}_{(2.1)}(x(t), y(t)) = 0$ por ser *conservativo*, entonces, por las definiciones (2.1) y (2.2) respectivamente, este cuenta con una *cantidad conservada* $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^1$, es decir, $\nabla \cdot \mathbb{H}(x(t), y(t)) = \omega_{(2.1)}(x(t), y(t))$ con $\omega_{(2.1)}(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.1)}(x(t), y(t)) = 0$, entonces siempre se pueden construir *sistemas dinámicos* no *conservativos* de la forma

¹La *cantidad conservada* que se elija, debe de ser una *curva algebraica cerrada*² del sistema dinámico. Por lo que dependerá de la elección de la constante en cuestión.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t)) - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) f_2(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t)) + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) f_1(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si se calculan los *puntos críticos* de la ecuación (2.2) resulta que deben de cumplirse las siguientes ecuaciones, según la definición (2.3):

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x(t), y(t)) - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) f_2(x(t), y(t)) \\ 0 &= f_2(x(t), y(t)) + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) f_1(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

De donde, se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} f_1(x(t), y(t)) &= \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) f_2(x(t), y(t)) \\ f_2(x(t), y(t)) &= - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) f_1(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Esto implica inmediatamente que,

$$f_1(x(t), y(t)) = - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i]^2 \right) f_1(x(t), y(t)).$$

Por lo tanto,

$$1 = - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i]^2 \right).$$

Pero como $\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) esto implica que los únicos *puntos críticos* del *sistema dinámico* de la ecuación (2.2) son los del *sistema dinámico* de la ecuación (2.1), pero además, la ecuación (2.2) cuenta con otros *conjuntos límite* a los que se les denominará como *ciclos límite*. Que son cada uno de los $\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Definición 2.4. Por **conjuntos límite** se entenderá el estado que alcanza un **sistema dinámico** después de que haya pasado una cantidad infinita de tiempo, ya sea avanzando o retrocediendo en el tiempo. Los **conjuntos límite** pueden utilizarse para comprender el comportamiento a largo plazo de un **sistema dinámico**.

A partir de la definición (2.4), se pueden definir los *conjuntos α -límite* y *ω -límite*, de la siguiente manera:

Definición 2.5 (Puntos α -límite y ω -límite de trayectorias). Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado un **punto ω -límite** de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, denotado como $\omega(\mathbf{x})$, si existe una sucesión $\{t_i\}$. $t_i \rightarrow \infty$, tal que

$$\varphi(t_i, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

Los **puntos α -límite** son definidos similarmente tomando una sucesión $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow -\infty$.

La definición (2.5) es para puntos, pero para *curvas algebraicas* o *flujos*, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.6 (Conjuntos α -límite y ω -límite de un flujo). El conjunto de todos los **puntos ω -límite** de un **flujo** o **mapeo** es llamado el **conjunto ω -límite**. El **conjunto α -límite** es similarmente definido.

En general, los *conjuntos límite* pueden ser complicados, pero para *sistemas dinámicos bidimensionales*, el *teorema de Poincaré - Bendixson* proporciona una caracterización simple de todos los *conjuntos α y ω límites* no vacíos y compactos.

Teorema 2.1 (teorema de Poincaré - Bendixson). Sea M una región **invariante** positivamente para el **campo de vectores** conteniendo un número finito de **puntos críticos**. Sea $p \in M$, y considera $\omega(p)$. Entonces una de las siguientes posibilidades se tiene

1. $\omega(p)$ es un **puntos crítico** (o fijo),
2. $\omega(p)$ es una **órbita periódica**, o
3. $\omega(p)$ es un **conjunto conexo** compuesto por una cantidad finita de **puntos críticos** conectados por **órbitas homoclínicas** o **heteroclínicas**, es decir, $\exists p_1, \dots, p_n$ y órbitas γ con $\alpha(\gamma) = p_i$, y $\omega(\gamma) = p_j$.

Este teorema se encuentra en ([Gerald2012], pp. 223 - 224) demostrado. En este punto, que se mencionaron palabras en el teorema (2.1) que deben de ser definidas antes de pasar a la construcción que se está haciendo en el caso plano, pero es necesario antes de definir estos nuevos términos.

Definición 2.7. Cuando una trayectoria que inicia en un **punto crítico** del tipo **punto silla** termina en el mismo **punto crítico** la curva descrita se denomina una **órbita homoclínica**. Por el contrario, si una trayectoria que inicia en un **punto crítico** del tipo **punto silla** conecta en su camino a otros **puntos críticos** del **sistema dinámico**, entonces la curva descrita se denomina una **órbita heteroclínica**.

Se da a continuación la definición de una *órbita periódica*,

Definición 2.8. Sea el sistema dinámico autónomo general:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

(Campos vectoriales) Una solución de la ecuación (2.3) a través del punto \mathbf{x}_0 se dice que es **periódica** con período T si existe $T > 0$, de modo que $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t+T, \mathbf{x}_0)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. (Mapeos) La **órbita** de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se dice que es **periódica** con período $k > 0$ si $g^k(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

A veces las *órbitas periódicas* de la definición (2.8) pueden ser *ciclos límite*, si sucede este caso especial, entonces se da la siguiente definición.

Definición 2.9. Por **ciclo límite** de un sistema dinámico bidimensional y autónomo se entiende cualquier **órbita periódica** del sistema que esté aislada y a la que tiendan positivamente o negativamente respecto al tiempo otras órbitas asintóticamente (en forma espiral) que se encuentren en alguna vecindad de ella.

Utilizando la ecuación (2.2), y las definiciones (2.1) y (2.2), nuestro sistema dinámico sería de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \\ \dot{y}(t) &= -\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se pone un ejemplo (el cual es conocido como el oscilador armónico).

Ejemplo 2.1. Sea el sistema dinámico, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -x(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

El **punto crítico**, del sistema dinámico de la ecuación (2.5) es $c_0 = (0, 0)$. Viendo la forma del sistema dinámico sus soluciones son:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y(t) &= c_2 \cos t - c_1 \sin t. \end{aligned}$$

Lo que representa un círculo, esto es lo mismo que (esto es, si se piensa en el **espacio-fase**, y no las soluciones por separado de $x(t)$ y de $y(t)$):

$$\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} = \mathcal{C} \quad (2.6)$$

La gráfica del sistema dinámico de la ecuación (2.5) está en la figura (2.1), se nota que las **curvas algebraicas** representan círculos concéntricos con centro en el **punto crítico** $(0, 0)$ del sistema dinámico de la ecuación (2.5). De aquí que las soluciones generales se puedan representar tanto de manera cartesiana como de manera paramétrica. Sin embargo, para esta introducción, nos servirá más la forma cartesiana de la **curva algebraica**. Esto es debido a la construcción hecha del sistema dinámico de la ecuación (2.4) a partir del sistema dinámico de la ecuación (2.1).

El sistema dinámico de la figura (2.1), está dado en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Y se trazan algunas **órbitas** del sistema dinámico de la ecuación (2.5), los cuales son cerradas y aisladas por lo que se observa, estas son todas soluciones generales de nuestro ejemplo particular dependiendo de las condiciones iniciales que se tomen en el sistema dinámico propuesto.

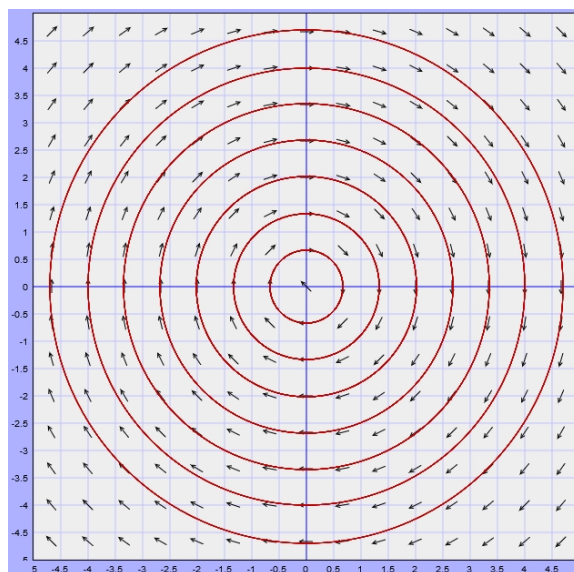


Figura 2.1. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.5). Imagen hecha con pplane8.m para la versión 7.7 de MatLab.

La ecuación (2.5) es un **sistema hamiltoniano**, pues es un sistema acoplado de la forma $\dot{x}(t) = f(y(t))$ y $\dot{y}(t) = g(x(t))$. Si se elige la **curva** $x^2(t) + y^2(t) - 1 = 0$, por la construcción de la ecuación (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)x(t) \\ \dot{y}(t) &= -x(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)y(t).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Los puntos críticos del sistema dinámico de la ecuación (2.7) son los mismos que los del sistema dinámico de la ecuación (2.5) por construcción. Pero además posee un **ciclo límite**, que está representado por la curva cerrada $x^2(t) + y^2(t) = 1$, el cual representa la gráfica de un círculo unitario centrado en el origen. A continuación, se pone la gráfica del sistema dinámico de la ecuación (2.7), así como el ciclo límite algebraico representado por el círculo de radio igual a 1 y centrado en (0, 0).

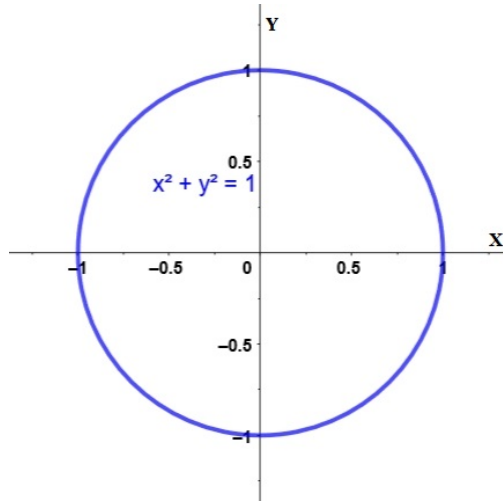


Figura 2.2. Curva algebraica cerrada $x^2(t) + y^2(t) = 1$ del sistema dinámico (2.7). Este representa el ciclo límite. Imagen hecha con GeoGebra Clásico 6.

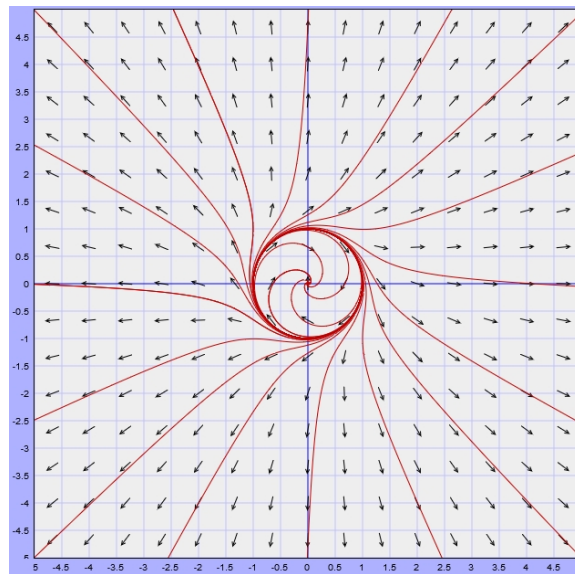


Figura 2.3. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.7).

El sistema dinámico en la figura (2.3), está dado en los intervalos $x, y \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas órbitas, pero nótese en la imagen que las flechas del espacio-fase las trayectorias son expulsadas por el ciclo límite representado por el círculo unitario, cuya ecuación nos es conocida por construcción algebraica, nuestra curva cerrada y aislada se puede considerar un conjunto α -límite, es decir, de él provienen las órbitas.

¿Cómo se podría mostrar que la ecuación (2.7) cuenta realmente con un ciclo límite? Esta respuesta tiene una solución, para ver si $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} = \mathcal{C}$ es un ciclo límite de la ecuación (2.7) se calcula $\nabla\mathbb{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.7)} = 0$, con $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ como la función de Hamilton de la ecuación (2.5). Por un lado se tiene que

$$\nabla\mathbb{H}(x(t), y(t)) = (x(t), y(t))$$

$$\mathbb{X}_{(2.7)}(x(t), y(t)) = (y(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)x(t), -x(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)y(t))$$

Esta operación entre el campo vectorial que representa nuestro sistema dinámico y el gradiente de la curva algebraica que es solución del espacio-fase del sistema propuesto, que es el ciclo límite de la ecuación (2.7). Haciendo el producto punto entre $\nabla\mathbb{H}(x(t), y(t))$ y $\mathbb{X}_{(2.7)}$, se obtiene como resultado que.

$$\begin{aligned}\nabla\mathbb{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.7)}(x(t), y(t)) &= (x(t), y(t)) \cdot (y(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)x(t), -x(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)y(t)) \\ &= x(t) \cdot (y(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)x(t)) + y(t) \cdot (-x(t) + (x^2(t) + y^2(t) - 1)y(t)) \\ &= x(t) \cdot (y(t) + x^3(t) + y^2(t)x(t) - x(t)) + y(t) \cdot (-x(t) + x^2(t)y(t) + y^3(t) - y(t)) \\ &= x(t)y(t) + x^4(t) + y^2(t)x^2(t) - x^2(t) - x(t)y(t) + x^2(t)y^2(t) + y^4(t) - y^2(t) \\ &= x^4(t) + 2x^2(t)y^2(t) - x^2(t) - y^2(t) + y^4(t) \\ &= (x^2(t) + y^2(t))^2 - (x^2(t) + y^2(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1)^2 - (1) \\
&= 1 - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se ha utilizado la **derivada de Lie** de la definición (1.43), la **derivada de Lie** de una función o una **0-forma** alrededor de un **campo vectorial** se reduce a calcular el **producto punto** entre estos. Su significado matemático es la de una **derivada direccional**, donde la función $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ va en la dirección del **campo vectorial** $\mathbb{X}_{(2.7)}$, su significado geométrico es que tanto varía la función en la dirección de nuestro **campo vectorial**.

Con este mismo ejemplo se generaliza la idea, a un espacio de (**2-formas**). Se sabe que $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ representa la solución del **sistema dinámico** (2.5) en el **espacio-fase**, si a esta solución se le aplica el **operador estrella de Hodge** (definición (1.37) y teorema (1.18)), y se denota como \hat{H} , entonces se tiene que.

$$\hat{H} = - \left(\frac{x^2(t) + y^2(t)}{2} \right) \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y$$

Utilizando ahora la **divergencia generalizada** $\delta\hat{H} = *[\nabla_{\wedge}(*\hat{H})]$, se tiene que

$$*\hat{H} = - \left(\frac{x^2(t) + y^2(t)}{2} \right) \Rightarrow \nabla_{\wedge}(*\hat{H}) = -x(t)\hat{e}_x - y(t)\hat{e}_y \Rightarrow *[\nabla_{\wedge}(*\hat{H})] = y(t)\hat{e}_x - x(t)\hat{e}_y$$

Si este se asocia al **sistema dinámico** de la ecuación (2.5) y se usan las ideas para formar el nuevo **sistema dinámico** de la ecuación (2.4), se puede notar que $*[\nabla_{\wedge}(*\hat{H})]$ es tangente a la curva algebraica $x^2(t) + y^2(t) = 1$. De este modo, se puede obtener un **ciclo límite** de la misma manera que como se obtuvo con las técnicas clásicas, pero asociando la notación tensorial y utilizando la ecuación el **sistema dinámico** de la ecuación (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{X} &= \delta\hat{H} - [2(*\hat{H}) + 1](-*\delta\hat{H}) \\
&= \delta\hat{H} + [2(*\hat{H}) + 1](*\delta\hat{H})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En este punto aún no se va a probar si la ecuación (2.8) tiene o no un **ciclo límite**, esto se verá en el caso tridimensional.

Un significado físico, es que la **derivada de Lie** de un objeto sea cero significa que a lo largo del **campo vectorial** usado para definir la **derivada de Lie** de dicho objeto este se mantiene constante y que el **corchete de Lie** sea cero significa que puedes conmutar el orden de **derivación de Lie** de un objeto respecto a los **campos vectoriales** que definen las **derivadas de Lie**. Un teorema nos dará la naturaleza de los **puntos críticos**.

El **teorema de Hartman-Grobman** es otro resultado en la teoría cualitativa local de **ecuaciones diferenciales ordinarias**. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \tag{2.9}$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{2.10}$$

con $A = Df(x_0)$. A lo largo de esta sección (2.1) se asume que el punto de equilibrio x_0 se ha trasladado al origen.

Definición 2.10. Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales como (2.9) y (2.10) se dice que son **topológicamente equivalentes** en una vecindad del origen o que tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen si hay un **homeomorfismo**³ H mapeando un conjunto abierto U que contiene el origen en un conjunto abierto V que contiene el origen que mapea las trayectorias de (2.9) en U sobre las trayectorias de (2.10) en V y conserva su orientación en el tiempo en el sentido de que si una trayectoria se dirige de x_1 a x_2 en U , entonces su imagen se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V . Si el homeomorfismo H conserva la parametrización por tiempo, entonces los sistemas (2.9) y (2.10) se dice que se **conjugan topológicamente** en una vecindad del origen.

Teorema 2.2 (teorema de Hartman-Grobman). Dado un **sistema dinámico autónomo** con **puntos críticos** $p_i = (x_{1_i}, x_{2_i}, \dots, x_{n_i}) \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces, para cada **punto crítico** p_j que sea **hiperbólico** (esto es, la linealización del **sistema dinámico** nos conduce a que en la vecindad de dicho punto, el **polinomio característico** cuenta con raíces cuya parte real es diferente de cero), el sistema será topológicamente equivalente al correspondiente **sistema dinámico lineal** en la vecindad de p_j .

Esto es, sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene el origen, sea $f \in \mathcal{C}^1(E)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal (2.9). Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene valor propio con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene el origen en un conjunto abierto V que contiene el origen tal que para cada $x_0 \in U$, hay un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene cero tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0);$$

es decir, H mapea las trayectorias de (2.9) cerca del origen en las trayectorias de (2.10) cerca del origen y conserva la parametrización por tiempo.

El teorema (2.2) se encuentra en ([Lawrence2006], pp. 119 - 127) demostrado. El teorema (2.2) nos da la naturaleza de los **puntos críticos**, sin embargo, presenta problemas en puntos críticos que **no** sean **hiperbólicos**, sin embargo, los **sistemas hamiltonianos** cumplen con la siguiente propiedad:

Proposición 2.1. Todos los **sistemas hamiltonianos** tienen **puntos críticos** que son **nodos-silla** o **centros**.

³En el apéndice (A) se encuentra el concepto de **homeomorfismo**, en la definición (A.22).

La propiedad (2.1) se encuentra en ([Paul1999], pp. 446 - 448) que está demostrado y también tiene ejemplos gráficos y algebraicos. Si se junta la información del teorema (2.2), la proposición (2.1) y la construcción de *ciclos límite*, los *puntos críticos* de un **sistema hamiltoniano** cambian de naturaleza al construirle un *ciclo límite* y convertir al *sistema dinámico hamiltoniano* a otro *no lineal* y *no hamiltoniano*, es decir, si el *punto crítico* en el *sistema dinámico hamiltoniano* original es de tipo *centro*, entonces, a la hora de construir nuestro nuevo *sistema dinámico* con su *ciclo límite*, a partir de la *función de Hamilton* del original, este se convierte en un punto *sumidero espiral*, o bien, una *fuerza espiral*, esto se puede probar a través del *teorema de Hartman-Grobman* (2.2), entonces esto es una pista de que nuestra construcción es correcta.

Si ahora se considera de forma algebraica analítica, a la ecuación (2.4), como un *campo vectorial* general y se saca el gradiente de todos sus *ciclos límite*, se obtiene respectivamente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x(t), y(t)) &= \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)}, -\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \right) \\ \nabla \mathbf{H}(x(t), y(t)) &= \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right], \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Si se hace el *producto escalar* entre el *campo vectorial*, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{X}_{(2.4)}(x(t), y(t)) &= \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)}, -\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right], \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \right) + \\ &= \left(-\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \right) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] + \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \right)^2 \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \\ &= -\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] + \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \right)^2 \left(\prod_{i=1}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \end{aligned}$$

En la última igualdad, se tienen cuatro términos, de esos cuatro, el primero y el tercero se neutralizan (se hacen cero), ya que $\mathbf{H}(x(t), y(t))$ es continua y diferenciable, por lo que nos queda la expresión:

$$\nabla \mathbf{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{X}_{(2.4)}(x(t), y(t)) = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \right)^2 \right] \left[\sum_{j=1}^n (\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_j) \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i]^2 \right) \right]$$

Esta última expresión se puede simplificar, si se recuerda que $\mathbf{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, por lo que finalmente:

$$\nabla \mathbf{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{X}_{(2.4)}(x(t), y(t)) = 0 \quad (2.11)$$

Nuestra construcción nos da como resultado *ciclos límite*, la ecuación (2.11) es una expresión de construir *sistemas dinámicos* con *ciclos límite* a partir de *sistemas dinámicos conservativos*.

Para dar una generalización, anteriormente en la ecuación (2.1) se tenía un *sistema dinámico*, de los cuales nos interesa que sea *conservativo* y se creó la ecuación (2.4) a partir de la ecuación (2.1) para tener otro *sistema dinámico* con *ciclos límite* bajo ciertas condiciones, que los *puntos críticos* de la ecuación (1.2) sean también los únicos para la ecuación (2.4). A partir de esta idea, se construyeron *ciclos límite*, y la expresión quedó como la ecuación (2.4), ahora suponga nuestro *sistema dinámico conservativo*, pero ahora se pone en el producto general de las *curvas algebraicas cerradas* una función polinomial adecuada. Esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Puesto que el *sistema dinámico* de la ecuación (2.1) es *conservativo* por construcción, siempre se puede elegir una constante adecuada de nuestra solución en el *espacio-fase* de tal modo que este nos de una *curva cerrada algebraica* (recuérdese que nuestra solución también debe de ser un polinomio), por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \\ \dot{y}(t) &= -\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Ahora se hace una modificación a las ecuaciones (2.13), y se multiplican las *curvas algebraicas cerradas* por polinomios adecuados, por polinomios adecuados uno se referirá a que tengan los mismos *puntos críticos* que los de la ecuación del *sistema dinámico* (2.1), para obtener que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \theta_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \theta_2(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.14}$$

En esta última ecuación (2.14), $\theta_1(x(t), y(t))$ y $\theta_2(x(t), y(t))$ son funciones polinomiales que cumplen en toda la ecuación (2.14) con el hecho de que al calcularle los *puntos críticos* a la ecuación (2.14), estos tienen los mismos puntos que el *sistema dinámico* de la ecuación (2.1), y esta modificación es a partir del *sistema dinámico* de la ecuación (2.12).⁴ Se dará más adelante una técnica para encontrar ese tipo de funciones adecuadas. Se verá un ejemplo a continuación con la nueva construcción.

Ejemplo 2.2. Sea el sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Se ve que los **puntos críticos** de nuestro **sistema dinámico** son $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (-1, 0)$, como la ecuación (2.15) es un **sistema conservativo**, sus **puntos críticos** son de entrada **nodos-silla** o **centros**, linealizando el **sistema dinámico** de la ecuación (2.15) se tiene lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2(t) & 0 \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{bmatrix}$$

Las funciones dentro de la matriz son pares, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (-1, 0)$ tendrán la misma naturaleza, así, su **polinomio característico** asociado será,

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$$

Entonces $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{x}_2 = (-1, 0)$ son **centros**, por lo que $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ tiene que ser necesariamente **nodo-silla**, no se hacen los cálculos explícitos debido a la proposición (2.1). Ahora se encuentra la **función de Hamilton** de la ecuación (2.15) haciendo algunos cálculos se tiene que.

$$\begin{aligned}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} &= \frac{x(t) - x^3(t)}{y(t)} \Rightarrow [x^3(t) - x(t)]dx(t) + y(t)dy(t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} = \mathcal{C}\end{aligned}$$

Por lo que la **función de Hamilton** es $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} = \mathcal{C}$.

En la figura (2.4), se grafica a continuación el **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.15). El **plano fase** de nuestro sistema dado en la figura (2.4), está en los siguientes intervalos $x, y \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba a abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas cuantas **órbitas** del espacio-fase, nótese que nuestras **funciones de Hamilton**, están tomadas de las **curvas de nivel cerradas** que aparecen cerca de los **puntos críticos**, ya que todo **ciclo límite** encierra en su interior al menos uno de dichos **puntos críticos**.

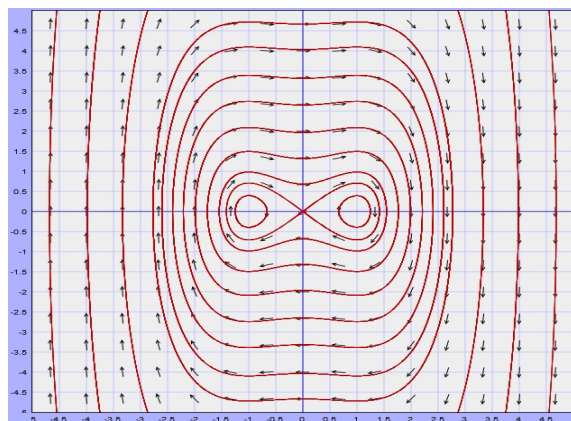


Figura 2.4. El **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.15). nótese que hay una **órbita homoclínica** y adentro de esta hay **órbitas cerradas**.

⁴Se aclara brevemente, que no cualquier función polinomial puede ser puesta en la ecuación (2.14). Se necesitan polinomios adecuados que tengan la característica de conservar los *puntos críticos* de la ecuación (2.1)

Por la ecuación (2.14), se puede construir un sistema dinámico no conservativo que cuente con ciclos límite; para esto se elige $\mathcal{C} = \frac{1}{8}$, lo que nos da una de sus soluciones cerradas, o una curva algebraica cerrada, para obtener dicha curva algebraica y, en general, el sistema obtenido en la ecuación (2.16) todo se multiplica por 8 para no acarrear con fracciones, por su facilidad y su manejo, para obtener de este modo que,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 8y(t) + (-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t))(-8x(t) + 8x^3(t)) \\ \dot{y}(t) &= 8x(t) - 8x^3(t) + (-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t))8y(t).\end{aligned}\quad (2.16)$$

La curva algebraica cerrada $-1 - 2x^4 + 4x^2 - 4y^2 = 0$, se ve en la figura (2.5) como una curva en dos partes o piezas, que fue elegida con dentro de todas las curvas de nivel, para obtener el resultado.

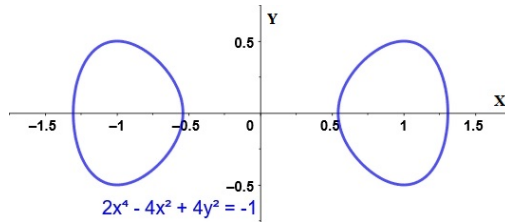


Figura 2.5. La curva algebraica cerrada de $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ al elegir $\mathcal{C} = \frac{1}{8}$. Esta es la representación geométrica y su ecuación algebraica del ciclo límite de la ecuación (2.16).

Graficando en la figura (2.6) el espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.16), se obtiene el resultado, que posee dos ciclos límite esto, al menos de manera gráfica, por toda la construcción hecha con anterioridad, éste cumple con la ecuación (2.11) y no se necesitan hacer más cálculos.

El nuevo sistema dinámico en la figura (2.6), está dado en los intervalos $x, y \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas cuantas órbitas en el espacio-fase, nótese por las flechas de la gráfica, que las órbitas son atraídas por el ciclo límite representado por las dos curvas cerradas del sistema dinámico de la ecuación (2.16), esto significa que es un conjunto ω -límite, es decir, tienden asintóticamente las trayectorias hacia el ciclo límite, ahora bien, se puede probar que los puntos críticos son fuentes espirales utilizando el teorema de Hartman-Grobman (2.2) y que al calcular la naturaleza de los puntos críticos estos cambian de centros a fuentes espirales en el nuevo sistema dinámico de la ecuación (2.16).

Además los ciclos límite son los de la figura (2.5). Hasta este momento se ha mostrado gráficamente que la construcción es correcta, ahora se mostrará analíticamente con cálculos algebraicos que estos si son ciclos límite del sistema dinámico (2.16).

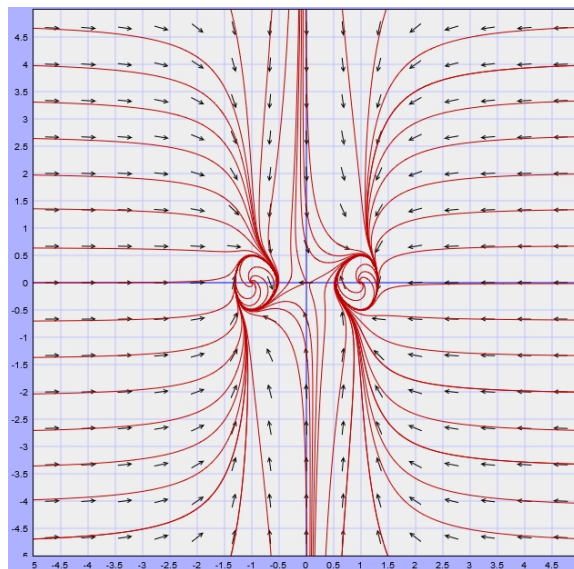


Figura 2.6. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.16).

El sistema dinámico de la ecuación (2.16) cuenta con dos ciclos límite, gráficamente en la figura (2.6), para mostrar que son ciclos límite de la ecuación (2.16), se calcula el producto escalar $\nabla \mathbb{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.16)(x(t), y(t))}$, anteriormente se había dicho que estos cálculos prueban la existencia de ciclos límite.

$$\begin{aligned}\nabla \mathbb{H}(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.14)(x(t), y(t))} &= (x^3(t) - x(t), y(t)) \cdot (8y(t) + (-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t))(-8x(t) + 8x^3(t)), 8x(t) \\ &\quad - 8x^3(t) + (-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t))8y(t)) \\ &= (x^3(t) - x(t), y(t)) \cdot (8y(t) + 8x(t) + 16x^5(t) - 32x^3(t) + 32x(t)y^2(t) - 8x^3(t) - 16x^7(t) \\ &\quad + 32x^5(t) - 32x^3(t)y^2(t), 8x(t) - 8x^3(t) - 8y(t) - 16x^4(t)y(t) + 32x^2(t)y(t) - 32y^3(t)) \\ &= (x^3(t) - x(t)) \cdot (8y(t) + 8x(t) + 16x^5(t) - 32x^3(t) + 32x(t)y^2(t) - 8x^3(t) - 16x^7(t) \\ &\quad + 32x^5(t) - 32x^3(t)y^2(t)) + y(t) \cdot (8x(t) - 8x^3(t) - 8y(t) - 16x^4(t)y(t) + 32x^2(t)y(t) \\ &\quad - 32y^3(t)) \\ &= 8x^3(t)y(t) + 8x^4(t) + 16x^8(t) - 32x^6(t) + 32x^4(t)y^2(t) - 8x^6(t) - 16x^{10}(t) + 32x^8(t) \\ &\quad - 32x^6(t)y^2(t) - 8x(t)y(t) - 8x^2(t) - 16x^6(t) + 32x^4(t) - 32x^2(t)y^2(t) + 8x^4(t) + \\ &\quad 16x^8(t) - 32x^6(t) + 32x^4(t)y^2(t) + 8x(t)y(t) - 8x^3(t)y(t) - 8y^2(t) - 16x^4(t)y^2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 32x^2(t)y^2(t) - 32y^4(t) \\
 = & 48x^4(t) + 64x^8(t) - 88x^6(t) + 48x^4(t)y^2(t) - 16x^{10}(t) - 32x^6(t)y^2(t) - 8x^2(t) \\
 & - 8y^2(t) - 32y^4(t) \\
 = & 48x^4(t) + 64x^8(t) - 88x^6(t) + 48x^4(t) \left(-\frac{1}{4} - \frac{x^4(t)}{2} + x^2(t) \right) - 16x^{10}(t) \\
 & - 8 \left(-\frac{1}{4} - \frac{x^4(t)}{2} + x^2(t) \right) - 32x^6(t) \left(-\frac{1}{4} - \frac{x^4(t)}{2} + x^2(t) \right) - 8x^2(t) \\
 & - 32 \left(-\frac{1}{4} - \frac{x^4(t)}{2} + x^2(t) \right)^2 \\
 = & 48x^4(t) + 64x^8(t) - 88x^6(t) - 12x^4(t) - 24x^8(t) + 48x^6(t) - 16x^{10}(t) + 2 + 4x^4(t) \\
 & - 8x^2(t) + 8x^6(t) + 16x^{10}(t) - 32x^8(t) - 8x^2(t) - 32 \left(\frac{1}{16} + \frac{x^8(t)}{4} \right. \\
 & \left. x^4(t) + \frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} - x^6(t) \right) \\
 = & 40x^4(t) + 8x^8(t) - 32x^6(t) + 2 - 16x^2(t) - 2 - 8x^8(t) - 32x^4(t) - 8x^4(t) + 16x^2(t) \\
 & + 32x^6(t) \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

Esto cumple con tener dos ramas del **ciclos límite** para la ecuación (2.16), una vez que se ha probado que este ejemplo posee lo que se había propuesto, entonces se puede construir uno igual al de la ecuación propuesta (2.14) a partir de la ecuación (2.12). Se procede a proponer un **sistema dinámico** como (2.14), para esto, tómense los polinomios $\theta_1(x(t), y(t)) = 2x(t)y^2(t)$ y $\theta_2(x(t), y(t)) = y(t) - 2x^2(t)y(t) + 4y^3(t)$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= 20y(t) + 2x(t)y^2(t) \\
 \dot{y}(t) &= 20x(t) - 20x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) + 4y^3(t).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Se pone la figura (2.7), para ver el **espacio-fase** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.17). El **sistema dinámico** en la gráfica de (2.7), está dado en los intervalos $x, y \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas cuantas **órbitas**, pero nótese por las flechas, que las **órbitas** son ahora repelidas por el **ciclo límite** representado por las dos curvas cerradas del **sistema dinámico** de la ecuación (2.17), lo que significa que los **ciclos límite** son **conjuntos α -límite**, es decir, salen asintóticamente las trayectorias del **ciclo límite**. Nótese cómo la naturaleza de los **puntos críticos** cambian a **sumideros espirales** con respecto de la ecuación (2.16) al **sistema dinámico** de la ecuación (2.17). Se puede probar la naturaleza de los **puntos críticos** mediante el **teorema de Hartman-Grobman** (2.2).

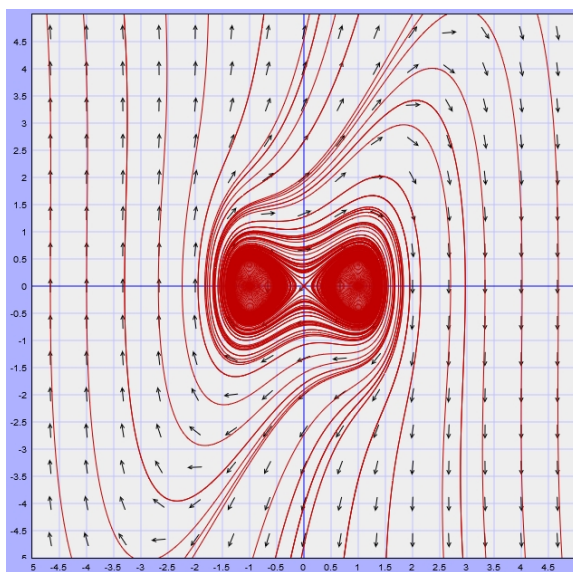


Figura 2.7. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.17).

La curva $-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t) = 0$, es también, la representación algebraica de “los supuestos” **ciclos límite** del **sistema dinámico** de la ecuación (2.17). Definiendo el **campo vectorial** (que representa nuestro **sistema dinámico** de la ecuación (2.17) $\mathbb{X}_{(2.17)}(x(t), y(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, entonces debe de cumplirse que $\mathbb{X}_{(2.17)}(x(t), y(t))$ es tangente a la curva $-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t)$, si es que dicha curva representa en realidad a los **ciclos límite** de la ecuación (2.17). Calculando el **gradiente** de nuestra **curva algebraica cerrada** $-1 - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t)$, resulta que

$$(8x^3(t) - 8x(t))\hat{i} + 8y(t)\hat{j} = \nabla H(x(t), y(t)) = (8x^3(t) - 8x(t), 8y(t))$$

Ahora se procede a calcular $\nabla H(x(t), y(t)) \cdot 8\mathbb{X}_{(2.15)}$, lo que nos debería de dar 0 al final de los cálculos. Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned}
 \nabla H(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.15)} &= (8x^3(t) - 8x(t), y(t)) \cdot (20y(t) + 2x(t)y^2(t), 20x(t) - 20x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) + 4y^3(t)) \\
 &= (8x^3(t) - 8x(t)) \cdot (20y(t) + 2x(t)y^2(t)) + 8y(t) \cdot (20x(t) - 20x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) \\
 &\quad + 4y^3(t)) \\
 &= 160x^3(t)y(t) + 16x^4(t)y^2(t) - 160x(t)y(t) - 16x^2(t)y^2(t) + 160x(t)y(t) - 160x^3(t)y(t) \\
 &\quad + 8y^2(t) - 16x^2(t)y^2(t) + 32y^4(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 16x^4(t)y^2(t) - 32x^2(t)y^2(t) + 8y^2(t) + 32y^4(t) = 8y^2(t) (2x^4(t) - 4x^2(t) + 1 + 4y^2(t)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Una vez visto que la generalización es posible, se procede a dos cosas, la primera es pasar esto a las **formas diferenciales** y la segunda es la de dar la construcción de $\theta_1(x(t), y(t))$ y de $\theta_2(x(t), y(t))$ con algún cálculo conveniente que nos permita localizarlos adecuadamente. Puesto que ya se sabe que $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = 2x^4(t) - 4x^2(t) + 4y^2(t)$, entonces se pasa esto al espacio de los **bivectores**, para tener que:

$$\widehat{H} = (-2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t))\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y$$

Utilizando la **codiferencial**, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \delta\widehat{H} &= *[\nabla_{\wedge}(*\widehat{H})] \\
 &= *[\nabla_{\wedge}*(-2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t))\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y] \\
 &= *[\nabla_{\wedge} - 2x^4(t) + 4x^2(t) - 4y^2(t)] \\
 &= *[-8x^3(t) + 8x(t)]\widehat{e}_x - 8y(t)\widehat{e}_y \\
 &= (-8x^3(t) + 8x(t))\widehat{e}_y + 8y(t)\widehat{e}_x \\
 &= 8y(t)\widehat{e}_x + (-8x^3(t) + 8x(t))\widehat{e}_y
 \end{aligned}$$

Si a este se le asocia el **sistema dinámico** de la ecuación (2.15), se observa que $*[\nabla_{\wedge}(*\widehat{H})]$ es tangente al gradiente la **curva algebraica** $\widehat{H} = 2x^4(t) - 4x^2(t) + 4y^2(t) = \mathcal{C}$. De este modo se obtiene un **ciclo límite** de la misma manera, pero asociándole la notación de las **p-formas**, y utilizando la ecuación (2.16) se tiene que

$$\mathbb{X} = \delta\widehat{H} + [(*\widehat{H}) + 1](*\delta\widehat{H}) \quad (2.18)$$

Si finalmente se cambia $(*\delta\widehat{H})$ de la ecuación (2.18), por $\Theta = \theta_1(x(t), y(t))\widehat{e}_x + \theta_2(x(t), y(t))\widehat{e}_y$, se obtiene el siguiente resultado.

$$\mathbb{X} = \delta\widehat{H} + [(*\widehat{H}) + 1]\Theta \quad (2.19)$$

Hay manera de probar que existen **ciclos límite** en las **2-formas**, no se hará hasta la sección (2.2), por ahora, se mencionará que estos “**ciclos límite**” serán nombrados en el espacio de las **2-formas** como **1-ciclos límite**.

Se verá de donde surgió el *sistema dinámico* de la ecuación (2.17), ambos salieron correctos, tanto gráficamente como analíticamente, la primera de las pregunta es: “¿cómo se construyó y se propuso un polinomio así de la nada?”; y la segunda es: “¿qué quedó pendientes en la construcción anterior?”. Para la segunda pregunta, se dejaron varias palabras clave, ideas y conceptos que no se han definido, se necesitan unas cuantas definiciones, proposiciones y teoremas que hay pendientes y que se enunciarán y para la primera, hay que auxiliarnos de dichos bagajes matemáticos, así como de nuestras construcciones hechas con anterioridad. Se había definido lo que es un *ciclo límite*, pero no quedaron claras algunas ideas de los *ciclos límite*. El primer concepto que no se ha definido es el de *campo vectorial*, y es usado aquí.

Definición 2.11. Se define un **campo vectorial** como una función

$$\chi : \mathbb{R}_{car}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{vec}^2, \quad (x(t), y(t)) \mapsto f(x(t), y(t))\frac{\partial}{\partial x} + g(x(t), y(t))\frac{\partial}{\partial y}$$

donde $f(x(t), y(t))$ y $g(x(t), y(t))$ son funciones reales.

En la definición (2.11) se reemplazan las entradas $x(y)$ y $y(t)$ por $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$ para el caso en que se muestre la existencia de los *ciclos límite* y poner \mathbb{X} en vez de χ , y las derivadas parciales por *1-formas*, de hecho existe un *isomorfismo natural* o *correspondencia biunívoca* entre ambos objetos matemáticos. La segunda palabra que salió a la luz es el de *trayectoria*, por lo que se define.

Definición 2.12. Se define una **trayectoria** de $\mathbb{X}(x(t), y(t))$ como una función

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

cuyos vectores tangentes coinciden por los dados en $\mathbb{X}(x(t), y(t))$.

Las *trayectorias* en nuestros *sistemas dinámicos* representan las curvas solución en el *espacio-fase*. Lo cual tiene sentido. Otra palabra es la de *órbita*, por lo que se define.

Definición 2.13. Se define una **órbita** de $\mathbb{X}(x(t), y(t))$ como la imagen $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ de una **trayectoria** de $\mathbb{X}(x(t), y(t))$.

Las *órbitas* son las curvas solución en el *espacio-fase*, otro concepto es la de *curva de nivel*, lo que significa que se necesita una definición.

Definición 2.14. Sea \mathbb{H} un conjunto y $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ un **campo escalar** sobre \mathbb{H} . El **conjunto de nivel** o **curva de nivel** C_k para la función f es el subconjunto de puntos $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ en \mathbb{H} para los cuales $f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = k$. O notacionalmente como:

$$C_k = f^{-1}(k) := \{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n | f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = k\}.$$

Cabe mencionar de la definición (2.14) es que el *conjunto de nivel* o las *curvas de nivel* pueden coincidir con el conjunto vacío. Así mismo, está definición tiene las siguientes características:

- Si $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$ los *conjuntos de nivel* son en general curvas y se les llama *curvas de nivel*.
- Si $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^3$ los *conjuntos de nivel* suelen ser superficies y se les llama *superficies de nivel*.

- Para dimensiones mayores, no se cuenta con una representación gráfica de estos conjuntos.

Se presenta una gráfica de *curvas de nivel*, en el *sistema dinámico* de la ecuación (2.5), se encontró que la solución en el *espacio-fase* era $H(x(t), y(t)) = \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2}$, así que utilizando la definición (2.14), se tiene que:

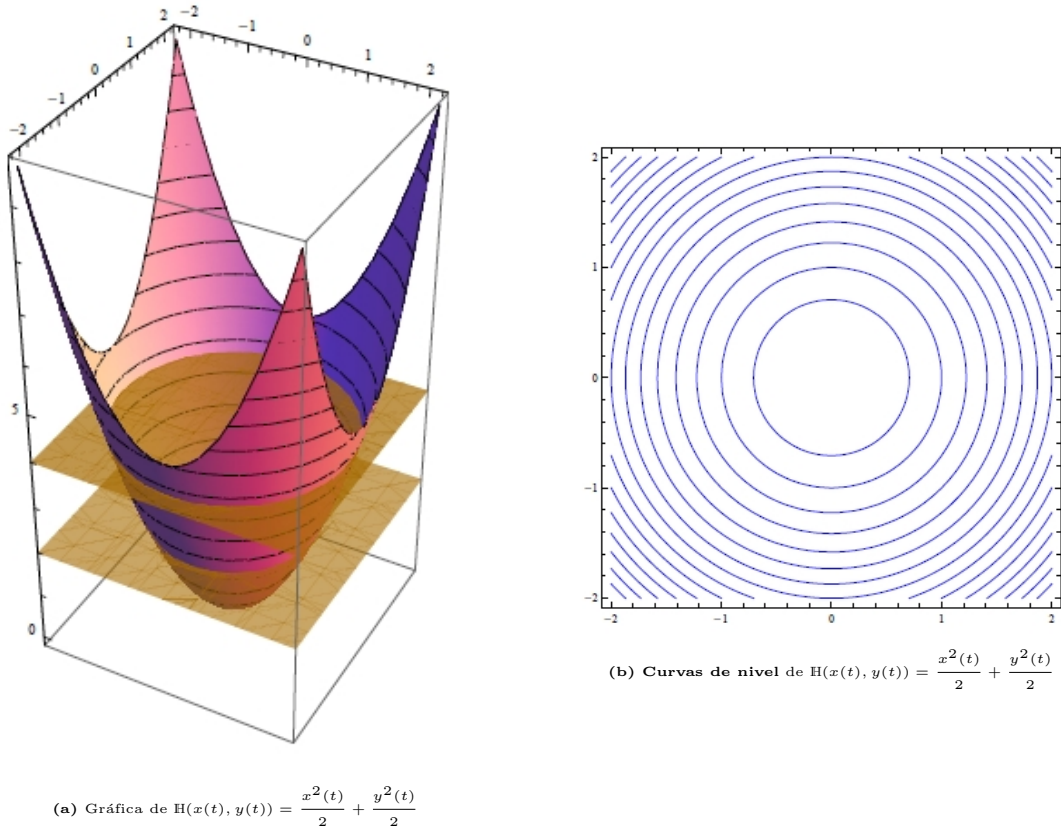


Figura 2.8. Nótese que la solución en el **espacio-fase** representaría en gráficamente un paraboloides de revolución, esto es para toda $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$, nótese que si se corta como jamón al paraboloides de revolución de la subfigura (2.8a), con cuchillas paralelas al plano XY, estos serían círculos concéntricos que puestos en el plano cartesiano serían representados por la subfigura (2.8b), la subfigura (2.8b) y la figura (2.1) en realidad representarían las **órbitas** o **curvas solución** del **sistema dinámico** (2.5), solo que el primero está en el plano cartesiano y el otro en un **espacio de fases**.

Se define lo que es un *campo vectorial hamiltoniano*.

Definición 2.15. Se define un **campo vectorial hamiltoniano** (en el plano) como la forma o representación:

$$\chi_H = \frac{\partial H_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y},$$

con $H = H(x(t), y(t)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, H_x y H_y son sus derivadas parciales.

Los *sistemas dinámicos* con los que se parten para construir *ciclos límite* son *conservativos*, lo que significa que tienen una *representación vectorial hamiltoniana*.

Definición 2.16. Una **curva** (diferenciable) en \mathbb{R}^2 es una aplicación $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase \mathcal{C}^∞ (es decir, sus dos componentes son infinitas veces derivables) tal que a cada $t \in [a, b]$ le asigna el valor $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$. Una **curva diferenciable** en \mathbb{R}^2 es **cerrada** si $\gamma(a) = \gamma(b)$, es decir, si el origen y el extremo de la curva coinciden. Una **curva diferenciable** en \mathbb{R}^2 es **simple** si no tiene autointersecciones, esto es, si no se corta a si misma. Una **curva diferenciable** en \mathbb{R}^2 es una **curva de Jordan** si puede deformarse (sin romperse) hasta convertirla en una circunferencia (es decir, si es cerrada y simple).

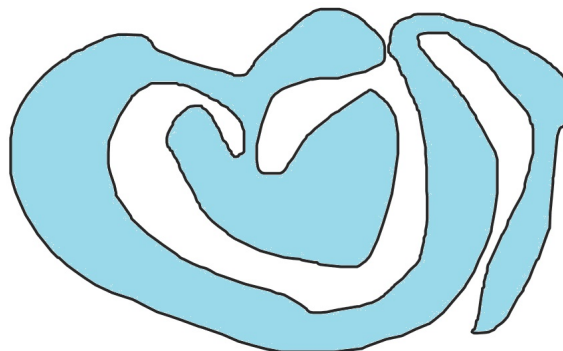


Figura 2.9. Un ejemplo de una *curva de Jordan*, la curva es cerrada, la parte interna se pinta de un color distinto para distinguirlo de la parte externa.

Definición 2.17. Se dice que una recta corta **transversalmente** a una **curva** en un punto cuando la recta no es tangente a la **curva** en dicho punto de corte

Con las definiciones (2.16) y (2.17) respectivamente, se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 2.3 (teorema de la curva de Jordan). *Toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.*

El teorema (2.3) se encuentra en ([Francisco1998], pp. 53 - 57) demostrado. El teorema de la curva de Jordan fue enunciado por Camille Jordan, matemático francés, a finales del siglo XIX en una serie de libros denominada *Cours d'Analyse*. El mismo Jordan publicó en dicha serie una demostración del resultado que más tarde resultó ser incorrecta. La primera demostración correcta del resultado apareció en 1905 y se debe a Oswald Veblen.

Más adelante, Brouwer propuso una generalización n -dimensional que fue probada por Alexander en 1992 y que se conoce en la actualidad como teorema de separación de Jordan-Brouwer y que se mencionará en la sección (2.2) *a posteriori*.

Todo *ciclo límite* es en realidad una *curva simple de Jordan diferenciable* por ramas⁵, todos los ejemplos que se han construido cumplen con ser órbitas cerradas y aisladas en el *espacio-fase*, esto es por ramas y separan al plano en dos conjuntos conexos, algunas de las propiedades que poseen todos los *ciclos límite* son las siguientes:

Proposición 2.2. *Las siguientes propiedades en los ciclos límite se cumplen:*

- *Cualquier órbita cerrada que cumpla con ser del sistema dinámico debe encerrar, por lo menos, un punto crítico. Si sólo encierra uno, este punto no puede ser del tipo nodo-silla,*
- *Sea D un conjunto cerrado que no contiene ningún punto crítico. Si una $x(t)$ solución del sistema dinámico permanece en D para todo $t \geq t_0$ entonces o es ella misma una solución periódica o tiende en espiral hacia una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. [El resultado es totalmente análogo para $t \leq t_0$ y $t \rightarrow -\infty$],*
- *Es topológicamente aislada en el conjunto de órbitas periódicas del campo vectorial \mathbb{X} ,*
- *La órbita cerrada es periódica.*

La propiedad (2.2) se encuentra en ([Salomon2015] & [Gerald2012], p. 14 & pp. 130 - 132) no demostrado en la primera y parcialmente demostrado en la segunda referencia, pero hay muchos ejemplos que hacen ver geoméricamente que esta proposición se cumple. Los **ciclos límite** son un caso particular de **conjuntos límites**, por lo que los **conjuntos límites** poseen propiedades generales que los caracteriza, se enuncia la siguiente proposición.

Proposición 2.3 (Caracterización de los conjuntos límite). *Sean $\lim \omega(p) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{\varphi(x, t) : t > s\}}$ y*

$\lim \alpha(p) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{\varphi(x, t) : t < s\}}$ los conjuntos ω y α -límite respectivamente. Las siguientes propiedades se cumplen:

- *$\lim \omega(p) \neq \emptyset$ y $\lim \alpha(p) \neq \emptyset$,*
- *$\lim \omega(p)$ y $\lim \alpha(p)$ son conjuntos cerrados,*
- *$\lim \omega(p)$ y $\lim \alpha(p)$ son φ -invariantes, esto es $\varphi(\mathbb{R} \times \lim \omega(p)) = \lim \omega(p)$ y $\varphi(\mathbb{R} \times \lim \alpha(p)) = \lim \alpha(p)$.*

La proposición (2.3) se encuentra en ([Gerald2012] & [Kathleen1996], pp. 143 - 146 & pp.337 - 340) demostrado. Si además, el **campo vectorial \mathbb{X}** que representa a nuestro **sistema dinámico** es **compacto**, entonces, además de las propiedades antes mencionadas, se cumplen estas siguientes más:

- *$\lim \omega(p)$ y $\lim \alpha(p)$ son conjuntos compactos.*
- *$\lim \omega(p)$ y $\lim \alpha(p)$ son conjuntos conexos.*

La proposición (2.3) caracteriza por completo a cualquier tipo de *conjunto límite*, es muy general, puesto que se tratan de propiedades topológicas. Centrándonos en los *ciclos límite*, existe manera de saber cuántos de ellos hay en un **sistema dinámico**.

Teorema 2.4 (teorema de Harnack). *El número de óvalos de una curva algebraica real de grado n es a lo sumo $1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ cuando n es par, y $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ cuando n es impar. Además, estos límites superiores se alcanzan para las curvas algebraicas convenientes de grado m llamadas **M-curvas**.*

El teorema (2.4) se encuentra en ([Jaume2010], p. 1405) no demostrado, pero da referencias donde se demuestra de varias maneras. El teorema (2.4) nos da una cota superior de *ciclos límite* que se pueden tener en un *sistema dinámico*, en general, a partir de la *función de Hamilton*. Con esto se acota la cantidad que deben de haber en un *sistema dinámico*. Se da una construcción de la generalización que se propuso en el *sistema dinámico* de la ecuación (2.14) de manera algebraica. Entonces se enuncian las siguientes definiciones, proposiciones y teoremas.

Definición 2.18. *Sea $F(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}[x(t), y(t)]$, es decir, $F(x(t), y(t))$ es un polinomio en las variables $x(t)$ y $y(t)$ (el anillo de los polinomios reales en $x(t)$ y $y(t)$). La curva algebraica $F(x(t), y(t)) = 0$ es una curva invariante algebraica del sistema polinomial de ecuaciones diferenciales (2.12) si para algún polinomio real $K(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}[x(t), y(t)]$, se tiene que:*

$$f_1(x(t), y(t))F_x(x(t), y(t)) + f_2(x(t), y(t))F_y(x(t), y(t)) = K(x(t), y(t))F(x(t), y(t)) \quad (2.20)$$

El polinomio $K(x(t), y(t))$ es llamado el cofactor de la curva invariante algebraica $F(x(t), y(t))$

Aquí y después, se denota por $F_x(x(t), y(t))$ y $F_y(x(t), y(t))$ las derivadas de $F(x(t), y(t))$ con respecto a $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Por simplicidad, en lo que sigue se hablará de la curva $F(x(t), y(t)) = 0$, diciendo solo la curva F . Si el *sistema dinámico* tiene grado n , se menciona que el *cofactor* de la *curva invariante algebraica* del sistema (2.12) tiene a lo más grado $n - 1$. Por supuesto, la *curva $F(x(t), y(t)) = 0$* está formada por las curvas del *sistema dinámico* (2.12). Esto justifica el nombre de *curva invariante algebraica*.

⁵Cada *curva algebraica* puede descomponerse de forma única en un número finito de *arcos monótonos suaves* (también llamados ramas) a veces conectados por algunos puntos a veces llamados "puntos notables", y posiblemente un número finito de puntos aislados llamados *acnodos*.

Definición 2.19. Se define el **grado** de una **curva invariante algebraica** $F(x(t), y(t)) = 0$ como el grado del polinomio $F(x(t), y(t))$

En esta tesis se ocupa el *sistema polinomial plano (diferenciable)* de la ecuación (2.12), donde $f_1(x(t), y(t)), f_2(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_n[x(t), y(t)]$, el conjunto de los polinomios reales de grado a lo más n , y $\max gr(f_1), gr(f_2) = n$. Ahora, se presenta una definición de *ciclo límite*, que es equivalente a las ya mencionadas.

Definición 2.20. Un **ciclo límite** de un **sistema polinomial de ecuaciones diferenciales** es una **órbita periódica aislada** en el conjunto de todas las **órbitas periódicas** del sistema. Un **ciclo límite algebraico de grado k** es un **óvalo de una curva invariante algebraica irreducible** $F(x(t), y(t)) = 0$ de grado k que es un **ciclo límite** del sistema.

Se presenta la definición de *polinomio regular en el infinito*, con la definición se va a utilizar un teorema posterior que explica la última construcción que se hizo del *sistema dinámico* de la ecuación (2.17).

Definición 2.21. Se dice que un polinomio $F(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}[x(t), y(t)]$ de grado $n + 1$ es **regular en el infinito**, si se cumple una de las tres condiciones equivalentes:

- Su parte homogénea principal \widehat{F} , un polinomio homogéneo de grado $n + 1$, es un producto de $n + 1$ pares de formas lineales diferentes,
- \widehat{F} tiene un **punto crítico aislado** (necesariamente de multiplicidad $\mu = n^2$) en el origen $(x, y) = (0, 0)$,
- La curva de nivel $\{\widehat{F} = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ no es **singular**⁶.

Esta condición significa que después de la *compactación proyectiva natural*⁷, en la definición (A.19.) del $(x(t), y(t))$ -plano \mathbb{R}^2 , todas las cosas “interesantes” suceden solo en la parte finita del plano compactado. En particular, para un *polinomio regular en el infinito*:

- Todas las *curvas de nivel* $\{\widehat{F} = t\}$ intersecan la línea infinita $\mathbb{R}P_\infty^1 = \mathbb{R}P^2$ transversalmente,
- Todos los *puntos críticos* $\{(x(t), y(t)) : dF(x(t), y(t)) = \mathbf{0}\}$ están aislados y su número es exactamente $\mu = n^2$ si se cuentan con multiplicidades,
- El rango de la *primera homología*⁸ de cualquier curva de nivel afín regular $\{F = t\}$ es $\mu = n^2$,
- El mapeo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ es un paquete topológico sobre el conjunto de los valores regulares de F , por lo tanto, las *integrales abelianas*⁹ se pueden ramificar solo sobre los valores críticos de F .

Definición 2.22. Si una **curva algebraica irreducible** $F(x(t), y(t)) = 0$ de grado k es **regular en el infinito** y contiene una **órbita cerrada** (un **ciclo límite**, o una **órbita periódica** rodeando un **centro**) de un sistema polinomial de ecuaciones diferenciales, entonces la **órbita cerrada** es llamada una **órbita cerrada algebraica regular en el infinito de grado m** .

La siguiente proposición demuestra el teorema de la construcción de *ciclos límite*, posterior a esta proposición. Si se tiene un polinomio F , se denotará su grado con k . Si no se dice nada, se denotará por F^k la parte homogénea de grado k para el polinomio F , es decir, su grado es una letra minúscula y el polinomio será una letra mayúscula. Se necesitará el siguiente resultado.

Proposición 2.4. Si F^k no tiene factores repetidos, entonces $(F_x, F_y) = 1$.

La proposición (2.4) se encuentra en ([Colin2004], p. 2460) demostrado, aquí F^k es la *curva invariante algebraica* de grado k .

Teorema 2.5. Sea $F = \prod_{i=1}^l F_i^{r_i}$ la *descomposición irreducible* de F entonces F es una curva algebraica invariante con un cofactor del sistema (2.12) si y sólo si F_i es una curva invariante algebraica con un cofactor K_i del sistema (2.12). Es más, se tiene $K = \sum_{i=1}^l n_i K_i$

El teorema (2.5) se encuentra en ([Colin2000]) demostrado. Para poder demostrar el teorema (2.6), es necesario mencionar algunas cosas a continuación.

Definición 2.23. Sea $N(x(t), y(t)) = \exp(G(x(t), y(t))/H(x(t), y(t)))$ con $G, H \in \mathbb{R}[x(t), y(t)]$ coprimos (o equivalentemente, $(G, H) = 1$). Se dice que N es un **factor exponencial** si

$$(f_1 N)_x + (f_2 N)_y = LN \quad (2.21)$$

para algún polinomio $N \in \mathbb{R}_{n-1}$, el cual es llamado un **cofactor** de N

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Una función real $\mathbb{H} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una *primera integral* del sistema (2.12), si este es constante en todas las curvas solución $(x(t), y(t))$ del sistema (2.12), es decir, $\mathbb{H}(x(t), y(t)) \equiv \text{constante}$ para todos los valores de t para los cuales la solución $(x(t), y(t))$ está definido en U . Si la *primera integral* es diferenciable, entonces $f_1(x(t), y(t))\mathbb{H}_x(x(t), y(t)) + f_2(x(t), y(t))\mathbb{H}_y(x(t), y(t)) = 0 \in U$
Si existe una función suave $\mathbb{R}(x(t), y(t))$ tal que $(f_1 \mathbb{R})_x + (f_2 \mathbb{R})_y = 0$, entonces \mathbb{R} se denomina *factor integrante* del sistema (2.12).

Definición 2.24. Si el sistema (2.12) tiene una primera integral o un factor integrante de la forma

$$F_1^{\lambda_1} \dots F_p^{\lambda_p} N_1^{\mu_1} \dots N_q^{\mu_q} \quad (2.22)$$

aquí F_i y N_j son la **curva algebraica invariante** y el **factor exponencial** del sistema (2.12) respectivamente y $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$, entonces el sistema (2.12) se llama *integrable de Darboux*. Este tipo de función se llama *función darbouxiana*.

⁶Una curva C tiene a lo sumo un número finito de puntos singulares. Si no tiene ninguno, se le puede llamar suave o *no singular*

⁷La definición de compactación proyectiva se encuentra en el apéndice (A)

⁸Se presenta el concepto de *homología* en el apéndice (A) en la definición (A.20).

⁹Se presenta el concepto de *integrales abelianas* en el apéndice (A) en la definición (A.21).

Se presenta el siguiente teorema, que da una idea de la construcción de los polinomios que se hacen como en el *sistema dinámico* de la ecuación (2.17), y saber, cómo se eligen dichos polinomios adecuados.

Teorema 2.6. *Suponga que el sistema polinomial de ecuaciones diferenciales de grado n teniendo una curva invariante algebraica $F(x(t), y(t)) = 0$ de grado k*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Y que satisfase las siguientes condiciones:

- (I). No hay puntos para los cuales $F_i(x(t), y(t))$ y sus primeras derivadas desaparezcan, y que,
- (II). Los términos de orden más alto de $F_i(x(t), y(t))$ no tienen factores repetidos.

Entonces se siguen las siguientes afirmaciones:

a) Si $(F_x(x(t), y(t)), F_y(x(t), y(t))) = 1$, entonces el sistema (2.23) tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -g(x(t), y(t))F_y(x(t), y(t)) + h_1(x(t), y(t))F(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t))F_x(x(t), y(t)) + h_2(x(t), y(t))F(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde $g(x(t), y(t))$, $h_1(x(t), y(t))$ y $h_2(x(t), y(t))$ son polinomios adecuados.

b) Si $F(x(t), y(t))$ satisfase la condición (II), entonces el sistema (2.23) tiene la forma normal (2.24) entonces $g(x(t), y(t))$, $h_1(x(t), y(t))$ y $h_2(x(t), y(t))$ son polinomios con grado $gr[h_1(x(t), y(t))], gr[h_2(x(t), y(t))] \leq n - k$, y $gr[g(x(t), y(t))] \leq n - k + 1$. Es más, si el término de orden más alto $F^k(x(t), y(t))$ de $F(x(t), y(t))$ no tiene los factores $x(t)$ e $y(t)$, entonces $gr[h_1(x(t), y(t))] \leq p - k$, $gr[h_2(x(t), y(t))] \leq q - k$ y $gr[g(x(t), y(t))] \leq \min\{p, q\} - k + 1$.

Demostración. *Demostración de (a)* Para demostrar este teorema, antes que nada, en todas las funciones uno se olvidará de la parte $(x(t), y(t))$, dejando únicamente el operador función F . Como no hay puntos en los que F , F_x y F_y desaparezcan simultáneamente por la condición (I), a partir de los **conjuntos nulificantes o ceros de Hilbert**¹⁰, se obtiene que existen polinomios A , B y C , de manera que

$$AF_x + BF_y + CF \equiv 1.\tag{2.25}$$

Como F satisfase la definición (2.18), se obtiene de la ecuación (2.23) y de la definición (2.18) que:

$$\begin{aligned}KAF_x + KBF_y + KC(f_1F_x + f_2F_y) &\equiv K \\ K &\equiv (AK + Cf_1)F_x + (KB + Cf_2)F_y.\end{aligned}$$

Sustituyendo K en (2.18), se obtiene que

$$\begin{aligned}(AK + Cf_1)F_x + (KB + Cf_2)F_y &\equiv f_1F_x + f_2F_y \\ [f_1 - (AK + Cf_1)F]F_x &\equiv -[f_2 - (KB + Cf_2)F]F_y.\end{aligned}$$

Como $(F_x, F_y) = 1$, existe un polinomio g tal que

$$f_1 - (AK + Cf_1)F \equiv -gF_y \quad f_2 - (KB + Cf_2)F \equiv gF_x$$

Esto prueba que el sistema (2.23) tiene la forma de la ecuación (2.24) con $h_1 \equiv AK + Cf_1$ y $h_2 \equiv BK + Cf_2$. De este modo

$$\begin{aligned}f_1 - h_1F &\equiv -gF_y & f_2 - h_2F &\equiv gF_x \\ \dot{x}(t) \equiv f_1 &\equiv -gF_y + h_1F & \dot{y}(t) \equiv f_2 &\equiv gF_x + h_2F\end{aligned}$$

Demostración de (b) Para probar la segunda parte de este teorema, acerca de los grados de $g(x(t), y(t))$, $h_1(x(t), y(t))$ y $h_2(x(t), y(t))$, se necesita la primera parte de esta demostración y la proposición (2.4), así se tiene que el **sistema dinámico** de la ecuación (2.23) tiene la forma normal del nuevo **sistema dinámico** de la ecuación (2.24). Supóngase sin pérdida de generalidad que $p \leq q$

Primero se considera el caso de que F^k no tiene factor $x(t)$ ni $y(t)$. Entonces se tiene que $(F^k, (F^k)_x) = 1$ y $(F^k, (F^k)_y) = 1$, donde $(F^k)_x$ denota la derivada de F^k con respecto a $x(t)$. En (2.24) hay que asumir que $gr(h_1) > p - k$, de lo contrario la afirmación se sigue. Entonces $gr(g) = gr(h_1) + 1$. Es más, de los términos de orden más alto de (2.24) se obtiene que

$$h_1^{gr(h_1)} F^k = g^{gr(h_1)+1} F_y^{k-1}$$

donde F_y^{k-1} denota la parte homogénea con grado $k - 1$ de F_y . Como $(F^k, F_y^{k-1}) = 1$, existe un polinomio R tal que

$$h_1^{gr(h_1)} = RF_y^{k-1} \quad g^{gr(h_1)+1} = RF^k.$$

En (2.24) se reemplaza h_1 por $h_1 - RF_y$ y g por $g - RF$, por lo que los grados de polinomios en consideración se reducen en uno. Se continua este proceso y se hace lo mismo para $\dot{y}(t)$ en la ecuación (2.23) hasta llegar a un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\equiv -gF_y + h_1F \equiv -(g - RF)F_y + (h_1 - RF_y)F \equiv -gF_y + RF_y + h_1F - RF_y \equiv -gF_y + h_1F \\ \dot{y}(t) &\equiv gF_x + h_2F \equiv (g - RF)F_x + h_2F \equiv gF_x - RFF_x + h_2F \equiv gF_x + (h_2 - RF_x)F \equiv gF_x + hF\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -gF_y + h_1F \\ \dot{y}(t) &= gF_x + hF.\end{aligned}\tag{2.26}$$

con $gr(h_1) \leq p - k$, $gr(g) = p - k + 1$, $gr(h_2) = q - k$ y $gr(h) = q - k + 1$. Como $F = 0$ es una **curva algebraica invariante** de la ecuación (2.26) y utilizando la definición (2.18) se obtiene que.

¹⁰En el apéndice (A) se da el concepto de Nullstellensatz de Hilbert en el teorema (A.1).

$$\begin{aligned} f_1 F_x + f_2 F_y &\equiv KF \Rightarrow (-g F_y + h_1 F) F_x + (g F_x + h F) F_y \equiv KF \\ F(h_1 F_x + h_2 F_y) + F_x F_y (h - g) &= KF \end{aligned}$$

Esto implica que existe un polinomio S tal que $(h - g) = SF$, porque F con F_x y F_y son coprimos.

Si $gr(h) \geq gr(g)$, entonces $gr(S) = gr(h) - k$. Así que se escribe $h_2 F + g F_x = (h_2 + S F_x) F + g F_x$ y si se denota $h_2 + S F_x$ otra vez por h_2 , entonces el sistema (2.26) tiene la forma de (2.24) donde h_1 , h_2 y g tienen los grados requeridos. En este caso se toma la forma del sistema (2.24) segunda ecuación y solo se reemplazan, bajando o subiendo el grado en 1, según a conveniencia.

Si $gr(h) < gr(g)$, entonces $gr(S) = gr(g) - k$. Así que se escribe $h_1 F - g F_y = (h_1 + S F_y) F - h F_y$ y si se denota $h_1 + S F_y$ otra vez por h_1 , entonces el sistema (2.26) tiene la forma de (2.24) donde h_1 , h_2 y h tienen los grados requeridos. Esto prueba la segunda parte de este inciso (b). En este caso se toma la forma del sistema (2.24) primera ecuación y solo se reemplazan, bajando o subiendo el grado en 1, según a conveniencia.

Ahora se prueba la primera parte del inciso 2. Se nota que aunque F^k no tiene factor repetido, F^k con F_x^{k-1} o F_y^{k-1} puede tener un factor común en x o y (por ejemplo, $F^3 = x(x^2 + y^2)$, $F^3 = y(x^2 + y^2)$ o $F^4 = xy(x^2 + y^2)$). Para evitar esta dificultad, se rota el sistema (2.23) ligeramente de modo que F^k no tenga factores en x e y . Luego, aplicando el método anterior al nuevo sistema, se obtiene que el nuevo sistema tiene una forma normal de (2.24) con los grados de h_1 , h_2 y g como los de la segunda parte de este inciso (b).

Se afirma que bajo el sistema de cambios afines (2.24) conserva su forma y el límite superior de los polinomios, es decir, $gr(h_1), gr(h_2) \leq n - k$ y $gr(g) = n - k + 1$. De hecho, utilizando el cambio afín de las variables $u = a_1 x + b_1 y + c_1$ y $v = a_2 x + b_2 y + c_2$ con $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, el sistema (2.24) se convierte en

$$\dot{u} = (a_1 h_1 + b_1 h_2) F - (a_1 b_2 - a_2 b_1) g F_v \quad \dot{v} = (a_2 h_1 + b_2 h_2) F + (a_1 b_2 - a_2 b_1) g F_u$$

Por lo tanto, la afirmación se sigue y la demostración se hace de manera análoga con esta transformación. Esto completa la prueba de este inciso (b), y en consecuencia se tiene la prueba del teorema en su totalidad. \square

Acercas del teorema (2.6), la condición (II) de la lista enumerada significa que $F(x(t), y(t))$ es **regular en el infinito**, de aquí la utilidad de la definición (2.21).

Considerando el teorema (2.6), se puede decir que dado un *sistema dinámico conservativo* que cuente con *curva algebraica invariante y cerrada*, este puede descomponerse en una parte *conservativa* multiplicada por una función polinomial adecuada más una parte donde se encuentre nuestra *curva cerrada* multiplicada en cada entrada de nuestro *sistema dinámico* por funciones polinomiales adecuadas, si se considera que $F(x(t), y(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}$, en la ecuación (2.24), finalmente nuestra generalización quedaría como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} - (\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}) h_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -g(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + (\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}) h_2(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Recuérdese que en nuestra generalización, nos importa obtener *ciclos límite* y no tanto la forma del *sistema dinámico* dado en nuestras ecuaciones (2.23) dadas por el teorema (2.6), así que se toma a $F(x(t), y(t)) = \prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i]$,

$$\begin{aligned} \text{nuestra } F_x \text{ y nuestra } F_y, \text{ quedarían respectivamente como: } F_x(x(t), y(t)) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] \text{ y} \\ F_y(x(t), y(t)) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right], \end{aligned}$$

por lo que sustituyéndolos en la ecuación (2.23) del teorema (2.6), se tendría que:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \theta_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -g(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \left[\sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i) \right) \right] + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \theta_2(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Gracias a la primera generalización que se hizo en la ecuación (2.4), se puede considerar al representante principal sin constante $\mathbb{H}(x(t), y(t))$ que es el generador de nuestros *ciclos límite* y sin todo el producto de *curvas algebraicas posibles*, por lo que nuestra generalización total quedaría como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} - \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \theta_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -f(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{C}_i] \right) \theta_2(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{2.29}$$

La idea principal para generar estos *ciclos límite*, es que a partir del producto generalizado de *curvas algebraicas cerradas*, tales que su intersección es disjunta y que encierren en su interior un *punto crítico* del tipo *centro*, se agarra solamente el

representante principal de todos ellos, es decir, la parte que no tiene constantes y solo la *función de Hamilton* que genere a todos los *ciclos límite* (aunque se puede tomar el producto general y sus derivadas no es del todo recomendable hacerlo, ya que la idea no es generalizar las ecuaciones de los *sistemas dinámicos*, sino de generalizar los *ciclos límite* y crearlos), con este se genera un *sistema dinámico* nuevo que tiene un *sistema hamiltoniano* más el producto de sus *ciclos límite* multiplicados por *sistemas polinómicos* adecuados que nos da como resultado un número deseado de *ciclos límite* por el usuario en cuestión. Esto va un paso adelante, en el sentido de tomar solo el producto los representantes principales de nuestra *función de Hamilton* que posean la cualidad de ser *curvas de Jordan* para generar nuestros *ciclos límite* y no se restringe al hecho de crear polinomios como lo propone Jaume Llibre a partir de la definición (2.18), donde él construye un *cofactor polinomial* para crearlos. En cambio, se proponen polinomios $f(x(t), y(t))$, $\theta_1(x(t), y(t))$ y $\theta_2(x(t), y(t))$ adecuados, de tal modo que se conserven los *puntos críticos* del *sistema dinámico conservativo* original del que se parte para crear el nuevo *sistema no conservativo* que cuente con *1-ciclos límite*.

Ejemplo 2.3. *Sea el sistema dinámico de la ecuación (2.15), tratado con anterioridad en el ejemplo anterior, pero ahora se quiere hacer énfasis en cómo construir de otra forma ciclos límite, como lo propone Jaume Llibre:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Por lo discutido con anterioridad, la **función de Hamilton** es $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} = \mathcal{C}$, esta es parte de una familia de curvas. Para esta función, se elige $\mathcal{C} = -\frac{1}{8}$. Por lo que se tiene:

$$\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} = -\frac{1}{8}\tag{2.31}$$

$\mathcal{C} = -\frac{1}{8}$ es un valor para el cuál existe una **órbita periódica cerrada** en el **espacio-fase** de la ecuación (2.31). Ahora se construye otro **sistema dinámico no conservativo**, que cuenta con la **curva algebraica cerrada** (2.31) y con los puntos críticos de (2.30) como sus **conjuntos límite**. Para ello se parte del hecho de que (2.31) son **órbitas** de tal sistema y por lo tanto deben de ser **tangentes al campo vectorial** asociado a nuestro sistema, esto es,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) + P(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t) + Q(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.32}$$

Si la ecuación (2.32) se le asocia un **campo vectorial**, entonces se debe de tener que

$$\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))_{(2.31)}}{\partial x(t)} \dot{x}(t)_{(2.32)} + \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))_{(2.31)}}{\partial y(t)} \dot{y}(t)_{(2.32)} = 0\tag{2.33}$$

Por el teorema (2.6) y la definición (2.18), uno debe de contar con una ecuación de la forma

$$K(x(t), y(t)) \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} - \frac{1}{8} \right) = 0\tag{2.34}$$

Si se propone explícitamente que el **cofactor** sea $K(x(t), y(t)) = 8y^2(t)$, entonces, haciendo los cálculos de forma explícita, se tendría que

$$\begin{aligned}(x^3(t) - x(t))(y(t) + P(x(t), y(t))) + y(t)(x(t) - x^3(t) + Q(x(t), y(t))) &= 0 \\ (x^3(t) - x(t))P(x(t), y(t)) + y(t)Q(x(t), y(t)) &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

Pero además la ecuación (2.32) debe ser igual a

$$\begin{aligned}P(x(t), y(t)) &= a_0 + a_1x(t) + a_2y(t) + a_3x(t)y(t) + a_4x^2(t) + a_5y^2(t) + a_6x^2(t)y(t) + a_7x(t)y^2(t) + a_8x^3(t) + a_9y^3(t), \\ Q(x(t), y(t)) &= b_0 + b_1x(t) + b_2y(t) + b_3x(t)y(t) + b_4x^2(t) + b_5y^2(t) + b_6x^2(t)y(t) + b_7x(t)y^2(t) + b_8x^3(t) + b_9y^3(t)\end{aligned}$$

Así que utilizando la definición (2.18), se tiene que

$$\begin{aligned}(x^3(t) - x(t))(y(t) + P(x(t), y(t))) + y(t)(x(t) - x^3(t) + Q(x(t), y(t))) &= \\ K(x(t), y(t)) \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} - \frac{1}{8} \right) &= \\ (x^3(t) - x(t))(a_0 + a_1x(t) + a_2y(t) + a_3x(t)y(t) + a_4x^2(t) + a_5y^2(t) + a_6x^2(t)y(t) + a_7x(t)y^2(t) + a_8x^3(t) + a_9y^3(t)) &+ \\ + y(t)(b_0 + b_1x(t) + b_2y(t) + b_3x(t)y(t) + b_4x^2(t) + b_5y^2(t) + b_6x^2(t)y(t) + b_7x(t)y^2(t) + b_8x^3(t) + b_9y^3(t)) &= \\ 8y^2(t) \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} - \frac{1}{8} \right) &= \\ a_0x^3(t) + a_1x^4(t) + a_2x^3(t)y(t) + a_3x^4(t)y(t) + a_4x^5(t) + a_5x^3(t)y^2(t) + a_6x^5(t)y(t) + a_7x^4(t)y^2(t) + a_8x^6(t) + a_9x^3(t)y^3(t) &- \\ - a_0x(t) - a_1x^2(t) - a_2x(t)y(t) - a_3x^2(t)y(t) - a_4x^3(t) - a_5x(t)y^2(t) - a_6x^3(t)y(t) - a_7x^2(t)y^2(t) - a_8x^4(t) + a_9x(t)y^3(t) &+ \\ + b_0y(t) + b_1x(t)y(t) + b_2y^2(t) + b_3x(t)y^2(t) + b_4x^2(t)y(t) + b_5y^3(t) + b_6x^2(t)y^2(t) + b_7x(t)y^3(t) + b_8y(t)x^3(t) + b_9y^4(t) &= \\ = 2x^4(t)y^2(t) - 4x^2(t)y^2(t) + 4y^4(t) + y^2(t) &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_0 - a_4)x^3(t) + (a_1 - a_8)x^4(t) + (b_8 + a_2 - a_6)x^3(t)y(t) + a_3x^4(t)y(t) + a_4x^5(t) + a_5x^3(t)y^2(t) + & \\ a_6x^5(t)y(t) + a_7x^4(t)y^2(t) + a_8x^6(t) + a_9x^3(t)y^3(t) - a_0x(t) - a_1x^2(t) + (b_1 - a_2)x(t)y(t) + & \\ (b_4 - a_3)x^2(t)y(t) + (b_3 - a_5)x(t)y^2(t) + (b_6 - a_7)x^2(t)y^2(t) + (b_7 - a_9)x(t)y^3(t) + b_0y(t) + & \\ b_2y^2(t) + b_5y^3(t) + b_9y^4(t) = 2x^4(t)y^2(t) - 4x^2(t)y^2(t) + 4y^4(t) + y^2(t) &\end{aligned}$$

Al asociar cada uno de los elementos del lado izquierdo con el lado derecho de la igualdad, se obtienen los siguientes resultados,

$$a_7 = 2, \quad b_6 - a_7 = -4, \quad b_2 = 1, \quad b_9 = 4$$

Finalmente, nos queda que $a_7 = 2$, $b_6 = -2$, $b_2 = 1$ y $b_9 = 4$, si estos valores son sustituidos en nuestros polinomios $P(x(t), y(t))$ y $Q(x(t), y(t))$, se obtiene lo siguiente:

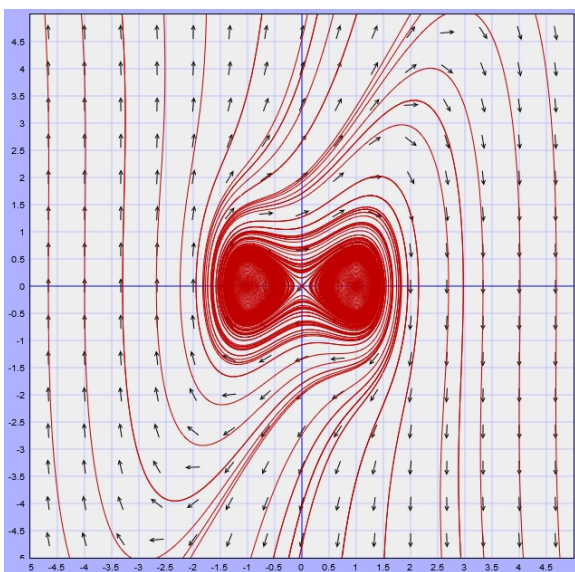
$$\begin{aligned} P(x(t), y(t)) &= 2x(t)y^2(t) \\ Q(x(t), y(t)) &= y(t) - 2x^2(t)y(t) + 4y^3(t) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Finalmente, se sustituyen los polinomios obtenidos de la ecuación (2.36) en el sistema dinámico propuesto de la ecuación (2.32), esto hace que se obtenga como resultado lo siguiente:

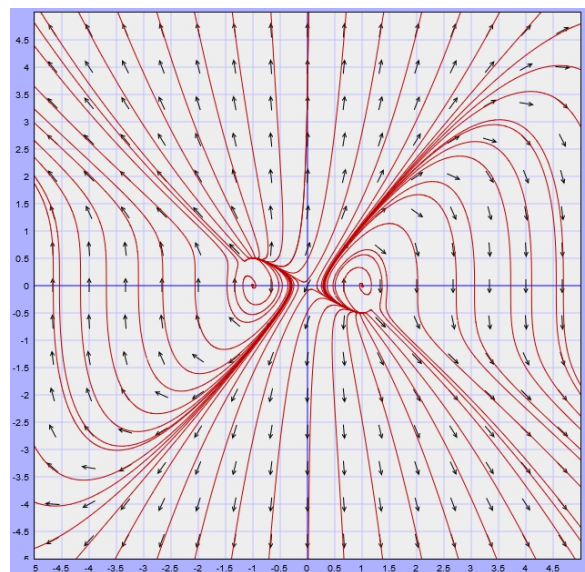
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) + 2x(t)y^2(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t) - 2x^2(t)y(t) + y(t) + 4y^3(t). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Así, el sistema dinámico de la ecuación (2.37) es la misma que el sistema dinámico de la ecuación (2.17), salvo por un factor constante en la parte conservativa del sistema. Resulta ser que esta constante es necesaria, ya que al cambiar los valores constantes, las dinámicas son muy distintas entre sí, es por eso que Jaume Llibre se refiere a estos factores como polinomios adecuados. De este modo, se grafican algunos planos-fase para distintos valores de la constante, para notar la necesidad de dicha constante que multiplica a la parte conservativa, esto es debido al teorema (2.6) en el que se demostró únicamente la parte algebraica que muestra dicha construcción de forma válida.

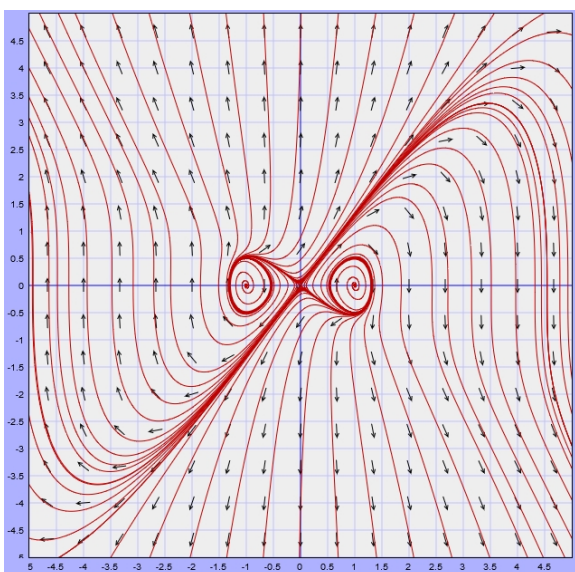
Los sistemas dinámicos de la figura (2.10), están representadas en las cuatro subfiguras, cada una de las subgráficas están dadas en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Y se trazan algunas órbitas de cada uno de los sistemas dinámicos que se proponen en el pie de subfigura, que son prototipos de la ecuación (2.37), por simple observación parece que en todas hay ciclos límite salvo en la subfigura (2.10b) y con dudas en la subfigura (2.10c), estas son todas soluciones generales de nuestros sistemas propuestos dependiendo de las condiciones iniciales que se tomen en cada sistema dinámico que se propuso.



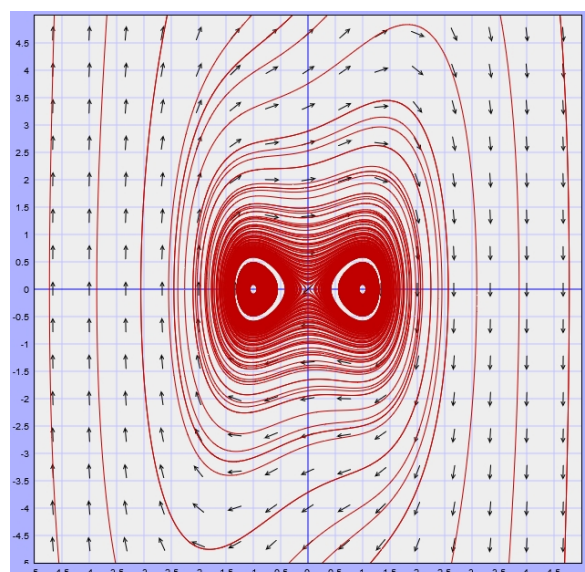
$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \dot{x}(t) &= 20y(t) + 2x(t)y^2(t) \\ \dot{y}(t) &= 20x(t) - 20x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) + y^3(t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \dot{x}(t) &= y(t) + 2x(t)y^2(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) + y^3(t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \dot{x}(t) &= 2y(t) + 2x(t)y^2(t) \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 2x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) + y^3(t) \end{aligned}$$

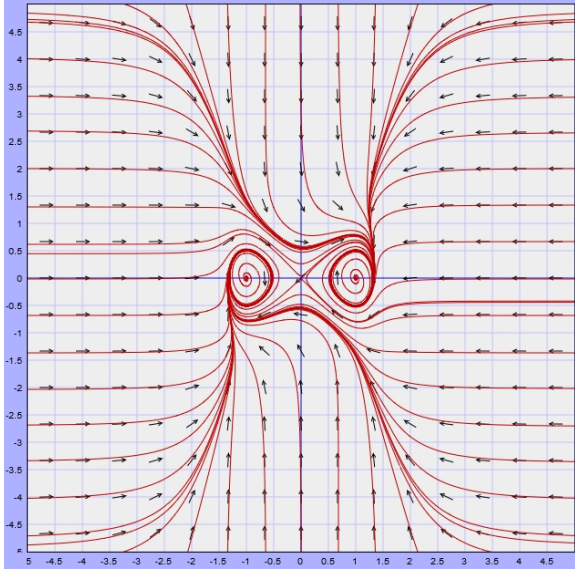


$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \dot{x}(t) &= 100y(t) + 2x(t)y^2(t) \\ \dot{y}(t) &= 100x(t) - 100x^3(t) + y(t) - 2x^2(t)y(t) + y^3(t) \end{aligned}$$

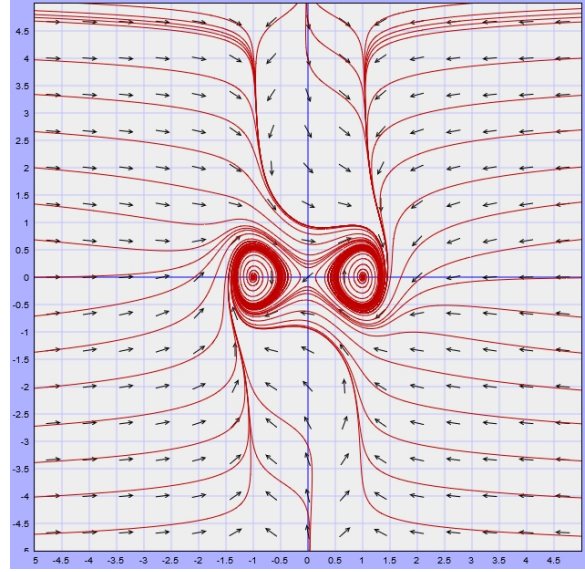
Figura 2.10. El mismo sistema dinámico, pero con la parte conservativa multiplicada por distintas constantes, nótese que la dinámica del plano-fase de cada uno de ellos es muy distinta entre sí, con solo cambiar en la multiplicación los valores numéricos en la parte hamiltoniana del sistema. Esto solo nos hace ver que el polinomio que multiplica a la parte conservativa debe de ser siempre uno adecuado que forme un ciclo límite.

Se ve que las ideas de Jaume Llibre aunque ciertas, se pueden hacer otras construcciones como la que ya se propusieron, así que haciéndolo con las ideas de los ciclos límite generalizados de las ecuaciones (2.29), se pueden crear los siguientes sistemas

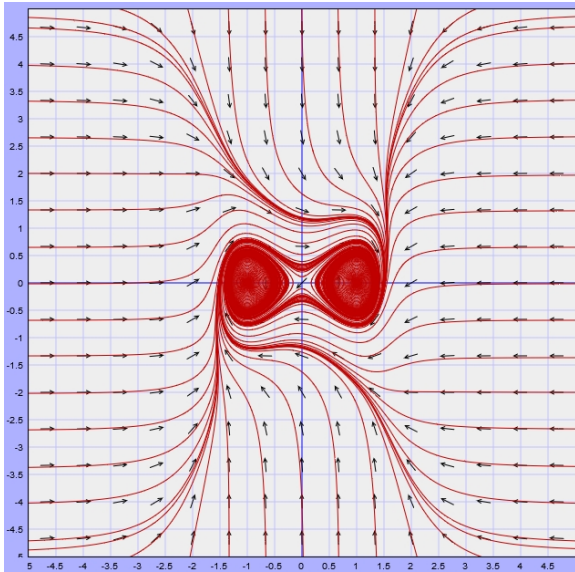
dinámicos con ciclos límite, al final se creará otro plano-fase para ver que no todos los polinomios que multipliquen a la curva cerrada algebraica son adecuados para generar ciclos límite, siempre se necesitan polinomios adecuados que los multipliquen, aunque nuestra técnica funciona, hay una interrogante sobre qué polinomios pueden ser adecuados al respecto y esto puede ser contestado, pues una de las hipótesis que deben de cumplirse es que posean los mismos puntos críticos del sistema dinámico conservativo del que se partió para construir un sistema no conservativo.



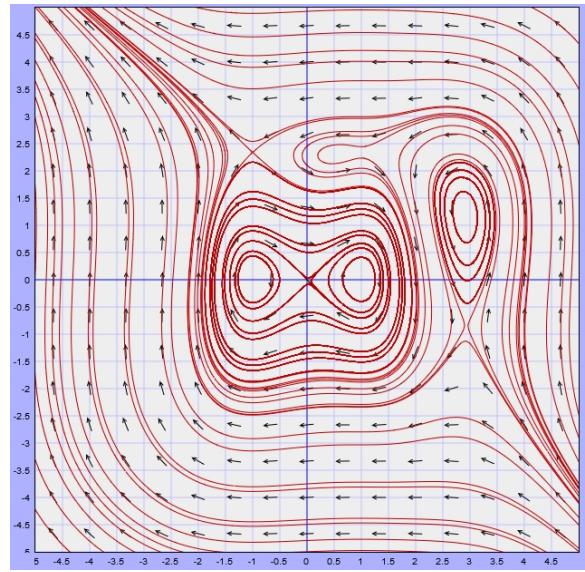
$$(a) \begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) (x(t) - x^5(t)) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) y^3(t) \end{aligned}$$



$$(b) \begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) (x(t) - x^3(t))(1 + y^2(t)) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x^3(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) y(t)(1 + x^2(t)) \end{aligned}$$



$$(c) \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5y(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) (x^3(t) - x^5(t)) \\ \dot{y}(t) &= 5x(t) - 5x^3(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) y^3(t) \end{aligned}$$



$$(d) \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5y(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) (1 - y^2(t)) \\ \dot{y}(t) &= 5x(t) - 5x^3(t) + \left(\frac{x^4(t)}{4} - \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^2(t)}{2} + \frac{1}{8} \right) (1 - x^2(t)) \end{aligned}$$

Figura 2.11. Cuatro ejemplos de sistemas dinámicos construidos con nuestras técnicas y la ecuación (2.29), nótese que en todas se forman ciclos límite, excepto en la subgráfica (2.11d), esto es debido a que a pesar de que se cumplen casi todas las hipótesis, existe una que no cumple y eso hace que no se forme un ciclo límite, esto depende de la elección del polinomio, por eso se dice que debe de ser adecuado para que se cumplan todas las hipótesis.

Los sistemas dinámicos de la figura (2.11), están representadas por las cuatro subfiguras, cada una de las subgráficas están dadas en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Y se trazan algunas órbitas de cada uno de los sistemas dinámicos que se proponen en el pie de subfigura, que son prototipos de la ecuación (2.29), por observación parece que en todas hay ciclos límite salvo en la subfigura (2.11d), estas son todas soluciones generales de nuestros sistemas propuestos dependiendo de las hipótesis que se tomen en cada sistema dinámico que se observa a continuación.

Las tres propuestas de sistemas dinámicos (2.11a), (2.11b) y (2.11c) tienen ciclos límite y la última propuesta de sistema dinámico (2.11d) no lo tiene. Los primeros tres poseen los mismos puntos críticos del sistema dinámico conservativo del que se partió en la ecuación (2.15), a pesar de que la ecuación (2.11d) cumple con casi todas las propiedades, la ecuación (2.29), existe una en específico que no la cumple. Esto da pautas a poder caracterizar la construcción de ciclos límite.

La construcción en las 2-formas del sistema dinámico de la ecuación (2.29) estaría dado por la siguiente fórmula matemática (solo finalizar que todos los sistemas dinámicos de las ecuaciones (2.11a), (2.11b) y (2.23) pueden ser vistos como 1-ciclos límite).

$$\mathbb{X} = f\delta\hat{H} + [(*\hat{H}) - \mathcal{C}]\Theta \quad (2.38)$$

En la ecuación (2.1) se tenía un sistema dinámico conservativo y se creó la ecuación (2.4) a partir de la ecuación (2.2) convirtiéndola en un sistema dinámico no conservativo, con la condición de que $\nabla \cdot \mathbb{X}_{(2.1)} = 0$ más otras condiciones, a partir

de esta idea, se construyeron *ciclos límite*.

Después se hizo otra generalización, a partir de los elementos que ya se tenían a la mano, la expresión final quedó como la ecuación (2.16); después se construyó a partir de la ecuación (2.16) dada, nuestros nuevos *sistemas dinámicos no conservativos* más generales tal como las ecuaciones (2.29), en el que se le hacían pequeñas modificaciones, ya que se incluían construcciones de *funciones polinómicas adecuadas* y que respetaran los *puntos críticos* del sistema *conservativo*, y en el que la naturaleza de los puntos sean espirales por el *teorema de Hartman-Grobman* (2.2).

Supóngase que nuestro *sistema dinámico* es un *sistema dinámico integrable*. A continuación se da una definición.

Definición 2.25. *Sea la ecuación diferencial:*

$$f_1(x(t), y(t))dx(t) + f_2(x(t), y(t))dy(t) = 0. \quad (2.39)$$

Donde las funciones $f_1(x(t), y(t))$, $f_2(x(t), y(t))$, $f_1(x(t), y(t))_y$ y $f_2(x(t), y(t))_x$ (los subíndices denotan derivadas parciales) son continuas en una región rectangular $R = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x(t) \leq y, c \leq y(t) \leq d\}$ entonces la expresión (2.39) es una **ecuación diferencial exacta** si y sólo si

$$f_1(x(t), y(t))_y = f_2(x(t), y(t))_x.$$

En cada punto de R .

Siempre se ha hecho el *producto escalar* entre el gradiente de la *función de Hamilton* y su respectivo *campo vectorial* (que es nuestro *sistema dinámico* en cuestión), esto nos sugiere que al hacerlo, si este nos da 0, es posible que existan *ciclos límite*, esto es en parte resuelto por la siguiente definición:

Definición 2.26. *Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Una función real $\mathbb{H} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una **primera integral del sistema dinámico** de las ecuaciones (2.12), si este es constante sobre todas las curvas solución $(x(t), y(t))$ del sistema (2.12), es decir, $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \mathcal{C}$ para todos los valores de t para los cuales la solución $(x(t), y(t))$ está definida en U . Si la **primera integral \mathbb{H}** es diferenciable, entonces $f_1\mathbb{H}_x + f_2\mathbb{H}_y \equiv 0$ en U .*

Esta definición se dio en la página 40 de esta tesis, aunque aquí se da como definición. Ahora se tiene la siguiente definición:

Definición 2.27. *Si existe una función suave $\theta(x(t), y(t))$ tal que $(f_1\theta)_x + (f_2\theta)_y \equiv 0$, entonces θ se llama un **factor integrante del sistema polinomial** (2.12).*

Se dan algunas maneras de sacar los *factores integrantes* de un sistema dado. si es que cumple con la definición (2.27). Si una *ecuación diferencial* no es *exacta*, podría llegar a serlo si se multiplica por una función especial $\theta(x(t), y(t))$ llamada *factor integrante*, tal que:

$$\theta(x(t), y(t))f_1(x(t), y(t))dx(t) + \theta(x(t), y(t))f_2(x(t), y(t))dy(t) = 0 \text{ sea exacta.}$$

Bajo ciertas condiciones el *factor integrante* siempre existe, pero sólo para algunas formas de *ecuaciones diferenciales* es posible encontrarlo:

- **Factor integrante en función de $x(t)$.** Si la *ecuación diferencial* posee un *factor integrante* respecto a $x(t)$ (es decir, $\theta(x(t))$), entonces se puede encontrar por medio de la fórmula siguiente:

$$\theta(x(t)) = \exp \left(\int \frac{f_1(x(t), y(t))_y - f_2(x(t), y(t))_x}{f_2(x(t), y(t))} dx(t) \right)$$

Para que $\theta(x(t))$ exista, es condición necesaria y suficiente que el miembro $\frac{f_1(x(t), y(t))_y - f_2(x(t), y(t))_x}{f_2(x(t), y(t))}$ tiene que ser función únicamente de $x(t)$. (Aclarando que $f_1(x(t), y(t))_y$ y $f_2(x(t), y(t))_x$ equivalen a las parciales de estas; $\frac{\partial f_1(x(t), y(t))}{\partial y(t)}$ y $\frac{\partial f_2(x(t), y(t))}{\partial x(t)}$ respectivamente).

- **Factor integrante en función de $y(t)$.** Si la *ecuación diferencial* posee un *factor integrante* respecto a $y(t)$ (es decir, $\theta(y(t))$), entonces se puede encontrar por medio de la fórmula siguiente:

$$\theta(y(t)) = \exp \left(\int \frac{f_2(x(t), y(t))_x - f_1(x(t), y(t))_y}{f_1(x(t), y(t))} dy(t) \right)$$

- **Factor integrante solo en función de $x(t) + y(t)$.** Si la *ecuación diferencial* posee un *factor integrante* respecto a $x(t) + y(t)$ (es decir, $\theta(x(t) + y(t))$), entonces se puede encontrar por medio de la fórmula siguiente:

$$\theta(x(t) + y(t)) = \exp \left(\int \frac{f_2(x(t), y(t))_x - f_1(x(t), y(t))_y}{f_1(x(t), y(t)) - f_2(x(t), y(t))} dz(t) \right) \text{ con } z(t) = x(t) + y(t)$$

- **Factor integrante solo en función de $x(t)y(t)$.** Si la *ecuación diferencial* posee un *factor integrante* respecto a $x(t) \cdot y(t)$ (es decir, $\theta(x(t)y(t))$), entonces se puede encontrar por medio de la fórmula siguiente:

$$\theta(x(t)y(t)) = \exp \left(\int \frac{f_1(x(t), y(t))_y - f_2(x(t), y(t))_x}{f_2(x(t), y(t)) * y(t) - f_1(x(t), y(t)) * x(t)} dz(t) \right) \text{ con } z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

Donde $f_1(x(t), y(t)) * x(t) = f_1(x(t), y(t)) \cdot x(t)$.

Entonces, se tiene una función de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.40}$$

Luego, como se sabe que la ecuación (2.40) es un *sistema dinámico integrable*, entonces, existe una función $\theta(x(t), y(t))$ tal que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \theta(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \\ \dot{y}(t) &= -\theta(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Tomando en cuenta que el sistema de la ecuación (2.41) es *conservativo*, se sabe que existe una *función de Hamilton*, se puede tomar la constante adecuada, de tal manera que se obtenga una *curva algebraica cerrada* del sistema y utilizarlo para formar un nuevo *sistema dinámico* que contenga como *conjuntos límite* a los *ciclos límite* formados por dicha función. A partir de las ecuaciones (2.12) y (2.14) y de las definiciones (2.26) y (2.27), se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \theta(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \theta(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -\theta(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \theta(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.42}$$

Para hacer una generalización, se puede tomar el sistema de las ecuaciones (2.29), además de las definiciones (2.26) y (2.27), para formar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \theta(x(t), y(t)) f(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \theta_1(x(t), y(t)) \theta(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= -\theta(x(t), y(t)) f(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \theta_2(x(t), y(t)) \theta(x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{2.43}$$

Tomando en cuenta el *factor integrante* $\theta(x(t), y(t))$, se tiene una descomposición en la ecuación (2.43) tal que hay un *sistema dinámico* que admite *ciclos límite* como todas las construcciones anteriores. Sea entonces.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \theta(x(t), y(t)) \left[f(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \theta_1(x(t), y(t)) \right] \\ \dot{y}(t) &= \theta(x(t), y(t)) \left[-f(x(t), y(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} + \left(\prod_{i=1}^n [\mathbb{H}(x(t), y(t)) - \mathcal{E}_i] \right) \theta_2(x(t), y(t)) \right].\end{aligned}\tag{2.44}$$

En donde $\theta_1(x(t), y(t))$ y $\theta_2(x(t), y(t))$ son *funciones polinómicas* adecuadas.

Si bien existen varias definiciones distintas, explicativamente hablando, un *sistema integrable* es un *sistema dinámico* con suficientes *cantidades conservadas*¹¹, o *primeras integrales*¹², de modo que su comportamiento tiene muchos menos grados de libertad que la dimensionalidad de su *espacio de fase*; es decir, su evolución está restringida a una subvariedad dentro de su espacio de fase. A menudo se hace referencia a tres características como caracterización de *sistemas integrables*:

- La existencia de un conjunto máximo de *cantidades conservadas* (la propiedad definitoria habitual de la integrabilidad completa),
- La existencia de *invariantes algebraicos*, que tienen una base en la geometría algebraica (una propiedad conocida a veces como integrabilidad algebraica),
- La determinación explícita de soluciones en una forma funcional explícita (no una propiedad intrínseca, sino algo que a menudo se denomina solvabilidad).

Los *sistemas integrables* pueden verse diferentes en carácter cualitativo de los *sistemas dinámicos* más genéricos, que son más típicamente *sistemas caóticos*¹³. Estos últimos generalmente no tienen **cantidades conservadas** y son asintóticamente intratables, ya que una perturbación arbitrariamente pequeña en las condiciones iniciales puede conducir a desviaciones arbitrariamente grandes en sus trayectorias durante un tiempo suficientemente largo.

La integrabilidad completa es, por tanto, una propiedad no genérica de los *sistemas dinámicos*. Sin embargo, muchos sistemas estudiados en física son completamente integrables, en particular, en el sentido hamiltoniano, siendo el ejemplo clave los osciladores armónicos multidimensionales. Otro ejemplo estándar es el movimiento planetario alrededor de un centro fijo (por ejemplo, el sol) o dos. Otros ejemplos elementales incluyen el movimiento de un cuerpo rígido alrededor de su centro de masa (la parte superior de Euler) y el movimiento de un cuerpo rígido axialmente simétrico alrededor de un punto en su eje de simetría (la parte superior de Lagrange).

La teoría moderna de los *sistemas integrables* fue revivida con el descubrimiento numérico de los solitones por Martin Kruskal y Norman Zabusky en 1965, que condujo al método de transformada de dispersión inversa en 1967. Se descubrió que hay sistemas completamente integrables en física que tienen un número infinito de grados de libertad, como algunos modelos de

¹¹El concepto de cantidad conservada se da en la definición (1.18).

¹²En el sentido de la integración de las *ecuaciones diferenciales exactas*

¹³Son *sistemas dinámicos no lineales* muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a corto plazo. Esto sucede aunque estos sistemas son deterministas, es decir; su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales.

ondas de aguas someras (ecuación de Korteweg-de Vries), el efecto Kerr en fibras ópticas, descrito por la ecuación no lineal de Schrödinger, y ciertos *sistemas integrables* de muchos cuerpos, como la *red de Toda*.

En el caso especial de los *sistemas hamiltonianos*, si hay suficientes *primeras integrales de conmutación de Poisson*¹⁴ independientes para que los parámetros de flujo puedan servir como un *sistema de coordenadas*¹⁵ en los *conjuntos de niveles invariantes* (las hojas de la *foliación lagrangiana*¹⁶), y si los flujos son completos y el conjunto de niveles de energía es compacto, esto implica el *teorema de Liouville-Arnold*¹⁷; es decir, la existencia de variables de ángulo de acción. Los *sistemas dinámicos generales* no tienen tales *cantidades conservadas*; en el caso de los *sistemas hamiltonianos autónomos*, la energía es generalmente la única, y en los conjuntos de niveles de energía, los flujos son típicamente caóticos.

Un ingrediente clave en la caracterización de *sistemas integrables* es el *teorema de Fröbenius*¹⁸, que establece que un sistema es Fröbenius integrable (es decir, es generado por una *distribución integrable*¹⁹.) si, localmente, tiene una *foliación por variedades integrales máximas*. Pero la integrabilidad, en el sentido de *sistemas dinámicos*, es una propiedad global, no local, ya que requiere que la *foliación sea regular*, con las *subvariedades de hojas incrustadas*. Los *sistemas integrables* no necesariamente tienen soluciones que puedan expresarse en forma cerrada o en términos de funciones especiales; en el sentido actual, la integrabilidad es una propiedad de la geometría o topología de las soluciones del sistema en el *espacio de fase*.

Se verá un ejemplo, que nos aclarará la visión acerca de lo que significa que un *sistema dinámico sea integrable*. En este sentido, nuestro concepto de *sistema dinámico integrable* es un poco distinto en el sentido de ser una *ecuación diferencial exacta* y en donde se puede encontrar un *factor integrante*, está relacionada con la idea de un *sistema dinámico integrable*. Pero los *sistemas dinámicos integrables* están más relacionados a la idea de las ecuaciones de Lagrange y de Hamilton y su generalización en la *mecánica analítica*²⁰ de la *geometría simpléctica*²¹.

Ejemplo 2.4. *Considérese el siguiente sistema dinámico*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t)y^4(t) \\ \dot{y}(t) &= x^2(t)y(t). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Se pone la figura (2.12), para ver el **espacio-fase del sistema dinámico** de la ecuación (2.45). El **sistema dinámico** en la figura (2.12), está dado en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas **órbitas** para ver la **dinámica del sistema**, nótese que las **curvas algebraicas solución** en el espacio-fase a partir de cualquier punto que no esté sobre $x(t) = y(t) = 0$, siempre se cortan en los ejes X y Y respectivamente, así que las **curvas** siempre quedan contenidas en un cuadrante del plano cartesiano. Lo que significa que la curva tiene problemas de continuidad en los ejes del plano.

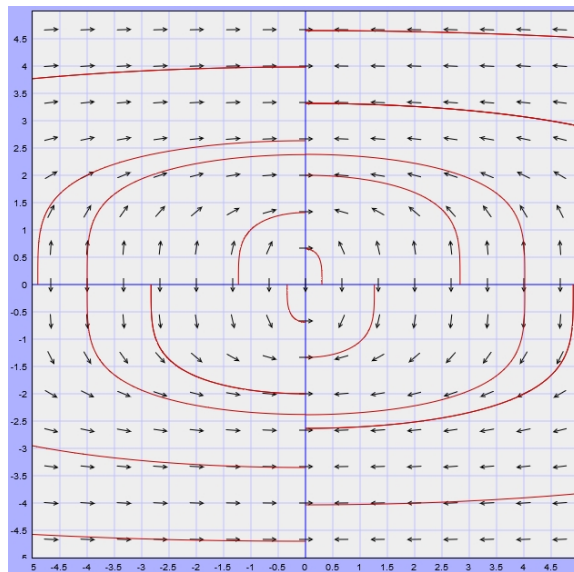


Figura 2.12. El espacio-fase del **sistema dinámico** de la ecuación (2.45), nótese la singularidad de que las **curvas algebraicas** se cortan en $x(t) = 0$ y en $y(t) = 0$, si empieza en cualquier punto distinto de $x(t) = y(t) = 0$.

Para este caso, uno se fija en el **sistema dinámico** dado desde un punto de vista matemático, se empieza a analizarlo.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)y(t)[-y^3(t)] \\ \dot{y}(t) &= -x(t)y(t)[-x(t)] \end{aligned} \tag{2.46}$$

¹⁴La *conmutación de Poisson* tiene que ver con los *corchetes de Poisson*, y estas propiedades fueron dadas en (1.3).
¹⁵Conjunto de valores que permiten definir unívocamente la posición de cualquier punto de un espacio geométrico respecto de un punto denominado origen. El conjunto de ejes, puntos o planos que confluyen en el origen y a partir de los cuales se calculan las coordenadas de cualquier punto constituyen lo que se denomina sistema de referencia.
¹⁶En matemáticas, una *foliación* es una partición en *subvariedades diferenciables* de otra *variedad diferenciable* (de tal modo que todas las subvariedades que conforman la *foliación* son de la misma dimensión m , siendo m menor que la dimensión de la variedad original).
 Intuitivamente una *foliación* es como un conjunto de cortes o lonchas finas de la variedad original en piezas de la misma dimensión. Por ejemplo se puede foliar espacio euclídeo tridimensional considerando que se trata de un apilamiento de infinitos planos euclídeos uno encima de otro.
¹⁷En teoría de sistemas dinámicos, el teorema de Liouville-Arnold afirma que si en un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se conocen también n integrales de movimiento que son independientes y en involución, entonces existe una transformación canónica a coordenadas de acción-ángulo en la que el hamiltoniano transformado depende solo de las coordenadas de acción mientras que las coordenadas de ángulo evolucionan linealmente en el tiempo. Así, las ecuaciones del movimiento para el sistema pueden resolverse por cuadraturas si se conoce explícitamente la transformación canónica. El teorema está demostrado en [Vladimir2007].
¹⁸el teorema de Fröbenius está en (2.30), sección (2.2).
¹⁹En la sección (2.2), se da el concepto de *distribución* en la definición (2.28)
²⁰La *mecánica analítica* es una formulación abstracta y general de la mecánica, que permite el uso en igualdad de condiciones de sistemas inerciales o no inerciales sin que, a diferencia de las leyes de Newton, la forma básica de las ecuaciones de movimiento cambie. Algunos autores identifican la mecánica analítica con la teórica. Otros consideran que el rasgo determinante es considerar la exposición y planteamiento de la misma en términos de coordenadas generalizadas.
²¹La geometría simpléctica es aquella parte de las matemáticas referida al estudio de las variedades simplécticas. Estas variedades se presentan naturalmente en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica, que proporciona una de las motivaciones principales para el tema.

Si se hace $\mathbb{X}_{(2.45)} = (-x(t)y^4(t), x^2(t)y(t))$ y si se calcula la divergencia, se obtiene que $\nabla \cdot \mathbb{X}_{(2.42)} = \frac{\partial}{\partial x(t)}(-x(t)y^4(t)) + \frac{\partial}{\partial y(t)}(x^2(t)y(t)) = -y^4(t) + x^2(t) \neq 0$. Este sistema no es **conservativo**, sin embargo, hay una forma de resolverlo, y para esto se usará lo siguiente. Si $\dot{y}(t)$ se divide por $\dot{x}(t)$ en la ecuación (2.45), se obtiene que

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{x^2(t)y(t)}{x(t)y^4(t)} \Rightarrow (-x(t)y^4(t))\dot{y}(t) = (x^2(t)y(t))\dot{x}(t)$$

$$(x^2(t)y(t))\dot{x}(t) + (x(t)y^4(t))\dot{y}(t) = 0 \Rightarrow (x^2(t)y(t))dx(t) + (x(t)y^4(t))dy(t) = 0$$

Se calculan las derivadas parciales cruzadas de cada entrada, y se ponen los términos que se utilizarán para calcular el **factor integrante**, por lo tanto, sean

$$f_1(x(t), y(t)) = -x(t)y^4(t), f_2(x(t), y(t)) = x^2(t)y(t), f_1(x(t), y(t))_y = -4x(t)y^3(t) \text{ y } f_2(x(t), y(t))_x = 2x(t)y(t)$$

Uno puede darse cuenta de que el **factor integrante** es una función que no depende únicamente de $x(t)$ o de $y(t)$, por lo que no nos queda la opción de encontrar una $\theta(x(t))$ o una $\theta(y(t))$, por la forma de nuestro **sistema dinámico** de las ecuaciones (2.45) se usará la forma $\theta(x(t)y(t))$, ya que hay una multiplicación de las variables $x(t)$ y $y(t)$, se hace lo siguiente para encontrar un **factor integrante** de la forma $x^m(t)y^n(t)$.

$$\begin{aligned} (x^2(t)y(t))dx(t) + (x(t)y^4(t))dy(t) &= 0 \\ f_2(x(t), y(t))dx(t) + f_1(x(t), y(t))dy(t) &= 0 \\ f_2(x(t), y(t))_y - f_1(x(t), y(t))_x &= m \frac{f_1(x(t), y(t))}{x} - n \frac{f_2(x(t), y(t))}{y} \\ x^2(t) + y^4(t) &= m \frac{-x(t)y^4(t)}{x(t)} - n \frac{x^2(t)y(t)}{y(t)} \\ x^2(t) + y^4(t) &= -my^4(t) - nx^2(t) \\ x^2(t) + y^4(t) &= -nx^2(t) - my^4(t) \end{aligned}$$

De lo anterior, se obtiene que $-n = 1$ y $-m = 1$, o $n = -1$ y $m = -1$, por lo que nuestro **factor integrante** es igual a $x^{-1}(t)y^{-1}(t)$. Multiplicando $(x^2(t)y(t))dx(t) + (x(t)y^4(t))dy(t) = 0$ por el **factor integrante** encontrado $\theta(x(t)y(t)) = \frac{1}{x(t)y(t)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \theta(x(t)y(t)) (x^2(t)y(t))dx(t) + (x(t)y^4(t))dy(t) &= \\ \theta(x(t)y(t))x^2(t)y(t)dx(t) + \mu(x(t)y(t))x(t)y^4(t)dy(t) &= \\ \frac{1}{x(t)y(t)}(x^2(t)y(t))dx(t) + \frac{1}{x(t)y(t)}(x(t)y^4(t))dy(t) &= \\ x(t)dx(t) + y^3(t)dy(t) &= 0. \end{aligned}$$

Nótese ahora que se tiene el nuevo **sistema dinámico** dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y^3(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Ahora el nuevo **sistema dinámico** de la ecuación (2.47) es un **sistema conservativo**, así que se puede resolver. Para esto se utiliza el hecho de que

$$\begin{aligned} x(t)dx(t) + y^3(t)dy(t) &= 0 \\ x(t)dx(t) &= -y^3(t)dy(t) \\ \frac{x^2(t)}{2} &= -\frac{y^4(t)}{4} + \mathcal{C} \\ \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} &= \mathcal{C} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la **curva algebraica** que nos recupera el **sistema dinámico** de la ecuación (2.45) es $\mathbb{H}(x(t), y(t)) = \frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} = \mathcal{C}$ el cual se considera su **función de Hamilton**, nótese el **sistema dinámico** de la ecuación (2.45) y (2.46), con este ejemplo uno se puede dar cuenta de las construcciones de **ciclos límite** a partir de **sistemas dinámicos integrables**. Se puede construir por la discusión de la última generalización de **ciclos límite** con las ecuaciones (2.41) y (2.43) lo siguiente

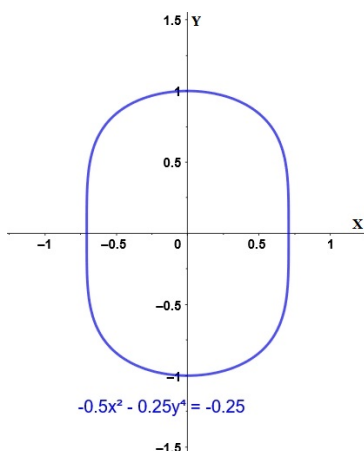


Figura 2.13. Curva algebraica tomada de la función de Hamilton de la ecuación (2.47), se elige una $\mathcal{C} = \frac{1}{4}$ para obtener una órbita cerrada en el espacio-fase.

En la figura (2.13) se elige una \mathcal{C} adecuada, para tener un **ciclo límite** y utilizarla para la construcción de los nuevos **sistemas dinámicos** a partir de las ecuaciones (2.46) y (2.47).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t)y^4(t) = x(t)y(t)[-y^3(t)] \\ \dot{y}(t) &= x^2(t)y(t) = -x(t)y(t)[-x(t)]\end{aligned}$$

Con las ecuaciones (2.14), (2.42) y (2.44) se tiene un **sistema dinámico**, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t)y^4(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)x^2(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= x^2(t)y(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)x(t)y^4(t)\end{aligned}\tag{2.48}$$

Se pone la figura (2.13), para ver el **espacio-fase del sistema dinámico** de la ecuación (2.48). El **sistema dinámico** en la figura (2.45), está dado en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas **órbitas** para ver la **dinámica del sistema**, nótese que las **curvas algebraicas** a partir de cualquier punto que no esté sobre $x(t) = y(t) = 0$, siempre se cortan en los ejes X y Y respectivamente, así que las **curvas** siempre quedan contenidos en un cuadrante del plano cartesiano. Pero también nótese que existe una especie de **ciclo límite** que está dado por la figura (2.13). Se puede decir que más que un **ciclo límite** este es un **conjunto límite** al que se le nombrará como una **unión de conjunto conexos finitos**, un **pseudociclo límite** o **semiciclo límite**, se pensará cual sería un nombre adecuado para este tipo de **órbitas especiales** en un **sistema dinámico integrable**.

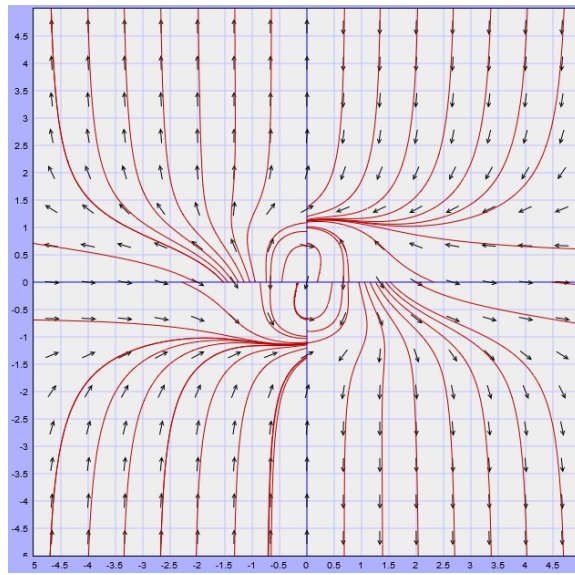


Figura 2.14. El **espacio-fase del sistema dinámico** de la ecuación (2.48), nótese que existe un **conjunto límite** que sería como una especie **semiciclo límite**, pero sería más bien una **unión de conjuntos límites conexos finitos**.

Entonces el **producto punto** entre el **gradiente del conjunto límite** o **semiciclo límite** y el **campo vectorial** (2.48) nos da como resultado:

$$\begin{aligned}\nabla H(x(t), y(t)) \cdot \mathbb{X}_{(2.26)} &= (x(t), y^3(t)) \cdot \left(-x(t)y^4(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)x^2(t)y(t),\right. \\ &\quad \left.x^2(t)y(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)x(t)y^4(t)\right) \\ &= x(t) \left(-x(t)y^4(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)x^2(t)y(t)\right) + \\ &\quad y^3(t) \left(x^2(t)y(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right)x(t)y^4(t)\right) \\ &= -x^2(t)y^4(t) - \frac{x^5(t)y(t)}{2} - \frac{x^3(t)y^5(t)}{4} + \frac{x^3(t)y(t)}{4} + \\ &\quad x^2(t)y^4(t) - \frac{x^3(t)y^7(t)}{2} - \frac{x(t)y^4(t)}{4} + \frac{x(t)y^7(t)}{4} \\ &= (-x^3(t)y(t) - x(t)y^7(t)) \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= (-x^3(t)y(t) - x(t)y^7(t))(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Se nota que cumple con ser 0, por los cálculos hechos y el gráfico (2.18), se nota que el **punto crítico** $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ es un punto del tipo “**espiral**”, pero por las flechas de la figura (2.14) no está claro la **dinámica de las órbitas**, y también un **conjunto límite** o **semiciclo límite** que no se nota mucho en la figura (2.14). Además el **semiciclo límite** es **unión de conjuntos límites conexos finitos**, por la dirección de las flechas no se sabe si se trata de un **conjunto ω -límite** o un **conjunto α -límite**. Si se toma en cuenta la ecuación (2.47) sin el **factor integrante**, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -y^3(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t)\end{aligned}\tag{2.49}$$

Se pone la figura (2.15), para ver el **espacio-fase del sistema dinámico** de la ecuación (2.49). El **sistema dinámico**, está dado en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$ que es un cuadrado, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas **órbitas** para ver la **dinámica del sistema**, nótese que se compone de **curvas algebraicas cerradas** con el **factor integrante**.

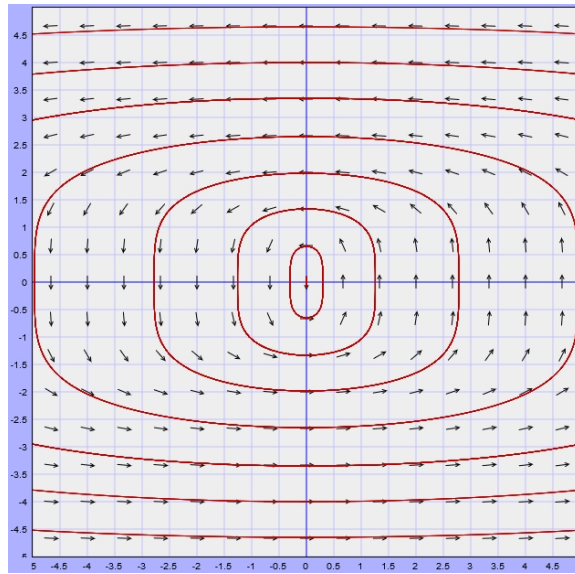


Figura 2.15. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.49), nótese que son órbitas cerradas aisladas en el espacio-fase.

Se dibuja el sistema dinámico de la ecuación (2.49), pero multiplicando ambas entradas por el factor integrante encontrado, entonces se tiene el nuevo sistema dinámico utilizando la ecuación (2.14),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y^3(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4} \right) x(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - \left(\frac{x^2(t)}{2} + \frac{y^4(t)}{4} - \frac{1}{4} \right) y^3(t) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Se pone la figura (2.16), para ver el espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.50). El sistema dinámico, está dado en los intervalos $x(t), y(t) \in [-5, 5]$, con un total de 15 flechas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Se grafican algunas órbitas para ver la dinámica del sistema, nótese que este cuenta efectivamente con un ciclo límite que no se notaba en las ecuaciones (2.48), y es un conjunto ω -límite.

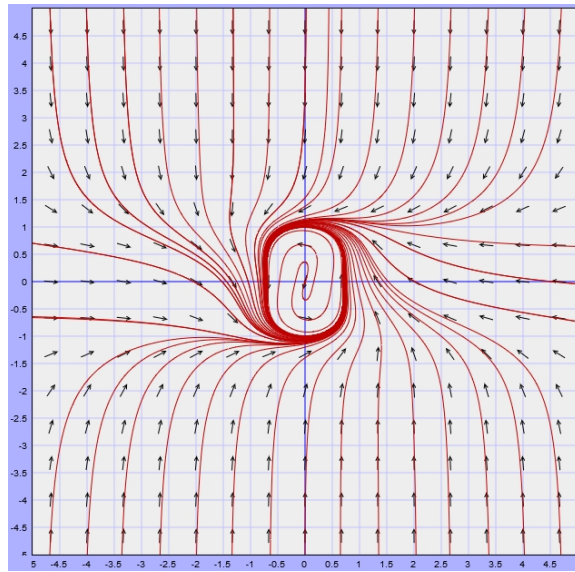


Figura 2.16. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación (2.47).

Las últimas construcciones de los ciclos límite de sistemas dinámicos autónomos reales bidimensionales, suficientemente continuos y diferenciables, polinomiales, y lineales o no lineales e integrables quedarían construidas en las 2-formas como

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \theta \{ f \delta \hat{H} + [(*\hat{H}) - \mathcal{C}] \Theta \} \\ \mathbb{X} &= \theta \{ \delta \hat{H} + [(*\hat{H}) - \mathcal{C}] \Theta \} \\ \mathbb{X} &= \theta \{ \delta \hat{H} + [(*\hat{H}) - \mathcal{C}] (*\delta \hat{H}) \} \\ \mathbb{X} &= \theta \{ f \delta \hat{H} + [(*\hat{H}) - \mathcal{C}] (*\delta \hat{H}) \} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Recordar que la unión de conjuntos límites conexos finitos, podrían llamarse 1-semiciclos límite o 1-conjuntos límites conexos finitos o 1-pseudociclos límite.

Pueden existir también 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite, o ambas cosas, dependiendo del corte del factor integrante con las curvas solución en el plano-fase.

Observación 2.1. Hasta el momento se han estudiado ciclos límite o semiciclos límite en el espacio-fase bidimensional, en estas curvas algebraicas cerradas que se construyen a partir de sistemas dinámicos reales autónomos bidimensionales, suficientemente continuos y diferenciables, polinomiales, lineales o no lineales, conservativos o integrables, cuentan con propiedades únicas del resto de las curvas solución, además pueden tener aplicaciones en la física, química, biología, etcétera; así como en las matemáticas mismas. Los ciclos límite han sido

“unidimensionales” y están dados en \mathbb{R}^2 . Es decir, todos los ejemplos en los libros son funciones generales de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde el punto final y el inicial del conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ son iguales, es decir, es una **curva simple de Jordan**.

Estas ideas funcionan bien en el **plano bidimensional**, el problema es en más dimensiones, **distribuciones reales n-dimensionales, suficientemente continuos y diferenciables, polinomiales, autónomos, lineales o no lineales, conservativos o integrables**, con $n \geq 2$, cuando se grafican curvas en un sistema de ecuaciones polinomiales tridimensionales, hay curvas como en el **atractor de Lorenz** o el **atractor de Rössler** que se acercan en este caso al **punto crítico**, pero en las **3-formas**, estos podrían tratarse de **unión de superficies conexas** o cosas distintas.

La segunda aclaración, es que una vez que se terminó de ver los *ciclos límite* en estos estudios, lo que hace falta es generalizarlo, por lo que, para lograr dicho objetivo se tienen que usar otro tipo de teorías matemáticas y otro contexto, para dar la idea en más dimensiones y en el espacio de las *p-formas*, así como estar abiertos a generalizar los conceptos de lo que se tiene como *r-ciclos límite*. Entonces, nuestra misión será construir y generalizar los **2-ciclos límite** a partir de las construcciones ya hechas en esta sección (2.1).

Antes de seguir con nuestros estudios de los *2-ciclos límite*, se ponen dos tablas de todas nuestras construcciones y generalizaciones hechas hasta el momento, para construirlo al caso tridimensional y n-dimensional (2.2). La primera tabla (2.1) muestra las construcciones hechas en la sección (2.1).

Fórmula	Nombre	Descripción
Ecuación (2.4)	1-ciclo límite , primera forma general	Se crean a partir de sistemas dinámicos conservativos .
Ecuación (2.14)	1-ciclo límite , segunda forma general	Se crean a partir de sistemas dinámicos conservativos .
Ecuación (2.29)	1-ciclo límite , tercera forma general	Se crean a partir de sistemas dinámicos conservativos .
Ecuación (2.44)	1-ciclo límite , cuarta forma general; o bien, 1-semiciclo límite	Se crean a partir de sistemas dinámicos integrables .

Tabla 2.1. Tabla que muestra todas las construcciones de **1-ciclos límite** o **1-semiciclos límite** a partir de **sistemas dinámicos conservativos** o **integrables**. Se pueden derivar otras construcciones a partir de las ecuaciones (2.4), (2.14), (2.29) y (2.44).

Se pone la última tabla (2.2) que tiene que ver con la generalización en las **formas diferenciales** de los *1-ciclos límite*, de las ecuaciones (2.4), (2.14), (2.29) y (2.44) para tener todas la fórmulas posibles en una tabla.

Fórmula	Nombre	Descripción
$\mathbb{X} = \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i](*\delta\hat{H})$	1-ciclos límite , primera forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación (2.4).
$\mathbb{X} = f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i](*\delta\hat{H})$	1-ciclos límite , segunda forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ y f es un polinomio adecuado.
$\mathbb{X} = \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i]\Theta$	1-ciclos límite , tercera forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación (2.14). Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una <i>1-forma</i> polinomial adecuada.
$\mathbb{X} = f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i]\Theta$	1-ciclos límite , cuarta forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$. Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una <i>1-forma</i> polinomial y f es un polinomio adecuados.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i](*\delta\hat{H}) \right\}$	1-ciclos límite , quinta forma general; o 1-semiciclos límite .	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación (2.29) y θ es el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i](*\delta\hat{H}) \right\}$	1-ciclos límite , sexta forma general; o 1-semiciclos límite .	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$, f es un polinomio adecuado y θ es el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i]\Theta \right\}$	1-ciclos límite , séptima forma general; o 1-semiciclos límite .	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$. Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una <i>1-forma</i> polinomial adecuada y θ es el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(*\hat{H}) - \mathcal{C}_i]\Theta \right\}$	1-ciclos límite , octava forma general; o 1-semiciclos límite .	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$. Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una <i>1-forma</i> polinomial adecuada, f es un polinomio adecuado y θ es el <i>factor integrante</i> polinomial.

Tabla 2.2. Tabla que muestra todas las generalizaciones de **1-ciclos límite** o **1-semiciclos límite** a partir de **sistemas dinámicos conservativos** o **integrables**.

2.2. Caso tridimensional. Ejemplos

La generalización del concepto de *ciclo límite* a espacios de dimensión mayor a dos para da lugar al concepto de *r-ciclo límite* con las ideas de los *1-ciclos límite*, sea $(\mathbb{R}^n$, “con $n > 2$ un número natural” y en los espacios de las *p-formas*). Primero, a qué se refiere uno con *cantidades conservadas*, en otras dimensiones y espacios, y generalizar las *distribuciones reales n-vectoriales* con estas ideas. Es conveniente que el método de analizar la existencia de los *1-ciclos límite* de un sistema dinámico sobre la base del *comportamiento asintótico* de sus *órbitas* puede ser sustituido por el método de analizar las características geométricas del *campo vectorial* asociado al sistema dinámico así como de sus *1-ciclos límite*. Esto nos permite usar un conjunto más amplio de objetos matemáticos que representan objetos geométricos que contienen como un caso particular a los *campos vectoriales*, con los que se definen a los *sistemas dinámicos* que se han venido estudiando, y así

alcanzar las generalizaciones que se están anunciando. Hay que hacer una revisión de algunos conceptos clásicos y recientes de las estructuras matemáticas y geométricas que se pueden definir sobre *variedades diferenciables* y utilizar las *p-formas*, propiedades topológicas y algebraicas. Por tanto, se pone una definición.

Definición 2.28 (Distribución). *Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable de dimensión n , y sea m un entero tal que $1 \leq m < n$. Entonces:*

- Una **distribución** D de dimensión m en \mathcal{M} , consiste en una elección de un subespacio n -dimensional D_p de $T_p\mathcal{M}$, para cada $p \in \mathcal{M}$. Se dice que D es diferenciable en torno a p , si existe U entorno abierto de p en \mathcal{M} , y campos V_1, \dots, V_m en U que generan D en cada punto de U , es decir

$$D_x = \text{gen}\{V_1(\mathbf{x}), \dots, V_m(\mathbf{x})\} \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

- La **distribución** se dice **diferenciable**, si es **diferenciable** en torno a cada punto de \mathcal{M} . En adelante solo se considerarán **distribuciones diferenciables**. Una distribución D en \mathcal{M} , induce de manera obvia una **distribución** sobre cada abierto U de M , que por abuso se denota por el mismo nombre D .
- Un **campo** V en (un abierto de) \mathcal{M} se dice **pertenece a D** , si $V(p) \in D_p$ para todo p .
- La **distribución** D se dice **involutiva** si $[V, W] \in D$, cada vez que $V, W \in D$.
- Sea \mathcal{N} **variedad conexa**. Una **inmersión** $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ se llama **integral de la distribución D** , si $d\varphi(q)(T_q\mathcal{N}) = D\varphi(q)$ para todo $q \in \mathcal{N}$. Si además φ es **incrustamiento**, se llama **integral regular**.
- Una **variedad conexa** $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, se llama **variedad integral**²² de la **distribución**²³ D si la **inclusión**²⁴ $i: \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ es una **integral de D** . Si Además \mathcal{N} es subvariedad de \mathcal{M} , se llama **variedad integral regular**. Nótese que si $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ es **integral regular de D** entonces $\varphi(\mathcal{N})$ es una **variedad integral regular**.

Una parte de conceptos y resultados del análisis en \mathbb{R}^m se puede extender a espacios generales \mathcal{M} , que se denominan *variedades diferenciables*. Intuitivamente, una *variedad diferenciable* \mathcal{M} , es un espacio que localmente es equivalente a \mathbb{R}^m . Así, la *geometría diferencial local*, es prácticamente equivalente al *análisis*. En estos estudios se utiliza la *parametrización* de las *variedades bidimensionales* para utilizar las *2-formas*, debido a dos razones, es necesario que la generalización natural de los *ciclos límite* se encuentren en las *p-formas*, debido a que existen operadores variados que nos permiten analizar los *embebimientos*²⁵ en \mathbb{R}^3 de *distribuciones bivectoriales* y poder generalizar el concepto de lo que se entiende por *2-ciclo límite* y la segunda es que al parametrizar *variedades bidimensionales* (superficies en el espacio euclidiano), esto nos permite caracterizar por completo a las variedades, esto es, se puede representar a una superficie homeomorfa a un plano cartesiano, como en un mapa. De esta manera, cada punto $p \in \mathcal{M}$ tiene asociado un solo punto y sólo uno en \mathbb{R}^2 , además, esta asociación es tal que puntos cercanos del mapa corresponden a punto cercanos de la región, y recíprocamente; es decir, la asociación y su inversa son continuas. De manera breve, se dice que una superficie topológica es localmente homeomorfa al plano.

Teniendo en cuenta los ejemplos de la sección (2.1) y las construcciones hechas de *1-ciclos límite* en notación tensorial, se puede hacer una recopilación en este capítulo (2), así que primero se abordan los *trivectores*, ya que nos permite hacer la generalización a *distribuciones reales 3-vectoriales*. En los *trivectores*, si uno tiene una función $\mathbb{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z$, donde $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$, entonces se toma la *asignación natural* dada por $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = *[\nabla \wedge (*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))]$, el cual nos da como resultado un *bivector único*, lo que nos da una *distribución bivectorial*. Es decir:

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) &= \delta\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \\ &= *[\nabla \wedge (*\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z)] \\ &= *[\nabla \wedge \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))] \\ &= * \left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)}\hat{e}_x + \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}\hat{e}_y + \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)}\hat{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)}\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \\ &= \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

De este modo, se obtiene la *distribución bivectorial* del *trivector* $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))$, si se le asigna un **sistema dinámico tridimensional** en \mathbb{R}^3 , estaría dado por las ecuaciones (2.52), esta *asignación vectorial* no es única, sin embargo, tal asignación no está dada al azar:

$$\begin{aligned} B_{yz} &= \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \\ B_{zx} &= \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \\ B_{xy} &= \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \end{aligned} \tag{2.52}$$

¿Por qué se hizo tal *asignación* en el *espacio cartesiano*? Esta pregunta se responderá con el siguiente teorema (2.7).

²²La definición de *variedad integral* se da en la definición (2.28).

²³La definición de *distribución* se da en la definición (2.28).

²⁴En matemáticas, y más precisamente en la teoría de conjuntos, la *inclusión* es una vinculación entre dos o más conjuntos. Si se llama a uno de estos conjuntos A , y al otro B , se dice que A está incluido en B , si todos sus elementos además de pertenecer a su conjunto también le pertenecen a B .

²⁵En el apéndice (A) se da el concepto en la definición (A.23).

Teorema 2.7. *Todo campo vectorial elegido tiene una selección natural.*

Demostración. Se sabe que todo **2-campo integral** tiene **variedades integrables**, por la **condición de regularidad** existe un **sistema local de coordenadas** en (un entorno de) P . El entorno $V \cap S$ se denomina un **entorno coordinado**. Para dar de una manera más familiar la **condición de regularidad**, calcúlese la matriz de la aplicación lineal dx_q en las bases canónicas $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , de coordenadas (t, τ) , y $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 , de coordenadas (x, y, z) .

Sea $q = (t_0, \tau_0)$. El vector e_1 es tangente a la curva $t \rightarrow (t, \tau_0)$ cuya imagen a través de \mathbf{x} es la curva.

$$t \rightarrow (x(t, \tau_0), y(t, \tau_0), z(t, \tau_0)).$$

Esta curva imagen (denominada la **curva coordinada** $\tau = \tau_0$) está contenida en S y tiene en $x(q)$ el vector tangente

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t},$$

donde las derivadas están evaluadas en (t_0, τ_0) y el vector se expresa por sus coordenadas en la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. En virtud a la definición de diferencial

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.53)$$

De manera similar, utilizando la **curva coordinada** $t = t_0$ (la imagen por \mathbf{x} de la curva $\tau \rightarrow (t_0, \tau)$), se obtiene

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \quad (2.54)$$

Si se toman las ecuaciones (2.53) y (2.54), y se hacen las siguientes notaciones más cómodas $\frac{\partial P}{\partial t} \Big|_{\tau=\tau_0} = (\dot{x}_t, \dot{y}_t, \dot{z}_t) = P_t$ y

$\frac{\partial P}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = (\dot{x}_\tau, \dot{y}_\tau, \dot{z}_\tau) = P_\tau$, al hacer un isomorfismo entre los vectores y las **1-formas diferenciales**, estos mismos vectores toman la forma $P_t = \dot{x}_t \hat{e}_x + \dot{y}_t \hat{e}_y + \dot{z}_t \hat{e}_z$ y $P_\tau = \dot{x}_\tau \hat{e}_x + \dot{y}_\tau \hat{e}_y + \dot{z}_\tau \hat{e}_z$

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= P_t \wedge P_\tau \\ &= (\dot{x}_t \hat{e}_x + \dot{y}_t \hat{e}_y + \dot{z}_t \hat{e}_z) \wedge (\dot{x}_\tau \hat{e}_x + \dot{y}_\tau \hat{e}_y + \dot{z}_\tau \hat{e}_z) \\ &= (\dot{x}_t \dot{y}_\tau - \dot{y}_t \dot{x}_\tau) \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y + (\dot{z}_t \dot{x}_\tau - \dot{x}_t \dot{z}_\tau) \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x + (\dot{y}_t \dot{z}_\tau - \dot{z}_t \dot{y}_\tau) \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \end{aligned}$$

Se ha formado de esta manera un **bivector** como una combinación lineal de **campos vectoriales**, que son **sistemas dinámicos**. Esto significa que no se puede hablar propiamente de **sistemas dinámicos bivectoriales**, pero tienen su origen en **sistemas dinámicos** como tal.

Si se hace $\mathbb{B} = \mathbf{0}$, entonces pasa lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_t \dot{y}_\tau - \dot{y}_t \dot{x}_\tau &= 0, \quad \dot{z}_t \dot{x}_\tau - \dot{x}_t \dot{z}_\tau = 0 \quad \text{y} \quad \dot{y}_t \dot{z}_\tau - \dot{z}_t \dot{y}_\tau = 0 \\ \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau} &= \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t}, \quad \frac{\dot{z}_t}{\dot{x}_t} = \frac{\dot{z}_\tau}{\dot{x}_\tau} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{y}_t}{\dot{z}_t} = \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{z}_\tau} \end{aligned}$$

Debido a estas implicaciones, un **bivector** dado será $\mathbf{0}$ siempre que los **campos vectoriales** sean paralelos entre sí o directamente proporcionales. \square

El teorema (2.7) elimina las arbitrariedades acerca de las posibles elecciones de un *sistema dinámico tridimensional* en \mathbb{R}^3 , esto es notable, debido a que el *bivector* que se define en cada punto de la *variedad bidimensional* es determinado de manera única por el *sistema local de coordenadas* que definen nuestros *sistemas dinámicos* en cada punto, lo que significa que la elección de tales *sistemas dinámicos* definen un *campo de bivectores* de manera unívoca. De modo que, todo *campo vectorial* que se elija “al azar”, en realidad es una “selección natural”, debido a que cualquier sistema que se tome en un punto dado de la *variedad integral*, este estará contenido en un *bivector* que representa a nuestra *distribución bivectorial* que define por completo a la *variedad bidimensional*. Por lo que la elección no es al azar, sino natural.

Si se cuenta con un *campo 2-vectorial* entonces existen sus *variedades integrales* por el Lema de Poincaré (1.18) y, por tanto, existe una *2-distribución* de *1-vectores* donde cada uno de ellos es tangente a las *variedades integrales* del *campo 2-vectorial*, recuérdese que hay $\binom{3}{2} = 3$ *1-vectores* para una *variedad integral* de un *campo 2-vectorial*. Por otra parte, si existe una

2-distribución de *1-campos vectoriales* que cumplen con el *teorema de Frobenius* (2.28) y (2.30), entonces existe el *campo 2-vectorial* tangente a las *variedades integrales* de la *2-distribución*. Ahora basta considerar que por cada *campo 1-vectorial* se cuenta con un *sistema dinámico* y de esta manera establecer relaciones entre los *sistemas dinámicos* y objetos que pueden estudiarse sólo geoméricamente.

De esta manera, se obtiene un *sistema de ecuaciones diferenciales tridimensionales* dadas por las ecuaciones (2.52), que es una *asignación natural* en el espacio cartesiano tridimensional, esta asignación no es la única que se puede hacer. Como se puede observar, a partir de un *trivector* se obtuvo un *bivector*, que sería la “*distribución bivectorial*” del que proviene la *superficie integral*. Esto es a lo que uno se refiere con una *cantidad conservada*²⁶.

Así que la respuesta a tal pregunta es que la asignación de un *bivector* a un *sistema dinámico tridimensional* no es única. Sin embargo, no es aleatoria o al azar, es una formación natural, por el teorema (2.7).

Observación 2.2. *Antes de empezar bien con los estudio de los 2-ciclos límite en las 3-formas diferenciales ahora se debe uno de fijar más en la geometría de las distribuciones bivectoriales que en la dinámica de los flujos del espacio-fase o las dinámicas del sistema, si bien, todo parece indicar que dichos flujos existen y en las p-formas pueden existir conjuntos límite más variados que en el plano cartesiano, no hay a la fecha programas o software dedicado a graficar variedades de nivel de los flujos dinámicos de una distribución bivectorial, además de no existir software especializado para sus*

²⁶El concepto de *cantidad conservada* se da en el teorema (2.8).

respectivos planos dirigidos (**bivectores**) o cubitos dirigidos (**trivectores**) tangentes. Lo único que se puede decir al respecto, es que aquí se verá que hay más tipos de **conjuntos límite** mediante ejemplos ilustrativos, además de los ya conocidos en \mathbb{R}^2 .

Nuestra guía para aseverar tales afirmaciones no será el de fijarse en los flujos o las dinámicas del sistema mediante el **espacio-fase**, debido a las limitaciones que comenté. Finalmente, las teorías que se utilizarán son un poco distintas, pues el estudio de dichas generalizaciones requiere de operaciones más poderosas, que nos permitan construir la teoría necesaria y visualizar las ideas en el espacio de las **p-formas**. Esto significa que la distribución bivectorial sigue siendo conservativa, a pesar de que se le sumaron funciones en cada entrada. Una vez comprobado esto, ahora se obtiene una 2-variedad integral de la ecuación (2.59), pero para esto, se hace lo siguiente:

Para ver todas estas nuevas ideas, se pone un ejemplo, para que se pueda ver ilustrativamente el manejo de estos nuevos conceptos que aparecieron en la observación planteada de la sección (2.2).

Ejemplo 2.5. *Considérese el siguiente campo de trivectores*

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = (2x(t)y^2(t) - 4z^3(t)y(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \quad (2.55)$$

Y supóngase que las componentes del **campo bivectorial**

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$$

Determinan cada una la evolución de una de las variables dinámicas B_{yz} , B_{zx} y B_{xy} .

Preguntas:

¿La correspondencia es única para que el sistema se satisfaga que el sistema dinámico asociado sea conservativo? ¿Es posible modificar algo en $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ para que esa correspondencia no sea única? Bosquejar el **espacio-fase** del sistema cuando la correspondencia conduzca al caso conservativo y verificar que los **ciclos límite**, además de los conocidos en \mathbb{R}^2 , también pueden ser superficies.

Solución. Por la definición (2.28) $\delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = *[\nabla \wedge *(\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))]$, de este modo, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) &= \delta(2x(t)y^2(t) - 4z^3(t)y(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \\ &= * \{ \nabla \wedge * [(2x(t)y^2(t) - 4z^3(t)y(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z] \} \\ &= * \{ \nabla \wedge (2x(t)y^2(t) - 4z^3(t)y(t)) \} \\ &= * \{ 2y^2(t)\hat{e}_x + (4x(t)y(t) - 4z^3(t))\hat{e}_y - 12z^2(t)y(t)\hat{e}_z \} \\ &= 2y^2(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - (4x(t)y(t) - 4z^3(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z - 12z^2(t)y(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \\ &= \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Por lo que nuestra **distribución bivectorial** que es única, está dada por la siguiente expresión.

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = 2y^2(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - (4x(t)y(t) - 4z^3(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + 12z^2(t)y(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y, \quad (2.56)$$

se puede decir que el **campo vectorial** en un espacio del **trivector** $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ está dada por:

$$\begin{aligned} B_{yz} &= 2y^2(t) \\ B_{zx} &= 4x(t)y(t) - 4z^3(t) \\ B_{xy} &= 12z^2(t)y(t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Por el teorema (2.7) esta es una **asignación natural** en un **campo vectorial**, debido a la demostración que se hizo en dicho teorema. Sin embargo, la **asignación** entre comillas natural en un **campo vectorial** no es **única**, recuérdese que pasar de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ a \mathbb{R}^3 cambia por completo el tipo de análisis matemático (geométrico, topológico y analítico).

El punto es que la **asignación es única** en las **distribuciones bivectoriales**, se puede ver que $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$ es **conservativa** en el sentido de que si se vuelve a sacar la **codiferencial** este nos tiene que dar necesariamente 0, para comprobarlo se calcula nuevamente la **divergencia generalizada** de la **distribución** (2.56) para tener que

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) &= * \{ \nabla \wedge * [2y^2(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - (4x(t)y(t) - 4z^3(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z - 12z^2(t)y(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y] \} \\ &= * \{ \nabla \wedge (2y^2(t)\hat{e}_x + (4x(t)y(t) - 4z^3(t))\hat{e}_y - 12z^2(t)y(t)\hat{e}_z) \} \\ &= * \{ 4y(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_x + 4y(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y - 12z^2(t)\hat{e}_z \wedge \hat{e}_y - 12z^2(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \} \\ &= * \{ (4y(t) - 4y(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y + (12z^2(t) - 12z^2(t))\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

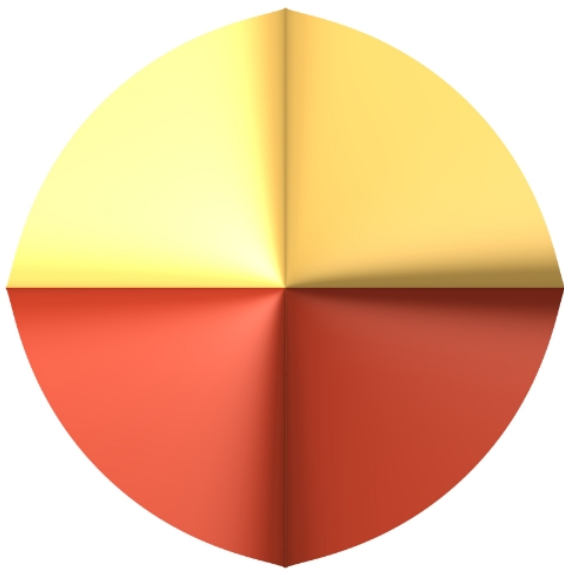
Debido a que es la **divergencia generalizada**, **coderivada** o **codiferencial exterior alterna** nos da 0, esto quiere decir que el **campo bivectorial** (2.56) es **conservativo**, las **superficies de nivel** de $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = (2x(t)y^2(t) - 4z^3(t)y(t) = \mathcal{C})$, son los **conjuntos límite** de la **distribución bivectorial** \mathbb{B} .

La respuesta a la primera pregunta es compleja, es decir, la **asignación** sí es **única** para la **distribución** (2.56) de **bivectores**, pero no es única si se asigna a un **campo vectorial** para obtener un **sistema dinámico** en \mathbb{R}^3 , además, al asignarlo a un **campo de vectores** la **divergencia** de cálculo vectorial no necesariamente da 0 como resultado.

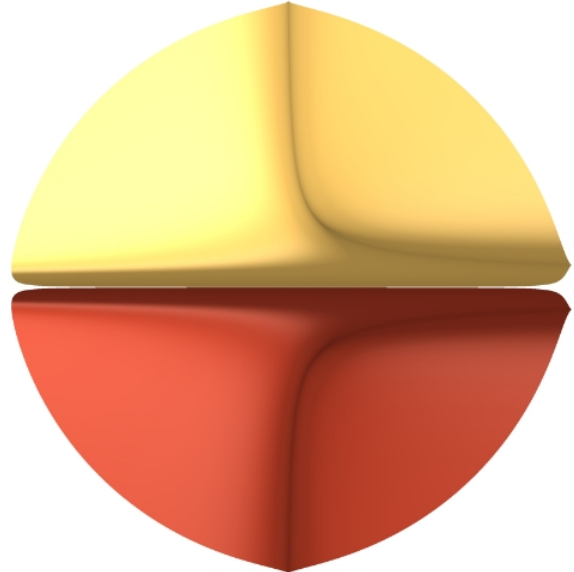
Vamos a graficar con el software "Surfer" los **conjuntos límites** que se forman. Para poder bosquejarlo y ver que tipos figuras geométricas se forman en el plano tridimensional, se espera que se formen superficies, esto por la forma del **trivector** dado. La **distribución bivectorial** (2.56) **no debería** de tener una **correspondencia única**, se verá con qué construcción se necesita para resolver las dos primeras preguntas de este ejemplo.

Se bosqueja el **conjunto límite** de la **distribución bivectorial** (2.56), para $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = 2x(t)y^2(t) - 4z^3(t)y(t) = \mathcal{C}$, el cual es **conservativo**. Se toman las constantes $\mathcal{C} = -4, -1, 0, 1$ y 4 respectivamente, que son las **superficies de nivel** que son los **conjuntos límites** de la ecuación (2.56) que dependen de las condiciones iniciales de nuestra **distribución bivectorial**.

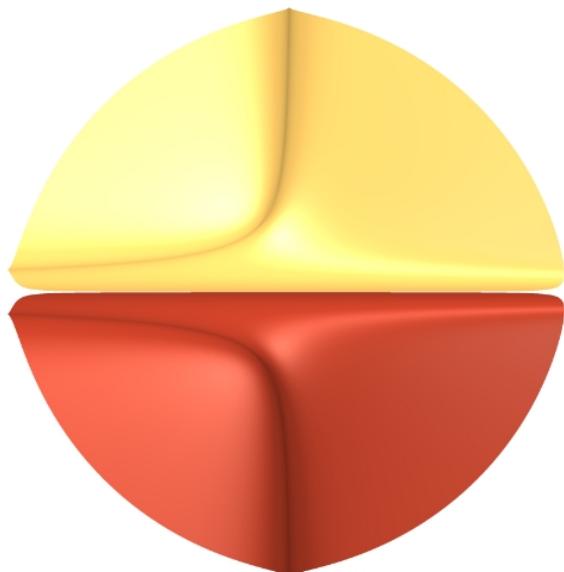
En todos los casos para todas las constantes asignadas \mathcal{C} estos parecen extenderse en todo el espacio tridimensional con discontinuidades esenciales, pues son superficies dos separadas que representan la ecuación algebraica de la ecuación (2.55), parece una especie de hiperboloide de dos hojas singulares que no están unidas entre sí, como sábanas extendiéndose a lo largo de todo el espacio-fase tridimensional del sistema dinámico de la ecuación (2.56) y para cada una hay una superficie de nivel, que son los conjuntos límite del sistema bivectorial (2.56).



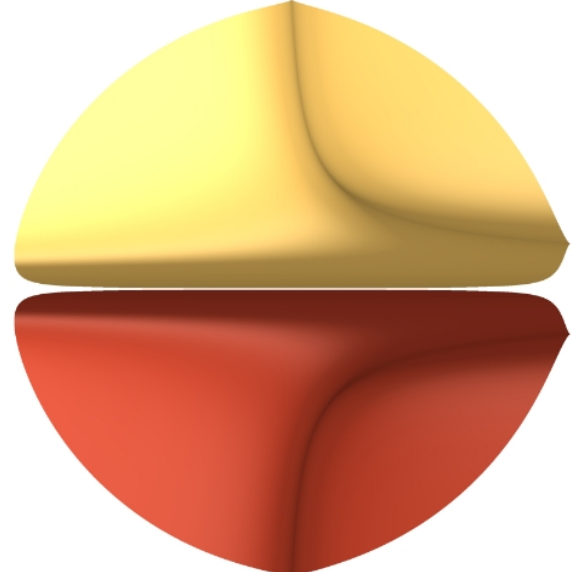
(a) $H(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 0$



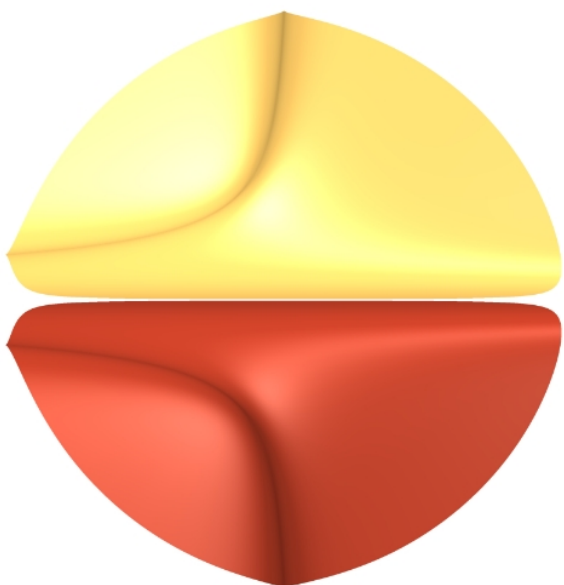
(b) $H(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 1$



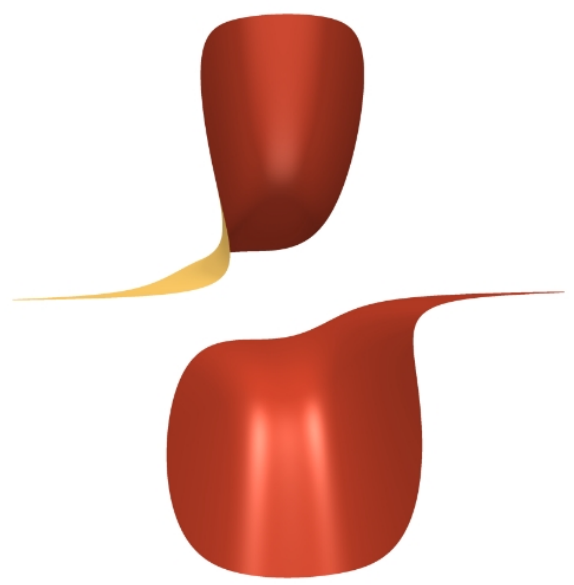
(c) $H(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = -1$



(d) $H(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 4$



(e) $H(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = -4$



(f) $H(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = -4$ rotado 90° con respecto al eje Z en sentido levógiro

Figura 2.17. Figuras que representan las soluciones como superficies de nivel de la distribución bivectorial (2.56). Imágenes hechas con el software Surfer 1.7.0 para Windows de 64 bits.

Esto verifica que los **conjuntos límite**, además de los conocidos en \mathbb{R}^2 , también pueden ser superficies geoméricamente hablando. Hay que aclarar que esto no demuestra en absoluto la existencia de otros tipos de **conjuntos límite** además de los conocidos en el **plano bidimensional**, porque no existe un teorema similar de Poincaré-Bendixson (2.1) para el caso tridimensional. Sin embargo, los gráficos muestran que existe algo más, además de los **conjuntos límite** conocidos en \mathbb{R}^2 de manera gráfica, pero que muestra que hay algo más.

Para responder a la segunda cuestión, se nos pregunta si se puede hacer algo en $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ para que dicha **correspondencia** no sea "única", y es posible hacerlo, sin cambiar la dinámica dada por el **campo trivectorial**, para esto, se hará lo siguiente, se agrega en la **función trivectorial** una función real polinomial que no afecte al sistema de **funciones bivectoriales** y que de como resultado nuestro **campo trivectorial**.

Hay que fijarnos en el caso más general, por lo que si se agregan constantes de la siguiente manera, se tiene que:

$$\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) + \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) + \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \quad (2.58)$$

En la ecuación (2.58) si se saca la **divergencia generalizada**, se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) &= \delta(\mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) + \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))) = \delta(\mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) + \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))) = \\ &= \delta\mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) + \delta\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \delta\mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) + \mathbf{0} = \delta\mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Finalmente nos queda como $\delta\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) = \delta\mathbb{B}_2(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0}$, esto significa de manera general, que si uno agarra una **distribución bivectorial** $\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ siempre es posible incluir o agregar otro **campo bivectorial coexacto** a nuestra **distribución bivectorial original**, para que de este modo se mantenga invariante en ese sentido. Esto es como agregar constantes a una **cantidad conservada** en nuestro **trivector** $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ del que proviene el **bivector** $\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t))$.

Entonces se tiene la respuesta; ¿La correspondencia es única para que el sistema se satisfaga que el sistema dinámico asociado sea conservativo? ¿Es posible modificar algo en $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ para que esa correspondencia no sea única? La respuesta a la primera pregunta es que la correspondencia no es **única**, pues existen **cantidades conservadas** del sistema, y la segunda respuesta a la segunda pregunta es que sí es posible modificar a $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ para que la correspondencia **no sea única** con la ecuación (2.58)..

Se hará una posible construcción de "constantes" de una 2-forma a una 3-forma particular que puede ser de interés para construir modificaciones particulares. Se toma el **sistema de bivectores** de la ecuación (2.52) y estos se les suma funciones que dependan de las variables que no aparecen en cada **bivector**, por ejemplo, al **bivector** $\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z$, sumarle una función $f(x(t))$ y así sucesivamente con los demás. Para así obtener la nueva expresión.

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) &= \left[\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} + f(x(t)) \right] \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \left[\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + g(y(t)) \right] \widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &+ \left[\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + h(z(t)) \right] \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \end{aligned} \quad (2.59)$$

Al hacer esto, se obtiene la nueva **distribución bivectorial** $\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t))$, que al sacarle su **divergencia generalizada**, nos da 0. Para comprobarlo se hace a continuación:

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) &= * \left\{ \nabla \wedge \left[* \left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} + f(x(t)) \right) \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + g(y(t)) \right) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + h(z(t)) \right) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \right] \right\} \\ &= * \left\{ \nabla \wedge \left[\left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} + f(x(t)) \right) \widehat{e}_x + \left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + g(y(t)) \right) \widehat{e}_y \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + h(z(t)) \right) \widehat{e}_z \right] \right\} \\ &= * \left\{ \left(\frac{\partial^2\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)\partial y(t)} - \frac{\partial^2\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)\partial x(t)} \right) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y + \left(\frac{\partial^2\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)\partial x(t)} - \frac{\partial^2\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)\partial z(t)} \right) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^2\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)\partial z(t)} - \frac{\partial^2\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)\partial y(t)} \right) \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \right\} \\ &= * \{ 0\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y + 0\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 0\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \} \\ &= 0\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y + 0\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 0\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Esto significa que la **distribución bivectorial** sigue siendo **conservativa**, a pesar de que se le sumaron funciones en cada entrada. Una vez comprobado esto, ahora se obtiene una **2-variedad integral** de la ecuación (2.59), pero para esto, se hace lo siguiente:

$$\mathbb{B}_1 = \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} + f(x(t)) \right)}_{w_1(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + g(y(t)) \right)}_{w_2(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + h(z(t)) \right)}_{w_3(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y$$

Se asocia a cada **bivector** una función en tres variables, y estos son iguales a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} + f(x(t)) &= w_1(x(t), y(t), z(t)); & \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + g(y(t)) &= w_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + h(z(t)) &= w_3(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

De este modo, si se integra $w_1(x(t), y(t), z(t))$ con respecto a la variable $x(t)$, se obtiene que:

$$\int w_1(x(t), y(t), z(t)) dx(t) = \int \left[\frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} + f(x(t)) \right] dx(t) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + f_1(y(t), z(t)) = W_1(x(t), y(t), z(t))$$

Al sacar la *derivada parcial* respecto a la variable $y(t)$, se tiene que:

$$\frac{\partial W_1(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_1(y(t), z(t))}{\partial y(t)} = w_2(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + g(y(t))$$

Por la igualdad de la última expresión un párrafo arriba, se obtiene que

$$\frac{\partial f_1(y(t), z(t))}{\partial y(t)} = g(y(t))$$

De modo que al integrar esta nueva expresión respecto a la variable $y(t)$ se obtiene finalmente que

$$f_1(y(t), z(t)) = G(y(t)) + f_2(x(t), z(t)) \quad (2.60)$$

Si a la ecuación (2.60) se le sustituye en $W_1(x(t), y(t), z(t))$, se obtiene que

$$W_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + f_1(y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + G(y(t)) + f_2(x(t), z(t))$$

Si se saca una *derivada parcial* respecto a la variable $z(t)$, a la última expresión un párrafo arriba, se obtiene que

$$\frac{\partial W_1(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \frac{\partial f_2(x(t), z(t))}{\partial z(t)} = w_3(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + h(z(t))$$

Por lo que, al igualar la última expresión de arriba se obtiene que

$$\frac{\partial f_2(x(t), z(t))}{\partial z(t)} = h(z(t))$$

Así que al integrarla con respecto a la variable $z(t)$, se obtiene que

$$f_2(x(t), z(t)) = H(z(t)) + C$$

Si esto último se sustituye en $W_1(x(t), y(t), z(t))$, se tiene que

$$W_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + G(y(t)) + f_2(x(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + G(y(t)) + H(z(t)) + C$$

De esta expresión algebraica, se nota que el término general que se puede tomar en cuenta en cada función obtenida es la siguiente (se utilizan funciones polinomiales):

$$F(x(t)) = \sum_{i=0}^n a_i x^i(t), \quad G(y(t)) = \sum_{i=0}^n b_i y^i(t) \quad \text{y} \quad H(z(t)) = \sum_{i=0}^n c_i z^i(t)$$

De este modo, las funciones derivadas serían las siguientes

$$f(x(t)) = \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}(t), \quad g(y(t)) = \sum_{i=0}^n i b_i y^{i-1}(t) \quad \text{y} \quad h(z(t)) = \sum_{i=0}^n i c_i z^{i-1}(t)$$

Los cuales se eliminan al sacarle a la *distribución bivectorial* nuevamente la *derivada exterior adjunta* por los términos involucrados en las *1-formas*. Finalmente, nuestro *campo 3-vectorial* quedaría como

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + G(y(t)) + H(z(t)) + C) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z$$

Lo que nos muestra esta construcción es que es posible agregar términos al *trivector* de tal modo que al sacar $\delta(\delta \mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))) = \mathbf{0}$, eso significa que se mantiene *cocerrada*, entonces la correspondencia no puede ser única, solo se eligió un ejemplo básico de construcción, debido a que es posible construir cosas aún más complejas y de manera más general.

Se están trabajando las *distribuciones* en otros espacios distintos de los *cartesianos*, conocidos como espacios en *p-formas*, esto es una generalización. Muchos de los atractores considerados extraños que hay en \mathbb{R}^3 , podrían no ser extraños en los espacios de las *p-formas*, no es una afirmación, solo es una idea.

Otra aclaración, es que en los *espacios tridimensionales*, tiene mucho sentido hablar de *flujos en un espacio-fase*, es común que se estudien los *sistemas dinámicos* con *análisis cualitativo* de *sistemas de ecuaciones diferenciales*, y para ello se observe la *dinámica de los flujos*, esto no sucede, en cambio, con los espacios en las *p-formas*, por lo que se utilizan propiedades geométricas y no las *dinámicas de los flujos*, ya que no son fáciles de visualizar y no existe software de “*flujos bivectoriales*”, así que hay que mostrarlo de manera algebraica y topológica que los *conjuntos límite* sí existen en las *p-formas*, solo que en estos, pasa curiosamente un fenómeno geométrico, puesto que los *conjuntos límites* que se obtienen son más de los que en un plano se obtienen, es decir.

El ejemplo anterior nos mostró que además de los *conjuntos límite* que ya se conocen en *sistemas dinámicos bidimensionales*, hay la posibilidad en las *p-formas* de que estos sean superficies.

Una pregunta que quedó es, ¿cómo se construye la *variedad integral* de la cual proviene la *distribución bivectorial* o cómo se sabe que una *distribución bivectorial* proviene de una *variedad integral*? En el primer ejemplo de esta sección (2.2) se nos dio una *variedad diferenciable* en $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$, y a partir de ahí se encontró con la *codiferencial* un *bivector* en $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ que funge como el sistema de nuestra *variedad* dada, sin embargo, si se tiene una *distribución bivectorial*, la pregunta es: ¿existirá una *variedad integral* de la cuál provenga?

Para responder se recurre a las nociones de las *p-formas* expuestas en (1.2) y en (1.3), en la primera pregunta, a partir de la definición (1.41), si se cumple el tercer inciso entonces se dirá que $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ es *cocerrada* cuando se le aplica la *codiferencial*, al suceder esto, significa que existe $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \delta \mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$, lo que significa que $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$ proviene de una *variedad integral* $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$. La respuesta a la primer pregunta

es que toda 2-forma cocerrada es coexacta, esto siempre y cuando se considere que $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$ está definido sobre todo \mathbb{R}^3 y este sistema sea contractible a un punto, es decir, que se cumple el Lema de Poincaré (1.18).

Aunque esto nos aclare de cierto modo el hecho de que se sepa que un bivector provenga de un trivector por el Lema de Poincaré (1.18), esto no nos dice mucho acerca de la construcción de la 3-forma a partir de la 2-forma dada. Si se usa la definición (2.28) a nuestro favor, y utilizando en específico el penúltimo y último incisos, entonces $D = \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$, $\mathcal{M} = \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{N} = \mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$. Para hacer una construcción, se sabe que $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ es una variedad integral de $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$, se toma el sistema de bivectores de la ecuación (2.52) y a cada uno de estas entradas bivectoriales se les asigna como una función normal de la siguiente manera

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \underbrace{\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)}}_{w_1(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \underbrace{\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}}_{w_2(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + \underbrace{\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)}}_{w_3(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y$$

Se asocia a cada bivector una función en tres variables, y estos son iguales a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} &= w_1(x(t), y(t), z(t)); & \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} &= w_2(x(t), y(t), z(t)) \\ & & \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} &= w_3(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

De este modo, si se integra $w_1(x(t), y(t), z(t))$ con respecto a la variable $x(t)$, se obtiene que:

$$\int w_1(x(t), y(t), z(t)) dx(t) = \int \left[\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \right] dx(t) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + f_1(y(t), z(t)) = W_1(x(t), y(t), z(t))$$

Al sacar la derivada parcial respecto a la variable $y(t)$, se tiene que:

$$\frac{\partial W_1(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_1(y(t), z(t))}{\partial y(t)} = w_2(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}$$

Por la igualdad de la última expresión un párrafo arriba, se obtiene que

$$\frac{\partial f_1(y(t), z(t))}{\partial y(t)} = 0$$

De modo que al integrar esta nueva expresión respecto a la variable $y(t)$ se obtiene que

$$f_1(y(t), z(t)) = C_1 + f_2(x(t), z(t)) \quad (2.61)$$

Si a la ecuación (2.61) se le sustituye en $W_1(x(t), y(t), z(t))$, se obtiene que

$$W_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + f_1(y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + C_1 + f_2(x(t), z(t))$$

Si se saca una derivada parcial respecto a la variable $z(t)$, a la última expresión un párrafo arriba, se obtiene que

$$\frac{\partial W_1(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \frac{\partial f_2(x(t), z(t))}{\partial z(t)} = w_3(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)}$$

Por lo que al igualar la última expresión de arriba se obtiene que

$$\frac{\partial f_2(x(t), z(t))}{\partial z(t)} = 0$$

Así que al integrarla con respecto a la variable $z(t)$, se obtiene que

$$f_2(x(t), z(t)) = C_2$$

Si esto último se sustituye en $W_1(x(t), y(t), z(t))$, se tiene que

$$W_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + F(x(t)) + G(y(t)) + f_2(x(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + C_1 + C_2$$

Nótese, finalmente que la constante no altera a las superficies de nivel, por lo que realmente nuestro sistema trivectorial quedaría como

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z$$

A continuación se presenta otro ejemplo donde se construye el conjunto límite de una distribución bivectorial.

Ejemplo 2.6. Sea la siguiente distribución bivectorial

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = 3x^2(t)y(t)z^2(t)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + x^3(t)z^2(t)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2x^3(t)y(t)z(t)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \quad (2.62)$$

Se aplica la codiferencial a $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$, para obtener que

$$\begin{aligned} \delta \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) &= * [\nabla \wedge (* \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)))] \\ &= * [\nabla \wedge (* 3x^2(t)y(t)z^2(t)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + x^3(t)z^2(t)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2x^3(t)y(t)z(t)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y)] \\ &= * [\nabla \wedge (3x^2(t)y(t)z^2(t)\widehat{e}_x + x^3(t)z^2(t)\widehat{e}_y + 2x^3(t)y(t)z(t)\widehat{e}_z)] \\ &= * [3x^2(t)z^2(t)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_x + 6x^2(t)y(t)z(t)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 3x^2(t)z^2(t)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y + 2x^3(t)z(t)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_y \\ &\quad + 6x^2(t)y(t)z(t)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 2x^3(t)z(t)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z] \\ &= * [(3x^2(t)z^2(t) - 3x^2(t)z^2(t))\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y + (6x^2(t)y(t)z(t) - 6x^2(t)y(t)z(t))\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z \\ &\quad (2x^3(t)z(t) - 2x^3(t)z(t))\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z] \\ &= * [\mathbf{0}] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como ocurre que $\delta\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0}$ y es contractible a un punto, entonces existe $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$. tal que $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$.

Ahora se encuentra la **2-variedad integral** asociada a la **distribución** $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$, se prosigue a encontrarla con el siguiente método

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \underbrace{3x^2(t)y(t)z^2(t)}_{w_1(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \underbrace{x^3(t)z^2(t)}_{w_2(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + \underbrace{2x^3(t)y(t)z(t)}_{w_3(x(t), y(t), z(t))} \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y$$

Se asocia a cada **bivector** una función en tres variables, y estos son iguales a lo siguiente:

$$3x^2(t)y(t)z^2(t) = w_1(x(t), y(t), z(t)); \quad x^3(t)z^2(t) = w_2(x(t), y(t), z(t)) \quad y \quad 2x^3(t)y(t)z(t) = w_3(x(t), y(t), z(t))$$

De este modo, si se integra la primera integral, se obtiene que

$$\int w_1(x(t), y(t), z(t)) dx(t) = \int 3x^2(t)y(t)z^2(t) dx(t) = x^3(t)y(t)z^2(t) + f(y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))$$

Al derivarlo con respecto a $y(t)$, se obtiene que

$$\frac{\partial w_1(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} = x^3(t)z^2(t) + \frac{\partial f(y(t), z(t))}{\partial y(t)}$$

Si esta última expresión arriba se iguala con $w_2(x(t), y(t), z(t))$, se obtiene que

$$x^3(t)z^2(t) + \frac{\partial f(y(t), z(t))}{\partial y(t)} = x^3(t)z^2(t)$$

Por lo que, la expresión final obtenida es

$$\frac{\partial f(y(t), z(t))}{\partial y(t)} = 0$$

Así se obtiene $f(y(t), z(t)) = C + g(x(t), z(t))$, que al sustituirlo en $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))$ se tiene que

$$\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = x^3(t)y(t)z^2(t) + f(y(t), z(t)) = x^3(t)y(t)z^2(t) + C + g(x(t), z(t))$$

Se deriva parcialmente con respecto a la variable $z(t)$, para obtener que

$$\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} = 2x^3(t)y(t)z(t) + \frac{\partial g(x(t), z(t))}{\partial z(t)}$$

Que al igualarlo a $w_3(x(t), y(t), z(t))$ se obtiene el siguiente resultado

$$2x^3(t)y(t)z(t) + \frac{\partial g(x(t), z(t))}{\partial z(t)} = 2x^3(t)y(t)z(t)$$

Lo que significa que

$$\frac{\partial g(x(t), z(t))}{\partial z(t)} = 0$$

Que al integrarlo queda como

$$g(x(t), z(t)) = c$$

Al hacer todas las cadenas de sustituciones, se tiene finalmente que

$$\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = x^3(t)y(t)z^2(t) + K$$

Se puede afirmar que cuando $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} \in \mathbb{R}$. o bien, $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ define las **superficies integrales** de $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$.
2. Como $*\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$ es perpendicular a $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$, esto quiere decir que de la ecuación

$$[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0}$$

Ahora bien, recordando de la sección (2.1) que dada una **función de Hamilton** $\mathbb{H}(x(t), y(t))$, entonces

$$\frac{d\mathbb{H}(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t))}{\partial y(t)} \dot{y}(t) = (\nabla \mathbb{H}(x(t), y(t))) \cdot \mathbb{X}(x(t), y(t)) = 0$$

donde $\mathbb{B}(x(t), y(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, se sigue que $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z$ es una **cantidad conservada** para la **distribución bivectorial** (2.62).

Por el momento no se harán los cálculos de $[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0}$, es intuitivo de una manera geométrica, pero algebraicamente no resulta sencillo, pues antes de hacerlos, se tienen que dar algunos teoremas y definiciones que se necesitan para poder abordar con mayor detenimiento los cálculos y probar que lo que se afirma en este trabajo es verdadero.

Se bosqueja el **conjunto límite** de la **distribución bivectorial** (2.62), para $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = x^3(t)y(t)z^2(t) = \mathcal{C}$, el cual, para nuestro caso resultó ser **conservativo**. Se toman para esto las constantes $\mathcal{C} = 1, -1$ y respectivamente, que son como las **superficies de nivel** que en este caso resultan ser los **conjuntos límite** de la ecuación (2.62) dependiendo de las condiciones iniciales de nuestra **distribución bivectorial**.

Nótese que en todos los casos para todas las constantes asignadas \mathcal{C} estos parecen extenderse en todo el espacio tridimensional con discontinuidades esenciales, pues son superficies separadas que representan la ecuación algebraica de la ecuación (2.62), pues se forman una especie de cuatro hiperboloides singulares y regulares que no están unidas entre sí, como sábanas extendiéndose a lo largo de todo el **espacio-fase tridimensional** de la **distribución** de la ecuación (2.62) y para cada una hay una **superficie de nivel**, que son los **conjuntos límite del sistema bivectorial** (2.62).

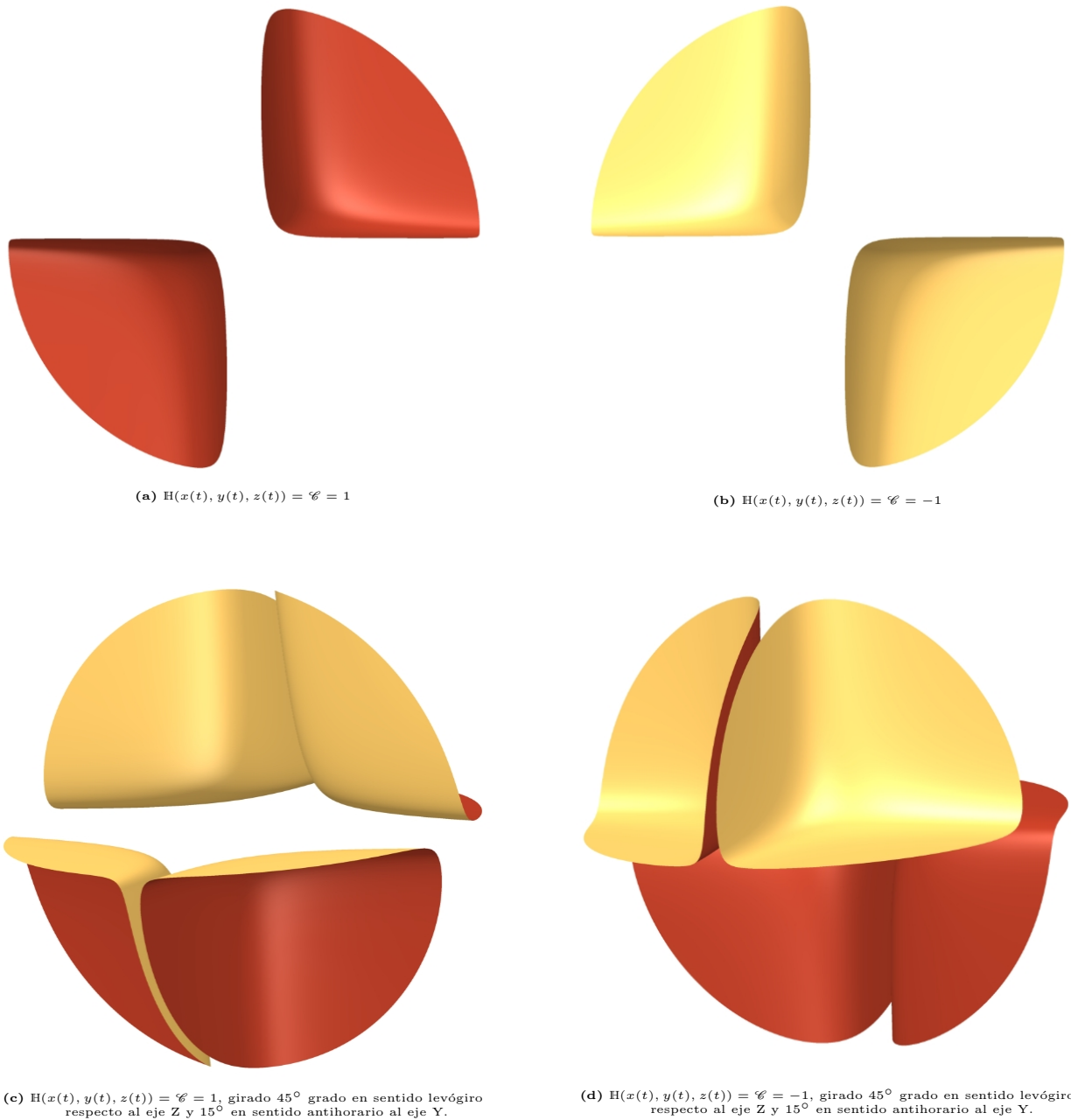


Figura 2.18. Figuras que representan las soluciones del sistema (2.62) como **superficies de nivel** de la **distribución real bivectorial**.

Finalmente, la **superficie integral** o la **variedad integral** está dada por la ecuación:

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = x^3(t)y(t)z^2(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \quad (2.63)$$

Hubieron términos nuevos en el ejemplo, estos necesitan de definiciones, teoremas y proposiciones que deben de responder algunas preguntas y generar un poco más de avances. La primera idea que surge es lo del *producto interior* entre un *univector* con un *bivector*, tal operación es posible realizarla, no se abordó en el capítulo (1), pero que surgió la idea, y se menciona una nueva operación que sirve para la generalización a *k-vectores*.

El *producto interior* de dos vectores $x(t)$ y $y(t)$ está definido como $x(t) \cdot y(t) = \|x(t)\| \|y(t)\| \cos \theta$, de forma similar el *producto interior* de dos *k-vectores* A_k y B_k está definido como $A_k \cdot B_k = \|A_k\| \|B_k\| \cos \theta$, donde θ es el *ángulo diedro* formado por los subespacios. Como se ve, el *producto interior* de dos *k-vectores* del mismo grado k da como resultado un escalar. Esto no se cumple cuando los *k-vectores* tienen distinto grado. Por ejemplo el *producto interior* de un *vector* ordinario \mathbf{v} y un *bivector* \mathbb{B} da como resultado un *vector*. Este *producto interior* es conocido como *contracción* ya que el *bivector* se “contrae” al transformarse en un *vector*. La *contracción* está definida como $\mathbf{v} \cdot \mathbb{B} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)$ cuyo resultado es un *vector*. Más precisamente, $\mathbf{v} \cdot \mathbb{B}$ es un *vector* que reside en el plano \mathbb{B} y por lo tanto la *contracción* es un tipo de *proyección* donde el *vector* \mathbf{v} es proyectado en el plano \mathbb{B} . Una particularidad de la *contracción* es que el *vector* resultante (que reside en el plano del *bivector*) siempre es ortogonal al *vector* original (es decir, el *vector* \mathbf{v} es ortogonal a su proyección en el plano \mathbb{B}), es decir, $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbb{B}) = \mathbf{0}$.

La *contracción* con *k-vectores* de mayores grados empieza a revelar su verdadera forma, por ejemplo, la *contracción* del *vector* \mathbf{v} y el *trivector* $\mathbb{T} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$ está definida como $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3)$ cuyo resultado es un *bivector*. El *bivector* resultante reside en el volumen \mathbb{T} (es un subespacio de \mathbb{T}) y es ortogonal al *vector* \mathbf{v} . De forma similar, la *contracción* de un *bivector* $\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2$ y el *trivector* \mathbb{T} está definida como $(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) \cdot (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{t}_3) = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \cdot (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{t}_3))$ el cual es un *vector* que reside en \mathbb{T} (es un subespacio de \mathbb{T}) y es perpendicular al *bivector* $\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2$.

Resumiendo, sean \mathbf{v} un *vector*, \mathbb{B} un *bivector* y \mathbb{T} un *trivector*:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbb{B} &= \text{vector ortogonal a } \mathbf{v}, \text{ subespacio de } \mathbb{B}, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbb{T} &= \text{bivector ortogonal a } \mathbf{v}, \text{ subespacio de } \mathbb{T}, \\ \mathbb{B} \cdot \mathbb{T} &= \text{vector ortogonal a } \mathbb{B}, \text{ subespacio de } \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Por los ejemplos, en general, la *contracción* (más precisamente, “*contracción por la izquierda*”) de un k -vector y un n -vector donde $n > k$ da como resultado un elemento de grado $n - k$ que es perpendicular al k -vector.

Un uso de la *contracción* es la *dualización*. En un espacio de n dimensiones la *dualización* es la operación que relaciona un k -vector con su *vector dual* ($n - k$)-vector. Por ejemplo en un plano tridimensional que pasa por el origen puede ser representado por un *bivector* o por un *vector normal* al plano. Ambos son k -vectores (donde que $k = 1$ para la *normal* y $k = 2$ para el *bivector*) que representan a la misma entidad: el plano. En *Álgebra Geométrica* una entidad (por ejemplo, un plano) puede representarse de forma “directa”, es decir como un subespacio (por ejemplo, *bivector*) o de forma “dualizada” como el subespacio complementario del subespacio directo (por ejemplo, la *normal del plano*). La *dualización* es simplemente la *contracción* de un k -vector con la reversa del pseudoescalar \tilde{I}_n , esta operación da como resultado un elemento de grado $n - k$ que es perpendicular al k -vector. La *dualización* es denotada con un asterisco (*) en superíndice, por ejemplo, el *dual* del vector \mathbf{v} es $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \cdot \tilde{I}_3$ el cual es el *bivector* perpendicular al *vector* \mathbf{v} . Una conexión con el *álgebra vectorial* es que la *dualización* del *producto exterior* de dos *vectores* \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 es equivalente al “*producto cruz*” de los *vectores*, es decir, $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)^* = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por lo tanto el *producto cruz* es redundante en *Álgebra Geométrica* y por lo tanto no es de uso común.

A continuación, se mencionan algunas de las propiedades de la *contracción por la izquierda*

Proposición 2.5. *Las siguientes propiedades para la **contracción** se cumplen:*

1. $a \cdot A = aA, \forall A \in \mathcal{G}_n$ y $a \in \mathbb{R}$,
2. $A \cdot a = 0, \forall A \in \mathcal{G}_n$ y $a \in \mathbb{R}$,
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \forall A, B, C \in \mathcal{G}_n$,
4. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B, \forall A, B, C \in \mathcal{G}_n$,
5. $A_k \cdot C_n = (A_{k-1} \wedge \mathbf{v}) \cdot C_n = A_{k-1} \cdot (\mathbf{v} \cdot C_n), \forall A_k, A_{k-1}, C_n \in \mathcal{G}_n$ y $\mathbf{v} \in V$,
6. $\mathbf{v} \cdot C_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} c_1 \wedge \dots \wedge (\mathbf{v} \cdot c_i) \wedge \dots \wedge c_n, \forall \mathbf{v} \in V, C_n \in \mathcal{G}_n$.

La proposición (2.5) se encuentra en [Mauricio2014] no demostrado, pero con las propiedades que muestra de manera particular, se puede demostrar la generalización de cada inciso. Se contextualiza el contexto de las *contracciones* en las *p-formas*, por lo que se da la siguiente definición.

Definición 2.29. *La **contracción** de una **p-forma diferencial** $\omega \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ por un **campo vectorial** $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ sobre una variedad \mathcal{M} es la forma $i_X \omega \in \Lambda^{p-1}(\mathcal{M})$ definida por*

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{p-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}). \quad (2.64)$$

Siendo X_1, \dots, X_{p-1} campos sobre \mathcal{M} . Si $f \in \Lambda^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$, se define $i_X f = 0$. Si $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M})$. La fórmula (2.64) se simplifica en $i_X \alpha := \alpha(X) \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Algunos autores dicen que la **contracción** $i_X \omega$ es un **producto interior** de X y ω . Se escribe $X \lrcorner \omega$ como sinónimo de $i_X \omega$, para marcar el contraste con el **producto exterior** $\alpha \wedge \omega = \epsilon_\alpha \omega$.

La *contracción de tensores* es una operación que reduce el orden total de un tensor y el *producto interno* de dos *tensores* se produce al contraer el *producto exterior* de los *tensores* (esto es, el *producto interior* está contenido en las *contracciones*), es, por decirlo de alguna manera, un caso particular de las *contracciones tensoriales* el *producto interior tensorial*. Las *contracciones* de p -formas poseen ciertas propiedades que funcionan como una derivación y como un *corchete de Lie* que se enunciarán a continuación.

Proposición 2.6. *La **contracción** es una derivación, es decir, satisface las siguientes propiedades:*

1. $i_X(\alpha + \beta) = i_X(\alpha) + i_X(\beta), \forall \alpha, \beta \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
2. $i_X(a\alpha) = ai_X(\alpha), \forall a \in \mathbb{R}, \alpha \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
3. $i_{X+Y}(\alpha) = i_X(\alpha) + i_Y(\alpha), \forall \alpha \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
4. $i_{aX}(\alpha) = ai_X(\alpha), \forall a \in \mathbb{R}, \alpha \in \Lambda^p(\mathcal{M})$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
5. $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X(\beta), \forall \alpha \in \Lambda^p(\mathcal{M}), \beta \in \Lambda^q(\mathcal{M})$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, y $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
6. $i_X^2 = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
7. Si f es una **0-forma** $i_X(f) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
8. Si α es una **1-forma** $i_X(\alpha) = \alpha(X), \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
9. $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
10. $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X = di_X d, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
11. $\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,
12. $\mathcal{L}_X i_X = i_X \mathcal{L}_X, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

La proposición (2.6) se encuentra en ([Andres2000], [Pascual] & [Varilly2014], p. 60, p. 139 y pp. 68 - 83) en el primero no hay demostraciones, y en los otros dos hay demostraciones parciales, es decir, no demuestran todas las propiedades. Sin embargo, es posible demostrarlos con las propiedades que se demuestran en los últimos dos libros antes mencionados y con las propiedades mencionadas para los *corchetes de Lie* (1.4) y la *derivada de Lie* (1.43).

Estas propiedades salvo la quinta son triviales; la quinta se puede mostrar mediante inducción. En algunas exposiciones se define i_X como un operador $i_X : \Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{p-1}(\mathcal{M})$ que satisfacen las propiedades anteriores, y entonces se demuestra que $i_X(\alpha)$ es necesariamente la $(p - 1)$ -forma que sobre (X_1, \dots, X_{p-1}) toma el valor $\alpha(X, X_1, \dots, X_{p-1})$.

Existe otro término y es el de *cantidad conservada*, es un término en el contexto de la *teoría de campos*, e influenciada por su formación matemática en *teoría de invariantes*, Emmy Noether (1882 - 1935), propuso en 1915. Es en el contexto continuo el análogo a las coordenadas cíclicas y *cantidades conservadas* en Mecánica.

Se utilizará un principio que se utiliza mucho en esta tesis, consistente en suponer ciertas condiciones generales que deben cumplir las leyes físicas. Este principio, llamado de covariancia o invarianza de forma, afirma que las leyes de la naturaleza deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia equivalentes. Esta es la formulación más general del principio y en cada teoría el experimento nos dará el conjunto de sistemas de referencia que en efecto son equivalentes, que en general estarán relacionados unos con otros por las transformaciones debidas a las *simetrías* del sistema.

Teorema 2.8 (Noether). *A toda transformación continua de las coordenadas y/o los campos que deje invariante la acción en un volumen cuatridimensional le corresponde una corriente conservada j^u en la evolución que cumple $D_u j^u = 0$.*

En pocas palabras, expresa que cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación. El teorema se denomina así por la matemática alemana Emmy Noether, que lo formuló en 1915. Además de permitir aplicaciones físicas prácticas, este teorema constituye una explicación de por qué existen leyes de conservación y magnitudes físicas que no cambian a lo largo de la evolución temporal de un sistema físico. La demostración puede verse en el libro ([Carlos], pp. 39 - 41), el cual está bien demostrado y con varios ejemplos. Este justifica lo que es una *cantidad conservada* de manera general.

Se probará este siguiente teorema en el campo de las p -formas, que es suficiente para justificar las *cantidades conservadas*.

Teorema 2.9. *Si $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ es la cantidad conservada para la distribución $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, entonces se cumple la siguiente fórmula:*

$$[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0} \quad (2.65)$$

Demostración. Sea $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$, entonces

$$\begin{aligned} [\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] &= [\nabla_{\wedge}(*\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z)] \\ &= [\nabla_{\wedge}\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))] \\ &= \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)}\hat{e}_x + \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}\hat{e}_y + \frac{\partial\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)}\hat{e}_z \end{aligned}$$

Se utiliza una notación más compacta, para operar algebraicamente, así que la fórmula queda como

$$[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] = \mathbb{H}_{x(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x + \mathbb{H}_{y(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_y + \mathbb{H}_{z(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_z \quad (2.66)$$

Se obtiene $\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, por lo que se hace $\delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$, de manera que al utilizar la ecuación (2.66) en la **codiferencial**, se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) &= \delta\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \\ &= *[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z)] \\ &= *\mathbb{H}_{x(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x + \mathbb{H}_{y(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_y + \mathbb{H}_{z(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_z \\ &= \mathbb{H}_{x(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \mathbb{H}_{y(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + \mathbb{H}_{z(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \\ &= \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Por lo que, nuestra ecuación final nos queda como

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbb{H}_{x(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \mathbb{H}_{y(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + \mathbb{H}_{z(t)}(x(t), y(t), z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \quad (2.67)$$

Al hacer la **contracción** o el **producto escalar** entre la ecuación (2.66) y la ecuación (2.67), se observa que:

$$\begin{aligned} [\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}_{2.66})] \cdot \mathbb{B}_{2.67} &= (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_x + \mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_y + \mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_z) \cdot (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + \mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \\ &= (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_x) \cdot (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z) - (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_x) \cdot (\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z) + (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_x) \cdot (\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \\ &\quad (\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_y) \cdot (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z) - (\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_y) \cdot (\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z) + (\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_y) \cdot (\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \\ &\quad (\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_z) \cdot (\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z) - (\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_z) \cdot (\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z) + (\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_z) \cdot (\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \\ &= \mathbb{H}_{x(t)}^2\hat{e}_x \cdot (\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z) - \mathbb{H}_{x(t)}\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_x \cdot (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z) + \mathbb{H}_{x(t)}\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_x \cdot (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \\ &\quad \mathbb{H}_{y(t)}\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_y \cdot (\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z) - \mathbb{H}_{y(t)}^2\hat{e}_y \cdot (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z) + \mathbb{H}_{y(t)}\mathbb{H}_{z(t)}\hat{e}_y \cdot (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \\ &\quad \mathbb{H}_{z(t)}\mathbb{H}_{x(t)}\hat{e}_z \cdot (\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z) - \mathbb{H}_{z(t)}\mathbb{H}_{y(t)}\hat{e}_z \cdot (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z) + \mathbb{H}_{z(t)}^2\hat{e}_z \cdot (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) \end{aligned}$$

Ya se llegó en la parte donde se hace el **producto interior** entre una **1-forma** y una **2-forma**, ahora se necesitan las propiedades de las **contracciones**, proposiciones (2.5) y (2.6), hay que recordar que \mathbb{R}^3 es una **geometría ortogonal**, esto quiere decir que la **base** que forman nuestro espacio tridimensional es **ortonormal**, y $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ es también ortogonal, ya que las **bases** anticonmutan, requisito para tener una **geometría ortogonal**, con eso y las propiedades de la proposición (2.5) se hacen las siguientes operaciones.

$$\begin{aligned}
 \widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) &= (\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_y) \wedge \widehat{e}_z - \widehat{e}_y \wedge (\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_z) = \mathbf{0} \\
 \widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z) &= (\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_x) \wedge \widehat{e}_z - \widehat{e}_x \wedge (\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_z) = \widehat{e}_z \\
 \widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) &= (\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_x) \wedge \widehat{e}_y - \widehat{e}_x \wedge (\widehat{e}_x \cdot \widehat{e}_y) = \widehat{e}_y \\
 \widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) &= (\widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_y) \wedge \widehat{e}_z - \widehat{e}_y \wedge (\widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_z) = \widehat{e}_z \\
 \widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z) &= (\widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_x) \wedge \widehat{e}_z - \widehat{e}_x \wedge (\widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_z) = \mathbf{0} \\
 \widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) &= (\widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_x) \wedge \widehat{e}_y - \widehat{e}_x \wedge (\widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_y) = -\widehat{e}_x \\
 \widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) &= (\widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_y) \wedge \widehat{e}_z - \widehat{e}_y \wedge (\widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_z) = -\widehat{e}_y \\
 \widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z) &= (\widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_x) \wedge \widehat{e}_z - \widehat{e}_x \wedge (\widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_z) = -\widehat{e}_x \\
 \widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) &= (\widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_x) \wedge \widehat{e}_y - \widehat{e}_x \wedge (\widehat{e}_z \cdot \widehat{e}_y) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo todos estos vectores en las correspondientes **contracciones** se tiene que

$$\begin{aligned}
 [\nabla \wedge (*T_{2.66})] \cdot B_{2.67} &= H_{x(t)}^2 \widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) - H_{x(t)} H_{y(t)} \widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z) + H_{x(t)} H_{z(t)} \widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\
 &\quad H_{y(t)} H_{x(t)} \widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) - H_{y(t)}^2 \widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z) + H_{y(t)} H_{z(t)} \widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\
 &\quad H_{z(t)} H_{x(t)} \widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) - H_{z(t)} H_{y(t)} \widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z) + H_{z(t)}^2 \widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\
 &= -H_{x(t)} H_{y(t)} \widehat{e}_z + H_{x(t)} H_{z(t)} \widehat{e}_y + H_{y(t)} H_{x(t)} \widehat{e}_z - H_{y(t)} H_{z(t)} \widehat{e}_x - H_{z(t)} H_{x(t)} \widehat{e}_y + H_{z(t)} H_{y(t)} \widehat{e}_x \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Esto nos muestra que la ecuación (2.65) se cumple, y por tanto, se tiene el teorema. □

Con el teorema (2.9) ya se puede hablar de que existen *cantidades conservadas*, y propiamente de *distribuciones bivectoriales* que tienen *conjuntos límites*. En esta sección (2.2) hay que darse cuenta que en todo caso sí se han obtenido *conjuntos límites*, sin embargo, ¡todavía no se habla de *2-ciclos límite!*, en los ejemplos (2.5) y (2.6) se presentaron *distribuciones* y sus correspondientes *variedades integrales*, en los dibujos se ve que estos dividen al espacio en más de dos *conjuntos conexos*, una de las características para obtener *2-ciclos límite* es la de tener una *variedad integral regular simple por ramas* de tal manera que solo existan dos *conjuntos conexos*, el interior y el exterior.

Esto involucra dos conceptos matemáticos, el primero es el *teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder* el cuál habla acerca de *variedades integrales regulares simples* y el segundo de la *característica de Euler* que tiene que ver, a su vez, con el *teorema de Gauss-Bonnet*, están relacionados, estos dos términos nos definirán el tipo de *variedades suaves conexas regulares simples y sin asas* que se necesitan para empezar a construir los *2-ciclos límite* en las *3-formas* $\lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

Si se considera la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(t) + y^2(t) = 1\}$, resulta que su complementario $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$ es la unión disjunta de dos *abiertos conexos* $A = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(t) + y^2(t) < 1\}$ y $B = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(t) + y^2(t) > 1\}$ con frontera común $\partial A = \partial B = \mathbb{S}^1$. Se dirá que *la circunferencia separa el plano en dos componentes conexas*. La componente acotada se llama *interior* de \mathbb{S}^1 y la no acotada *exterior* de \mathbb{S}^1 . Aunque basta emplear la ecuación de la circunferencia para saber si un punto $\vec{p} \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$ está en el *interior* o en el *exterior*, también se puede utilizar el siguiente método: se dan *orientaciones positivas* al plano y a la circunferencia, se fija una semirrecta transversa a la circunferencia que una el punto \vec{p} con el punto del infinito y se calcula el *número de intersección algebraica* de la semirrecta y la circunferencia, es decir, por cada punto de intersección, se suma un 1 o un -1 según que la *orientación* determinada por la semirrecta y la circunferencia sea positiva o negativa. Supóngase que las *orientaciones* elegidas son iguales y coinciden con la orientación contraria a las agujas del reloj. Si el *número de intersección algebraica* es igual a 1, el punto está en el interior; si es 0, en el exterior [véase figura (2.19)]. El cambio de una de las *orientaciones* se traduce en un cambio de signo en el *número de intersección algebraica*.

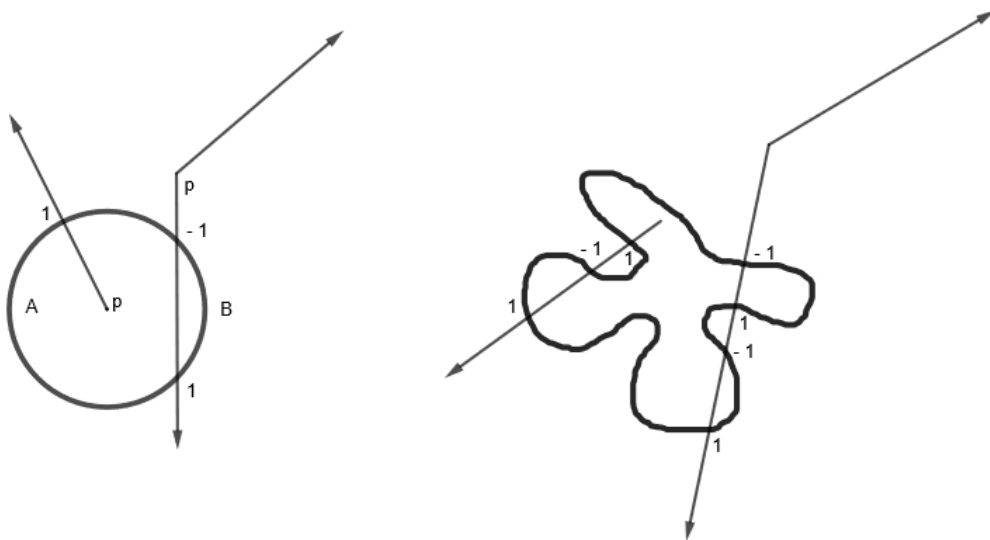


Figura 2.19. Ejemplo que muestra un **punto interior** y otro **punto exterior** en la curva, con sus *orientaciones* y los cortes de la recta transversal con la circunferencia. Nótese las intersecciones de la recta transversal con las **curvas algebraicas cerradas**.

Existe otro método; se traza una semirrecta desde nuestro punto hasta que se esté seguro de que ya se está en el exterior de la curva. Esta semirrecta cortará a la curva en varios puntos. Se cuenta el número de puntos donde la semirrecta corta transversalmente a la curva (los puntos de corte donde la semirrecta sea tangente a la curva no se cuenta). Entonces: Si ese número de puntos de corte es par, el punto está en el exterior de la curva. Si ese número de puntos de corte es impar; el punto está en el interior de la curva. Con esto se determina el *número de intersección algebraica*.

Si se sustituye \mathbb{S}^1 por un subespacio $C \in \mathbb{R}^2$ homeomorfo a \mathbb{S}^1 , la afirmación anterior resulta menos evidente (como se observa en la figura (2.20), Suponiendo que C separa \mathbb{R}^2 en dos *componentes conexas*, el mismo procedimiento de antes nos permite saber si un punto de $\mathbb{R}^2 - C$ está en el *interior* o en el *exterior* [véase la figura (2.20)]. Ahora bien, el problema no está ahí, sino en la existencia misma de un *interior* y un *exterior*.

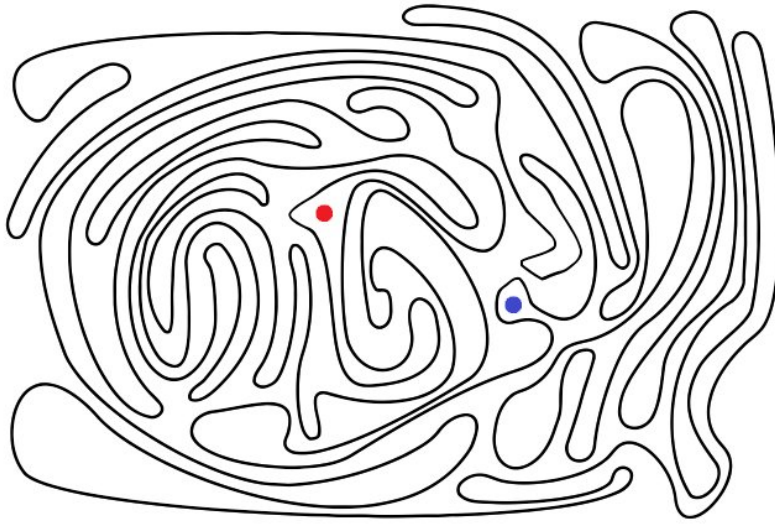


Figura 2.20. Curva algebraica cerrada regular y simple en el plano bidimensional. Nótese que existe un *interior* y un *exterior* marcados con puntitos azul y rojo respectivamente a la *curva cerrada algebraica* elegida. Imagen tomada de https://pbs.twimg.com/media/DSybx_uWsAA2ph_.jpg:large.

Un subespacio $C \in \mathbb{R}^2$ homeomorfo a \mathbb{S}^1 es la imagen de una *curva continua* $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, *cerrada* (es decir, los extremos $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ coinciden) y *simple* (es decir, γ es inyectiva). Identificando la *curva cerrada simple* γ con su imagen C , se dirá que C es una *curva de Jordan*. La solución a la cuestión planteada viene dada por el *teorema de separación de Jordan*, que se le suele atribuir a Camille Jordan como introductor de la noción que lleva su nombre y como autor de *Cours d'Analyse e l'École Polytechnique*, en cuya tercera edición de 1905 apareció publicado este resultado (véase [Camille1882] y [Camille1893]). Se añadirá el nombre de Arthur Schönflies, quien también publicó el mismo resultado en 1908 (véase [Arthur1908]), ya que, aunque todas las demostraciones de la época son incompletas, la solución actual del problema se basa en sus ideas.

Teorema 2.10. [*separación de Jordan-Brouwer*] [Brouwer, 1912] Una **n -esfera topológica** Σ separa a \mathbb{R}^{n+1} en dos **componentes conexos con frontera común** \mathbb{S}^n .

El teorema se encuentra en ([Fernando2000], p. 3) no demostrado, pero pone un referencia donde ese teorema es demostrado por Brouwer. Se pueden encontrar demostraciones del teorema de *Jordan-Brouwer*, el esquema de la prueba es idéntica al de Brouwer, pero se necesita utilizar técnicas homológicas en un punto, que en su momento pareció evidente a Brouwer. En el caso de dimensión 2, no es necesario emplear estos métodos, pero hay que recurrir al *grupo fundamental*, otro invariante topológico de carácter algebraico, para simplificar la demostración. El resultado de Brouwer conlleva una cuestión natural: Se sabe que una curva de Jordan $C \subset \mathbb{S}^2$ bordea dos regiones compactas homeomorfas al disco \mathbb{D}^2 y resulta natural preguntarnos si una n -esfera topológica $\Sigma \subset \mathbb{S}^n$ también bordea dos *regiones compactas homeomorfas al disco* \mathbb{D}^n . En 1924, J. W. Alexander, publicó un contraejemplo, que hoy se conoce como *esfera con cuernos de Alexander*: se trata de una *2-esfera topológica* Σ contenida en \mathbb{R}^3 [representada en la figura (2.21)] que bordea una *región compacta homeomorfa al disco* \mathbb{D}^3 , pero cuyo complementario en $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ no es *homeomorfo al disco*.

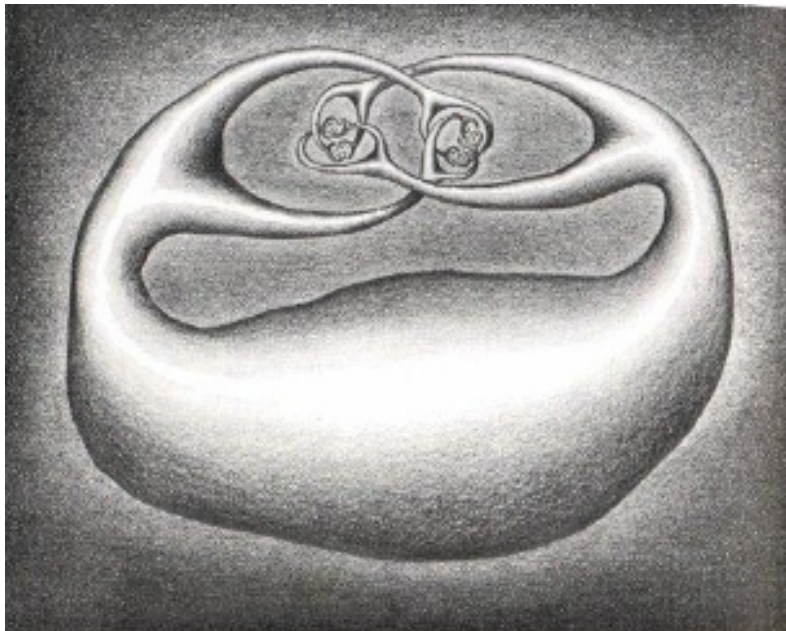


Figura 2.21. La esfera cornuda de Alexander. Tomado de [Fernando2000]. Un caso patológico que muestra la dificultad de encontrar un *interior* y un *exterior* en \mathbb{R}^2 .

Si se piensa en una *superficie regular* $S \subset \mathbb{R}^3$, pero en lugar de utilizar dos parámetros reales, se usa un número arbitrario n de tales parámetros, se obtiene la noción de *hipersuperficie regular*²⁷ $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que siempre se supondrá *conexa*. La esfera

$$\mathbb{S}^n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \}$$

y el elipsoide

²⁷En matemáticas, una *hipersuperficie* es una *variedad* n -dimensional con $n > 2$, es decir, un objeto geométrico que generaliza la noción de una superficie bidimensional a dimensiones superiores, del mismo modo que el *hiperplano* generaliza la noción de plano.

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\}$$

son dos ejemplos de *hipersuperficies compactas* difeomorfas entre sí. Por el *teorema de Jordan-Brouwer*, se sabe que ambas separan a \mathbb{R}^{n+1} en dos *componentes conexas*. Surge una nueva pregunta: ¿cualquier *hipersuperficie compacta* tiene esa propiedad? La respuesta es una consecuencia del siguiente resultado de Elon Lima [véase [Elon1987]]:

Teorema 2.11. *Si $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie regular compacta, existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H = f^{-1}(0)$ y en cada punto $\mathbf{x} \in H$ el gradiente $(\nabla f)(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.*

El teorema (2.11) se encuentra en ([Fernando2000], p. 5) no demostrado, pero da una referencia en donde Elon Lima lo demuestra. Se trata de un resultado conocido desde los inicios de la geometría diferencial moderna. La demostración de Elon Lima está basada en una idea a la que se intentará sacar partido. Por ahora, se mostrarán dos consecuencias del teorema. En primer lugar, puesto que el gradiente ∇f es un *campo de vectores normal* a H que no se anula en ningún punto de H , se tendrá el siguiente resultado:

Teorema 2.12. *Cualquier hipersuperficie regular compacta es orientable.*

El teorema (2.12) se encuentra en ([Fernando2000], p. 5) no demostrado, pero en el mismo teorema (2.11) Elon Lima lo demuestra. La respuesta a la pregunta que se acabó de plantear requerirá una prueba más detallada:

Teorema 2.13 (teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder 1). [Wilder, 1949] *Cualquier hipersuperficie regular compacta H separa \mathbb{R}^{n+1} en dos componentes conexas con frontera común H .*

El teorema (2.13) se encuentra en ([Fernando2000], pp. 5 - 6) demostrado. Hay demostraciones de este teorema en textos de Geometría Algebraica y Topología Algebraica, la denominación que se ha dado a este teorema se debe a que se trata de un caso particular de un resultado mucho más general de Raymond L. Wilder (véase [Raymond1949]). En primer lugar, aunque la *condición de regularidad* es esencial en el resultado y el *teorema de Lima*, el *teorema de separación* sigue siendo cierto si las parametrizaciones locales de H son solo continuas:

Teorema 2.14 (teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder 2). [Wilder, 1949] *Cualquier n-variedad topológica compacta \mathcal{M} embebida en \mathbb{R}^{n+1} separa \mathbb{R}^{n+1} en dos componentes conexas con frontera común M .*

El teorema (2.11) se encuentra en ([Fernando2000], p. 6) no demostrado, pero da una referencia en la que el mismo Wilder lo demuestra, y también da una referencia en donde Elon Lima lo demuestra. De hecho, el resultado de Wilder (2.13) está formulado en el contexto más general de las *variedades topológicas generalizadas* y es válido para lo que hoy se conoce como *variedades de homología*. El *teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder* muestra que cualquier *hipersuperficie compacta* H separa \mathbb{R}^{n+1} en dos *componentes conexas*. Se dirá que \mathbb{R}^{n+1} es *2-separado* por H .

Definición 2.30. *Una n-variedad topológica \mathcal{M} embebida en \mathbb{R}^{n+1} o $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cap \{\infty\}$ es localmente plana en un punto \mathbf{x} si existe un entorno U de \mathbf{x} en \mathbb{R}^{n+1} y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que $\varphi(U \cap \mathcal{M}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. En caso contrario, se dice que \mathbf{x} es un punto salvaje de \mathcal{M} .*

La *esfera cornuda de Alexander* es un ejemplo de *esfera salvaje*. De manera precisa, Σ contiene un *conjunto de Cantor* de puntos salvajes. La noción de *n-subvariedad topológica localmente plana* es la versión topológica de la noción de *hipersuperficie regular*. En esta situación, no nos puede sorprender que el *teorema de Schönflies* siga siendo válido en cualquier dimensión:

Teorema 2.15 (teorema de Schönflies). [Mazur, 1959; Brown, 1960; Morse, 1960] *Una n-esfera topológica localmente plana $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$ separa \mathbb{S}^{n+1} en dos componentes conexas A y B con frontera común Σ , cuyas clausuras \bar{A} y \bar{B} son homeomorfas al disco \mathbb{D}^{n+1} mediante homeomorfismos que envían $\Sigma = \partial A = \partial B$ en $\mathbb{S}^n = \partial \mathbb{D}^{n+1}$.*

El teorema (2.15) se encuentra en ([Fernando2000], p. 14) no demostrado, sin embargo, en la tesis [Maria2018] se encuentra la demostración y varias de sus consecuencias. Puesto que el tipo de *variedades* que se van a utilizar son *regulares, cerradas, simples, conexas, contractibles a un punto, suaves* y *sin asas*, se puede decir que los teoremas (2.14) y (2.15) son los que sirven para los *r-ciclos límite*. Ahora se explorarán las ideas de la *característica de Euler* y la teoría que hay detrás y cómo nos puede ayudar a la construcción de *variedades*.

Se necesita ahora, un bagaje matemático para entender la *característica de Euler*, en la sección (1.2), al final de la demostración del *Lema de Poincaré* (1.18), se trató un poco lo de las *homotopías* y las *clases homotópicas* a grosso modo, con esto en mente, se inicia con lo del *grado de una aplicación*, el objetivo principal es el estudio de las *clases homotópicas* de aplicaciones entre dos *variedades cerradas orientables* \mathcal{N} y \mathcal{M} de una misma dimensión n , particularmente cuando \mathcal{M} es una esfera. Considérese una aplicación suave $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ y sea $y_0 \in \mathcal{M}$ un valor regular de f . Esto significa que la preimagen completa del punto y_0 consta de un número finito de puntos x_1, \dots, x_m de la *variedad* \mathcal{N} ; además, si $x_{i\beta}$ son las coordenadas locales en un entorno de x_i e $y_{0\alpha}$ son las coordenadas locales en un entorno de y_0 , entonces el jacobiano de la aplicación $\det \left(\frac{\partial y_{0\alpha}}{\partial x_{i\beta}} \right)$, $i = 1, \dots, m$, es distinto de cero. Dado que las variables \mathcal{N} y \mathcal{M} son *orientables*, todos los jacobianos de los cambios de coordenadas locales en la intersección de los entornos coordenados son positivos.

Definición 2.31. *Se denomina grado de una aplicación suave $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ de variedades conexas orientadas cerradas con respecto a un valor regular $y_0 \in \mathcal{M}$ al número*

$$gr(f) = \sum_{f(x_i)=y_0} \sigma \det \left(\frac{\partial y_{0\alpha}}{\partial x_{i\beta}} \right),$$

donde x_1, \dots, x_m son las preimágenes de y_0 mediante f y σ es la signatura. (Nótese que la *orientación* definida en \mathcal{M} y \mathcal{N} determina unívocamente los signos de los jacobianos de las aplicaciones en los puntos x_i).

El *grado* tiene propiedades de invarianza.

Teorema 2.16. *El grado de una aplicación no depende de la elección del valor regular y_0 y no cambia durante las homotopías.*

El teorema (2.16) se encuentra en ([Boris2012], pp. 103- 104) demostrado. Se describirán ahora generalizaciones destacadas de la definición de *grado*.

1. La generalización de noción de *grado* de una aplicación relativas entre *variedades con borde* se lleva a cabo de la siguiente manera. Sea $f : (\mathcal{N}, \partial\mathcal{N}) \rightarrow (\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$ una aplicación de esta clase entre dos *variedades compactas con borde* \mathcal{N} y \mathcal{M} que tienen una misma dimensión n . Dado que f pone en correspondencia el borde con el borde, la preimagen completa de un *punto regular interior* $y_0 \in \mathcal{M}$ se encuentra totalmente en el *interior* de \mathcal{N} y lo mismo se verifica también para cualquier aplicación relativamente *homotópica* a f . Si se define análogamente a la definición 2.31 se obtiene que el grado definido no depende de la elección del valor regular y_0 en el interior \mathcal{M} , entonces copiando el teorema 2.16 se obtiene que el *grado* definido no depende de la elección del valor regular y_0 en el *interior* de \mathcal{M} y no cambia durante las *homotopías* en esta clase de aplicaciones.

Los bordes $\partial\mathcal{N}$ y $\partial\mathcal{M}$ son *variedades cerradas orientadas* de dimensión $n - 1$ (pues \mathcal{N} y \mathcal{M} son orientadas). Si se supone que los bordes son *conexos* (en realidad esto no tiene mucha importancia) se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *El grado de la aplicación del borde coincide con el grado de la aplicación de la propia variedad: $gr(f)|_{\partial\mathcal{N}} = gr(f)$.*

El teorema (2.17) se encuentra en ([Boris2012], pp. 105- 106) demostrado.

2. La segunda ampliación del concepto de grado de una aplicación se refiere a la clase de las aplicaciones propias. La definición 2.31 y el teorema 2.16 se pueden mantener, sin cambios esenciales, para las *homotopías* propias.
3. El *grado* respecto a un *valor regular* de una aplicación $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$, donde \mathcal{M} no es orientable, no está bien definido, pues los jacobianos pueden cambiar de signo. No obstante, el residuo *mod 2* está bien definido para tales aplicaciones, así que se tomará este residuo como la definición de *grado de una aplicación entre variedades no orientables*.

Si la *variedad* \mathcal{M} es una *esfera n-dimensional* \mathbb{S}^n , el *grado* de la aplicación es un *invariante homotópico*. Se verifica el siguiente teorema.

Teorema 2.18. *Dos aplicaciones suaves $f, g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}^n$ de una variedad \mathcal{N} orientada, cerrada n-dimensional son homotópicas si y sólo si sus grados coinciden.*

El teorema (2.18) se encuentra en ([Boris2012], pp. 106 - 107) demostrado. Ahora se estudia el comportamiento bajo una aplicación $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ (de grado finito) de la integral de una *p-forma* de rango n definida en una *variedad* \mathcal{M} cerrada orientable n -dimensional. Sea $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ una aplicación suave de grado $q = gr(f)$ y sea ω una *p-forma* de rango $n = \dim(\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{N})$ definida en \mathcal{M} que tiene por expresión $\varphi_i(y)dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_n}$ en un sistema de coordenadas local (y_{i_α}) del i -ésimo entorno coordenado en \mathcal{M} . Por definición (localmente)

$$f^*\Omega = \varphi_i(f(x))dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n} \det \left(\frac{\partial y_{i_\alpha}}{\partial x_{j_\beta}} \right),$$

donde (x_{α_j}) son las coordenadas locales en \mathcal{N} , más exactamente, en aquella parte de \mathcal{N} que se pone en correspondencia mediante la aplicación f con la región de coordenadas (y_{α_i}) .

Teorema 2.19. *Para $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ y Ω que se acaba de definir se tiene*

$$\int_{\mathcal{N}} f^*\Omega = [gr(f)] \int_{\mathcal{M}} \Omega.$$

El teorema (2.19) se encuentra en ([Boris2012], pp. 111 - 112) demostrado. Se da la siguiente observación acerca del teorema (2.19).

Observación 2.3. *El teorema (2.19) es válido también en el caso no compacto si la aplicación f es propia y la forma Ω es "finita" (tiene soporte compacto en \mathcal{M}), y en el caso cuando \mathcal{N} y \mathcal{M} son variedades con bordes (y f pone en correspondencia $\partial\mathcal{N}$ con $\partial\mathcal{M}$).*

Se considera ahora un *campo vectorial suave* $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{X}_i(\mathbf{x}(t))), i = 1, \dots, n$, definido en cierta región U de un *espacio euclídeo n-dimensional* \mathbb{R}^n de coordenadas $(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Supóngase que $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$ no se anula en dicha región, entonces en U está definido un *campo de vectores unidad* $n(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))}{\|\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))\|}$. De esta forma queda definida la *aplicación esférica* (o *aplicación de Gauss*) $f : U \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ que a cada punto $\mathbf{x}(t) \in U$ le pone en correspondencia el extremo del *vector unidad* $n(\mathbf{x}(t))$ con punto de aplicación en el origen de coordenadas. Si H es una *hipersuperficie cerrada* arbitraria que está contenida completamente en U , entonces el grado de la aplicación $|f|_H : H \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ se denomina *grado del campo vectorial* $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$ *en la hipersuperficie* H .

Supóngase que la hipersuperficie H está definida localmente en forma paramétrica

$$\mathbf{X}_\alpha(t) = \mathbf{X}_\alpha(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)), \alpha = 1, \dots, n$$

En la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (e incluso en toda la región $\mathbb{R}^n/\{\mathbf{0}\}$) está definida la siguiente *p-forma cerrada* Ω de rango $n - 1$ (forma de volumen en \mathbb{S}^{n-1}):

$$\Omega(\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))) = \frac{1}{\gamma_n} \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^i x_i(t) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n}{(x_1^2(t) + \cdots + x_n^2(t))^{n/2}},$$

(donde el signo \widehat{dx}_i significa que esta diferencial ha sido omitida). El coeficiente de normalización γ_n se ha elegido a partir de la condición

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))) = 1$$

A partir del teorema (2.19) se deduce el siguiente teorema

Teorema 2.20. *Para un campo vectorial arbitrario $\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))$ y una hipersuperficie cerrada H el grado del campo \mathbb{X} en H es igual a $\int_H f^*\Omega$, donde f es la aplicación esférica de Gauss:*

$$gr(f) = gr_H(\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))) = \frac{1}{\gamma_n} \int_H \frac{1}{|\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))|^n} \det \begin{pmatrix} \mathbb{X}_1(\mathbf{x}(t)) & \cdots & \mathbb{X}_n(\mathbf{x}(t)) \\ \frac{\partial \mathbb{X}_1(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1(t)} & \cdots & \frac{\partial \mathbb{X}_n(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1(t)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \mathbb{X}_1(\mathbf{x}(t))}{\partial x_{n-1}(t)} & \cdots & \frac{\partial \mathbb{X}_n(\mathbf{x}(t))}{\partial x_{n-1}(t)} \end{pmatrix} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}.$$

El teorema (2.20) se encuentra en ([Boris2012], 112 - 114) demostrado de manera particular para $n = 2$, aunque da ideas para la demostración de la generalización. Este teorema se deduce de las definiciones de $f^*\Omega$ y de la forma Ω . De interés es el caso cuando el campo vectorial $\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))$ es un campo unitario ($\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) = 1$) dirigido ortogonalmente a la superficie S hacia la parte exterior. Se sabe que la forma $f^*\Omega$ tiene entonces por expresión

$$f^*\Omega = K d\sigma = K \sqrt{g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1},$$

donde K es la curvatura de Gauss de la hipersuperficie (definido como el producto de las curvaturas principales) y $d\sigma = \sqrt{g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$ es el elemento de volumen estándar generado por la métrica inducida en la superficie H por la *inmersión inyectiva*²⁸ de H en \mathbb{R}^n con métrica euclídea. Se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.21. *La integral de la curvatura K extendida a una superficie cerrada es igual al grado de la aplicación de Gauss de dicha superficie multiplicado por γ_n (el área de la esfera unidad en el espacio n -dimensional).*

El teorema (2.21) se encuentra en ([Boris2012], p. 114) demostrado, pero páginas atrás. Se calcula ahora el grado de la aplicación de Gauss.

Teorema 2.22. *La paridad del número de puntos de autointersección de una curva es contraria a la paridad del grado de la aplicación de Gauss f de γ*

El teorema (2.22) se encuentra en ([Boris2012], pp. 115 - 116) demostrado. Para el caso tridimensional, para el caso de una superficie suave cerrada y orientada, el siguiente teorema se sigue

Teorema 2.23. *Si φ una función altura definida en la superficie S cuyo valor en un punto $P \in S$ coincide con la coordenada z de P , $\varphi(P) = z$, entonces todos los puntos críticos de esta función son regulares y el conjunto de los puntos críticos coincide con la unión de dos preimágenes: $f^{-1}(y_0) \cap f^{-1}(y_0^*)$.*

El teorema (2.23) se encuentra en ([Boris2012], p. 117) demostrado. Si se suman las contribuciones de todos los puntos con sus signos correspondientes, se obtiene el teorema siguiente:

Teorema 2.24. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$2gr(f) = \sum_{P_j} (-1)^{\alpha(P_j)},$$

donde la suma se extiende al conjunto de puntos críticos de la función altura $\varphi = z$ y donde $\alpha(P_i) = 0$ para aquellos puntos críticos donde φ presenta mínimos y máximos (donde $\sigma K = +1$), y $\alpha(P_1) = 1$ para los puntos de silla (donde $\sigma K = -1$).

El teorema (2.24) se encuentra en ([Boris2012], pp. 117 - 118) demostrado. Por los teoremas (2.22), (2.23) y (2.24), se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.25 (teorema de Gauss-Bonnet). *Toda superficie S con g asas dotada de una métrica riemanniana satisface la fórmula*

$$\frac{1}{4\pi} \int_S R d\sigma = 2 - 2g$$

El teorema (2.25) se encuentra en ([Boris2012], p. 118) no demostrado, pero comenta un párrafo arriba del enunciado del teorema que la demostración se encuentra en el Corolario 37.4.3 Parte I más adelante. Una superficie compacta como la esfera, el toro, el bitoro, un disco con borde, etcétera. Surgen de deformar de forma continua un poliedro. Por ejemplo, si se deforma un icosaedro hasta obtener una esfera las aristas se transformarán en curvas sobre la esfera, las caras serán "triángulos" y los vértices serán puntos sobre las mismas. Así la esfera quedará "triangulada". Para definir la característica de una superficie se usaran estas triangulaciones realizando la fórmula análoga $\chi(S) = \text{Triángulos} - \text{Lados} + \text{Vértices} = T - L + V$. En realidad las triangulaciones no deben ser hechas necesariamente con triángulos, sino con cualquier polígono, teniendo en cuenta que dos polígonos solo compartan una arista como máximo, y que, si comparten un lado, solo compartan los dos vértices de ese lado. Así la generalización de la característica de Euler para una superficie cerrada S es

$$\chi(S) = \text{Polígonos} - \text{Lados} + \text{Puntos} = P - L + V$$

La característica de Euler de superficies orientadas cerradas se relaciona con su género g , que es un número que describe la cantidad de «asas» que tiene la superficie. La relación es dada por:

$$\chi(S) = 2 - 2g \tag{2.68}$$

Por ejemplo: El toro (la rosquilla) tiene una asa y por lo tanto $\chi = 2 - 2g = 2 - 2 = 0$. Se hace el siguiente ejemplo.

²⁸En el apéndice (A) se da el concepto de *inmersión inyectiva* en la definición (A.24).

Ejemplo 2.7. Supóngase que se tiene la **distribución bivectorial**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= B_{yz}(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) &= B_{zx}(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= B_{xy}(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}\quad (2.69)$$

Donde $B_{yz}(x(t), y(t), z(t))$, $B_{zx}(x(t), y(t), z(t))$ y $B_{xy}(x(t), y(t), z(t))$ son polinomios. Si la ecuación (2.69) es una **distribución bivectorial cocerrada**. Dar un ejemplo explícito de cómo deben de ser B_{yz} , B_{zx} y B_{xy} de manera que los **conjuntos límites sean superficies cerradas** entre otras de las posibilidades geométricas que existen.

Solución. Se crea una familia de superficies algebraicas de la forma

$$\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = ax^2(t) + by^2(t) + cz^2(t) + dx^2(t)y^2(t) + ex^2(t)z^2(t) + fy^2(t)z^2(t) = \mathcal{C} \quad (2.70)$$

Donde a, b, c, d, e y f son constantes reales positivas.

Mediante una función (el **operador estrella de Hodge**), se puede corresponder un **isomorfismo natural** con su **campo trivectorial**

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = (ax^2(t) + by^2(t) + cz^2(t) + dx^2(t)y^2(t) + ex^2(t)z^2(t) + fy^2(t)z^2(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z \quad (2.71)$$

A la función $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ de la ecuación (2.71) se le aplica una **codiferencial**, para obtener las componentes de una **distribución bivectorial para nuestro trivector**

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) &= \delta\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) \\ &= *[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] \\ &= *[\nabla_{\wedge}*(ax^2(t) + by^2(t) + cz^2(t) + dx^2(t)y^2(t) + ex^2(t)z^2(t) + fy^2(t)z^2(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z] \\ &= *[\nabla_{\wedge}(ax^2(t) + by^2(t) + cz^2(t) + dx^2(t)y^2(t) + ex^2(t)z^2(t) + fy^2(t)z^2(t))] \\ &= *[(2ax(t) + 2dx(t)y^2(t) + 2ex(t)z^2(t))\hat{e}_x + (2by(t) + 2dx^2(t)y(t) + 2fy(t)z^2(t))\hat{e}_y + (2cz(t) \\ &\quad + 2ex^2(t)z(t) + 2fy^2(t)z(t))\hat{e}_z] \\ &= (2ax(t) + 2dx(t)y^2(t) + 2ex(t)z^2(t))\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - (2by(t) + 2dx^2(t)y(t) + 2fy(t)z^2(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z \\ &\quad (2cz(t) + 2ex^2(t)z(t) + 2fy^2(t)z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y\end{aligned}$$

Si se usa la **asignación** planteada de la ecuación (2.52), se obtiene que

$$\begin{aligned}B_{yz} &= 2ax(t) + 2dx(t)y^2(t) + 2ex(t)z^2(t) \\ B_{zx} &= 2by(t) + 2dx^2(t)y(t) + 2fy(t)z^2(t) \\ B_{xy} &= 2cz(t) + 2ex^2(t)z(t) + 2fy^2(t)z(t)\end{aligned}\quad (2.72)$$

Ahora se verá que $\delta\mathbb{X}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0}$, con esto se mostraría que la **distribución bivectorial es conservativa**

$$\begin{aligned}\delta\mathbb{B} &= *[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)))] \\ &= *[\nabla_{\wedge}*((2ax(t) + 2dx(t)y^2(t) + 2ex(t)z^2(t))\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - (2by(t) + 2dx^2(t)y(t) + 2fy(t)z^2(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z \\ &\quad (2cz(t) + 2ex^2(t)z(t) + 2fy^2(t)z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y)] \\ &= *[\nabla_{\wedge}((2ax(t) + 2dx(t)y^2(t) + 2ex(t)z^2(t))\hat{e}_x + (2by(t) + 2dx^2(t)y(t) + 2fy(t)z^2(t))\hat{e}_y \\ &\quad + (2cz(t) + 2ex^2(t)z(t) + 2fy^2(t)z(t))\hat{e}_z)] \\ &= *[4dx(t)y(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_x + 4ex(t)z(t)\hat{e}_z \wedge \hat{e}_x + 4dx(t)y(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y + 4fy(t)z(t)\hat{e}_z \wedge \hat{e}_y \\ &\quad + 4ex(t)z(t)\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + 4fy(t)z(t)\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z] \\ &\quad *[(4dx(t)y(t) - 4dx(t)y(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y + (4ex(t)z(t) - 4ex(t)z(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + (4fy(t)z(t) - 4fy(t)z(t))\hat{e}_y \wedge \hat{e}_z] \\ &= *0 \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

De esto, la ecuación (2.72) es una **distribución conservativa**. A continuación, se da un bosquejo de dos posibles **conjuntos límites** para la familia de **superficies algebraicas** de la ecuación 2.72, con a, b, c, d, e y f constantes reales positivas y variando la cantidad conservada \mathcal{C} que representa las **superficies de nivel** que son los **conjuntos límites del sistema dinámico** de la ecuación 2.72.

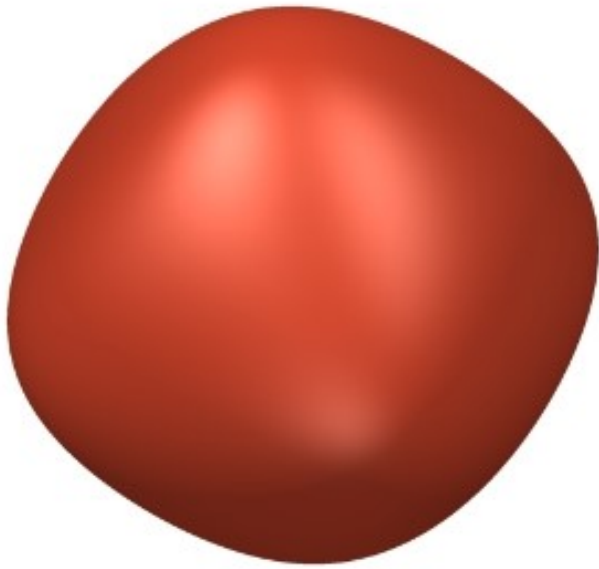
Para el primer ejemplo se toman las constantes $a = b = c = d = e = f = 1$ y se varía la **cantidad conservada** $\mathcal{C} = 1, 4, 9$ y 16 , para obtener las siguientes **superficies de nivel**. Y para el segundo ejemplo se toman las constantes $a = 1, b = 4, c = 9, d = 2, e = 4, f = 6$ y se varía la **cantidad conservada** $\mathcal{C} = 1, 4, 9$ y 16 .

Caso 1. $\mathbb{H}_1(x(t), y(t), z(t)) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) + x^2(t)y^2(t) + x^2(t)z^2(t) + y^2(t)z^2(t) = \mathcal{C}$

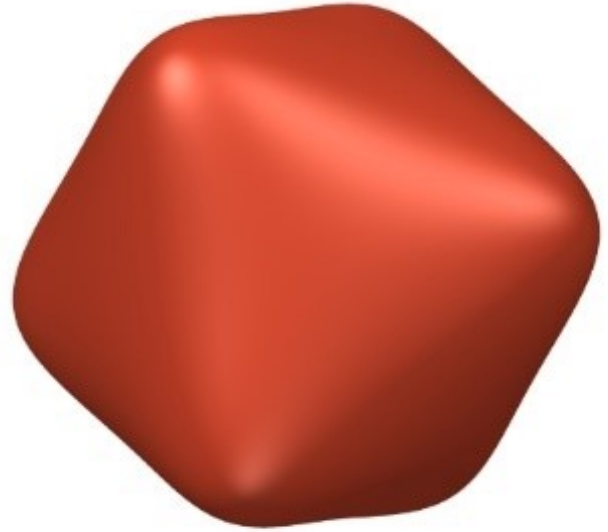
Se bosqueja el **conjunto límite** de la **distribución** de la ecuación 2.72, para $\mathbb{T}_1(x(t), y(t), z(t)) = (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) + x^2(t)y^2(t) + x^2(t)z^2(t) + y^2(t)z^2(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z = \mathcal{C}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z$, el cual es **conservativo**. Se toman para esto las constantes $\mathcal{C} = 1, 4, 9, 16$ respectivamente, que son como las **superficies de nivel** que son los **conjuntos límites** de la ecuación (2.72) dependiendo de las condiciones iniciales de nuestra **distribución bivectorial**.

En todos los casos para todas las constantes asignadas \mathcal{C} estos son **superficies cerradas regulares simples** en el espacio tridimensional, pues son el tipo de **conjuntos límites** que nos piden como requisito de la ecuación (2.72), nótese que estas son **variedades deseadas**, pues las **superficies** son suaves, regulares, simples y sin asas de la ecuación (2.72) y para cada una hay una **superficie de nivel**, que son los **conjuntos límites** de la **distribución bivectorial** (2.72), véase de la figura (2.22) que para cada **cantidad conservada**, las **superficies** cambian ligeramente de forma, pero todas son suaves, regulares, simples y sin asas.

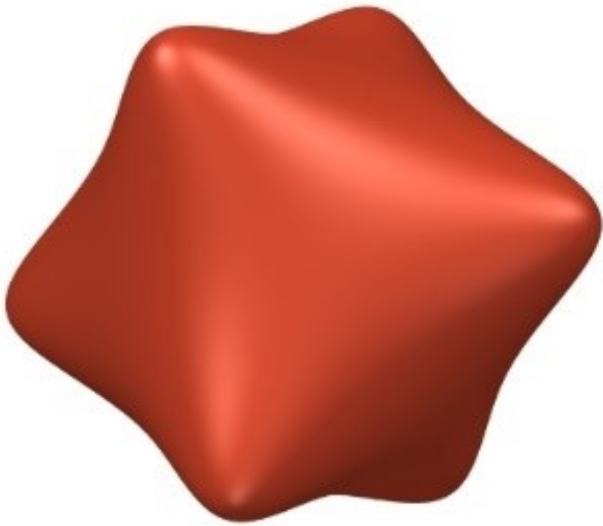
El teorema (2.9) también se cumple. Aquí todavía no se harán los cálculos explícitos de dicho teorema, sin embargo, se puede notar de manera geométrica que el resultado es análogo a observar que el **producto punto** (que en el caso general de los **tensores serían las contracciones** o el **producto interior generalizado para tensores**) entre su **bivector** y la **diferencial exterior del dual de Hodge del trivector** que puede ser visto como un “pseudoescalar” es igual a **cero 1-vector**. Es decir, geoméricamente si hay una **cantidad conservada** para el **bivector**.



(a) $H_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 1$



(b) $H_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 4$



(c) $H_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 9$



(d) $H_1(x(t), y(t), z(t)) = \mathcal{C} = 16$

Figura 2.22. Figuras que representan las soluciones como **superficies de nivel** de la **distribución bivectorial** (2.72), nótese en este caso que todos estos representan **superficies suaves regulares simples y sin asas**, esto será necesario más adelante para la construcción de **2-ciclos límite**.

Nótese que todas las superficies de las subfiguras (2.22a), (2.22b), (2.22c) y (2.22d) son suaves, regulares, simples y sin asas, por lo que estos dividen al plano en dos **conjuntos conexos** por ramas, uno es el **interior** de \mathbb{T} que es acotado y el otro es el **exterior** de \mathbb{T} que no es acotado, entonces se tiene el teorema de Jordan-Brouwer-Wilder 2 (2.14), por otra parte, todas estas superficies no tienen asas o huecos, por lo que su característica de Euler es $\chi(S) = 2 - 2g = 2 - 2(0) = 2 - 0 = 2$.

Caso 2. $H_2(x(t), y(t), z(t)) = x^2(t) + 4y^2(t) + 9z^2(t) + 2x^2(t)y^2(t) + 4x^2(t)z^2(t) + 6y^2(t)z^2(t) = \mathcal{C}$

Se bosqueja el **conjunto límite** de la **distribución** de la ecuación 2.72, para $\mathbb{T}_2(x(t), y(t), z(t)) = (x^2(t) + 4y^2(t) + 9z^2(t) + 2x^2(t)y^2(t) + 4x^2(t)z^2(t) + 6y^2(t)z^2(t))\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z = \mathcal{C}\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z$, el cual es **conservativo**. Se toman para esto las constantes $\mathcal{C} = 1, 4, 9, 16$ respectivamente, que son como las **superficies de nivel** que son los **conjuntos límites** de la ecuación (2.72) dependiendo de las condiciones iniciales de nuestra **distribución bivectorial**.

En todos los casos para todas las constantes asignadas \mathcal{C} estos son **superficies cerradas regulares simples y sin asas**, pues son el tipo de **conjuntos límite** que nos piden como requisito de la ecuación (2.72), nótese que estas son **variedades deseadas**, para cada una hay una **superficie de nivel**, que son los **conjuntos límite** de la **distribución bivectorial** (2.72), véase de la figura (2.23) que para cada **cantidad conservada**, las superficies cambian ligeramente de forma, pero todas son suaves, regulares, simples y sin asas.

El teorema (2.9) también se cumple. Aquí todavía no se harán los cálculos explícitos de dicho teorema, sin embargo, se puede notar de manera geométrica que el resultado es análogo a observar que el **producto punto** (que en el caso general de los tensores serían las **contracciones** o el **producto interior** generalizado para tensores) entre su **bivector** y la **diferencial exterior del dual de Hodge del trivector** que puede ser visto como un “pseudoescalar” es igual a **cero 1-vector**. Es decir, geoméricamente si hay una **cantidad conservada** para el **bivector**.

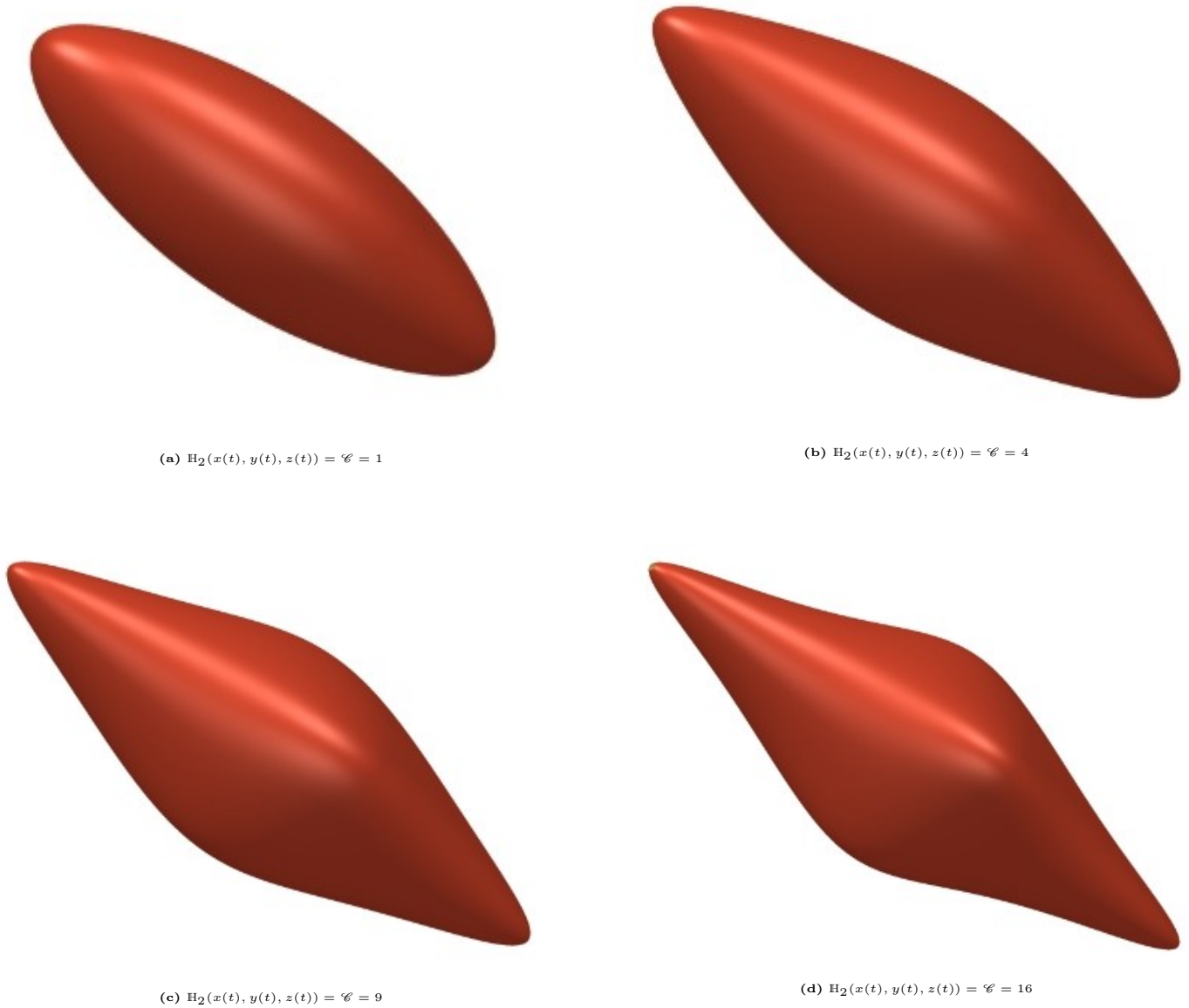


Figura 2.23. Figuras que representan las soluciones como **superficies de nivel** de la **distribución bivectorial**, nótese en este caso que este representa una **superficie cerrada**, esto será necesario más adelante para la construcción de **2-ciclos límite**.

En ambos casos que las superficies son suaves, regulares, simples y sin asas, y se cumple el teorema de Jordan-Brouwer-Wilder 2.2.14, el teorema 2.32 y el teorema de Gauss-Bonnet (2.25), donde $\chi(S) = 2$. Además $b_{yz}(x(t), y(t), z(t))$, $B_{zx}(x(t), y(t), z(t))$ y $B_{xy}(x(t), y(t), z(t))$ son polinomios como se pide en el problema.

Por último, se pone $H(x(t), y(t), z(t)) = C = 16$ en la figura (2.24) pero rotándolo, para notar que arriba y abajo se forman picos suaves.

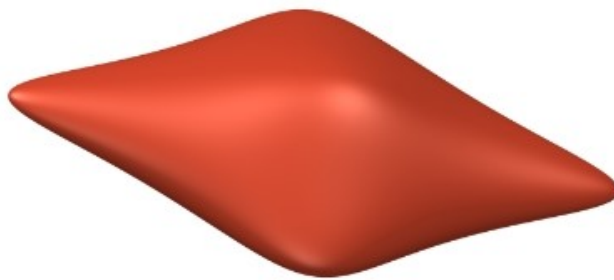


Figura 2.24. El espacio-fase del sistema dinámico de la ecuación 2.72.

Finalmente, la solución de los **puntos críticos** del sistema 2.72 en ambos casos es $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ (**cero vector**). Se corrobora igualando a cero la **distribución bivectorial**, recordando que los ceros obtenidos son **bivectoriales**. Esto significa en pocas palabras que dichos **conjuntos límites** son **superficies suaves cerradas regulares simples**, encierran en su interior **puntos críticos bivectoriales** que son también **conjuntos límites**, ¡Es una característica principal que se necesita para los **2-ciclos límite**!

Si se forman **superficies suaves cerradas regulares simples y sin asas**, estos encierran en su interior un **punto crítico bivectorial** de la **distribución bivectorial**. Lo que indica la existencia de **2-ciclos límite**, para esto hay que construir, al menos, un ejemplo de **distribución** cuya solución sean los **puntos críticos** de una **distribución conservativa** y que además se cumpla el teorema (2.9), lo que mostraría con toda precisión la existencia de un **2-ciclo límite** en la nueva **distribución** y con esto mostrar geoméricamente la existencia de **2-ciclos límite**.

Se examina ahora la aplicación de Gauss en el entorno de un **punto singular aislado** de un **campo vectorial**. Sea $\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) = (\mathbb{X}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ un **campo vectorial** definido en el entorno de cierto punto \mathbf{x}_0 del espacio \mathbb{R}^n . De acuerdo con la terminología convencional, se dirá que \mathbf{x}_0 es un **punto singular** del campo \mathbb{X} si $\mathbb{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$; un **punto singular** \mathbf{x}_0 se denomina un **punto**

singular aislado, si en todos los demás puntos pertenecientes a cierto entorno lo suficientemente pequeño del punto \mathbf{x}_0 del campo \mathbb{X} no se anula; un *punto singular* \mathbf{x}_0 se denomina *no degenerado* si

$$\det \left(\frac{\partial \mathbb{X}_\alpha}{\partial x_i(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) \neq 0.$$

Teorema 2.26. *Un punto singular no degenerado es siempre aislado.*

El teorema (2.26) se encuentra en ([Boris2012], pp. 119) demostrado. Se denominan *raíces* de un *punto singular no degenerado* los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz $\left(\frac{\partial \mathbb{X}_\alpha}{\partial x_i(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right)$.

Se llama *índice* de un *punto singular no degenerado* x_0 al signo

$$\sigma \det \left(\frac{\partial \mathbb{X}_\alpha}{\partial x_i(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) = \sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Si el *campo vectorial* \mathbb{X} resulta ser el *campo gradiente* de una función f , es decir $\mathbb{X}_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha(t)}$, el *índice* de un *punto singular* coincide con el signo del *hessiano*

$$\sigma \det \left(\frac{\partial \mathbb{X}_\alpha}{\partial x_i(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) = \sigma \det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_j(t) \partial x_i(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) = (-1)^{i(\mathbf{x}_0)},$$

donde $i(\mathbf{x}_0)$ es igual al número de cuadrados negativos en la forma cuadrática $d^2f|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ reducida a su forma canónica. Se considera una esfera $Q_\epsilon = \mathbb{S}^{n-1}$ con centro en un *punto singular aislado* \mathbf{x}_0 y de radio lo suficientemente pequeño $\epsilon > 0$ de modo que el campo \mathbb{X} no se anula en la esfera Q_ϵ . Se puede definir la *aplicación esférica de Gauss*

$$f_{\mathbf{x}_0} : Q_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}.$$

Definición 2.32. *Se denomina índice de un punto singular aislado \mathbf{x}_0 de un campo vectorial \mathbb{X} al grado de la aplicación de Gauss:*

$$ind_{\mathbf{x}_0}(\mathbb{X}) = gr(f_{\mathbf{x}_0}).$$

Resulta que si el punto \mathbf{x}_0 no es degenerado, esta definición coincide con la anterior.

Teorema 2.27. *Para un punto singular no degenerado \mathbf{x}_0 de un campo vectorial $\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))$ se tiene*

$$gr(f_{\mathbf{x}_0}) = \sigma \det \left(\frac{\partial \mathbb{X}_\alpha}{\partial x_i(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right).$$

El teorema (2.27) se encuentra en ([Boris2012], p. 119 - 120) demostrado. Así que por la definición (2.32) y el teorema (2.27), para el caso $n = 3$, si el campo es un gradiente $\left(\mathbb{X}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i(t)} \right)$, todo *punto singular no degenerado* es de uno de los tipos siguientes:

Tipo de singularidad	Índice
Punto mínimo local de f	+ 1
Punto de silla de tipo 1 (la forma d^2f tiene solo un cuadrado negativo)	- 1
Punto de silla de tipo 2 (la forma d^2f tiene dos cuadrados negativos)	+ 1
Punto máximo local de f	- 1

Tabla 2.3. Puntos singulares no degenerados de f en el espacio tridimensional y sus índices respectivos.

La clasificación de los *puntos singulares no degenerados* de un *campo general* no definido en una región de \mathbb{R}^3 es la siguiente (todos los valores $\lambda_i \neq 0$; nótese que o bien los tres autovalores son reales o bien uno es real y otros dos son complejos conjugados):

Clasificación de los puntos singulares no degenerados	Índice
Punto singular de expulsión (“fuente”) ($\Re(\lambda_i) \geq 0, i = 1, 2, 3$)	+ 1
Punto de silla de tipo 1 ($\Re(\lambda_1) \geq 0, \Re(\lambda_2) \geq 0, \lambda_3$ es real, $\lambda_3 < 0$)	- 1
Punto de silla de tipo 2 (λ_1 es real, $\lambda_1 > 0, \Re(\lambda_2) \leq 0, \Re(\lambda_3) \leq 0$)	+ 1
Punto singular de absorción (“sumidero”) ($\Re(\lambda_i) \leq 0, i = 1, 2, 3$)	- 1

Tabla 2.4. Clasificación de punto singulares no degenerados de f en el espacio tridimensional y sus respectivos índices.

Se tienen clasificados todos los *puntos críticos* en el espacio tridimensional, siempre que los valores reales sean distintos de cero. Los resultados que apoyan la topología diferencial y el cálculo en variedades son el teorema de la función implícita, el teorema de la existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias y el teorema de Fröbenius. La definición (2.28) es la requerida para empezar a hablar del teorema de Fröbenius. Los puntos 4, 5 y 6 en la lista nos interesa. Que el *corchete de Lie* sea *involutivo* no es más que sea cerrado o que se queda en la misma *distribución* y las *variedades integrales* no son más que las soluciones a las *distribuciones* que cumplen con ser *cocerrados* o más generalmente *involutivas*.

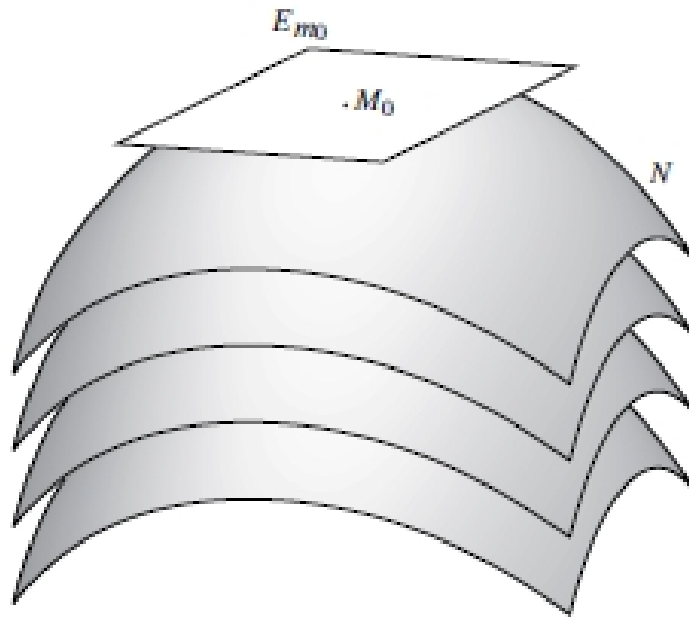


Figura 2.25. Se muestra a continuación en esta imagen lo que se llaman **variedades locales integrables** a modo de esquema general. Imagen tomada de [Ralph2012].

El *teorema de Fröbenius* afirma que las dos condiciones en la definición (2.28) son equivalentes.

Teorema 2.28 (El teorema local de Fröbenius). *Una distribución D de $T\mathcal{M}$ es involutiva si y sólo si es integrable.*

El teorema (2.28) se encuentra en ([Ralph2012], pp. 284 - 288) demostrado y con ejemplos. El *teorema de Fröbenius* está íntimamente conectado con el concepto global de *foliaciones*. Hablando en términos generales, las variedades integrales \mathcal{N} se pueden unir para formar una familia de subvariedades “bien apiladas” que completan \mathcal{M}

Definición 2.33. *Sea \mathcal{M} una variedad y $\Phi = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una partición de \mathcal{M} en conjuntos disjuntos conectados llamados **hojas**. La partición Φ se denomina **foliación** si cada punto de \mathcal{M} tiene un gráfico (U, φ) , $\varphi : U \rightarrow U' \times V' \subset E \oplus F$ de manera que para cada \mathcal{L}_α los componentes conectados $(U \cap \mathcal{L}_\alpha)^\beta$ de $U \cap \mathcal{L}_\alpha$ están dados por $\varphi((U \cap \mathcal{L}_\alpha)^\beta) = U' \times \{c_\alpha^\beta\}$, donde $c_\alpha^\beta \in F$ son constantes f para cada $\alpha \in A$ y β . Tales gráficos se denominan **foliados** (o **distinguidos**) por Φ . La **dimensión** (respectivamente, **codimensión**) de la foliación Φ es la dimensión de E (respectivamente, F). Ver figura (2.26)*

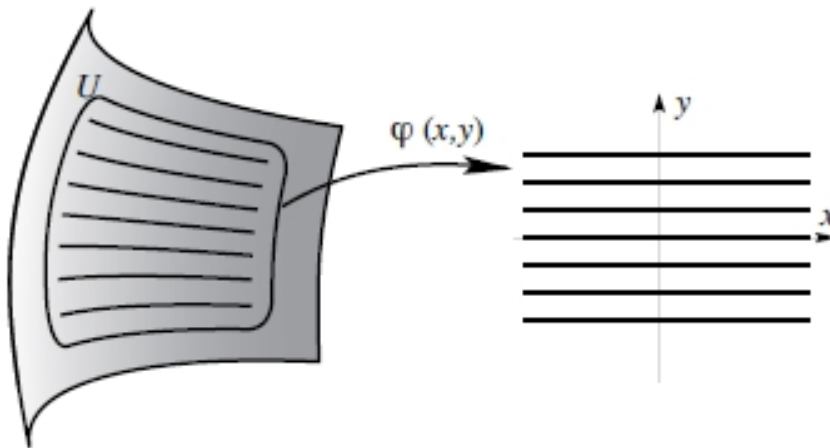


Figura 2.26. Gráfico para una foliación. Imagen tomada de [Ralph2012].

Cada hoja \mathcal{L}_α es una subvariedad sumergida conectada. En general, esta inmersión no es una incrustación; es decir, la topología inducida en \mathcal{L}_α de \mathcal{M} no necesariamente coincide con la topología de \mathcal{L}_α (la hoja \mathcal{L}_α puede acumularse sobre sí misma, por ejemplo). Los gráficos foliados inducen una estructura diferenciable²⁹ en \mathcal{L}_α de la siguiente manera. Si (U, Φ) , $\Phi : U \rightarrow U \times V \subset E \oplus F$ es un gráfico foliado en \mathcal{M} , y $\chi : E \oplus F \rightarrow F$ es la proyección canónica, entonces $\chi \circ \Phi$ está restringido a $(U \cap \mathcal{L}_\alpha)^\beta$ define un gráfico en \mathcal{L}_α .

Teorema 2.29. *Sea \mathcal{M} una variedad y sea $\Phi = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una foliación en \mathcal{M} . El conjunto*

$$T(\mathcal{M}, \Phi) = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{m \in \mathcal{L}_\alpha} T_m \mathcal{L}_\alpha$$

*es una distribución de $T\mathcal{M}$ llamado el **haz tangente a la foliación**. El haz cociente, denotado por $\mu(\Phi) = T\mathcal{M}/T(\mathcal{M}, \Phi)$, es llamado el **haz normal a la foliación Φ** . Los elementos de $T(\mathcal{M}, \Phi)$ son llamados **vectores tangentes a la foliación Φ** .*

El teorema (2.29) se encuentra en ([Ralph2012], pp. 288 - 289) demostrado. Ahora se da el *teorema global de Fröbenius*

Teorema 2.30 (teorema Global de Fröbenius). *Sea E una distribución de $T\mathcal{M}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Hay una foliación Φ en \mathcal{M} tal que $E = T(\mathcal{M}, \Phi)$,*

²⁹En el apéndice A se da el concepto de *estructura diferenciable* en la definición A.17.

2. E es integrable,

3. E es involutivo.

El teorema (2.30) se encuentra en ([Ralph2012], p. 289) demostrado.

Definición 2.34. Se dice que Δ una **distribución** de dimensión k es **involutiva** si para cada base local $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\}$ existen funciones c_{ij}^k tales que

$$[x_i(t), x_j(t)] = c_{ij}^r x_r(t) \quad 1 < i, j < k.$$

Se ha empleado el **convenio de suma de Einstein** y se debe sobreentender un sumatorio en $1 \leq r \leq k$.

Existe una condición topológica global que deben satisfacer las *distribuciones integrables* que fue descubierta por Bott [1970] [Raoul1970]. El resultado, llamado el *teorema de la desaparición de Bott*, puede encontrarse, junto con los resultados relacionados, en Lawson [1977] [Lawson1977].

Las hojas de una *foliación* se caracterizan por la siguiente propiedad.

Teorema 2.31. Sea Φ una **foliación** en \mathcal{M} . Entonces x e y están en la misma hoja si y solo si x e y se encuentran en la misma curva integral de un **campo vectorial** X definido en un conjunto abierto en \mathcal{M} y que es tangente a la **foliación** Φ .

El teorema (2.31) se encuentra en ([Ralph2012], pp. 289 - 290) demostrado. Ya se tienen todos los elementos para construir *2-ciclos límite*. Para esto, se toma una *distribución bivectorial*.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= f_3(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Cuyo sistema de la ecuación (2.73) posee *puntos críticos*, y si la *variedad integral* $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ de la *distribución* (2.73) es una *superficie cerrada regular simple*, entonces es posible construir una *distribución real bivectorial, suficientemente diferenciable y continua, polinomial, lineal o no lineal y no cocerrada* que tenga los mismos *puntos críticos* de (2.73) y que además posea como *conjunto límite* un *2-ciclo límite*, del siguiente modo.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t), z(t)) - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_2(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t), z(t)) + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= f_3(x(t), y(t), z(t)) - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_2(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Si se calculan los *puntos críticos* de la ecuación (2.74), entonces se deben de cumplir las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x(t), y(t), z(t)) - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_2(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \\ 0 &= f_2(x(t), y(t), z(t)) + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \\ 0 &= f_3(x(t), y(t), z(t)) - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_2(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} f_1(x(t), y(t), z(t)) &= \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_2(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \\ f_2(x(t), y(t), z(t)) &= - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \\ f_3(x(t), y(t), z(t)) &= \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_2(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Esto implica inmediatamente que

$$\begin{aligned} f_2(x(t), y(t), z(t)) &= - \left(\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \right)^2 f_2(x(t), y(t), z(t)) f_3^2(x(t), y(t), z(t)) \\ f_3(x(t), y(t), z(t)) &= \left(\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \right)^2 f_2^2(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ve que

$$1 = - \left(\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \right)^2 f_3^2(x(t), y(t), z(t))$$

$$1 = \left(\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \right)^2 f_2^2(x(t), y(t), z(t))$$

Al calcular las raíces de $f_2(x(t), y(t), z(t))$ y $f_3(x(t), y(t), z(t))$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\pm i \sqrt{\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \right)^2}} = f_3^2(x(t), y(t), z(t))$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \right)^2}} = f_2^2(x(t), y(t), z(t))$$

Los *puntos críticos* calculados en la ecuación (2.74) son complejos; puesto que $\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, esto implica que los únicos *puntos críticos* de la *distribución* de la ecuación (2.74) son los mismos que los de la ecuación (2.73), pero además, la ecuación (2.74) cuenta con otros *conjuntos límite* a los que se les denomina como *2-ciclos límite*. Que son cada uno de los $\prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Estos son *distribuciones bivectoriales* y se ponen en forma de las ecuaciones (2.74) para entender la idea detrás de la construcción. Si finalmente se sustituyen las fórmulas de la ecuación 2.52 se tiene que.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Los mismos resultados que se obtuvieron con la ecuación (2.75) para los *2-ciclos límite*, pueden ser obtenidos con las siguientes construcciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \\ \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Otras posibles generalizaciones que cumplen con tal criterio son las siguientes

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{y}(t) &= g_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\ \dot{z}(t) &= g_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Donde $g_1(x(t), y(t), z(t))$, $g_2(x(t), y(t), z(t))$ y $g_3(x(t), y(t), z(t))$ son funciones polinómicas adecuadas. Las otras dos posibles generalizaciones son las ecuaciones (2.76) y (2.77) en su parte *cocerrada* por una función polinómica adecuada.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= g_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\
 \dot{y}(t) &= g_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\
 \dot{z}(t) &= g_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= g_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\
 \dot{y}(t) &= g_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \\
 \dot{z}(t) &= g_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Se demuestra que todos cumplen con tener **2-ciclos límite** utilizando el teorema (2.9), otras generalizaciones a *2-ciclos límite* están dadas por las siguientes fórmulas generales.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_1(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_2(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_3(x(t), y(t), z(t))
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Donde $\theta_1(x(t), y(t), z(t))$, $\theta_2(x(t), y(t), z(t))$ y $\theta_3(x(t), y(t), z(t))$ son polinomios adecuados que respetan todas las hipótesis para crear *2-ciclos límite*. Así mismo, y con la misma lógica, uno puede generar los siguientes sistemas generales

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_1(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_2(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) + \mathcal{C}_i) \theta_3(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_1(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{y}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_2(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{z}(t) &= \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_3(x(t), y(t), z(t))
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Y de éstos, se pueden obtener más generalizaciones de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_1(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_2(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{z}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_3(x(t), y(t), z(t))
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Donde $g_1(x(t), y(t), z(t))$, $g_2(x(t), y(t), z(t))$ y $g_3(x(t), y(t), z(t))$ son polinomios adecuados con todas las hipótesis para formar *2-ciclos límite*. Y las demás generalizaciones estarían dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_2(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}\quad (2.85)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_3(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{x}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= g(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \theta_3(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}\quad (2.86)$$

No son las únicas formas de generar *2-ciclos límite* y hay por lo menos otras 9 maneras de generalizarlos. Se pone un ejemplo de manera detallada e ilustrativa, para entender las ideas principales que se presentaron párrafos arriba.

Ejemplo 2.8. Sea el siguiente **trivector** dado por

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = ((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \quad (2.87)$$

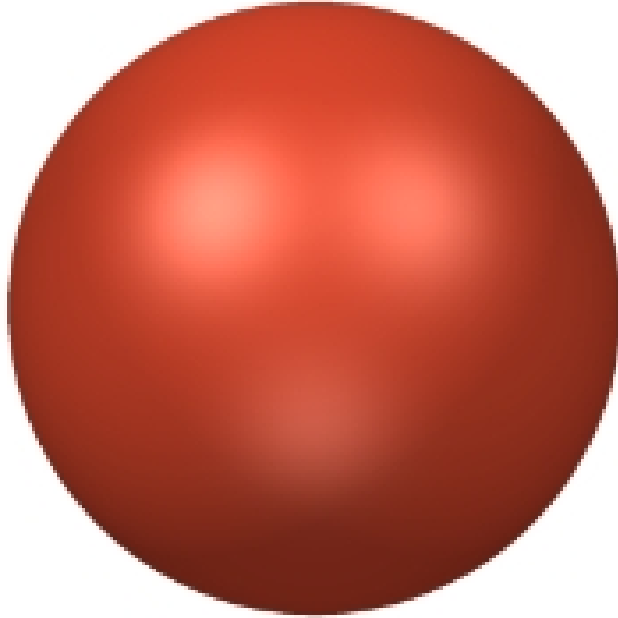


Figura 2.27. Variedad integral que representa a la ecuación (2.87).

Este representa nuestra **cantidad conservada**, al calcular la **codiferencial** de la ecuación (2.87) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta \mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) &= * [\nabla_{\wedge} (* \mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] \\ &= * [\nabla_{\wedge} (* ((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z)] \\ &= * [\nabla_{\wedge} ((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)] \\ &= * [2(x(t) - 1) \widehat{e}_x + 2(y(t) - 1) \widehat{e}_y + 2(z(t) - 1) \widehat{e}_z] \\ &= 2(x(t) - 1) \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z - 2(y(t) - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 2(z(t) - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &= \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

De esta manera, se tiene la **distribución bivectorial** dada por la siguiente fórmula

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = 2(x(t) - 1) \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z - 2(y(t) - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 2(z(t) - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \quad (2.88)$$

Para ver que es **conservativa**, se calcula nuevamente la **codiferencial**.

$$\begin{aligned}\delta \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) &= * [\nabla_{\wedge} (* \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)))] \\ &= * [\nabla_{\wedge} (* 2(x(t) - 1) \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z - 2(y(t) - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 2(z(t) - 1) \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y)] \\ &= * [\nabla_{\wedge} 2(x(t) - 1) \widehat{e}_x + 2(y(t) - 1) \widehat{e}_y + 2(z(t) - 1) \widehat{e}_z] \\ &= * \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Esto prueba que es **cocerrada**, al igualar a **cero bivector**, el único **punto crítico del bivector** (2.88) es $(x(t), y(t), z(t)) = (1, 1, 1) = \mathbf{x}_0$, el cual es un **punto singular aislado**. Ahora bien, puesto que todas las hipótesis se cumplen, es posible construir otra **distribución real bivectorial no conservativa** de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) &= [2(x(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\
 &= +[2(y(t) - 1) + 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\
 &= +[2(z(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(y(t) - 1)]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Se puede comprobar que la ecuación (2.89) posee únicamente un **punto singular aislado** dado por $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$. Para comprobar que en efecto posee un **2-ciclo límite** se hace el producto escalar siguiente

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))_{2.88} \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))_{2.89} &= [2(x(t) - 1)\widehat{e}_x + 2(y(t) - 1)\widehat{e}_y + 2(z(t) - 1)\widehat{e}_z] \cdot \\
 &= \{[2(x(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\
 &\quad + [2(y(t) - 1) + 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\
 &\quad + [2(z(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(y(t) - 1)]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y\}
 \end{aligned}$$

La **variedad integral** $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ es una **cantidad conservada** para la ecuación (2.88) y (2.89), por lo que $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = (x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 = 1 = \mathcal{C}$, es decir, $(x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1 = 0$, si a la esfera con centro en \mathbf{x}_0 y radio 1 se le pone simplemente como S , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))_{2.88} \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))_{2.89} &= [2(x(t) - 1)\widehat{e}_x + 2(y(t) - 1)\widehat{e}_y + 2(z(t) - 1)\widehat{e}_z] \cdot \\
 &\quad \{[2(x(t) - 1) - 4S(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\
 &\quad + [2(y(t) - 1) + 4S(x(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\
 &\quad + [2(z(t) - 1) - 4S(x(t) - 1)(y(t) - 1)]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y\} \\
 &= [4(x(t) - 1)^2 - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(y(t) - 1) + 8S(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x) \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)]\widehat{e}_x \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(y(t) - 1) - 8S(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) \\
 &\quad + [4(y(t) - 1)^2 + 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x) \\
 &\quad + [4(y(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z) \\
 &\quad + [4(y(t) - 1)(z(t) - 1) + 8S(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x) \\
 &\quad + [4(z(t) - 1)^2 - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \cdot (\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\
 &= [4(x(t) - 1)^2 - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\mathbf{0} \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(y(t) - 1) + 8S(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)](-\widehat{e}_z) \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)]\widehat{e}_y \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(y(t) - 1) - 8S(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \\
 &\quad + [4(y(t) - 1)^2 + 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\mathbf{0} \\
 &\quad + [4(y(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2](-\widehat{e}_x) \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2](-\widehat{e}_y) \\
 &\quad + [4(y(t) - 1)(z(t) - 1) + 8S(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \\
 &\quad + [4(z(t) - 1)^2 - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\mathbf{0} \\
 &= [4(y(t) - 1)(z(t) - 1) + 8S(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \\
 &\quad - [4(y(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)]\widehat{e}_y \\
 &\quad - [4(x(t) - 1)(z(t) - 1) - 8S(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \\
 &\quad + [4(x(t) - 1)(y(t) - 1) - 8S(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \\
 &\quad - [4(x(t) - 1)(y(t) - 1) + 8S(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \\
 &= 8S(x(t) - 1)[(y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \\
 &\quad + 8S(y(t) - 1)[(z(t) - 1)^2 - (x(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \\
 &\quad - 8S(z(t) - 1)[(x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2]\widehat{e}_z
 \end{aligned}$$

Hay que recordar que $S = (x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1 = 0$, pues se trata de nuestra **superficie suave regular simple y sin asas**, por lo que sustituyendo este resultado, nos queda finalmente que

$$\nabla_{\wedge}(*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))_{2.88} \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))_{2.89} = \mathbf{0}$$

En efecto, existe un **2-ciclo límite** y está representada por la ecuación $\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) = (x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 = 1 = \mathcal{C}$. Finalmente, ahora se pone una notación en las p -formas, para generalizar.

$$\mathbb{B} = \delta\mathbb{T} + \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i]\mathbb{B}_1$$

Donde $\mathbb{B}_1 = -4(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 4(x(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x - 4(x(t) - 1)(y(t) - 1)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y$

Si $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ es nuestro *trivector* dado, entonces el sistema con *2-ciclo límite* en las p -formas está dado por la ecuación

$$\mathbb{B} = \delta\mathbb{T} + \prod_{i=1}^n (*\mathbb{T} - \mathcal{C}_i)\mathbb{B}_1 \tag{2.90}$$

Donde el *bivector* $\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t))$ está dado por la fórmula (Si se hace $\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t))$ para simplificar las ecuaciones y facilitar su uso):

$$\mathbb{B}_1(\mathbf{x}) = -\frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x - \frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial\mathbb{H}(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y$$

$\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t))$ no es la única forma de obtener *2-ciclos límite*, el requisito es que los signos en el producto $\prod_{i=1}^n (*\mathbb{T} - \mathcal{C}_i)$ sean alternados, o que al menos uno de los signos sea distinto, por lo que tal resultado de generar *2-ciclos límite* se obtiene igualmente con los siguientes *bivectores*:

1. $B_1(\mathbf{x}) = -\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y,$
2. $B_2(\mathbf{x}) = -\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y,$
3. $B_3(\mathbf{x}) = -\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y,$
4. $B_4(\mathbf{x}) = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y,$
5. $B_5(\mathbf{x}) = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y,$
6. $B_6(\mathbf{x}) = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_y \wedge \hat{e}_z + \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial z(t)} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_x - \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x(t)} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial y(t)} \hat{e}_x \wedge \hat{e}_y.$

Si se ponen todos los casos posibles en las p -formas, se tendría como resultado, lo siguiente:

Fórmula	Nombre	Descripción
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_1$	2-ciclos límite , primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_2$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_3$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_4$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_5$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_6$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_1$	2-ciclos límite , segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_2$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_3$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_4$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_5$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_6$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] \Theta$	2-ciclos límite , tercera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector polinomial adecuado y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] \Theta$	2-ciclos límite , cuarta forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector polinomial adecuado y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.

Tabla 2.5. Tabla que muestra todas las generalizaciones de **2-ciclos límite** a partir de **distribuciones bivectoriales cocerradas**.

Hay generalizaciones que se mencionarán en otra tabla. Ya se estudiaron *distribuciones bivectoriales cocerradas*, ahora toca estudiar *distribuciones bivectoriales integrables*, para esto; primero se tiene la siguiente definición

Definición 2.35. Sea $w(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\hat{e}_1 + f_2(\mathbf{x})\hat{e}_2 + f_3(\mathbf{x})\hat{e}_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ y si $\nabla_{\wedge} w(\mathbf{x}) = \Omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $w \wedge \Omega = \mathbf{0}$, entonces, w admite un **factor integrante** μ con $\mu w = \nabla_{\wedge} T$

Esta definición (2.35) solo sirve para las 1 -formas, que son las únicas que tienen esa propiedad, pero es posible utilizar el *operador estrella de Hodge* para utilizarla. No es fácil encontrar *factores integrantes*. Como se trabajan con polinomios, se puede obtener μ tal que $\mu w = \nabla_{\wedge} T$.

Primero, se empieza con una *distribución integrable* de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= F_1(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{y}(t) &= F_2(x(t), y(t), z(t)) \\
 \dot{z}(t) &= F_3(x(t), y(t), z(t))
 \end{aligned}
 \tag{2.91}$$

Puesto que la ecuación (2.91) es integrable, existe un *factor integrante* μ , tal que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mu f_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) &= \mu f_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= \mu f_3(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}\tag{2.92}$$

Si se generalizan estas ideas en los *bivectores*, a partir de la ecuación (2.73) en combinación con la ecuación (2.92), se puede construir una *distribución bivectorial* con *2-ciclos límite* parecido a la ecuación (2.74) de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mu \left[f_1(x(t), y(t), z(t)) - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_2(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \right] \\ \dot{y}(t) &= \mu \left[f_2(x(t), y(t), z(t)) + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_3(x(t), y(t), z(t)) \right] \\ \dot{z}(t) &= \mu \left[f_3(x(t), y(t), z(t)) - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) f_1(x(t), y(t), z(t)) f_2(x(t), y(t), z(t)) \right]\end{aligned}\tag{2.93}$$

Donde, finalmente se obtiene la ecuación final

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mu \left[\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \right] \\ \dot{y}(t) &= \mu \left[\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} + \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} \right] \\ \dot{z}(t) &= \mu \left[\frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial z(t)} - \prod_{i=1}^n (\mathbb{H}(x(t), y(t), z(t)) - \mathcal{C}_i) \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial \mathbb{H}(x(t), y(t), z(t))}{\partial y(t)} \right]\end{aligned}\tag{2.94}$$

Para poder tener todas las generalizaciones posibles en la tabla (2.6)

Fórmula	Nombre	Descripción
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_1 \right\}$	2-ciclos límite , quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_2 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_3 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_4 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_5 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_6 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_1 \right\}$	2-ciclos límite , sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_2 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_3 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_4 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_5 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \mathbb{B}_6 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ \delta \mathbb{T} \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \Theta \right\}$	2-ciclos límite , séptima forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector polinomial adecuado y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$\mathbb{B} = \mu \left\{ g(\delta \mathbb{T}) \pm \prod_{i=1}^n [(*\mathbb{T}) - \mathcal{C}_i] \Theta \right\}$	2-ciclos límite , octava forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $\mathbb{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector adecuado, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de $\delta \mathbb{T}$ y $*\mathbb{T}$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.

Tabla 2.6. Tabla que muestra todas las generalizaciones de **2-ciclos límite** o **2-semiciclos límite** a partir de **distribuciones bivectoriales integrables**.

Esta tabla resume todas las posibles generalizaciones con las construcciones que se plantearon. Finalmente, un ejemplo para las *distribuciones integrables*.

Ejemplo 2.9. Sea la distribución bivectorial siguiente

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = 2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \quad (2.95)$$

Aplicando la **codiferencial** se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) &= *[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)))] \\ &= *[\nabla_{\wedge}(*2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &\quad + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y)] \\ &= *[\nabla_{\wedge}(2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_y \\ &\quad + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_z)] \\ &= *[2(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &\quad + 2(y(t) - 1)^2(x(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_y + 2(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 2(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z] \\ &= -2(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_z + 2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)\widehat{e}_y + 2(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_z \\ &\quad - 2(y(t) - 1)^2(x(t) - 1)\widehat{e}_x - 2(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_y + 2(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_x \\ &= [2(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2 - 2(y(t) - 1)^2(x(t) - 1)]\widehat{e}_x + [2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1) - 2(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \\ &\quad + [2(y(t) - 1)^2(z(t) - 1) - 2(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \\ &\neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Esto nos muestra que la ecuación (2.95) no es **cocerrada**, por lo que no se puede resolver con los métodos de los ejemplos anteriores, por otra parte, a la **distribución bivectorial** (2.95), se puede aplicar la definición (2.35) para ver si cumple con la definición, para esto se aplica el **operador estrella de Hodge**, para obtener que

$$*\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = 2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_y + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_z \quad (2.96)$$

Si se usa la **derivada exterior** se obtiene que

$$\begin{aligned} \nabla_{\wedge}(*\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))) &= \nabla_{\wedge}(2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_y \\ &\quad + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_z) \\ &= 2(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &\quad + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_y + 2(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_z + 2(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &= [2(x(t) - 1)(z(t) - 1)^2 - 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &\quad + [2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1) - 2(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &\quad + [2(y(t) - 1)^2(z(t) - 1) - 2(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &= 2(x(t) - 1)[(z(t) - 1)^2 - (y(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(y(t) - 1)[(x(t) - 1)^2 - (z(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &\quad + 2(z(t) - 1)[(y(t) - 1)^2 - (x(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &= \mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Por lo que se tiene que

$$\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t)) = 2(x(t) - 1)[(z(t) - 1)^2 - (y(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(y(t) - 1)[(x(t) - 1)^2 - (z(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(z(t) - 1)[(y(t) - 1)^2 - (x(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \quad (2.97)$$

Al sacar el **producto cuña** entre $*\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$ y $\mathbb{B}_1(x(t), y(t), z(t))$, se obtiene que

$$\begin{aligned} *\mathbb{B}(\mathbf{x}) \wedge \mathbb{B}_1(\mathbf{x}) &= (2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_y \\ &\quad + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_z) \wedge (2(x(t) - 1)[(z(t) - 1)^2 - (y(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &\quad + 2(y(t) - 1)[(x(t) - 1)^2 - (z(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(z(t) - 1)[(y(t) - 1)^2 - (x(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\ &= 4(x(t) - 1)^3(y(t) - 1)(z(t) - 1)[(z(t) - 1)^2 - (y(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &\quad + 4(x(t) - 1)(y(t) - 1)^3(z(t) - 1)[(x(t) - 1)^2 - (z(t) - 1)^2]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &\quad + 4(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^3[(y(t) - 1)^2 - (x(t) - 1)^2]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &= 4(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)[(x(t) - 1)^2(z(t) - 1)^2 - (x(t) - 1)^2(y(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2(x(t) - 1)^2 \\ &\quad - (y(t) - 1)^2(z(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2(y(t) - 1)^2 - (z(t) - 1)^2(x(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como se puede ver, el resultado nos dio $\mathbf{0}$, esto significa, por la definición (2.35) que existe $\mu(x(t), y(t), z(t))$ tal que $\mu(x(t), y(t), z(t))\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \delta\mathbb{T}x(t), y(t), z(t)$, aquí se varió un poco la definición (2.35), ya que éste sirve para **1-formas**, y en realidad se tiene una **2-forma**, por lo que en este caso, se necesitan las cofunciones como tal, y no las originales. Así, en vez de utilizar la **derivada exterior** se utiliza la **derivada exterior alterna**. Por ecuación (2.95), por factorización algebraica se tiene que

$$\mu(x(t), y(t), z(t)) = \frac{1}{(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)} \quad (2.98)$$

Al multiplicar la ecuación 2.95 por la función 2.98, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x})_{(2.98)}\mathbb{B}(\mathbf{x})_{(2.95)} &= \frac{1}{(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)}(2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &\quad + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y) \\ &= \frac{(2(x(t) - 1)(y(t) - 1)^2(z(t) - 1)}{x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)}\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + \frac{(2(x(t) - 1)^2(y(t) - 1)(z(t) - 1)}{x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)}\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &\quad + \frac{(2(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)^2}{x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)}\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \\ &= 2(x(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(y(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(z(t) - 1)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \end{aligned}$$

Así que, se obtiene finalmente la siguiente fórmula

$$\mu(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 2(x(t) - 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(y(t) - 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(z(t) - 1)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \quad (2.99)$$

Por el ejemplo anterior se puede notar que la ecuación (2.88) es igual a la ecuación (2.99). Por lo anterior, la solución **trivectorial** que es en realidad nuestra **cantidad conservada**, está dada por

$$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)) = [(x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \quad (2.100)$$

Entonces, por las construcciones hechas con anterioridad, se cuenta con la siguiente **distribución bivectorial**

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x(t), y(t), z(t)) &= [2(x(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &= +[2(y(t) - 1) + 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &= +[2(z(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(y(t) - 1)]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \end{aligned} \quad (2.101)$$

Se ve, que el **2-ciclo límite** a esta **distribución bivectorial** está dado por la siguiente figura.

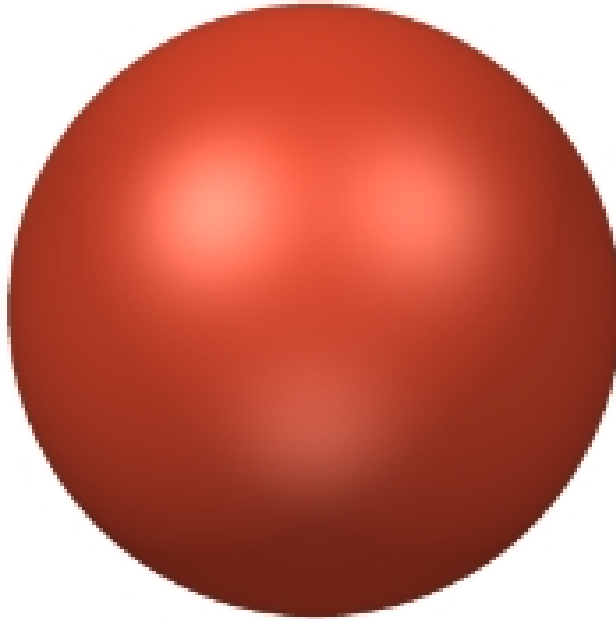


Figura 2.28. Variedad integral que representa a la ecuación (2.101). La principal diferencia que radica con la figura (2.27) es que para poder llegar la solución $\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$ ya nos daban el **trivector**, solo bastaba encontrar su **bivector asociado** teniendo en cuenta que este era **cocerrado**, en este caso la ecuación (2.95) no es **cocerrada**, pero si al **bivector** (2.95) se le multiplica por un **factor integrante**, que en este caso fue encontrado y dado por la ecuación (2.98), entonces uno puede encontrar que su solución es el mismo que el del ejemplo anterior. Recordando que es la solución de $\mu(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{x})$ y no de $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ en sí mismo.

Esta no es todavía el **2-ciclo límite** que se necesita, pero uno puede darse cuenta de que con las ideas que se discutieron se puede formar al nueva **distribución bivectorial** dado por las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x(t), y(t), z(t)) &= (x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)[2(x(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z \\ &= +(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)[2(y(t) - 1) + 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(z(t) - 1)]\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x \\ &= +(x(t) - 1)(y(t) - 1)(z(t) - 1)[2(z(t) - 1) - 4((x(t) - 1)^2 + (y(t) - 1)^2 + (z(t) - 1)^2 - 1)(x(t) - 1)(y(t) - 1)]\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \end{aligned} \quad (2.102)$$

Finalmente al graficar el **2-ciclo límite**, se obtiene como resultado la siguiente figura

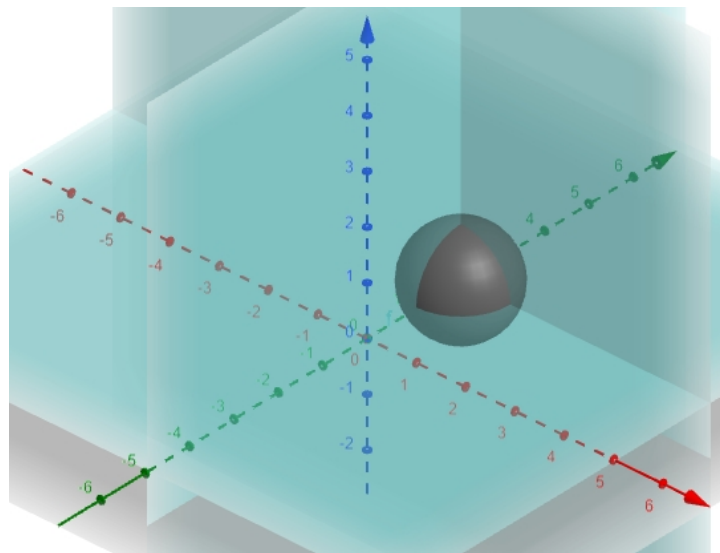


Figura 2.29. Variedad integral que representa a la ecuación (2.102).

De lo que uno debe darse cuenta es que la esfera de radio 1 y centro en $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$ es cortado por tres planos, $x(t) = 1$, $y(t) = 1$ y $z(t) = 1$, esto significa que en realidad nuestra esfera tiene discontinuidades, y en realidad el **2-semiciclo límite**

es una unión de conjuntos conexos, son 8 pedacitos de la esfera, uno en cada octante del plano tridimensional y los planos que cortan a la esfera. Nuestras ideas toman sentido con este ejemplo y las generalizaciones hechas hasta el momento quedan bien con este último ejemplo; para ver un poco mejor el 2-semiciclo límite, se pone otra perspectiva de la misma figura, para ver un poco más de elementos gráficos.

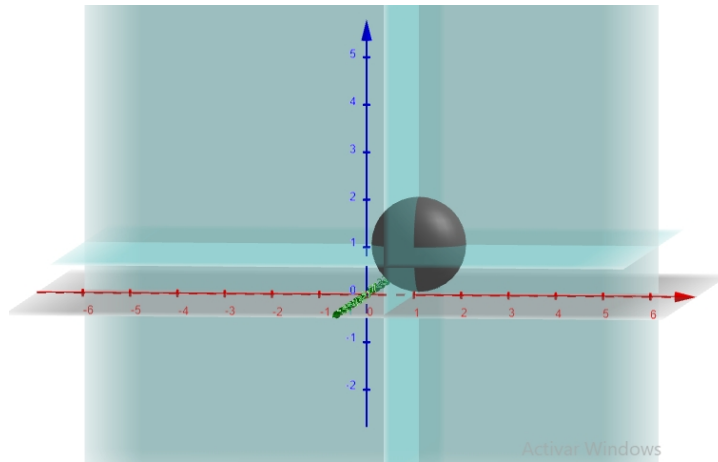


Figura 2.30. Variedad integral que representa a la ecuación 2.102.

De este último ejemplo, uno se puede dar cuenta de que no necesariamente un 2-ciclo límite debe de tener discontinuidades, como las de este ejemplo, si por ejemplo, en vez de tomar la ecuación (2.95), se hubiera tomado la *distribución bivectorial*

$$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = 2(x^2(t) - 1)(y(t) + 1)(z(t) + 1)\widehat{e}_y \wedge \widehat{e}_z + 2(x(t) + 1)(y^2(t) - 1)(z(t) + 1)\widehat{e}_z \wedge \widehat{e}_x + 2(x(t) + 1)(y(t) + 1)(z^2(t) - 1)\widehat{e}_x \wedge \widehat{e}_y \quad (2.103)$$

Al hacer las mismas operaciones de este ejemplo. La *distribución bivectorial* (2.103), tiene por 2-ciclo límite al *trivector* (2.100), que no tiene discontinuidades, ya que las discontinuidades se dan en $x(t) = y(t) = z(t) = -1$, que no intersectan en absoluto ningún punto de la esfera unitaria centrada en $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$. Y este no es unión de conjuntos conexos, viene en una sola pieza. Sin embargo existen discontinuidades en el espacio de fase y cualquier fljo que se acerque a estos planos se cortarían tomando una dinámica con conjuntos de discontinuidad.

Capítulo 3

Conclusiones finales.

3.1. Generalización en el espacio $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$

Aquí solo se hablará en abstracto de las ideas principales a *grosso modo*. Sea el siguiente n -vector

$$\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) = \mathbb{H}(\mathbf{x}(t)) \bigwedge_{i=1}^n \widehat{e}_{x_i} \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \quad (3.1)$$

Al sacar la *codiferencial*, se obtiene que

$$\mathbb{Y}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{H}_{x_i}(\mathbf{x}(t)) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \widehat{e}_{x_j} \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n) \quad (3.2)$$

Este tiene n elementos $(n-1)$ -vectoriales. Ya que nuestra *distribución* $(n-1)$ -vectorial es *contractible a un punto* por hipótesis, significa que se cumple el *Lema de Poincaré* (1.18), esto es, $d^2 = \mathbf{0}$. Y por ende, la ecuación (3.1) es una *cantidad conservada* para la ecuación (3.2). Siguiendo con esta idea, no es difícil ver que la generalización a *distribuciones* $(n-1)$ -vectoriales que cuentan con $(n-1)$ -ciclos límite, pueden ser contruidos partiendo de la base (3.2) que se escribirá en la forma:

$$\mathbb{Z}(\mathbf{x}(t)) = \delta\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) + \text{términos adecuados} \quad (3.3)$$

Si lo que se tiene que lograr es que solo los *puntos críticos* de la *distribución* (3.2) sean los *puntos críticos* de la nueva *distribución* (3.3), entonces se tienen que poner términos adecuados, de tal modo que la ecuación (3.3) además posea $(n-1)$ -ciclos límite como parte de sus *conjuntos límites*. Entonces, se fija el término

$$\text{términos adecuados} = \prod_{i=1}^m [(*\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))) - \mathcal{C}_i] \text{distribución adecuada} \quad (3.4)$$

Por lo que sustituyendo la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3), se tiene que

$$\mathbb{Z}(\mathbf{x}(t)) = \delta\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) + \prod_{i=1}^m [(*\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))) - \mathcal{C}_i] \text{distribución adecuada} \quad (3.5)$$

La *distribución adecuada* que nos servirá para toda esta construcción es la siguiente.

$$\text{distribución adecuada} = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1)^{\nu(\sigma(i))} \mathbb{X}_i(\mathbf{x}(t)) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \widehat{e}_{x_j} \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n) \quad (3.6)$$

donde $\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) = (\mathbb{X}_i(\mathbf{x}(t)))_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ y $\nu(\sigma(i))$ es el número de *trasposiciones*¹ de una descomposición cualquiera de σ en producto de *trasposiciones*. Finalmente sustituyendo la ecuación (3.6) en la ecuación (3.5), se tiene que

$$\mathbb{Z}(\mathbf{x}(t)) = \delta\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)) + \prod_{i=1}^m [(*\mathbb{X}(\mathbf{x}(t))) - \mathcal{C}_i] \left(\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1)^{\nu(\sigma(i))} \mathbb{X}_i(\mathbf{x}(t)) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \widehat{e}_{x_j} \right) \quad (3.7)$$

Si se utiliza la notación

$$\mathbb{Z}_{S_n - \{Id, -Id\}}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1)^{\nu(\sigma(i))} \mathbb{X}_i(\mathbf{x}(t)) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \widehat{e}_{x_j} \quad (3.8)$$

y además si se utilizan solo los operadores y no las funciones como tal, nuestra ecuación final, que queda como

$$\mathbb{Z} = \delta\mathbb{X} + \prod_{i=1}^m [(*\mathbb{X}) - \mathcal{C}_i](\mathbb{Z}_{S_n - \{Id, -Id\}}) \quad (3.9)$$

¹En matemáticas, las permutaciones pueden descomponerse en un producto de trasposiciones, es decir, en una sucesión de intercambios de elementos dos a dos.

- Una *permutación par* es una permutación que puede ser representada por un número par de trasposiciones.
- Una *permutación impar* es una permutación que puede ser representada por un número impar de trasposiciones.

La paridad o signatura de una permutación vale 1 si esta es par y -1 si es impar. El concepto de *trasposición* se encuentra en el apéndice (A), en la definición (A.7).

Ahora bien, existen $2^n - 2$ distribuciones $(n - 1)$ -vectoriales que generan $(n - 1)$ -ciclos límite, pues se requiere solo algún signo alternado en la ecuación (3.8), para producir vectores complejos, lo que significa que los puntos críticos de la ecuación (3.2) son los mismos que los de la ecuación (3.9), pero además este posee un producto de $(n - 1)$ -ciclos límite como sus conjuntos límite. Nota que

$$\sum_{i \in \{1, 3, \dots, n-1\}} \binom{n}{i} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2$$

Para demostrar la existencia de $(n - 1)$ -ciclos límite se puede tomar en cuenta el Lema de Poincaré (1.18), el teorema de Jordan-Brouwer-Wilder (2.10), (2.13) y (2.14), el teorema de Schönflies (2.15), el teorema de Fröbenius (2.30), la definición de distribución (2.28) y el teorema (2.9). Aquí para ver la existencia de dichos conjuntos límite, como hay imposibilidad de ver la geometría más allá de la tercera dimensión, se requieren de las propiedades algebraicas y topológicas como tal. Antes de terminar se aclara la generalización del teorema (2.9) está dada por la siguiente ecuación general

$$[\nabla_{\wedge}(*\mathbb{X}(\mathbf{x}(t)))] \cdot \mathbb{Y}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}$$

Si uno cuenta con un campo $(n - 1)$ -vectorial entonces existen sus variedades integrales por el Lema de Poincaré (1.18) y, por tanto, existe una $(n - 1)$ -distribución de 1-vectores donde cada uno de ellos es tangente a las variedades integrales del campo $(n - 1)$ -vectorial, recuérdese que hay $\binom{n-1}{n} = n$ 1-vectores para una variedad integral de un campo $(n - 1)$ -vectorial.

Por otra parte, si existe una $(n - 1)$ -distribución de 1-campos vectoriales que cumplen con el teorema de Frobenius (2.28) y (2.30), entonces existe el campo $(n - 1)$ -vectorial tangente a las variedades integrales de la $(n - 1)$ -distribución. Ahora basta considerar que por cada campo 1-vectorial se cuenta con un sistema dinámico y de esta manera establecer relaciones entre los sistemas dinámicos y objetos que pueden estudiarse sólo geoméricamente.

3.2. Comentarios

Hasta aquí termina nuestra conclusión, haciendo una posible generalización del concepto de r -ciclos límite, se han mostrado posibles formas de poder generalizarlos, teorías favorables para mostrar su existencia y muchos ejemplos lo más detallado posible e ilustrativos que ayudan a la comprensión de este tema que desde nuestra investigación no tiene precedente. Nuestra conclusión es que se ha logrado construir y proponer una generalización de los ciclos límite en las formas diferenciales.

Resultados sustanciales de la tesis.

Aquí se presenta la tabla (3.1) de la construcción y generalización de los ciclos límite en \mathbb{R}^2 , con sistemas dinámicos polinomiales cuya solución en el espacio-fase sea polinomial.

Fórmula	Nombre	Descripción
Ecuación (2.4)	1-ciclo límite, primera forma general	Se crean a partir de sistemas dinámicos conservativos.
Ecuación (2.14)	1-ciclo límite, segunda forma general	Se crean a partir de sistemas dinámicos conservativos.
Ecuación (2.29)	1-ciclo límite, tercera forma general	Se crean a partir de sistemas dinámicos conservativos.
Ecuación (2.44)	1-ciclo límite, cuarta forma general; o bien, 1-semiciclo límite	Se crean a partir de sistemas dinámicos integrables.

Tabla 3.1. Tabla que muestra todas las construcciones encontradas de 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite a partir de sistemas dinámicos conservativos o integrables. Se pueden derivar otras construcciones a partir de las ecuaciones (2.4), (2.14), (2.29) y (2.44).

Aquí se presenta la tabla (3.2) con los 1-ciclos límite, las posibles generalizaciones en $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, a partir de sistemas dinámicos polinomiales conservativos o integrables:

Fórmula	Nombre	Descripción
$\mathbb{X} = \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] (* \delta\hat{H})$	1-ciclos límite, primera forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación (2.4).
$\mathbb{X} = f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] (* \delta\hat{H})$	1-ciclos límite, segunda forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ y f es un polinomio adecuado.
$\mathbb{X} = \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] \Theta$	1-ciclos límite, tercera forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación (2.14). Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una 1-forma polinomial adecuada.
$\mathbb{X} = f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] \Theta$	1-ciclos límite, cuarta forma general	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$. Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una 1-forma polinomial y f es un polinomio adecuados.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] (* \delta\hat{H}) \right\}$	1-ciclos límite, quinta forma general; o 1-semiciclos límite.	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación 2.29 y θ es el factor integrante polinomial.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] (* \delta\hat{H}) \right\}$	1-ciclos límite, sexta forma general; o 1-semiciclos límite.	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$, f es un polinomio adecuado y θ es el factor integrante polinomial.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ \delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] \Theta \right\}$	1-ciclos límite, séptima forma general; o 1-semiciclos límite.	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$. Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una 1-forma polinomial adecuada y θ es el factor integrante polinomial.
$\mathbb{X} = \theta \left\{ f\delta\hat{H} \pm \prod_{i=1}^n [(* \hat{H}) - \mathcal{C}_i] \Theta \right\}$	1-ciclos límite, octava forma general; o 1-semiciclos límite.	Representación $\mathbb{X} \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$. Donde $\Theta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ es una 1-forma polinomial adecuada, f es un polinomio adecuado y θ es el factor integrante polinomial.

Tabla 3.2. Tabla que muestra todas las generalizaciones de 1-ciclos límite o 1-semiciclos límite a partir de sistemas dinámicos conservativos o integrables.

Aquí se presenta la tabla (3.3) con los *2-ciclos límite*, las posibles generalizaciones en $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, a partir de sistemas dinámicos polinomiales conservativos con solución cerrada en el espacio-fase $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$:

Fórmula	Nombre	Descripción
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_1$	2-ciclos límite , primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_2$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_3$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_4$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_5$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_6$	2-ciclos límite , variación de la primera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_1$	2-ciclos límite , segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_2$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_3$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_4$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_5$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_6$	2-ciclos límite , variación de la segunda forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] \Theta$	2-ciclos límite , tercera forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector polinomial adecuado y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.
$B = g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] \Theta$	2-ciclos límite , cuarta forma general	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector polinomial adecuado y g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$.

Tabla 3.3. Tabla que muestra todas las generalizaciones de **2-ciclos límite** a partir de **distribuciones bivectoriales cocerradas**.

Aquí se presenta la tabla (3.4) con los *2-ciclos límite*, las posibles generalizaciones en $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, a partir de sistemas dinámicos polinomiales integrables con solución cerrada en el espacio-fase $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$:

Fórmula	Nombre	Descripción
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_1 \right\}$	2-ciclos límite , quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_2 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_3 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_4 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_5 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_6 \right\}$	2-ciclos límite , variación quinta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_1 \right\}$	2-ciclos límite , sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_2 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_3 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_4 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_5 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] B_6 \right\}$	2-ciclos límite , variación sexta forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ \delta T \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] \Theta \right\}$	2-ciclos límite , séptima forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector polinomial adecuado y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.
$B = \mu \left\{ g(\delta T) \pm \prod_{i=1}^n [(* T) - \mathcal{C}_i] \Theta \right\}$	2-ciclos límite , octava forma general; o 2-semiciclos límite .	Distribución en $B \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, $\Theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ un bivector adecuado, g un polinomio adecuado que respeta <i>conjuntos límite</i> de δT y $* T$ y μ el <i>factor integrante</i> polinomial.

Tabla 3.4. Tabla que muestra todas las generalizaciones de **2-ciclos límite** o **2-semiciclos límite** a partir de **distribuciones bivectoriales integrables**.

Teorema 3.1. Si $T(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ es la cantidad conservada para la distribución $B(x(t), y(t), z(t)) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$,

entonces se cumple la siguiente fórmula:

$$[\nabla \wedge (*\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t)))] \cdot \mathbb{B}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Este teorema se demostró en las páginas 63 a 64 de esta tesis. Además se muestra la generalización en la página 85 de esta tesis.

Finalmente, se hace un *diagrama conmutativo* del proceso que se llevó a cabo de manera general en las búsquedas de *r-ciclos límite*, puesto que es el proceso general que se siguió en cada ejemplo para llegar a los resultados.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}(\mathbf{x}(t)) \wedge_{i=1}^n \widehat{e}_{x_i}(\mathbf{x}(t)) & \xrightarrow{\delta} & \sum_{i=1}^n \mathbb{H}_{x_i}(\mathbf{x}(t)) \wedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \widehat{e}_{x_j}(\mathbf{x}(t)) \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ \mathbb{H}(\mathbf{x}(t)) & \xrightarrow{\nabla} & \nabla \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}(t)) \cong \sum_{i=1}^n \mathbb{H}_{x_i}(\mathbf{x}(t)) \widehat{e}_{x_i}(\mathbf{x}(t)) \end{array}$$

Antes de entrar de lleno a los comentarios de pertinencia, relevancia, importancia, sus posibles aplicaciones, trabajos que se podrían derivar y comentarios finales, en este *diagrama conmutativo* se puede llegar de un *n-vector* a un *(n - 1)-vector* mediante la *codiferencial*, si al *(n - 1)-vector* se le aplica el *dual de Hodge*, se puede asignar un *1-vector* que mediante un *isomorfismo* este se puede ver como un *campo vectorial*, que en realidad sería como nuestro *sistema dinámico*, análogamente, si al *n-vector* se le aplica el *dual de Hodge*, entonces se llega a una *hipersuperficie* o a una función de *n* variables, si a esta función se le aplica el *gradiente* entonces se llega a un *1-vector* que mediante un *isomorfismo* este se puede ver como un *campo vectorial*, que es nuestro *sistema dinámico*.

Comentarios sobre su pertinencia.

La pertinencia que tiene esta tesis es mostrar construcciones de *ciclos límite* a partir de ciertas condiciones que un *sistema dinámico bidimensional* debe de cumplir, así como una generalización de los *ciclos límite* conocidos, a los espacios de las *formas diferenciales*. En esta tesis solo se pusieron ejemplos de casos en $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ y $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, pero estas ideas pueden ser extendidas a los espacios $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

Se decidió tomar los *1-ciclos límite* y *2-ciclos límite* porque estos se pueden visualizar y con lo geométrico es más interactivo e intuitivo la introducción de los conceptos a la generalización y se podía manejar de una mejor manera ejemplos.

Comentarios sobre su relevancia.

Se pretende que esta tesis marque un inicio para construir y generalizar los *ciclos límite*. Aquí se muestra solo unas pocas maneras de hacerlo, pero seguramente hay más formas de generalizar los *ciclos límite* y también de construirlos a partir de condiciones que se cumplan en los *sistemas dinámicos polinomiales conservativos o integrables*. Algo que se considera notable es darle más valor a los *sistemas dinámicos* que tengan *ciclos límite*, dado que se podrían encontrar matemáticas más adecuadas para poder saber si un *sistema dinámico* tiene o no *ciclos límite*, y si los tiene, poder encontrar una manera de mostrar que se trata efectivamente de uno.

Aunque hay generalizaciones y también construcciones, hasta donde tenemos conocimiento no se ha hecho un libro completo de eso, al menos, no de manera intuitiva y además, los consultados van encaminadas a demostrar el problema 16 de Hilbert, más que a generalizarlos.

Comentarios sobre su importancia.

Se considera que la importancia de esta tesis es poder ampliar más la visión de los *ciclos límite* y los *sistemas dinámicos*, en realidad, esta es una pequeña aportación, y aunque sí hay muchos resultados publicados, aquí se reúnen algunos de varios artículos y libros.

Se considera que tiene importancia, ya que en México se podrían hacer investigaciones en esta línea, y podrían hacerse trabajos de *sistemas dinámicos con ciclos límite*.

Nosotros consideramos que la *importancia* de esta tesis es mirar a otros horizontes para hacer crecer más este conocimiento, poder fijarnos en otras generalizaciones y métodos para la resolución de problemas nuevos, o no nuevos, pero con un enfoque distinto a lo que se estudia en los *sistemas dinámicos*, sentimos que estas nuevas ideas podrían ayudar más en otros ámbitos de las matemáticas, ciencias de la complejidad y de áreas del conocimiento tales como la biología, por ejemplo.

Posibles aplicaciones.

Las posibles aplicaciones podrían ser en matemáticas, para mostrar y demostrar con mayor detenimiento que existen *ciclos límite* en el espacio de las *formas diferenciales* $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ con más teoría matemática, es posible que puedan ampliarse mucho más las generalizaciones y las construcciones de los *r-ciclos límite* a partir de *sistemas dinámicos* con ciertas características. Algunas aplicaciones podrían estar directamente relacionadas con la física como la mecánica analítica, la física cuántica y el electromagnetismo, en donde [Ralph2012], nos muestra ejemplos, pero no extiende la idea a las *formas diferenciales*, siempre se queda en el espacio \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , a pesar de que sus ideas están en el análisis tensorial.

Otras posibles aplicaciones podrían estar en la biología, como por ejemplo, en el modelo de presa-depredador, en donde se puede encontrar un *ciclo límite*, pero este no es polinomial. Sin embargo, podrían encontrarse modelos presa-depredador, modelos celulares o modelos epidemiológicos para los cuáles se puedan encontrar *ciclos límite* polinomiales y, por ende, extender la idea a las *1-formas* o *2-formas*.

Trabajos posibles que se podrían derivar.

Los posibles trabajos a los que podrían derivarse son los siguientes:

- Poder hacer construcciones más generales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , a partir de *sistemas dinámicos polinomiales conservativos o integrables*,
- Generalizar la idea de los *r-ciclos límite* a los espacios de las *formas diferenciales* $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$,
- Construir *r-ciclos límite* de manera más general, a partir de *n-vectores conservativos o integrables*, o de otro tipo,

- Poder llegar a la demostración del problema 16 de Hilbert, acerca de las curvas algebraicas, mediante las construcciones de *r-ciclos límite*,
- Encontrar matemáticas que ayuden a mostrar de manera algebraica la existencia y unicidad de *r-ciclos límite*, sin necesidad y uso de los flujos de *campos vectoriales*,
- Encontrar más aplicaciones en otros campos de conocimiento, como la física, la química, la biología, la geofísica y demás áreas del conocimiento.

Comentarios finales.

En este trabajo se ha destacado la necesidad de ampliar, construir y generalizar la idea de *ciclos límite* de manera más global y compleja, particularmente, aquí se presenta una pequeña parte de la extensión y la visualización más general. Es decir, este es un trabajo que pretende en cierto sentido ampliar más las posibilidades matemáticas de los *sistemas dinámicos* y los *ciclos límite*.

Posteriormente, sería interesante poder encontrar aplicaciones en la vida real, ya sea, en campos como la física o química, o hasta en eventos sociales, políticos, económicos o industriales que permitan ayudar o facilitar algunas ideas o manejos en cosas aplicadas.

Finalmente, recalco que mostré de alguna manera la existencia de *r-ciclos límite* y posibles construcciones de manera ilustrativa y descriptiva, aunque este trabajo podría extenderse mucho más. Me gustaría participar en más trabajos, para analizar más posibilidades y contextualizarlo mejor con ayuda.

Apéndice A

Definiciones convenientes

En este apéndice se presentan algunas de las definiciones más utilizadas en este libro de manera general. Primero se da la definición de lo que es una *base* en el sentido del *álgebra lineal*.

Definición A.1. En *álgebra lineal* se dice que β es una **base del espacio vectorial** V si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\beta \subseteq V$,
- $\forall v_i \in \beta$ con $i \in 1, \dots, n$, si $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ con $\alpha_i \in \mathcal{F}$, implica que $\alpha_i = 0 \forall i \in 1, \dots, n$,
- $\forall v \in V, \exists s \in \mathcal{L}(A)$, tal que $s = v$, donde $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

Ahora se presenta la definición de *dimensión* en el sentido del *álgebra lineal*.

Definición A.2. La **dimensión de un espacio vectorial** es el número de vectores que forman una **base**. Se define como el **cardinal de una base vectorial** para dicho espacio.

Ahora se presenta la definición de *subespacio vectorial*, ya antes en la sección (1.1) en la definición (1.2) se puso lo que es un *espacio vectorial*.

Definición A.3. Sea V un **espacio vectorial** sobre un **campo** \mathcal{F} , y $U \subset V$, U es un **subespacio vectorial** de V si:

- $\forall u_1, u_2 \in U, u_1 + u_2 \in U$, (cerradura de la suma en V)
- $\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathcal{F}, \lambda u \in U$. (cerradura del producto por escalar en V)

Ahora se da la definición de los que es una *base dual*, aparece en todos los estudios de la *geometría diferencial* y de otros campos del conocimiento matemático.

Definición A.4. En *álgebra lineal*, una **base dual** o **base biortogonal** es un conjunto de vectores que forman una **base para el espacio dual de un espacio vectorial**. Para un **espacio vectorial** V de dimensiones finitas, el **espacio dual** V^* es isomorfo a V y para cualquier conjunto dado de vectores base $\beta = e_1, \dots, e_n$ de V , hay asociada una **base dual** e^1, \dots, e^n de V^* con la relación.

$$e^{*i} \cdot e_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Concretamente, se pueden escribir vectores en un **espacio vectorial** V de n dimensiones como una matriz de columna de $n \times 1$ dimensiones y los elementos del espacio dual V^* como matrices de fila de $1 \times n$ que actúan como funcionales lineales por medio de la multiplicación matricial a la izquierda.

También se usa la delta de Kronecker como nomenclatura para la definición anterior como sigue

$$e^{*i} \cdot e_j = \delta_j^i, \text{ (también denotada como } \delta_{ij} \text{)}$$

Ahora se da la definición de *base ortonormal* que es necesario para la sección (1.2).

Definición A.5. Sea $(V, \langle *, * \rangle)$ un **espacio vectorial de dimensión finita** n .

Los n vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ se llaman **ortogonales** y **normales**, denominados **ortonormales** para abreviar, cuando satisfacen las dos condiciones siguientes:

- $\|v_i\| = 1, \forall i \in 1, 2, \dots, n$,
- $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j$.

Un conjunto de **vectores ortonormales** que engendran V constituyen una **base** para V , la cual es llamada **base ortonormal**.

Ahora se da la definición de los que es una *permutación*, que es necesario para el operador dual de Hodge.

Definición A.6. Se define una *permutación* como la *variación del orden o posición de los elementos de un conjunto ordenado o una tupla a otra configuración (diferente o igual)*. Una *permutación de un conjunto* X es una *función biyectiva de dicho conjunto en sí mismo*.

Asociado a la definición de *permutación* se encuentra el término *trasposición* que se define a continuación para generalizar los *r-ciclos límite*.

Definición A.7. Sea una permutación σ . La definición de la **signatura** de σ se hace contando las **inversiones**.

- Sean $i < j$ dos elementos distintos comprendidos entre 1 y n . Se dice que se tiene una **inversión** del par $\{i, j\}$ para σ cuando $\sigma(i) > \sigma(j)$.
- Se dice que una permutación es **par** cuando presenta un número par de inversiones. Se dice **impar** en el caso contrario.
- La **paridad** de una permutación par es 1 ; la de una permutación impar es -1 .

Se presenta ahora la definición de *grupo*, que es una estructura que cumple el conjunto de las *derivadas y corchetes de Lie*.

Definición A.8. Un grupo (G, \circ) es un conjunto G en el que se ha definido una operación binaria interna \circ , que satisface los siguientes axiomas:

- **Asociatividad:** $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- **Elemento neutro:** $\exists e \in G : e \circ a = a \circ e = a$
- **Elemento simétrico:** $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Por lo tanto, un grupo está formado por un conjunto de elementos abstractos o símbolos, y por una ley de composición interna (operación binaria) que los relaciona. Dicha ley de composición interna indica cómo deben ser manipulados los elementos del grupo.

Se dice que un grupo es *abeliano* o *conmutativo* cuando verifica además la propiedad conmutativa:

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$$

Además se puede considerar la operación unaria que a cada elemento a a le hace corresponder su elemento inverso a^{-1}

Se presenta ahora la definición de *anillo conmutativo unitario*, que es una estructura que cumple el conjunto $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, junto con sus dos operaciones internas de *suma* y *producto* de *p*-formas.

Definición A.9. Un **anillo conmutativo unitario** $(R, \tilde{+}, \tilde{*}, \tilde{0}, \tilde{1})$ es un conjunto R con dos leyes de composición, llamadas **suma** $(\tilde{+})$ y **producto** $(\tilde{*})$, cumpliendo las operaciones siguientes:

1. $(R, \tilde{+}, \tilde{0})$ es **grupo abeliano** para la **asuma**; el **elemento neutro** en esta **suma** se nombra **cero del anillo**, y se denota usualmente como $\tilde{0}$,
2. $(R, \tilde{*}, \tilde{1})$ es un **monoide conmutativo** para el **producto**; el **elemento neutro** en este **producto** se nombra **uno del anillo**, y se denota usualmente como $\tilde{1}$,
3. El **producto** es **distributivo** (por ambos lados) respecto de la **suma**.

Ahora se pone la definición de *módulo* como *estructura algebraica*, no como la operación algebraico-aritmética que se ve en los cursos de álgebra superior I y II.

Definición A.10. Sea R un anillo con identidad y sea 1_R su identidad multiplicativa. Un **R -módulo** de M es un **grupo abeliano** $(M, +)$ y una operación $\cdot : R \times M \rightarrow M$ tal que para cualesquiera $r, s \in R$, y $x, y \in M$, se tiene

1. $(rs)x = r(sx)$,
2. $(r + s)x = rx + sx$,
3. $r(x + y) = rx + ry$,
4. $1x = x$.

Generalmente, se escribe simplemente “ **R -módulo M** ” o R_M .

Aquí cabe aclarar que las *p*-formas diferenciales junto con la *suma* de *p*-formas, como el *producto* de *p*-formas son tanto *R*-módulo izquierdo M , como *R*-módulo derecho M , por lo que solo se dice que es un *R*-módulo M . Se presenta ahora la definición de *conjunto abierto* en un *espacio métrico* como lo es \mathbb{R}^n .

Definición A.11. Sea (X, d) un *espacio métrico*. Se dice que $U \subset X$ es un **conjunto abierto** si para todo $x \in U$ existe una *bola abierta* $x \in B(x, \epsilon) \subset U$.

A continuación, se presenta el concepto de *variedad riemanniana*.

Definición A.12. Se define una **variedad de Riemann** como una **variedad diferenciable real** en la que cada *espacio tangente* se equipa con un *producto interior* de manera que varíe suavemente punto a punto. Esto permite que se definan varias *nociones métricas* como *longitud de curvas*, *ángulos*, *áreas* (o *volúmenes*), *curvatura*, *gradiente de funciones* y *divergencia de campos vectoriales*. Una *variedad de Riemann* es una generalización del concepto *métrico*, *diferencial* y *topológico* del *espacio euclidiano* a *objetos geométricos* que localmente tienen la misma estructura que el *espacio euclidiano* pero globalmente pueden representar forma “*curva*”. De hecho, los ejemplos básicos de *variedades de Riemann* son precisamente *superficies curvas* de \mathbb{R}^3 y *subconjuntos abiertos* de \mathbb{R}^n .

También se presenta el concepto de *variedad subriemanniana*.

Definición A.13. Se define una **variedad subriemanniana** como una *tripleta* (M, H, g) , donde M es una *variedad diferenciable*, H es una *distribución “horizontal”* completamente *no-integrable* y g una *sección suave* de *formas cuadráticas* definidas positivas. Es un cierto tipo de generalización de una *variedad de Riemann*. A grandes rasgos, para medir distancias en una *variedad subriemanniana*, solo se permite moverse a través de *curvas tangentes* a los llamados *subespacios horizontales*.

Como el concepto de *permutación* es necesario, se presenta a continuación su definición.

Definición A.14. En matemática, y especialmente en teoría de categorías, un **diagrama conmutativo** es un diagrama de objetos (también conocidos como vértices) y **morfismos** (también conocidos como flechas o aristas) tales que todas las rutas directas en el diagrama con los mismos puntos finales conducen al mismo resultado por composición. Los **diagramas conmutativos** desempeñan un papel básico en teoría de categorías al igual que las ecuaciones lo hacen en álgebra.

El concepto de *variedad topológica*, *variedad* o *variedad n-dimensional* es de suma importancia, por lo que se da la definición a continuación.

Definición A.15. Se define una **variedad n-dimensional** M como un conjunto dotado de una colección P de cartas abstractas (funciones uno a uno x de $D \subset M$, donde D es un **conjunto abierto** de un espacio euclídeo de n dimensiones, $E(n)$) tal que

1. M está cubierta por las imágenes de las cartas de la colección P .
2. Para dos cartas cualesquiera x y y de la colección P , las funciones $y^{-1}x$ y $x^{-1}y$ son euclídeamente diferenciables (y están definidas en conjuntos abiertos de $E(n)$).

Por lo tanto, una superficie es lo mismo que una variedad bidimensional. El espacio euclídeo $E(n)$ es una variedad n -dimensional especial ya que su colección de cartas consiste solamente en la función identidad.

El concepto de *variedad diferenciable* aparece en este trabajo, por lo que se define a continuación.

Definición A.16. Se define una **variedad diferenciable** como el par (\mathcal{M}, F) formado por la variedad topológica \mathcal{M} de dimensión n y por la estructura diferenciable F de clase r .

Se define a continuación lo que es una *estructura diferenciable*.

Definición A.17. Dada una **variedad topológica** \mathcal{M} y un número entero $r \geq 0$, una **estructura diferenciable** (o **atlas maximal**) F de clase r sobre \mathcal{M} es una familia $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ de sistemas coordenados sobre \mathcal{M} de manera que se cumpla que:

1. U_λ recubre \mathcal{M} , es decir $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \mathcal{M}$,
2. dados dos cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ ha de ocurrir que la aplicación $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, llamada cambio de cartas sea diferenciable de orden r ,
3. F es maximal (relativo al orden dado por la inclusión de conjuntos) entre todas las familias de entornos coordenados sobre \mathcal{M} bajo las condiciones 1 y 2.

La definición de *geodésica* se da a continuación.

Definición A.18. Se define la *línea geodésica* como la *línea de mínima longitud* que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie. El plano osculador de la geodésica es perpendicular en cualquier punto al plano tangente a la superficie. Las geodésicas de una superficie son las líneas “más rectas” posibles (con menor curvatura) fijado un punto y una dirección dada sobre dicha superficie.

Se presenta la definición de compactificación, y en particular la de compactación proyectiva.

Definición A.19. En matemáticas, en topología general, la *compactificación* es el proceso o resultado de convertir un espacio topológico en un espacio compacto. Un espacio compacto es un espacio en el que cada cubierta abierta del espacio contiene una subcubierta finita. Los métodos de compactación son varios, pero cada uno es una forma de controlar que los puntos “se vayan al infinito” agregando de alguna manera “puntos en el infinito” o evitando tal “escape”.

El espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ es una compactificación del espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Para cada posible “dirección” en la que los puntos en \mathbb{R}^n pueden “escapar”, se agrega un nuevo punto en el infinito (pero cada dirección se identifica con su opuesto). Pasar al espacio proyectivo es común en geometría algebraica porque los puntos agregados en el infinito conducen a formulaciones más simples de muchos teoremas. Por ejemplo, cualquiera de las dos líneas diferentes en $\mathbb{R}P^2$ se intersectan en un punto precisamente, una declaración de que no es cierto en \mathbb{R}^2 .

Se presenta la definición de homología, que es apropiado por el teorema (2.6).

Definición A.20. Se define el **n-ésimo grupo de homología** asociado a un complejo de cadenas

$$\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \rightarrow \dots$$

donde $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$
como el grupo abeliano

$$H(A_n) = \frac{\ker(\delta_n)}{\text{im}(\delta_{n+1})}.$$

También se utiliza la notación

$H_n(A)$, donde A es el complejo de cadenas respectivo.

Se llama $\ker(\delta_n)$ los ciclos en A_n y se llama $\text{im}(\delta_{n+1})$ las fronteras de A_n .

Se presenta la definición de *integral abeliana*:

Definición A.21. En matemáticas, una *integral abeliana*, llamada así por el matemático noruego Niels Henrik Abel, es una integral en el plano complejo de la forma

$$\int_{z_0}^z R(x, w) dx,$$

donde es una función racional arbitraria de las dos variables x y w , que están relacionadas por la ecuación $R(x, w)xw$

$$F(x, w) = 0,$$

donde es un polinomio irreducible en $\mathbb{K}[x, w]$

$$F(x, w) \equiv \varphi_n(x)w^n + \dots + \varphi_1(x)w + \varphi_0(x),$$

cuyos coeficientes φ_j , son funciones racionales de x . El valor de una integral abeliana depende no solo de los límites de integración, sino también del camino por el que se toma la integral; por tanto, es una función multivalor de x . $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Se da el teorema de los ceros de Hilbert que se usa para demostrar el teorema (2.6)

Teorema A.1. Sea \mathbb{K} un cuerpo algebraicamente cerrado (como el de los números complejos), considere el anillo de polinomios $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ y sea I un ideal en este anillo. La variedad afín $V(I)$ definida por este ideal consiste de todas las n -tuplas $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{K}^n tal que $f(\mathbf{x})=0$ para todo f en I . El teorema de los ceros de Hilbert nos dice que si p es un polinomio en $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ que se anula en la variedad $V(I)$, es decir, $p(\mathbf{x})=0$ para todo \mathbf{x} en $V(I)$, entonces existe un número natural r tal que p^r está en I .

El **Hilberts Nullstellensatz** (en alemán: "teorema de los lugares de los ceros") es un teorema en Geometría algebraica que relaciona variedades e ideales en anillos de polinomios sobre cuerpos algebraicamente cerrados. Fue probado inicialmente por David Hilbert. La demostración del Nullstellensatz de Hilbert se encuentra en [Michael1969]. A continuación, se da el concepto de *homeomorfismo*, necesario para varias partes de esta tesis:

Definición A.22. Sean X e Y espacios topológicos, y f una función de X a Y ; entonces, f es un **homeomorfismo** si se cumple que:

- f es una biyección,
- f es continua,
- La inversa de f es continua.

A continuación, se da el concepto de *embebimiento* que está relacionado con los *homeomorfismos*:

Definición A.23. Un **embebimiento** es una aplicación $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos tal que

$$f : (X, \tau) \rightarrow (f(X), \tau'|_{f(X)})$$

es un **homeomorfismo**. Se dirá entonces que X está embebido en Y mediante f .

Se da a continuación, el concepto de *inmersión inyectiva*, para la parte del *teorema de Gauss-Bonnet*

Definición A.24. En matemáticas, una **inmersión** es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables cuya derivada es **inyectiva** en todo punto. Explícitamente, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una *inmersión* si:

$$D_p f : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N}$$

es una función inyectiva en cada punto p de \mathcal{M} (donde la notación $T_p \mathcal{X}$ representa el espacio tangente de \mathcal{X} en el punto p). Equivalentemente, f es una **inmersión** si su derivada tiene rango constante e igual a la dimensión de \mathcal{M} :

$$\text{rank } D_p f = \dim \mathcal{M}$$

La propia función f no necesariamente debe ser inyectiva, sólo su derivada.

Un concepto relacionado es el de *incubamiento* (*embedding*). Un *incubamiento* es una *inmersión inyectiva* $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ que también es un **incubamiento topológico**, de tal manera que \mathcal{M} es difeomórfica con su imagen en \mathcal{N} . Una **inmersión** es un **incubamiento local**, es decir, para un punto $x \in \mathcal{M}$ existe una vecindad, $U \subset \mathcal{M}$, de x tal que $f : U \rightarrow \mathcal{N}$ es un **incubamiento**, y recíprocamente un **incubamiento local** es una **inmersión**. Para variedades de dimensión infinita, esto a veces se toma como la definición de *inmersión*.

Apéndice B

Notación

Aquí se presenta una tabla con las notaciones que se van a utilizar a lo largo de todo el libro.

Notación	Significado	Página
\mathcal{F}	notación para <i>campo</i> o <i>cuero</i>	1
\forall	significa <i>para todo</i>	1
\exists	significa <i>existe</i>	1
a, b, c	son <i>escalares</i> en un <i>campo</i>	1
V	notación para <i>espacio vectorial</i>	1
\mathbb{R}	el <i>campo</i> de los <i>números reales</i>	1
$\mathcal{C}l(V, g), \mathcal{G}(p, q), \mathcal{G}_n$	denotan el conjunto de los <i>multivectores</i> o un <i>álgebra geométrica</i>	1
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{0}$	denotan <i>vectores</i>	2
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	denota un <i>producto interno</i> general	2
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	denota un <i>producto interno conjugado</i> general	2
\cup	significa <i>unión de conjuntos</i>	2
\mathbb{R}^+	denota al conjunto de los <i>números reales positivos</i> , sin incluir al 0	2
g	denota la función <i>producto interno</i> general	2
$V \times V$	denota el <i>producto cartesiano</i> entre dos <i>espacios vectoriales</i>	2
d	denota una función <i>distancia</i> general	2
\mathbb{R}^n	denota el <i>espacio vectorial n-dimensional real</i>	2
M	denota un <i>espacio métrico</i> general	2
∞	significa <i>más infinito</i> o que crece indefinidamente	2
$B(a, r)$	significa <i>bola (abierto) centrada en a y de radio r</i>	3
β	significa <i>base ortonormal</i> de un <i>vector</i>	3
\mathbb{R}^2	significa el <i>plano cartesiano real</i>	3
$\ * \ $	significa la <i>norma</i> de un <i>vector</i>	3
\iff	significa <i>si y sólo si</i>	3
$B_c(a, r), \overline{B}(a, r), B_r(a)$	significa <i>bola (cerrada) centrada en a y de radio r</i>	3
$U(a, r), U_r(a)$	significa <i>bola (abierto) centrada en a y de radio r</i> en análisis funcional	3
$S(r, a), S_r(a)$	significa <i>esfera centrada en a y de radio r</i>	3
$\sum_{i=1}^n$	notación que designa una <i>suma general</i> o <i>sumatoria</i>	3
$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$	significa <i>producto punto</i> o <i>escalar</i> entre <i>vectores</i>	3
$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$	denota el <i>producto escalar</i> de dos <i>vectores</i> cualesquiera	3
\cos	es la función <i>coseno</i> de un <i>ángulo</i> dado	3
$\angle V$	<i>ángulo</i> del vértice opuesto al <i>vector v</i>	3
\perp	significa <i>perpendicular</i>	3
B	denota un <i>frm-e-vector</i> o <i>bivector</i>	4
\wedge	significa la <i>multiplicación exterior</i> , <i>producto exterior</i> o <i>producto cuña</i>	5
$\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$	es el conjunto de los <i>bivectores</i> de orden 2 en el espacio \mathbb{R}^2	5
\sin	es la función <i>seno</i> de un <i>ángulo</i> dado	5
\parallel	significa <i>paralelo</i>	6
$ \cdot $	significa en general un <i>valor absoluto</i>	6
T	denota un <i>3-vector</i> o un <i>trivector</i>	6
\mathbf{v}_{\parallel}	denota el <i>vector colineal</i>	6
\mathbf{v}_{\perp}	denota el <i>vector ortogonal</i>	6
$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$	denota el <i>producto geométrico</i> de dos <i>vectores</i> cualesquiera	7
(p, q)	denota la <i>signatura</i> de \mathcal{G}	7
\mathbf{M}	denota un <i>multivector</i>	8
\bigoplus	<i>Suma directa</i>	8
$\bigoplus_{i \in G}$		
$\binom{n}{k}$	denota las <i>combinaciones</i> de n elementos tomados de k en k	8
$\langle \mathbf{M} \rangle_m$	denota la parte de grado m del <i>multivector M</i>	9
A, B, C	denotan <i>multivectores</i> de un <i>álgebra geométrica</i>	9
V^p	indica el <i>producto cartesiano</i> de <i>espacios vectoriales</i>	10
$T(v_1, v_2, \dots, v_p)$	denota un <i>tensor</i> de orden p en V	10
\otimes	denota el <i>producto tensorial</i>	10
$\Omega^p(\mathbb{R}^n)$	espacio de los <i>tensores de orden p</i> en el <i>espacio vectorial</i> \mathbb{R}^n	10
φ_i	denota la <i>base dual</i>	10
ω	denota una <i>p-forma</i> o en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$	10
dx_i	denota la <i>diferencial</i> i -ésima	10

La información sigue en la página siguiente.

Notación	Significado	Página
$n!$	denota la <i>permutación</i> de n elementos	11
\mathcal{C}^k	denota el conjunto de las funciones k veces continuas y diferenciables	11
$Alt(T)$	denota un <i>tensor alternado</i> o <i>totalmente antisimétrico</i>	12
$\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$	denota el conjunto de las <i>formas diferenciales</i> de orden p en \mathbb{R}^n	12
$\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}$	denota el <i>símbolo de Levi-Civita</i>	13
\mathbb{R}^3	denota el <i>espacio tridimensional real</i>	13
$[v_1, \dots, v_n]$	denota la orientación de V	14
\det	representa la función <i>determinante</i>	14
\dim	denota la <i>dimensión</i>	14
A^T	denota la <i>matriz transpuesta</i>	15
sgn	denota la <i>función signatura</i>	15
$\sigma(i)$	significa <i>permutación</i> del i -ésimo elemento	15
$v \times w$	representa el <i>producto cruz</i> entre dos <i>vectores</i> cualesquiera	15
$d\omega$	denota la <i>derivada exterior</i> de una p -forma	15
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	denota la <i>derivada parcial</i> de la función f respecto de x_i	15
\tan^{-1}	denota la <i>tangente inversa</i>	18
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$	denota la <i>doble derivada parcial</i> de f respecto de x_j y x_i	18
\int_a^b	representa la <i>integral</i> de a a b	18
$I\omega(\vec{x})$	denota la <i>integral</i> de una p -forma en \mathbb{R}^n	19
(X, τ)	denota un <i>espacio topológico</i>	20
\emptyset	denota al <i>conjunto vacío</i>	20
$f \circ g$	representa la <i>composición de funciones</i>	20
\cong	significa que dos aplicaciones son <i>homotópicas</i>	20
$\alpha * \beta$	representa el producto de dos lazos	21
$[f]$	denota la <i>clase de homotopía</i> de la aplicación f	21
V^*	denota al <i>espacio dual vectorial</i>	22
ω^i	denota a los <i>vectores covariantes</i>	22
v_i	denota a los <i>vectores contravariantes</i>	22
T_p^*M	denota el espacio cotangente	22
T_rM	denota el espacio tangente	22
$T_{p,r}^q(M)$	denota el conjunto del tipo (q, p) tensores en $r \in M$	22
\otimes^p	denota al <i>producto tensorial de orden p</i>	22
$*$	denota el <i>dual de Hodge</i> u <i>operador de Hodge</i>	22
$g_{\mu\nu}$	denota el <i>tensor métrico</i>	23
δ	denota la <i>codiferencial exterior</i>	23
∇^2	denota al <i>operador de Laplace-de Rham-Beltrami</i>	24
$\{f, g\}_{x_i, y_i}$	<i>Corchete de Poisson</i>	25
$\mathcal{L}_X(f)$	notación para la <i>derivada de Lie</i>	25
\mathcal{M}	denota una <i>variedad diferenciable</i>	22
$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$	denota al espacio de los <i>campos vectoriales</i>	25
$[X, Y]$	denota al <i>corchete de Lie</i>	25
$\mathbb{H}(x(t), y(t))$	denota la <i>función de Hamilton</i>	28
\mathbf{x}^*	denota las <i>singularidades</i> de un <i>sistema dinámico</i>	28
$\prod_{i=1}^n$	denota un <i>producto general</i>	28
$\varphi(t_i, \mathbf{x})$	denota el flujo de un <i>sistema dinámico</i>	29
$\omega(p)$	denota un <i>conjunto límite</i> cualquiera en el plano	29
\hat{H}	denota la <i>función de Hamilton</i> en $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$	32.
∇_{\wedge}	Notación para <i>derivada exterior</i> de <i>sistemas dinámicos</i>	32
\hat{e}_x, \hat{e}_y	notación para la <i>diferencial</i> para <i>distribuciones univectoriales</i>	32
$\varphi_t(x_0)$	notación para <i>flujo de un sistema no lineal</i>	32
Θ	denota la parte no lineal de una <i>distribución</i> en $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$	37
χ	notación para funciones de <i>campos vectoriales</i>	37
γ	notación para funciones de <i>trayectorias</i>	37
C_k	representa un <i>conjunto de nivel</i>	37
χ_H	denota un <i>campo vectorial</i> de una <i>función hamiltoniana</i>	38
$\bigcap_{s \in \mathbb{R}}$	denota la <i>intersección generalizada de conjuntos</i>	39
$\overline{\{\varphi(x, t) : t > s \text{ ó } t < s\}}$	denota la <i>cerradura del flujo</i> de un <i>sistema dinámico</i>	39
$K(x(t), y(t))$	denota un <i>cofactor</i> polinomial	39
gr	denota el <i>grado</i> de un polinomio	40
$\mathbb{R}[x(t), y(t)]$	denota al espacio de los <i>polinomios en el campo \mathbb{R}</i> en las variables $x(t)$ y $y(t)$	40
$\mathbb{R}P^2$	denota <i>plano proyectivo real</i>	40
$\mathbb{R}P_{\infty}^1$	denota la <i>recta real proyectiva</i> con el infinito	40
F^k	denota el <i>grado</i> de la curva invariante F	40
(F_x, F_y)	denota el <i>máximo común divisor</i> entre polinomios	40
\exp	denota la <i>exponencial</i>	40
F_i	denota una <i>curva invariante algebraica</i>	40
N_j	denota un <i>factor exponencial</i>	40
$\theta(x(t), y(t))$	denota un <i>factor integrante</i> de un <i>sistema dinámico</i>	46

La información sigue en la página siguiente.

Notación	Significado	Página
gen	denota al <i>conjunto generador</i>	53
$\mathbb{B}(x(t), y(t), z(t))$	notación para <i>distribuciones bivectoriales</i> en $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$	53
$\mathbb{T}(x(t), y(t), z(t))$	notación para <i>distribuciones trivectoriales</i> en $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$	53
$i_X\omega$	denota a las <i>contracciones de p-formas</i>	62
\mathbb{S}^1	denota al <i>círculo unitario</i>	64
∂	notación para la <i>frontera de una variedad</i>	64
\sum	<i>frontera de componentes conexas</i>	65
\mathbb{S}^n	denota la <i>esfera unitaria (n - 1)-dimensional</i>	65
\mathbb{D}^3	denota un <i>disco</i>	65
H	denota una <i>hipersuperficie</i>	66
$f^*\Omega$	denota el <i>pullback</i> o la <i>aplicación regresiva</i> de una <i>variedad</i> Ω	67
K	denota la <i>curvatura de Gauss</i> de la hipersuperficie	68
$\chi(S)$	denota la <i>característica de Euler</i> de una <i>superficie cerrada</i>	68
$ind_{\mathbf{x}_0}$	denota el <i>índice de un punto singular</i> de un em campo vectorial	72
Φ	denota una partición de <i>conjuntos disjuntos conectados</i>	73
\mathcal{L}_α	denota las <i>hojas</i> de una <i>foliación</i>	73
$T(\mathcal{M}, \Phi)$	denota una <i>distribución</i> de $T\mathcal{M}$ llamado el <i>haz tangente a la foliación</i>	73
\cup	denota la <i>unión de conjuntos</i> generalizada	73
$\mu(\Phi)$	denota un <i>haz cociente</i> llamado comúnmente <i>haz normal</i> a la foliación Φ	73
\wedge	denota un <i>producto cuña</i> generalizado	84

Tabla B.1. Se muestra tanto la notación general como la especial que se usa en esta tesis.

Bibliografía

- [Ralph2012] ABRAHAM, RALPH, JERROLD E. MARSDEN, and TUDOR RATIU. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. Vol. 75. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Adu2012-I] *Adu's Blog [Blog]*. (2012, Septiembre 27). Recuperado de <https://jadsuafu.wordpress.com/tag/corchete-lie/>
- [Adu2012-II] *Adu's Blog [Blog]*. (2012, Septiembre 28 y 29). Recuperado de <https://jadsuafu.wordpress.com/tag/derivada-lie/>
- [Fernando2000] ALCALDE CUESTA, FERNANDO y BERMÚDEZ CARRO, MIGUEL ANXO. *teorema de separación de Jordan-Brouwer: Un paseo por la geometría y la topología*, 2000.
- [Kathleen1996] ALLIGOOD, KATHLEEN T., TIM D. SAUER, AND JAMES A. YORKE. *Chaos, an introduction to dynamical systems*. Springer New York, 1996.
- [Francisco1998] ARENAS, FRANCISCO GARCIA; PUERTAS, MARIA LUZ. *El Teorema de la Curva de Jordan*. Divulgaciones Matemáticas, 1998, vol. 6, no 1, p. 43 - 60.
- [Vladimir2007] ARNOLD, VLADIMIR I., VALERY V. KOZLOV, and ANATOLY I. NEISHTADT. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Vol. 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [Michael1969] ATIYAH, MICHAEL 1969. Ch. 7. Tomado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_Nullstellensatz
- [Byron2006] BIRD, R. BYRON, STEWART, W. E., LIGTHFOOT, E. N.. *Fenómenos de Transporte*, 2da Edición, Editorial Limusa Wiley, 2006.
- [Paul1999] BLANCHARD, PAUL; DEVANEY, ROBERT L. *Ecuaciones diferenciales*, 1999.
- [Aleksandr1968] ALEKSANDR1968] BORISENKO, ALEKSANDR IVANOVICH. *Vector and tensor analysis with applications*. Courier Corporation, 1968.
- [Raoul1970] BOTT, RAOUL. *On a topological obstruction to integrability*. Proc. Symp. Pure Math.. Vol. 16. 1970.
- [Colin2000] CHRISTOPHER, COLIN; LLIBRE, JAUME. *Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems*. Ann. Differ. Equ, 2000, vol. 16, no 5.
- [Colin2004] CHRISTOPHER, C., LLIBRE, J., PANTAZI, C., & ZHANG, X. (2004). *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 35(10), 2457–2476. doi:10.1088/0305-4470/35/10/310
- [Leo2009] DORST, L., FONTIJNE, D., & MANN, S. *Geometric Algebra for Computer Science (Revised Edition): An Object-Oriented Approach to Geometry*. 2009. URL <http://www.amazon.de/dp/0123749425>.
- [Freddy2006] DUMORTIER, FREDDY; LLIBRE, JAUME; ARTÉS, JOAN C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Berlin: Springer, 2006.
- [Boris2012] DUBROVIN, BORIS A., ANATOLIY TIMOFEEVIC FOMENKO, and SERGEI PETROVICH NOVIKOV. *Modern geometry—methods and applications: Part II: The geometry and topology of manifolds*. Vol. 104. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Andres2000] ESCALAR, ANDRÉS VIÑA. *Geometría diferencial*. Universidad de Oviedo, 2000.
- [Theodore2011] FRANKEL, THEODORE. *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge university press, 2011.
- [Jose2015] GÓNZALEZ P., JOSÉ Á., (2015) *Introducción a la Teoría Hodge*.
- [Allen2005] HATCHER, ALLEN. *Algebraic topology*, 2005.
- [David2012] HESTENES, DAVID. *New foundations for classical mechanics*. Vol. 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Morris2012] HIRSCH, MORRIS W., STEPHEN SMALE, and ROBERT L. DEVANEY. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [Maria2018] JAENADA, MARÍA. *El teorema de Schöenflies*, 2018.
- [Carlos] JIMÉNEZ, CARLOS RUIZ, and JOSE I. USERA. *Apuntes de física fundamental*.
- [Camille1882] JORDAN, CAMILLE. *Cours d'analyse d l'école polytechnique: Calcul différentiel*. Vol. 1. Gauthier Villars, 1882.
- [Camille1893] JORDAN, CAMILLE. *Cours d'analyse de l'École polytechnique*. Vol. 1. Gauthier-Villars et fils, 1893.

- [Jurgen2008] JOST, JÜRGEN, and JÈURGEN JOST. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Vol. 42005. Berlin: Springer, 2008.
- [Gerardo2011] LAGUNA S., GERARDO. *Un Acercamiento Práctico al Álgebra Geométrica*. Contactos, 79, pp. 31 - 39, 2011.
- [Lawson1977] LAWSON, H. B. *The qualitative theory of foliations*. AMS Series 27 (1977).
- [Juan2018] LESE D., JUAN. (23 de abril de 2018) *El cedazo. Comparte el conocimiento [Blog], Explorando el álgebra geométrica*, recuperado de <https://eltamiz.com/elcedazo/series/explorando-el-algebra-geometrica/>.
- [Elon1987] LIMA, ELON L. *Orientability of smooth hypersurfaces and the Jordan–Brouwer separation theorem*. Expo. Math 5.3 (1987): 283-286.
- [Jaume2006] LLIBRE, JAUME, and GRZEGORZ ŚWIRSZCZ. *Relationships between limit cycles and algebraic invariant curves for quadratic systems*. Journal of Differential Equations 229.2 (2006): 529-537.
- [Jaume2010] LLIBRE, JAUME; RAMÍREZ, RAFAEL; SADOVSKAIA, NATALIA. *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles*. Journal of Differential Equations, 2010, vol. 248, no 6, p. 1401 - 1409.
- [Jaume2011] LLIBRE, JAUME, RAFAEL RAMÍREZ, and NATALIA SADOVSKAIA. *On the 16th Hilbert problem for limit cycles on nonsingular algebraic curves*. Journal of Differential Equations 250.2 (2011): 983-999.
- [Jaume2014] LLIBRE, JAUME; TERUEL, ANTONIO E. *Introduction to the qualitative theory of differential systems*. Basel: Birkhäuser, 2014.
- [Jaume2009] LLIBRE, JAUME, and XIANG ZHANG. *Darboux theory of integrability in \mathbb{C}^n taking into account the multiplicity*. Journal of Differential Equations 246.2 (2009): 541-551.
- [Jaume2007] LLIBRE, JAUME; ZHAO, YULIN. *Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, vol. 40, no 47, p. 14207.
- [Diosel2011] LÓPEZ C., DIOSEL, *El operador * de Hodge en variedades Riemannianas*, 2011
- [Mauricio2014] LÓPEZ, MAURICIO, (Febrero 25, 2014) *Tutorial de álgebra geométrica conforme - Rumbo loxodrómico*. Recuperado de: <https://rastergraphics.wordpress.com/2014/02/25/tutorial-de-algebra-geometrica-conforme/>
- [Charles1973] MISNER, CHARLES W., et al. *Gravitation*. MacMillan, 1973.
- [James2018] MUNKRES, JAMES R. *Elements of algebraic topology*. CRC Press, 2018.
- [James2002] MUNKRES, JAMES R. *Topología*, 2. a edición, 2002.
- [Mikio2003] NAKAHARA, MIKIO. *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [Dmitry2001] NOVIKOV, D.; YAKOVENKO, S. *Redundant Picard–Fuchs system for abelian integrals*. Journal of Differential Equations, 2001, vol. 177, no 2, p. 267 - 306.
- [Barret1983] O’NEILL, BARRET. *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity*. Academic Press, 1983.
- [Lawrence2006] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, 3rd edition. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Felipe2015] PORTALES OLIVA, FELIPE IGNACIO. *Cantidades conservadas invariantes en teorías gravitacionales en presencia de campos externos*. Diss. Universidad de Concepción Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Departamento de Física, 2015.
- [Salomon2015] REBOLLO P., SALOMÓN. (05-09 de enero de 2015). *Introducción a la teoría de ciclos límite [Presentación de Power Point]*. Recuperado de <http://inst-mat.usalca.cl/html/images/pdf/presentacion2cc.pdf>.
- [Claudio1995] RUIZ, CLAUDIO PITA, y CLAUDIO DE JESÚS. *Cálculo vectorial*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- [Pascual] SAORIN, PASCUAL LUCAS. *Variedades Diferenciables y Topología*.
- [Arthur1908] SCHOENFLIES, ARTHUR. *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Vol. 2. BG Teubner, 1908.
- [Michael1988] SPIVAK, MICHAEL. *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.
- [Gerald2012] TESCHL, GERALD. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. American Mathematical Soc., 2012.
- [Varilly2014] VÁRILLY BOYLE, JOSEPH C. *MA-870: Geometría diferencial*, 2014.
- [Jayme2016] VAZ JR, JAYME, ROLDÃO DA ROCHA JR, and ROLDÃO DA ROCHA JR. *An introduction to Clifford algebras and spinors*. Oxford University Press, 2016.
- [Stephen2013] WIGGINS, STEPHEN. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Science+Business Media, LLC, 2013.
- [Raymond1949] WILDER, RAYMOND LOUIS. *Topology of manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publication, 1949.
- [Raymond1965] WILDER, RAYMOND LOUIS. *Topology of manifolds*. Vol. 32. American Mathematical Soc., 1965.
- [Xambo2016] XAMBÓ, SEBASTIÀ. *Álgebra geométrica y geometrías ortogonales*. La Gaceta de la RSME 19.3 (2016): 559-588.