

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN SISTEMAS
ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

*“Instrumentación de un sensor de
oxígeno para la industria automotriz”*

TRABAJO RECEPCIONAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

PRESENTA
Jorge Landeros Muñoz

Director de Tesis
Doctor Daniel Maisner Bush
Co-director de Tesis
Doctor Julio Cesar Salas Torres

Ciudad de México, Octubre 2018

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS ©

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Dedicatoria

A mi padre Jorge Landeros Granados

A mi hijo David Landeros García

A Julio Salas por apoyar este trabajo

Agradecimientos

A mi director de tesis el Dr. Daniel Maisner Bush, a mi co-director Julio Cesar Salas Torres, a mis lectores la M. en C. Myrna Velarde Saldaña, el M. en I. Víctor Manuel Macias Medrano y al Dr. Fausto Zárate Jarquin por la dedicación, compromiso y profesionalismo de revisar el presente trabajo.

A mis profesores por sus enseñanzas.

A la Universidad Autónoma de la Ciudad de México por sus enseñanzas, pero sobre todo por darme la oportunidad de poder continuar con mis estudios...

A mi padre por su apoyo y bondad...

Al laboratorio LACECI por las facilidades prestadas para la realización de este trabajo.

Resumen

El dispositivo desarrollado es un prototipo que se propone como un sustituto del sensor de oxígeno, este es el encargado de monitorear la mezcla aire-gasolina, a este parámetro en la industria se le conoce como factor λ , como se demostrará en el capítulo 3 la desviación en el valor de sensor trae consigo demasiados problemas, al motor del vehículo, dado que dicho sensor forma parte de todos los sistemas OBD y OBDII, se estima que al rededor del 80 % de los automotores que se encuentran en circulación en la CDMX cuentan con dicho dispositivo, incluidos aquellos vehículos a gasolina de uso intensivo.

Algunos problemas de un factor λ mal calculado son:

- Consumo excesivo de combustible.
- Generación de grandes cantidades de gases contaminantes.
- Daño a componentes internos del motor.
- Daño al convertidor catalítico.

El problema principal del sensor comercial es que sufre alteraciones por histéresis electrónica, es decir, el comportamiento de las lecturas no es lineal y la ECU no se ajusta a la curva de calibración, además que cada fabricante dentro de la ECU, instala su propia curva de calibración para dicho sensor, por ello al instalar una pieza de recambio, esta puede no ajustarse del todo a dicha curva y como consecuencia obtener valores por debajo o por arriba del valor esperado, se conoce como el factor λ al parámetro que se obtiene de dicho sensor como se demostrará en los resultados experimentales. En capítulos posteriores explicaremos como el sensor lambda da medidas imprecisas e incluso erróneas que generan múltiples problemas al motor del vehículo.

El dispositivo desarrollado en el presente trabajo, salva este inconveniente ya que se puede ajustar, como se demuestra en las conclusiones, a la curva de calibración de una ECU de primera o segunda generación, manteniendo el factor lambda dentro de los rangos esperados, lo más cercano a 1. La instalación del dispositivo no afecta la instalación eléctrica del vehículo, tampoco a el resto del sistema ya se comprobó a lo largo de 1 año de pruebas; y el resto de los sistemas no se vieron afectados por el

Introducción

Desde la invención del automóvil entre 1885 y 1886 por el alemán Karl Benz, quien creó el primer prototipo de este vehículo impulsado por un motor de gasolina de un solo cilindro y 2 tiempos. Karl Benz creó el primer prototipo de este vehículo impulsado por un motor de gasolina de un solo cilindro y 2 tiempos ver figura (2).

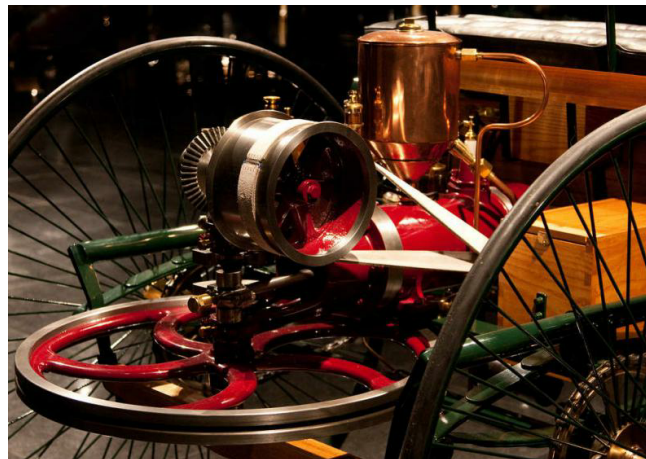


Figura 2: Motor Benz

La tecnología de éste primer motor era totalmente analógica, es decir todas sus partes eran mecánicas y no existía ningún método para controlar los gases de escape producidos por la combustión del motor en tiempo real. A partir de la revolución industrial acaecida durante el siglo *XVIII* Henry Ford, además de las líneas de producción, introdujo un estándar para la fabricación de motores. Estos vehículos ya contaban con una caja de cambios, para aumentar la ventaja mecánica que proporciona el motor, y así lograr una mayor velocidad, ver figura (3)

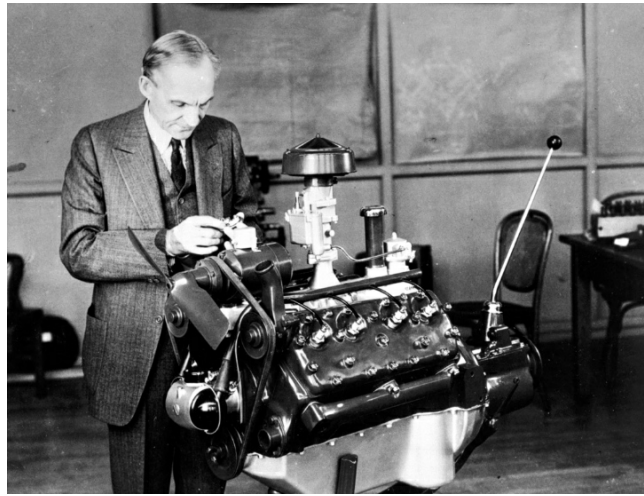


Figura 3: Henry Ford

Este motor cuenta con los siguientes elementos

- Sistema de 4 tiempos (admisión, compresión, explosión y escape),
- sistema de carburador para dosificación de la mezcla aire-gasolina,
- sistema eléctrico regenerable para el encendido,
- válvulas de admisión y escape,

que aún hoy día se siguen usando, exceptuando el sistema de dosificación de gasolina que ha evolucionado utilizando sistemas de control. Hasta antes de la crisis del petróleo, ocurrida a partir de 1973, los motores de combustión interna se caracterizaban por ser grandes consumidores de combustible. El estándar en la industria era producir bloques de 8 cilindros con una capacidad volumétrica, que oscilaba entre los 3 litros hasta los 4.5. Para alimentar estos poderosos motores se instalaban carburadores de 4 gargantas, común mente denominados *cuadrayet* figura (4).

Este sistema administraba una mezcla aire-gasolina aprovechando el vacío creado por el movimiento de los pistones y era administrado por 4 gargantas dos que trabajaban a bajas rpm y las otras más grandes a altas. Para mejorar el alto consumo de combustible de éste sistema se buscaba minimizar el consumo mientras el motor se mantenía en ralentí. A pesar de ello el enorme tamaño del bloque no mejoraba significativamente la eficiencia.

Como la gasolina no era cara y los autos estaban dirigidos a una población de altos recursos, los consumidores de aquella época no daban importancia a esto. A partir del alza de los combustibles y del abaratamiento de los autios las compañías armadoras

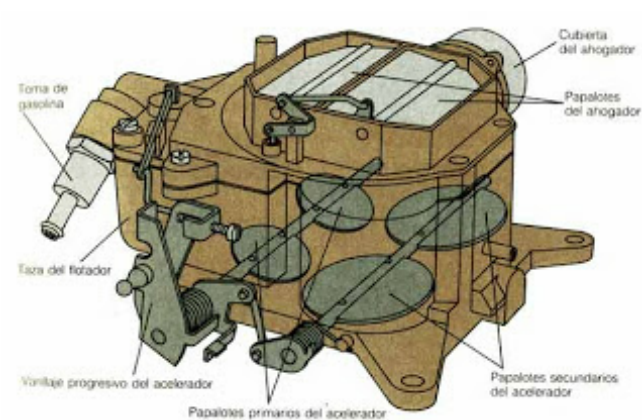


Figura 4: Carburador cuadrájet

de automóviles empezaron a poner atención a él consumo eficiente de combustible, y de hecho esta fue la única razón para empezar a investigar en diversas formas de lograrlo.

Con ello se empezaron a comercializar motores de 4 y 6 cilindros, de 8 cilindros pero de menor tamaño y con un carburador de 2 gargantas. Evidentemente, todo esto impactó de forma directa en la potencia de los vehículos obligando a la introducción de autos más pequeños y livianos. Además, para compensar la falta de potencia se introdujeron sistemas de sobrealimentación, como lo son los *turbocompresores* y los *súper cargadores*, sistemas que en un principio compensaron la falta de potencia pero que requerían de sistemas más sofisticados para controlar la potencia del sistema y su fiabilidad.

Índice general

Dedicatoria	III
Agradecimientos	V
Resumen	VII
Introducción	X
1. Eficiencia de un motor de combustión interna	1
1.0.1. Ciclo Otto	1
1.0.2. Eficiencia mecánica	3
1.0.3. Historia de los sistemas OBD	5
1.1. Naturaleza de los sensores en sistemas OBD	10
1.1.1. Sensor de temperatura	10
1.1.2. Sensor de efecto Hall	10
1.1.3. Sensor lambda	11
2. Implementación de los sistemas de control	15
2.1. Definición de un sistema de control	16
2.2. Sistemas de Control	19
2.3. Sistemas dinámicos Planos	20
2.3.1. Conceptos básicos	20
2.3.2. PVIS y sistemas autónomos	23
2.3.3. Sistemas Lineales	35
2.3.4. Clasificación y estabilidad de puntos críticos ($\Delta \neq 0$)	39
2.3.5. Clasificación y estabilidad de puntos críticos($\Delta = 0$)	42
2.4. Sistemas no lineales	45
2.4.1. Criterio de estabilidad para sistemas no lineales	46
3. Problemas comunes del sensor lambda	51
3.1. Instrumentación y consideraciones	52
3.1.1. Diseño del dispositivo	52
3.2. Descripción	54

3.3. Resultados experimentales obtenidos	59
Conclusiones	63
3.4. Observaciones finales	64
Glosario de Términos en inglés	67
Bibliografía	71

Capítulo 1

Eficiencia de un motor de combustión interna

1.0.1. Ciclo Otto

“La primera ley de la termodinámica, es un enunciado de la conservación de energía”. Esta ley afirma que un cambio en energía interna en un sistema se puede presentar como un resultado de transferencia de energía por calor, por trabajo o por ambos. Aunque la primera ley de la termodinámica es muy importante, no hace distinción entre los procesos que se presentan espontáneamente y aquellos que no lo hacen así. Sin embargo, en la naturaleza sólo tienen lugar ciertos tipos de procesos de conversión de energía y de transferencia de energía. La segunda ley de la termodinámica, establece “cuáles procesos se presentan y cuáles no”(VER [5]).

“Una máquina térmica es un dispositivo que toma energía por calor y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. Por ejemplo, en un proceso representativo por el que una planta de energía produce electricidad, un combustible, como carbón, se quema y los gases de alta temperatura producidos se usan para convertir agua líquida en vapor. Este vapor se dirige a las aspas de una turbina y las pone a girar. La energía mecánica asociada con esta rotación se usa para impulsar un generador eléctrico. Otro dispositivo que se modela como máquina térmica es el motor de combustión interna de un automóvil. Este dispositivo usa energía de la quema de un combustible para realizar trabajo sobre pistones, lo que resulta en el movimiento del automóvil”(Ver [5]).

Todos los motores que actualmente se encuentra en los mercados, asiáticos, europeos y americanos aún siguen siendo motores de ciclo Otto, es decir, que a pesar de sus múltiples sistemas de control, siguen siendo básicamente motores de 4 tiempos.

La eficiencia de este tipo de motores es muy pobre, por ello se ha intentado mejorar, introduciendo sistemas de control en la dosificación de combustible, aumentando el número de válvulas por cilindro, para con ello lograr un desalojo de gases más rápido,

dicho proceso se muestra en la siguiente figura:

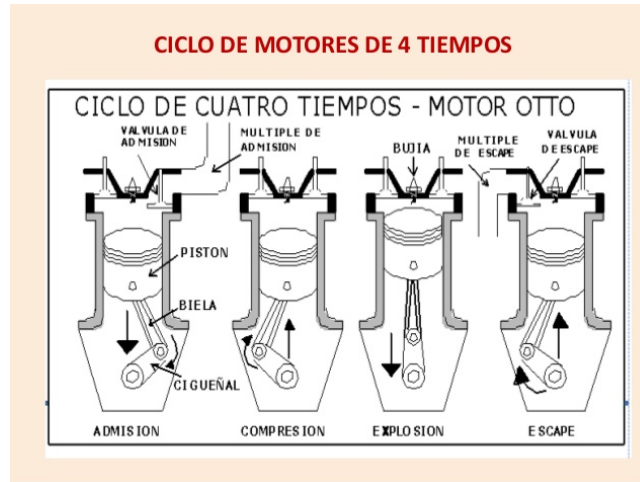


Figura 1.1: Ciclo del motor de 4 tiempos.

Cabe señalar que hay un breve tiempo en que ambas válvulas (admisión y escape) se encuentran abiertas por un breve periodo, a este momento se le conoce como *traslape de válvulas*. Para aumentar la eficiencia de los motores de combustión interna los ingenieros han debido recurrir al traslape de válvulas para mejorar el llenado y vaciado de la cámara de combustión, gracias al aprovechamiento de la inercia de la masa de aire entrando y la masa de gases saliendo, como se muestra en la siguiente figura:

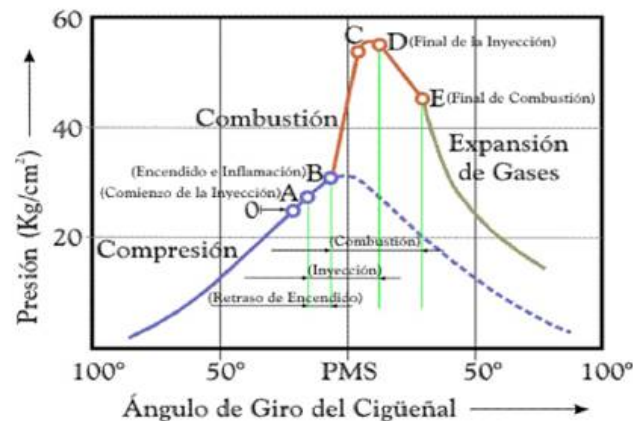


Figura 1.2: Secuencia de apertura y cierre de válvulas.

Se puede observar que el tener tiempos mayores de traslape en el sistema conlleva a una forma más eficiente de llenar la mezcla aire-combustible al interior del motor,

toda la naturaleza del ciclo también nos lleva a un enfoque donde los gases ingresados a la cámara de combustión están en constante cambio, tanto de volumen, temperatura y presión.

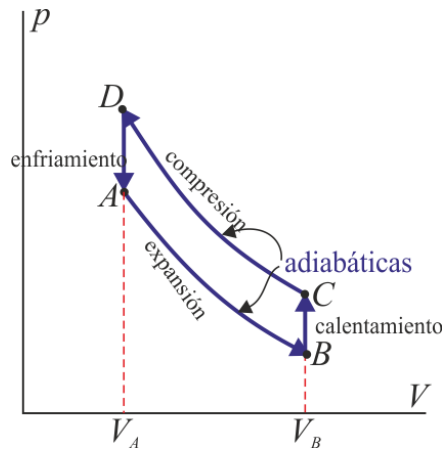


Figura 1.3: Ciclo de gases

Termodinámicamente el *trabajo* indicado realizado por el pistón corresponde a la integral cerrada:

$$W_{c,i} = \oint p dV \quad (1.1)$$

La *potencia indicada* en función del trabajo se define como:

$$P_i = \frac{W_c N}{n_r} \quad (1.2)$$

donde n_r se refiere al número de revoluciones del cigüeñal por cada carrera de potencia, para el caso de los motores de 4 tiempos, n_r es igual a 2.

1.0.2. Eficiencia mecánica

La totalidad del trabajo realizado por los gases durante la expansión, no está disponible en el cigüeñal para ser utilizado, puesto que parte de este trabajo es invertido en el llenado y vaciado de los gases en el cilindro, a la potencia consumida en este proceso se denomina *potencia de bombeo*. Existen además pérdidas que aparecen en el movimiento alternativo del pistón, como la fricción, además de la potencia invertida en mover accesorios o dispositivos acoplados al motor y que son indispensables para su funcionamiento como lo es la bomba de aceite y de agua, entre otros dispositivos. La potencia indicada es la suma de la potencia al freno y la potencia por fricción, matemáticamente se supone una dependencia lineal se escribe:

$$P_i = P_b + P_f \quad (1.3)$$

Si la mezcla aire–combustible se supone como un gas ideal, la eficiencia del ciclo de Otto es:

$$e = 1 - \frac{1}{\frac{V_1}{V_2}^{\sigma-1}} \quad (1.4)$$

donde V_1/V_2 es la relación de compresión y σ es la relación de los calores específicos molares CP/CV para la mezcla combustible–aire. La ecuación (1.4), demuestra que la eficiencia aumenta conforme la relación de compresión aumenta. Para una relación de compresión representativa de 8 con $\sigma = 1.4$, la ecuación (1.4) predice una eficiencia teórica de 56 % para un motor que funciona en el ciclo de Otto idealizado. Este valor es mucho mayor que el logrado en los motores reales (15 % a 20 %) debido a efectos como fricción, transferencia de energía por conducción a través de las paredes del cilindro y combustión incompleta de la mezcla aire–combustible (Ver [5]).

Como se ha mencionado, un enfoque del motor de combustión interna puede ser desde el punto de vista de la termodinámica, y el proceso lleva a analizar las situaciones como si se tratase de gases ideales, (isobárico, isotérmico e isocórico), es decir, considerando los cambios de energía del sistema, las temperatura, presiones y volúmenes de gases, dado que el presente trabajo no es con dicho enfoque sólo se tratará hasta este punto este enfoque del problema, sin embargo se hace referencia a la siguiente tesis que es un trabajo muy extenso en dicho sentido(VER [8]).

Las ventajas que se pueden lograr en el plano mecánico, en el presente trabajo se trasladan al plano electrónico, precisamente mejorando la instrumentación del sensor lambda, con ello aunque no se altera de ninguna manera la parte de diseño mecánico se logra una mejor eficiencia en lo general del sistema, es decir con menos energía inyectada al sistema se obtiene un mayor cantidad de trabajo; ello se logra gracias a controlar el factor λ , cabe mencionar que la justificación (ecuación diferencial) de dicho parámetro ningún fabricante da a conocer cómo es que se obtiene, ni sus parámetro de entrada, algo en lo que se debe hacer énfasis es que toda ECU se encuentra codificada, y el modelo del sistema de control que sigue (PDI, adelanto-atraso, control fraccional entre otras) se desconoce del todo, simplemente se obtiene una respuesta del sistema, con una cierta entrada, esto dificulta el trabajo en su aspecto matemático ya que no se tiene el total del problema, por ello esa parte se queda a futuro. Al mantener la lectura del factor λ dentro de un rango cercano a 1, nos garantiza al menos por todos los fabricantes de vehículos automotores que esa es la condición ideal para obtener el mejor rendimiento posible del motor, esto en la práctica eso es imposible ya que la ECU está diseñada para dar la mejor aceleración posible, por ello la respuesta del sistema es aumentar la dosificación de combustible al tener como entrada al cuerpo del acelerador en una posición más abierta, esto genera una respuesta transitoria del sistema sub-amortiguada, como se muestra a continuación:

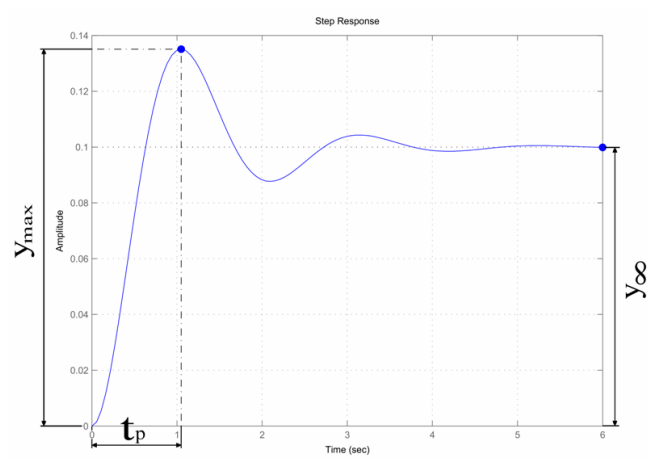


Figura 1.4: Respuesta típica sub amortiguada

La implementación del dispositivo mostrado en la figura (2.12) mejora la respuesta del sistema manteniendo el factor λ sin cambio, es decir, cercano a 1, ello nos da una respuesta sobre amortiguada del sistema como se muestra a continuación:

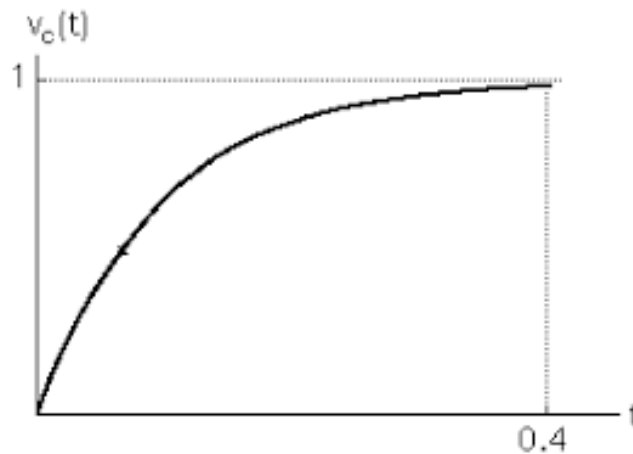


Figura 1.5: Respuesta típica sobre amortiguada

La aportación del presente trabajo se centra en que el dispositivo no implica cambio alguno en la naturaleza mecánica del motor y segundo se puede aprovechar el margen que nos da manipular el factor λ .

1.0.3. Historia de los sistemas OBD

Con la llegada de los ECU, los sistemas de control pudieron ofrecer ventajas adicionales a los sistemas de dosificación de combustible mecánicos (carburadores), pero la im-

plementación de dichos sistemas fue una apuesta independiente por cada fabricante, a finales de la década de 1980 todos los fabricantes seguían ofreciendo motores con sistemas a carburador y sólo un fabricante Chrysler, implemento su primer sistema OBDI en vehículos de gama alta, algunas de las ventajas inmediatas que el comprador podía notar eran:

- Arranque en frío estable.
- Velocidad del motor en relantí estable y a bajas RPM.
- Mejor consumo de combustible.
- Disminución de vibraciones con el motor en marcha.
- Mejor control del torque.
- Control de emisiones.

Las ventajas que el comprador no tenía en cuenta eran cuando se eliminaban algunas piezas mecánicas, el sistema era capaz de almacenar en la memoria de la ECU códigos averiados, para así poder realizar un diagnóstico más preciso en caso de falla, el sistema monitorea todo los sensores en tiempo real y en caso de alguna falla o funcionamiento anormal, este encendía una luz en el tablero con la leyenda de “CHECK ENGINE”, revisar motor.

Los primero sistemas no necesitaban de equipo adicional para poder leer los códigos almacenados en la memoria de la ECU, bastaba con hacer alguna combinación de aperturas y cierres del switch de ignición para acceder a ellos, mediante el parpadeo del letrero CHECK ENGINE, la primer serie de parpadeos era para las decenas y el segundo para las unidades, así se podrían almacenar hasta 99 códigos de fallas, dado que la industria automotriz no trabaja bajo ningún estándar, sino simplemente la innovación, cada marca tenía sus propios códigos y sus propios métodos para acceder a ellos.

La forma de borrar dichos reportes de fallo, eran tan simples como desconectar la alimentación de la ECU por algunos segundos para que todo el sistema se reiniciara desde 0, esto era debido a la naturaleza de construcción de la propia ECU, el sistema de almacenamiento de códigos de error se hacía en una memoria RAM, la cual al perder la energía con la que se alimenta borra todos sus registro y se vacía.

La función principal de la ECU sea de primera y última generación es mantener el motor dentro de los parámetros que el fabricante estableció, esto no quiere decir necesariamente que la ECU este dedicada a generar los menos gases nocivos para el ambiente, o consumir la menor cantidad de combustible posible, como se verá más adelante, dentro de los muchos sensores que comprenden el sistema, el encargado de monitorear la salida del sistema es el sensor λ lambda, el cual es el objeto de análisis

en el presente trabajo, dado que es el encargado de ajustar la cantidad de combustible suministrado a la planta.

Para el año de 1993 casi toda la industria automotriz decidió dar el salto tecnológico hacia los sistemas de inyección electrónica FI o FULL INJECTION, algunas marcas asiáticas se resistieron al cambio e implementaron los sistemas a mediados de 1990, en este momento toda la industria contaba con sus propios códigos averiados, incluso algunos fabricantes ofrecían módulos de expansión para sus ECU con mejoras en las prestaciones, cosa que no era más que una memoria EEPROM con diferentes parámetros para lograr un mejor desempeño, dentro de los que ofrecían estas prestaciones en el país solo fue Chevrolet, también la forma en que se administraba el combustible al motor no era nada estándar, cada fabricante intentaba innovar en el campo, los primeros sistemas eran con un inyector central montado sobre algo muy parecido a un carburador, dicho sistema se conoció como TBI (Throttle Body Injection), cuerpo de aceleración.

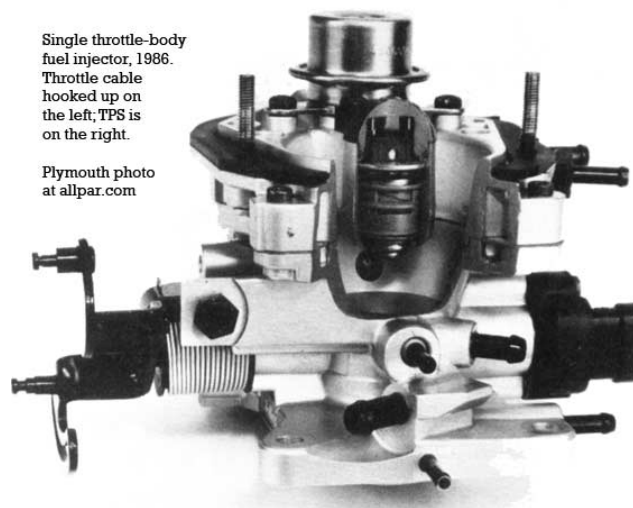


Figura 1.6: Sistema TBI, Fuente: Plymouth photo www.allpar.com

Aunque el sistema cumplía con sus funciones no era del todo eficiente, pero adicionalmente era muy fácil quitar el TBI y regresar al sistema de carburador, ya que la nueva tecnología no era muy bien recibida por todos, el siguiente paso en los sistemas de primera generación no fueron cambios en la ECU sino en los sistemas de inyección del combustible, los siguientes en aparecer fueron los MPFI (Multi Port Fuel Injection) sistemas multipuerto, que hasta el día de hoy se mantiene como ya como un estándar de toda la industria, estos sistemas cuentan con un pequeño actuador que administra el combustible por cada cilindro de forma independiente.

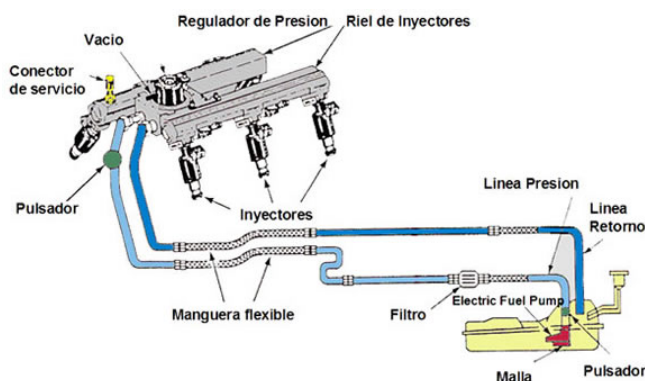


Figura 1.7: Sistema MPFI

Para el final de esta generación de sistemas se logró implementar un estándar en la industria automotriz.

Estándar OBD

“En el año 1985 un organismo del Estado de California llamado CARB (Junta de recursos medioambientales de California) aprobó una regulación para un sistema de diagnóstico a bordo llamado OBD (On-Board Diagnostic). Esta regulación determina que el Modulo de Control del Motor llamado ECM (Engine Control Module) tiene que monitorizar ciertos componentes del vehículo relacionados con las emisiones de gases para asegurar un correcto funcionamiento. También se tiene que iluminar una luz indicadora de fallo o avería llamada MIL (Luz indicadora de mal funcionamiento) en el cuadro de instrumentos cuando se detecte algún problema”(Ver [7]).

Los objetivos básicos principales de esta regulación son dos:

- Reforzar el cumplimiento de las normativas de la regulación de los emisiones de gases alertando al conductor cuando se muestre algún fallo.
- Ayudar a los técnicos en la identificación y reparación de los fallos en el sistema de control de las emisiones de gases(Ver [8]).

La autodiagnos OBD se aplica a sistemas que se consideran los responsables de un aumento de las emisiones de gases de escape en caso de averías. Generalmente, el sistema OBD prueba los siguientes componentes:

- Sensores principales del motor.
- Sistema de medición del combustible.
- Función de Recirculación de Gases de Escape (EGR)(Ver [8]).

Aunque este estándar solo se aprobó en el estado de California en EUA, no se logró implementar por los ensambladores asiáticos y europeos, por ejemplo los modelos de VW siempre utilizaron equipo especial para el diagnóstico y muchos asiáticos seguían comercializando modelos a carburador, solo con la novedad de implementar el convertidor catalítico.

La siguiente generación de sistemas OBD II, tuvieron un cambio significativo en cuanto a sus predecesoras:

- Los códigos de almacenamiento ya no se podían extraer más que con equipo adicional.
- Para borrar los códigos también es necesario el uso de equipo adicional ya que estas ECU cuentan con memorias EEPROM.
- Cada fabricante utiliza su propio protocolo de comunicación.
- Había diferencias entre los protocolos de los fabricantes asiáticos, europeos (EOBD) y americanos.
- Se implementó un puerto estándar de 16 pines.

El conector del sistema OBD II tiene que cumplir una serie de especificaciones según normativa ISO 15031-3:2016. Dicha normativa estipula que este conector para el diagnóstico OBD2 o EOBD debe estar situado cerca del asiento del conductor, esto es lo contrario a los sistemas anteriores donde el conector estaba en el compartimento del motor. El estándar SAE J1962 se define como el conector físico usado para la interfaz OBDII. Este sistema utiliza un conector de 16 pines aunque no todos están ocupados.

TERMINALES DEL CONECTOR OBD II



1. Sin uso	9. Sin uso
2. J1850 Bus positivo	10. Sin uso
3. Sin uso	11. Sin uso
4. Tierra del vehículo	12. Sin uso
5. Señal de tierra	13. Señal de tierra
6. Can Alto	14. Can Bajo
7. ISO 91412 / Línea K	15. ISO 91412 / Línea L
8. Sin uso	16. Positivo Batería

Figura 1.8: Cavidades conector OBD II

Como se muestra en la figura (1.8) cada fabricante utilizaba su propio protocolo de comunicación:

CAN ISO 15765

Este protocolo CAN fue desarrollado por Robert Bosch que se extiende al campo del control industrial y existen dos versiones básicas de este protocolo que son las siguientes: CAN 1.0 y CAN 2.0

El estándar 1.0, es el método empleado para permitir una velocidad de transmisión de hasta 125 *Kbit/s* lo que permite con esta velocidad realizar funciones de control.

El 2.0, es una versión del protocolo CAN compatible con el estándar CAN 1.0 cuya función es aumentar la velocidad a 500 *Kbit/s* al estandarizarse bajo SAE J2284-500 y a 1 *Mbit/s* bajo la ISO 11898 (Velocidad de transmisión alta)(Ver [7]).

Estos sistemas en la actualidad sí cuentan con un estándar ISO OBD II, pero aún así los ensambladores conservan códigos de propietario que no pueden ser leídos más que por sus equipos específicos, así mismo los sistemas de control no se limitan a controlar el funcionamiento del motor, sino que también se implementan en sistemas de frenado anti-bloqueo (ABS), sistemas de estabilidad (ESR), sistemas de cambios de marcha (caja de cambios), sistemas de confort (temperatura del interior, luces automáticas, encendido de limpiadores y luces de modo automático, cierre centralizado etc).

1.1. Naturaleza de los sensores en sistemas OBD

1.1.1. Sensor de temperatura

Los componentes de este sistema OBD ya sea primera o segunda generación constan casi de los mismos sensores:

Sensores de temperatura, estos trabajan como un NTP o NTC, es decir el dispositivo aumenta o disminuye su resistencia conforme la temperatura cambia, los hay de:

- Refrigerante.
- Temperatura del motor.
- Temperatura del aire de entrada.

Comportamiento de un sensor tipo NTC.

1.1.2. Sensor de efecto Hall

Este sensor se utiliza principalmente para saber la posición, por ejemplo del árbol de levas, el cigueñal.

Prueba del Sensor de Temperatura

Un sensor de temperatura se somete a prueba de exactitud al comparar la resistencia del sensor contra la temperatura real. Para asegurar la exactitud de las lecturas, necesitas un termómetro y buenos contactos en tu multímetro digital.

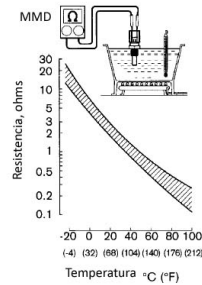


Figura 1.9: Sensor NTC

- Sensor de posición de árbol de levas.
- Sensor de posición de cigüeñal.
- Sensor de disparo de chispa (distribuidor) ya no existe, solo en OBD I.
- Sensor de velocidad.

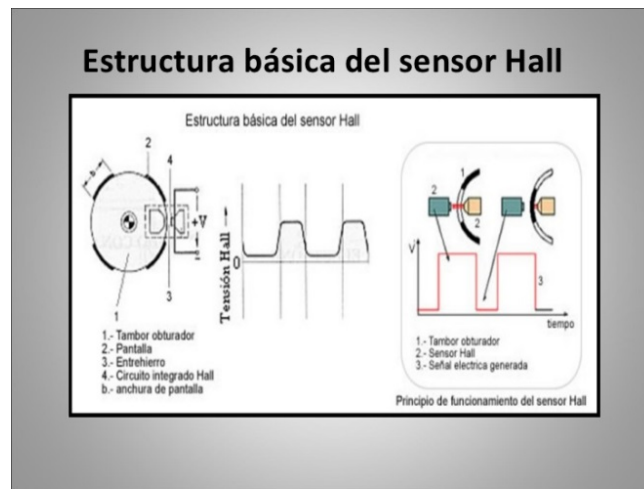


Figura 1.10: Sensor de efecto Hall

1.1.3. Sensor lambda

Este sensor en particular es el de mayor importancia por la razones que ya se habían mencionado antes, es el encargado de cerrar el lazo de control, este sensor según los fabricantes genera una señal cuadrada y reacciona a la cantidad de oxígeno que existe en los gases de combustión y de manera muy superficial se menciona que es un oscilador armónico simple, cosa que en los resultados obtenidos experimentalmente se

puede asegurar que dicho sensor no tiene un *comportamiento lineal*. Los más comunes en la actualidad son los contruidos de dióxido de zirconio, al entrar en contacto con los gases su composición hace una diferencia de potencial que puede leer la ECU y calcular la cantidad de combustible que se está quemando.

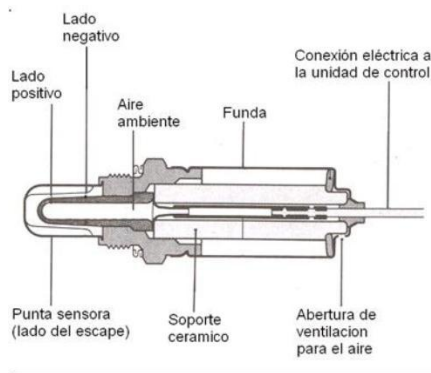


Fig. (2). Vista en corte del sensor lambda.

Figura 1.11: Corte transversal, sensor lambda

Este sensor idealmente y según datos técnicos se debe estar al rededor de un factor λ igual a 1, esto idealmente mantiene la relación aire gasolina en la proporción correcta, como se muestra en la siguiente figura:

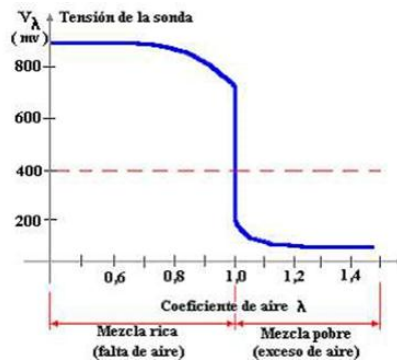
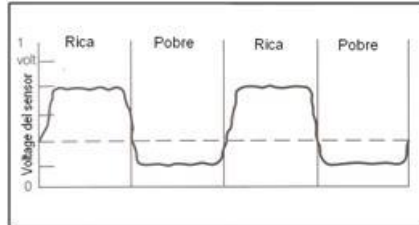


Figura 1.12: Factor λ proporcionado por el fabricante

Como se observa en la gráfica (1.1.3), el sensor es de pequeña señal, oscila entre los $200mV$ a $800mV$, entre más bajo sea el voltaje la ECU responde enviando una mayor cantidad de combustible a la planta para intentar estar dentro del coeficiente de λ es decir que la mezcla aire-gasolina están en las proporciones perfectas, pero la linealización de las lecturas del sensor son especificadas por cada fabricante y dicha información no está disponible para el público en general, sólo se menciona que este

se encuentra oscilando entre rangos de voltaje de $700mV$ y los $300mV$ de forma ideal.

Cambios en el sensor lambda



El voltaje del sensor lambda en un ciclo cerrado sube y baja de ligeramente rica a ligeramente pobre..

Los sensores lambda también han sufrido cambios:

- La primera generación, contaban con uno o dos cables por los cuales se obtiene la lectura de gases.
- La segunda generación son de cuatro cables, dos son conectados a una termo resistencia para precalentar el sensor, en otro más va la señal de la lectura y para reducir el ruido hay un cuarto como la referencia a tierra.
- La tercera generación, este es un arreglo de los de segunda generación pero con la diferencia que se obtienen valores que cruzan por cero, es decir da voltajes negativos y positivos, estos usualmente son de seis cables y se les llama erróneamente de ancho de banda.

En los autos de última generación se utilizan dos sensores para poder medir la eficiencia del convertidor catalítico, un sensor monitorea el consumo del motor este se ubica antes del convertidor, mientras el segundo que se pone después del convertidor para monitorear su eficiencia.

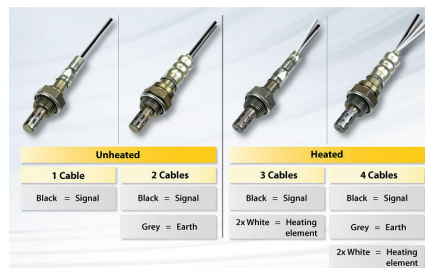


Figura 1.13: Generaciones de sensores lambda

Capítulo 2

Implementación de los sistemas de control

“Los sistemas de control son parte importante de la sociedad humana y sus numerosas aplicaciones están alrededor de nosotros: en los cohetes que se disparan y los transbordadores espaciales que se lanzan para ponerlos en órbita terrestre”(Ver [6]), los sistemas de conducción autónoma, el piloto automático de los automotores, sistemas de estabilidad ERS, la retro iluminación de nuestros celulares, el ruido externo mientras se realiza una llamada entre otras cosas.

En la naturaleza existen los sistemas de control, el cuerpo humano siempre está regulando la temperatura del cuerpo, si este está demasiado caliente, reacciona mediante la presencia de sudor y envía una sensación de incomodidad que nos hace poner atención a la sensación, en el caso contrario, el de sentir frío reacciona levantando los vellos de la piel para hacer un colchón térmico y en caso extremo forzará a todas las extremidades a moverse (tiritar) para producir el calor necesario, además de lanzar la sensación de malestar.

La industria automotriz tuvo un gran cambio a partir de finales de la década de 1980, cuando la tecnología implementada paso de ser analógica a implementar sistemas digitales de control, una de las ventajas de esta innovación fue:

- Mejoramiento en el funcionamiento de los vehículos.
- Mayor control de torque.
- Se hizo más fácil la operación del vehículo sin tener que esperar la temperatura habitual de trabajo.
- Control de las emisiones.
- Control en la dosificación de energía.
- Autodiagnóstico de fallas.

Todo esto fue gracias a la implementación de sistemas de control en lazo cerrado, que gracias a la ayuda de sensores y actuadores pueden mantener la respuesta del sistema (programación de la ECU) dentro de parámetros preestablecidos.

2.1. Definición de un sistema de control

Un sistema de control está formado por sub-sistemas y procesos (o plantas) unidos con el fin de controlar las salidas de los procesos. Por ejemplo, un horno produce calor como el resultado del flujo de combustible. En este proceso, los sub-sistemas llamados válvula de combustible y actuadores de válvula de combustible, se usan para controlar la temperatura de una habitación al controlar la salida de calor de horno. Otros sub-sistemas, por ejemplo los termostatos funcionan como sistemas detectores, miden la temperatura de la habitación. En su forma más sencilla, un sistema produce una salida o respuesta para una entrada o estímulo dado.

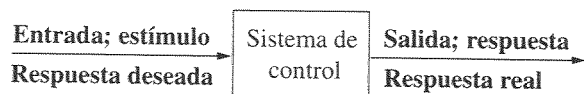


Figura 2.1: Esquema sistema de control fuente(Ver [6] pág 2)

Ventajas de los sistemas de control

Con los sistemas de control podemos mover equipos de grandes dimensiones con una precisión que de otra manera sería imposible. Es posible dirigir enormes antenas hacia las regiones más alejadas del universo para captar señales de radio débiles; controlar estas antenas en forma manual sería imposible. Debido a sus sistemas de control, los elevadores de edificios nos llevan con rapidez a nuestro destino, deteniéndose automáticamente en el piso correcto. Nosotros solos no podríamos producir la energía necesaria para la carga y la velocidad; esta potencia es producida o provista por motores y los sistemas de control regulan posición y velocidad.

Los sistemas de control se implementan por cuatro razones básicas:

- Amplificación de potencia.
- Control remoto.
- Comodidad de forma de entrada.
- Compensación por perturbaciones.

La ventaja que tenemos con los sistemas de control es por ejemplo, poder mover grandes cargas con solo un botón, esto es que el sistema de control aumenta la potencia

de sistema para lograr el movimiento deseado; también dicha acción se puede hacer de forma remota sin tener que estar conectados al sistema; la comodidad de entrada ya se ejemplificó en un principio es muy cómodo mover grandes cargas sólo con pulsar un botón o hacer girar una perilla, pero adicionalmente el aspecto tal vez más importante es que el sistema de control también puede soportar perturbaciones, es decir, si algún agente externo perturba el sistema este puede reaccionar de forma que aún recibiendo esa fuerza externa, este puede mediante el control retomar la estabilidad, posición o velocidad por ejemplo con el que venía antes de la perturbación.

Los sistemas ó plantas se pueden dividir según las entradas y salidas del sistema como sistemas: MIMO, (multiple input, multiple output) múltiples entradas, múltiples salidas, o SISO (simple input-simple output)

Un ejemplo de un sistema MIMO sería una antena que transmite varias señales al mismo tiempo y estas al ser captadas realizarían diferentes procesos.

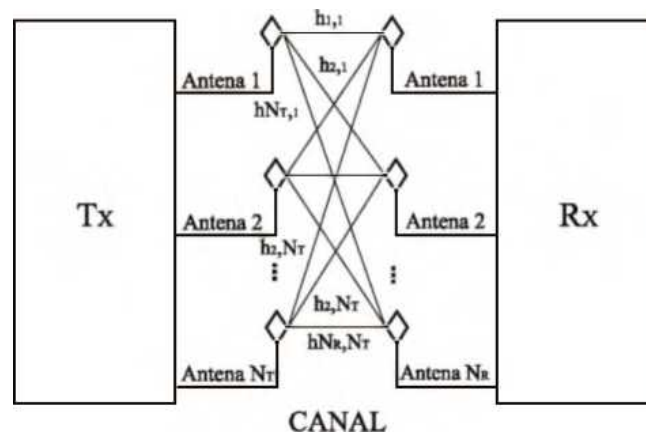


Figura 2.2: Ejemplo de un sistema MIMO

Un ejemplo de un sistema SISO sería la alimentación de un motor eléctrico, este responderá conforme haya variaciones en el voltaje entregado, estos sistemas además tiene la característica de que son sistemas lineales, es decir podemos predecir su comportamiento en cualquier tiempo deseado.

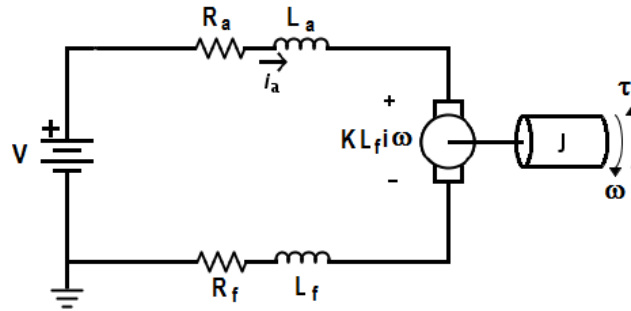


Figura 2.3: Ejemplo de sistema SISO

Los sistemas de control implementados en la industria automotriz son del tipo MIMO, las diferentes salidas del sistemas varían de fabricante a fabricante, pero en general todas ponen especial cuidado a la velocidad con el sistema responde (aceleración), pero además el sistema monitorea y ajusta muchos parámetros, un ejemplo del esquema que casi todo vehículo a gasolina contempla es el mostrado en la siguiente figura.

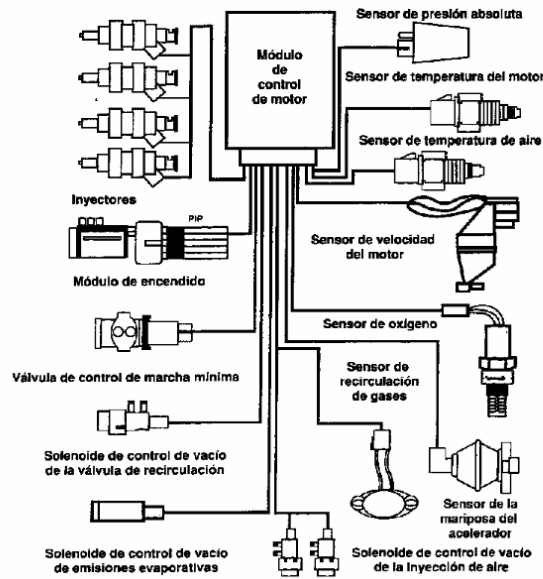


Figura 2.4: Componentes de un sistema OBD

Los primeros sistemas de control implementados en vehículos automotores eran mecánicos, el control de velocidad fue uno de los primeros sistemas en implementarse en autos de gama alta, este permitía mediante una serie de botones seleccionar una velocidad deseada, el sistema actuaba mediante un sistema mecánico, que utilizaba la presión vacuométrica del motor para accionar el acelerador, o en su caso desacelerar, por lo cual el dispositivo aunque en una versión un tanto arcaica ya implementaba el

sistema de control en lazo cerrado, figura 6, es decir el sistema se va a ajustar a la salida deseada todo el tiempo aunque la planta sufra de perturbaciones.

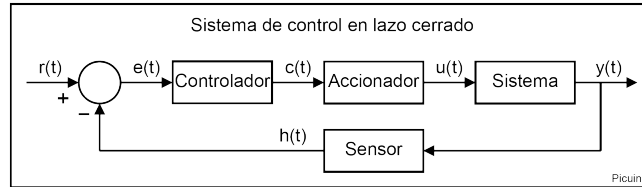


Figura 2.5: Sistema en lazo cerrado

Los sistemas actuales se implementan con electrónica TTL y electrónica de potencia para lograr controlar la planta. Como se menciona con anterioridad estos sistemas control necesitan de electrónica digital, así como de un microprocesador, etapas de acondicionamiento de señales y toda una unidad dedicada sólo a la lectura de todos los parámetros de entrada (sensores), esto da la pauta para que nacieran las ECU(Engine Control Unit) unidad de control de motor, que es la encargada de realizar todos los procesos necesarios para que el motor funcione adecuadamente y dentro de los parámetros con la que esta fue configurada. Figura (2.4)

2.2. Sistemas de Control

Los sistemas dinámicos aparecen al tratar de especificar mediante un modelo matemático. Procesos en los que es posible describir la dependencia en el tiempo de un punto en un espacio geométrico mediante la aplicación de una formula o “regla”.

Surgen, con naturalidad en virtualmente todas las áreas de la ciencia como pueden serlo la biología, química o física y existen también modelos relacionados con problemas netamente teóricos como en el caso de los autómatas celulares o las figuras fractales en el plano complejo.

Esta noción tan amplia permite incluir dentro de la definición de sistemas dinámicos fenómenos tan dispares como el movimiento en un sistema mecánico (por ejemplo un péndulo) o el número de individuos de una población de peces en un lago en el tiempo; pasando inclusive por fenómenos relacionados con procesos químicos en los que hay intercambio de materia o la predicción del clima.

La clave para esta unificación se encuentra en el concepto de “estado”y “regla de evolución”: un sistema, en un instante de tiempo dado, se encuentra en algún estado posible, representado generalmente como un punto en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n . La regla de evolución del sistema es una regla fija (función) que determina el estado futuro de dicho punto.

El caso que nos ocupa en la presente tesis es aquel en el cual el espacio de estados es

un subconjunto del plano \mathbb{R}^2 y, en particular, cuando el sistema dinámico está definido por un fenómeno en el que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden o sistemas de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Aunque la reducción al caso $n = 2$ pareciera una simplificación sustancial, en realidad no lo es: la teoría de sistemas dinámicos bidimensionales es fundamental para la generalización a más dimensiones.

Además, si identificamos a \mathbb{C} con el plano \mathbb{R}^2 es posible incluir también en este estudio los sistemas relacionados con iteraciones de polinomios con coeficientes complejos, área de la que surgen los conjuntos fractales.

2.3. Sistemas dinámicos Planos

2.3.1. Conceptos básicos

Definición 2.3.1 (Sistema Dinámico Plano). Sean $T \subseteq \mathbb{R}$ un semigrupo aditivo, X un subconjunto de \mathbb{R}^2 y $\phi : T \times X \rightarrow X$ $(t, x) \mapsto \phi^t(x)$ una función. Un *sistema dinámico plano* es una tupa (T, X, ϕ) que satisface las propiedades

1. $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$ equivalente $\phi^0 \equiv id_x$
2. $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s+t, x)$ para todo $x \in X$ y $s, t \in T$ equivalentemente $\phi^s \circ \phi^t \equiv \phi^{(s+t)}$

El conjunto T se llama **espacio de tiempos**, X es llamado *espacio de estados* (o de fase) y ϕ se conoce como *operador de evolución*.

Se puede pensar en un operador de evolución ϕ como una colección de funciones $\{\phi^t : X \rightarrow X\}_t$ llamada también flujo, que mueve un punto x_0 por el estado de fases x a través de la curva como en la figura 2.6

Nota 2.1. Un sistema dinámico se dice *discreto* si el espacio de tiempos T es discreto, es decir $T \subseteq \mathbb{Z}$. En caso contrario, se dice *continuo*.

Nota 2.2. A menudo el operador de evolución ϕ no está definido en todo $T \times X$ sino en un subconjunto $U \subseteq T \times X$, en tal caso pedimos que $\{0\} \times X \subseteq U$ y que las propiedades 1. y 2. de la Definición 2.3.1 se satisfagan siempre que (t, x) esté en U . Es decir, dado $x \in X$ existe un subconjunto de tiempo (usualmente un intervalo)

$$I_x = \{t \in T : (t, x) \in U\} \subseteq T \text{ tal que } \phi(t, x) \text{ está definido para todo } t \in I_x.$$

En lo que sigue supondremos que (T, X, ϕ) es un sistema dinámico.

Dado un $x_0 \in X$, un estado inicial, deseamos estudiar la geometría del conjunto de todos los posibles estados futuros y pasados del sistema dinámico, obtenidos a partir

de x_0 haciendo uso del operador de evolución ϕ . Con este fin introducimos el concepto de órbita.

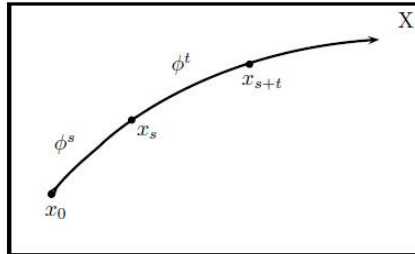


Figura 2.6: Operador de Evolución

Definición 2.3.2. La órbita (o trayectoria positiva $\gamma_{x_0}^+$, órbita negativa $\gamma_{x_0}^-$), y órbita γ_{x_0} de x_0 o a través de x_0 son subconjuntos del espacio de estados X , definidos por:

$$\gamma_{x_0}^+ := \{\phi(t, x_0) : t \in I_{x_0}, t \geq 0\} = \{\phi^t(x_0)\}_{t \in I_0, t \geq 0}$$

$$\gamma_{x_0}^- = \{\phi^t(x_0)\}_{t \in I_0, t \leq 0}$$

$$\gamma_{x_0} = \gamma_{x_0}^+ \cup \gamma_{x_0}^- = \{\phi(t, x_0) : t \in I_{x_0}\} = \{\phi^t(x_0)\}_{t \in I_0}.$$

Una órbita que consiste de un solo punto se llama *órbita constante*.

Mientras que las órbitas de un sistema dinámico continuo son curvas en el espacio X parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento, las de un sistema dinámico discreto son sucesiones de puntos $\dots f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$ indizadas por enteros, como en la figura 2.7

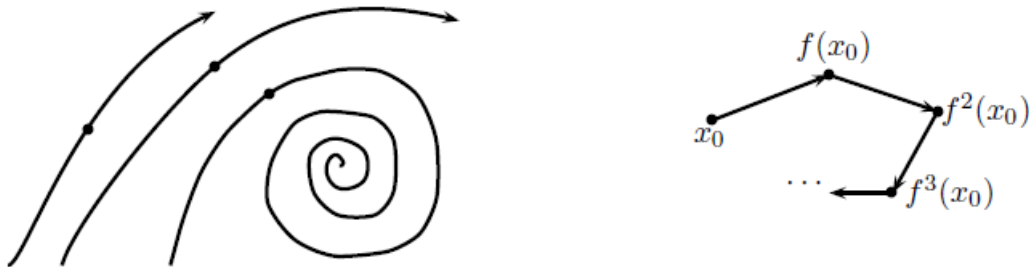


Figura 2.7: Órbitas en un sistema dinámico continuo y uno discreto

Definición 2.3.3. Un punto $x \in X$ es un *equilibrio* (o *punto fijo* o *punto crítico*) si $\gamma_x = x$ es decir, $\phi^t(x) = x$ para todo $t \in T$.

Lo anterior implica que un sistema dinámico puesto en un equilibrio permanece allí por siempre. Recíprocamente, las órbitas constantes corresponden a equilibrios del sistema.

Definición 2.3.4. Una órbita periódica (o ciclo) es una órbita no constante para la cual existe $t_0 \in T$ tal que $\phi^{t+t_0}(x_0) = \phi^t(x_0)$ para todo $t \in T$ y $x_0 \in O$.

El mínimo t_0 que satisface lo anterior se llama *periodo de la órbita*. Esto es, si el sistema dinámico evoluciona desde un x_0 a las t_0 unidades de tiempo. Por tanto, una órbita periódica de un sistema continuo es una curva cerrada en el espacio de fase, como se muestra en la siguiente figura 2.8

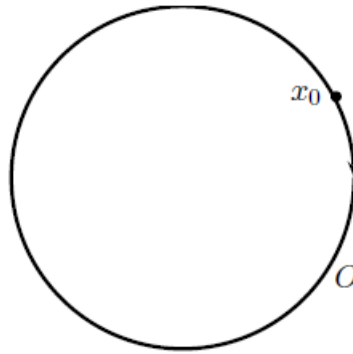


Figura 2.8: Una órbita periódica (ciclo) O a través de x_0

Definición 2.3.5 (Diagrama de Fase). Al dibujar la colección de todas las orbitas (con sus direcciones) obtenemos un *diagrama de fase*. En la práctica, solo unas órbitas representativas son consideradas en el diagrama de fase.

Definición 2.3.6. Dos sistemas dinámicos planos (T_1, X_1, ϕ_1) y (T_2, X_2, ϕ_2) son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X_1 \rightarrow X_2$ tal que h envía las órbitas del operador de evolución ϕ_1 en las órbitas del operador de evolución ϕ_2 y preserva el sentido de avance del tiempo. Así pues, dos sistemas dinámicos topológicamente equivalentes comparten comportamientos y estructuras cualitativas.

Ejemplo 2.1 (Mapa Logístico). Aunque se trata de un sistema unidimensional $X \subseteq \mathbb{R}$ este es un buen ejemplo introductorio a la temática de sistemas dinámicos. El *mapa logístico* es una relación de recurrencia no lineal popularizada por Robert May como modelo demográfico de tiempo discreto. Supongamos que existe un número máximo posible para los individuos de cierta población y sea $x_n \in [0, 1]$ la fracción de dicho máximo de individuos que hay en el año en la población. Si r es la tasa combinada

de reproducción y mortandad de la población, el mapa logístico corresponde a la expresión.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) está relacionada con dos fenómenos demográficos: el crecimiento es proporcional a la población existente x_n cuando dicha población es pequeña. Existe, sin embargo, un valor crítico para el cual la tasa de mortalidad supera a la de crecimiento. Esto es porque x_n^2 es pequeño en comparación a x_n cuando x_n es pequeño, pero este comportamiento se revierte una vez $x_n > 1$.

El mapa logístico puede entenderse como un sistema dinámico discreto con espacio de tiempo $T = \mathbb{Z}$, espacio de Fase $X = [0, 1]$ y operador de evolución dado por:

$$\phi(n + 1, x) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.2)$$

El sistema tiene un punto de equilibrio trivial $x = 0$ pues $\phi^n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, hay otro punto de equilibrio en $x = (r - 1)/r$ pues.

$$\frac{\phi^1 r - 1}{r} = r \frac{r - 1}{r} \left(1 - \frac{r - 1}{r}\right) = (r - 1) \frac{r - r + 1}{r} = \frac{r - 1}{r}$$

El caso $r = 4$ es de particular interés pues presenta comportamiento caótico y porque la relación de recurrencia puede solucionarse de manera explícita como:

$$\phi^n(x) = \text{sen}^2(2^n \text{sen}^{-1}(x^{\frac{1}{2}}))$$

Algunas órbitas convergen al punto crítico $x = 0$, luego de un número finito de iteraciones pero la mayoría presentan un comportamiento caótico. Por ejemplo, la órbita de $x = \frac{1}{2}$ es $\gamma^+ \frac{1}{2} = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ mientras que las órbitas de $x = 0.6$ y $x = 0.61$ dos números muy cercanos, divergen en pocas iteraciones la una de la otra:

$$\gamma^+(0.6) = (0.96, 0.1536, 0.5202816, 0.9983954912, 0.0064077373)$$

$$\gamma^+(0.61) = (0.9516, 0.18422976, 0.6011566221, 0.9590693512, 0.1570213231, \dots)$$

2.3.2. PVIS y sistemas autónomos

El principal interés de esta tesis es tratar sistemas planos continuos provenientes de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden o, equivalentemente, de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En principio utilizamos la definición y después un importante teorema sobre la existencia y unicidad indicamos cómo esta definición encaja con la de sistema dinámico plano, ver el ejercicio 2.1.

Definición 2.3.7 (Sistema dinámico plano autónomo). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 en la variable t , a la que nos referiremos generalmente como el tiempo. Sean

$$f_i : \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R} : (x_1, x_2) \subseteq f_i(x_1, x_2); \quad i \in 1, 2$$

Funciones en dos variables.

Llamamos sistema dinámico plano autónomo al par de ecuaciones diferenciales simultáneas de la forma

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.3)$$

Nota 2.3. Si utilizamos notación vectorial, podemos escribir $x = (x_1, x_2)$, de modo que la ecuación (2.3) obtiene ahora la forma más compacta

$$x' = f(x) \quad (2.4)$$

Una solución de la ecuación anterior está constituida, entonces por un par de funciones diferenciables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ (o equivalentemente, una función vectorial $x(t)$ tal que $x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t))$, y $x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$ para todo $t \in I$.

Nótese que la gráfica de cualquier solución de la ecuación (2.4) es una curva en el espacio tridimensional $(t, x) = (t, x_1, x_2)$ que identificamos con un subconjunto de \mathbb{R}^3

Definición 2.3.8. Un *problema de valor inicial* para el sistema (2.4) es un problema de la forma

$$x' = f(x); \quad x(t_0) = x^0 \quad (2.5)$$

Como la función f no depende explícitamente del tiempo t (el sistema es autónomo), no hay pérdida de generalidad al suponer siempre que la condición inicial del problema de valor inicial ecuación (2.5) está especificada para $t_0 = 0$. Esta propiedad es conocida como la propiedad de traslación.

Lema 2.1 (Propiedad de traslación). *Supongamos que $x(t)$ es una solución de la ecuación (2.5) en un intervalo I , entonces $x(t - t_0)$ es también una solución.*

Demostración. Vease [6]. □

Ahora con el fin de estudiar un sistema dinámico plano como la ecuación (2.5) es necesario garantizar la existencia de la solución $x(t)$ y, más aún, su unicidad de manera que no haya ambigüedad al tratar de definir un operador de evolución como se explicó en la sección anterior.

Como veremos a continuación, la continuidad de f no es suficiente para ello.

Ejemplo 2.2. Considérese el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}x' &= (x'_1, x'_2) = (\sqrt{x_1}, 0) \\x(0) &= 0\end{aligned}$$

Es claro que la ecuación diferencial tiene infinidad de soluciones, pero aún el PVI, con la condición prescrita $x_0 = 0$ carece de solución única. Es fácil verificar que $x(t) \equiv 0$ y $y(t) = (\frac{t^2}{4}, 0)$ son ambas soluciones del PVI.

El siguiente teorema, que es una generalización a dos dimensiones de un resultado clásico del análisis de ecuaciones diferenciales de primer orden, demuestra que esta dificultad puede resolverse suponiendo que f es de clase por lo menos C^1 .

Teorema 2.2 (Existencia y unicidad). *Supongamos que f es una función continua localmente Lipschitz definida en \mathbb{R}^2 . Entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existe un intervalo (posiblemente infinito) $I_{x^0} \equiv (\alpha_{x^0}, \beta_{x^0})$ que contiene a $t_0 = 0$ y una única solución $\phi(t, x^0)$ del problema de valor inicial (2.3), definida por todo $t \in I_{x^0}$ que satisface la condición $\phi(0, x^0) = x^0$ y es, de clase C^1 . Justificamos ahora el uso del nombre “sistema dinámico” al tratar un sistema de ecuaciones diferenciales como el de la ecuación (2.4)*

Demostración. Vease [6]. □

Proposición 2.3. *Si f es localmente Lipschitz entonces el sistema dinámico autónomo plano $x' = f(x)$ definición (2.3.7) es un sistema dinámico.*

Demostración. Vease [6]. □

Ejemplo 2.3. Considérese la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y'' + y = 0$$

que puede transformarse en el par de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= -x_1\end{cases} \quad (2.6)$$

El teorema (2.2) garantiza la existencia de las soluciones únicas de este sistema para cualquier valor prescrito en $t_0 = 0$, por ejemplo, para $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$ la solución del sistema es $x_1(t) = \sin t$ y $x_2(t) = \cos t$.

La figura (2.7) ilustra la gráfica de la solución del oscilador armónico en el espacio tridimensional (t, x_1, x_2) tal que pasa por $(0, 1)$ en $t_0 = 0$. Las componentes $x_1(t)$, $x_2(t)$ de la solución aparecen también delante de la misma figura.

En general, a la curva solución $x(t)$ tal que $x(0) = x^0$ se le llamará trayectoria a través de x_0 .

Como el sistema es autónomo la función f es independiente de t y resulta natural considerar las proyecciones de las trayectorias sobre el plano x_1, x_2 a las que llamaremos órbitas. Una órbita típica del oscilador armónico aparece en la figura (2.8) (b).

Ahora, aún cuando contamos con el teorema (2.2) para asegurarnos de que existen funciones $x_1(t), x_2(t)$ que satisfacen el sistema, resulta, en general, muy complicado hallar fórmulas cerradas explícitas para tales funciones. Por este motivo es de suma importancia y es el objetivo principal de este documento, el estudio cualitativo de las soluciones (su comportamiento) aún sin tener acceso a las mismas de antemano.

La independencia de t nos permite iniciar este estudio a través de lo que llamaremos campo de direcciones: si consideramos cualquier solución $(x_1(t), x_2(t))$ de la ecuación (2.3) como la posición en el plano de una partícula en el instante t , entonces el par de ecuaciones $x'_1 = f_1(x_1, x_2)$ y $x'_2 = f_2(x_1, x_2)$ implican que $(x'_1(t), x'_2(t))$ es el vector tangente al punto (x_1, x_2) ; es decir puede entenderse como la velocidad de la partícula en ese instante. Así pues, el campo vectorial definido por:

$$V(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$$

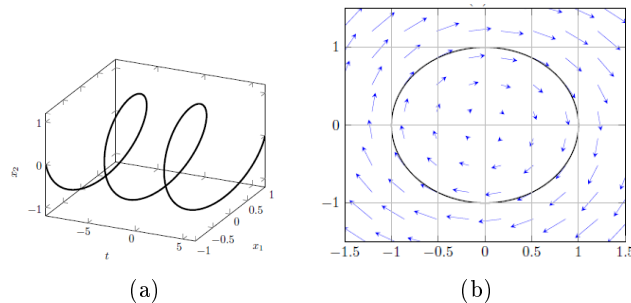
nos permite describir el comportamiento aproximado de la trayectoria de la partícula (esto es, una solución del sistema) para cualquiera condiciones iniciales aún sin conocer las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Ejemplo 2.4. Volvemos al oscilador armónico, cuyo campo de direcciones aparece en la figura (2.8)(b). Al observar el campo de direcciones no resulta difícil imaginar que todas las órbitas deben ser círculos con centro en $(0, 0)$. Esto puede formalizarse a partir del estudio de su campo vectorial:

$$V(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

Empezamos por notar que si $V(x_1, x_2) = (0, 0)$ entonces $x_1 = x_2 = 0$ y estamos hablando de la solución $x(t) = 0$ que satisface la condición inicial $x^0 = 0$. Sin embargo $(x_1(t), x_2(t))$ es cualquier otra solución que pasa por $x^0 \neq 0$ entonces debe cumplirse que:

$$\frac{d}{dt} \| (x_1(t), x_2(t)) \|^2 = 2x_1(t)x'_1(t) + 2x_2(t)x'_2(t) = 2x_1(t)x_2(t) - 2x_2(t)x_1 = 0$$



Figura(a) Oscilador armónico lineal: trayectoria a través de $(0, 1)$, Figura (b) órbita circular que resulta de proyectar la trayectoria en el plano $x_1(t), x_2(t)$. Y por lo tanto par todo t se tiene $\| (x_1(t), x_2(t)) \|^2 = \| x^0 \|^2$.

Es decir, la solución está en el círculo de radio $\| x^0 \|$ centrado en el origen, como se quería verificar.

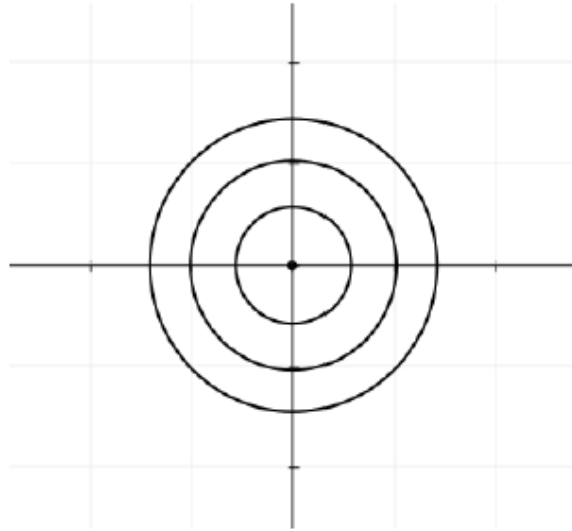


Figura 2.9: Diagrama de fase de oscilador armónico lineal

Ejemplo 2.5. Hacer un análisis similar al ejemplo anterior para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

$$\ddot{y} - y = 0$$

Que puede transformarse en el sistema de ecuaciones de primer orden.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Notamos que las órbitas en el plano de fase satisfacen

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

Integrando obtenemos la familia de hipérbolas

$$x^2 - y^2 = c$$

donde c es una constante real. En particular, cuando $c = 0$ obtenemos la solución constante $x = y = 0$ correspondiente a la órbita de $(0, 0)$. Todas las demás órbitas son no constantes.

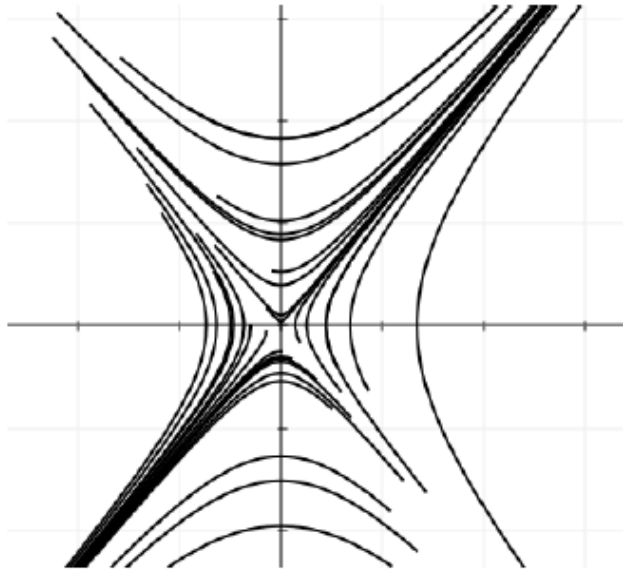


Figura 2.10: Hipérbolas

Clasificación cualitativa de las soluciones

Por el teorema 1.2 una solución del sistema autónomo plano $\dot{x} = f(x)$ que satisface $x(0) = x^0$ es única. A continuación consideramos tres tipos básicos para tales soluciones.

Definición 2.3.9 (Puntos críticos). Una solución constante $x(t) = x^0$ se llama *punto crítico*, solución de equilibrio o también punto (solución) estacionario. Como todo punto crítico $\bar{x} = (x_1, x_2)$ satisface $\dot{x} = 0$, entonces puede hallarse resolviendo $f(x) = 0$. Es decir, el par de ecuaciones algebraicas.

$$f_1(x_1, x_2) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Por supuesto, las órbitas en el plano fase correspondientes a soluciones de equilibrio son órbitas constantes (constan de un solo punto). En el capítulo siguiente se estudiará el comportamiento de todas las soluciones de un sistema diferencial lineal (y más adelante no lineal). Por ahora, lo catalogamos en estables o inestables según sea el comportamiento de soluciones (órbitas) “cercanas” a la de equilibrio.

Definición 2.3.10 (Punto Crítico Estable). Un punto crítico \bar{x} se dice estable si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier solución $x = x(t)$ del sistema tal que $\|x(0) - \bar{x}\| < \delta$ se cumple que $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Un punto que no es estable se dice *inestable*. Intuitivamente, una solución de equilibrio es estable si toda solución (órbita) que comienza suficientemente cerca de la misma permanece cerca todo el tiempo.

Definición 2.3.11 (Punto Crítico asintóticamente estable). Un punto crítico \bar{x} se dice *asintóticamente estable* si es estable y existe $\delta > 0$ tal que para toda solución $x = x(t)$ del sistema tal que $\|x - \bar{x}\| < \delta$ se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$$

Lo anterior implica que la trayectoria de toda solución que comience suficientemente cerca de un punto asintóticamente estable no sólo debe permanecer cerca sino que a la larga converge al equilibrio \bar{x} . Debido al teorema de existencia y unicidad 1.2, estas trayectorias no pueden llegar a \bar{x} en un tiempo finito.

Ejemplo 2.6. La única solución de equilibrio del oscilador armónico (ejemplo 1.2) y el sistema plano del ejemplo 1.2.3 es $\bar{x} = \bar{x}(t) = 0$.

El equilibrio del oscilador armónico es un ejemplo de un equilibrio estable que no es asintóticamente estable pues dado $\varepsilon > 0$ todas las soluciones en el disco $D := D(0, \delta)$ permanecen dentro del disco D para cualquier $0 < \delta \in \mathbb{R}$. Sin embargo, toda órbita es periódica distinta de $\gamma(0)$ y no tiende a 0. El equilibrio del sistema del ejemplo 1.2.3 es inestable. Sin embargo, el sistema presenta un comportamiento interesante: hay toda una familia de soluciones $x(t)$ tales que $x(t) \rightarrow 0$ aún cuando el equilibrio no es asintóticamente estable.

Soluciones Periódicas

Ya nos hemos encontrado antes con soluciones periódicas de sistemas planos (por ejemplo, en el oscilador armónico 1.6. En esta sección formalizamos el concepto y probamos la equivalencia entre las órbitas cerradas (ciclos) en el espacio de fase y las soluciones periódicas.

Definición 2.3.12 (Soluciones Periódicas). Una solución $x = x(t)$ del sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice *periódica* si existe un $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$ para todo t . En tal caso, al mínimo valor de T se le llama *periodo de la solución*.

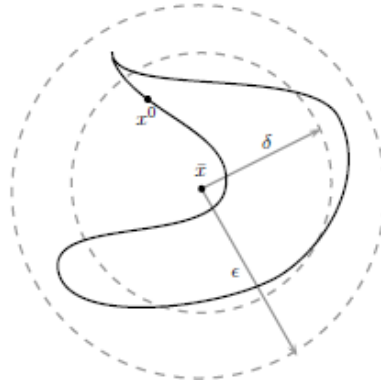


Figura 2.11: Equilibrio estable

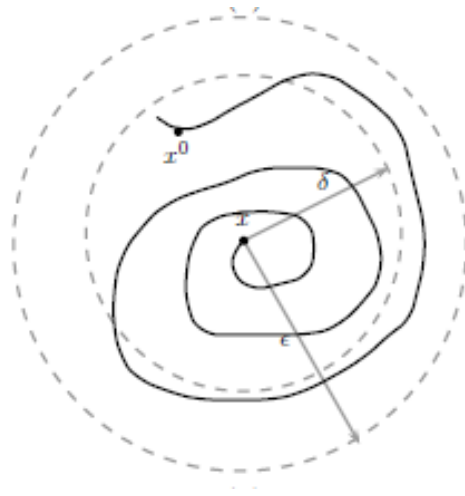


Figura 2.12: Equilibrio sintóticamente estable

En la definición no se admite el caso $T = 0$, esto es, las soluciones constantes no están consideradas de manera explícita como periódicas. Resulta evidente que toda solución periódica produce órbitas cerradas (ciclos) en el espacio de fase. Mostraremos a continuación que el recíproco también es cierto.

Lema 2.4. *Toda solución periódica de la ecuación autónoma (1.4) $\dot{x} = f(x)$ corresponde a un ciclo del espacio de fase y todo ciclo corresponde a una solución periódica.*

Demostración. Véase [6]. □

Curvas integrales

En general, las demás soluciones de un sistema plano producen órbitas arbitrarias en el plano de fase que no se cruzan. A menudo es posible integrar las ecuaciones de un sistema plano para obtener una familia de curvas integrales (soluciones) de manera implícita.

Supóngase que el sistema plano está dado, como en (1.4), por el par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es una ecuación diferencial de primer orden para x_1 o x_2 y las órbitas de las soluciones del sistema plano corresponden a las curvas integrales de esta ecuación diferencial.

Ejemplo 2.7. Volvemos al oscilador armónico del ejemplo 1.2.2 que corresponde al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

En este caso la ecuación (2.7) es

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2}$$

Si se separan las variables y se integra se encuentra que las soluciones deben satisfacer:

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = c$$

Es decir, el conjunto de curvas integrales es una familia de círculos centrados en el origen con radio $\sqrt{2c}$ para $c \in R^+$. El punto de equilibrio $x = 0$ se obtiene cuando $c = 0$. Esto coincide con lo que ya habíamos visto antes.

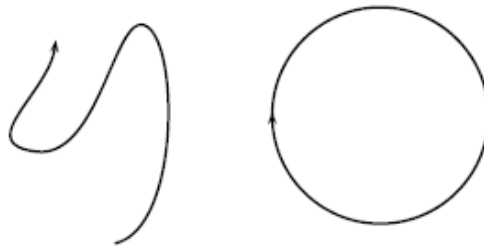


Figura 2.13: Una órbita arbitraria y un ciclo

Ejemplo 2.8 (Péndulo matemático). Ejemplos clásicos

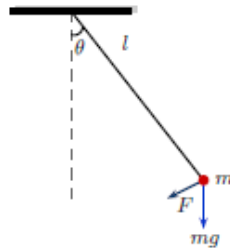


Figura 2.14: Péndulo matemático

Supongamos que una masa m se encuentra unida al extremo inferior de una varilla de longitud l . Sabemos que el arco s de un círculo de radio r se relaciona con el ángulo

central θ mediante la fórmula $s = l\theta$, de manera que la aceleración angular está dada por:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

En ausencia de fuerzas externas o amortiguamiento, la única fuerza que actúa sobre la masa es su peso mg , cuya componente tangencial es $-m g \sin \theta$ así que por la segunda ley de Newton:

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = ma = -mg \sin \theta$$

De donde se deduce la ecuación de segundo orden para θ

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.8)$$

Dependiendo de la longitud l de la varilla, la razón $\frac{g}{l}$ cambia, de manera que la ecuación (2.8) puede reescribirse como:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \lambda \sin \theta = 0 \quad (2.9)$$

A menudo se asumirá que $\lambda = 1$ al estudiar el péndulo matemático. Sabemos que la ecuación (1.9) puede reescribirse como un sistema plano $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$. Obteniendo así:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda \sin \theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

Debido a que el término $\sin \theta$ hace que la ecuación anterior sea no lineal, a veces se aproxima, para θ pequeño, $\sin \theta \approx \theta$. Obteniéndose en lugar de la ecuación (2.9) la ecuación lineal.

$$\ddot{\theta} + \lambda \theta = 0$$

Conocida como oscilador armónico lineal y que ya se estudió en el ejemplo 1.2.2.

Ejemplo 2.9 (Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra). Consideremos dos poblaciones que interactúan entre sí: una especie de presa x_1 y su depredador, x_2 . Un modelo matemático para la población de ambas especies es el modelo depredador-presa de Lotka y Volterra, propuesto inicialmente por Alfred J. Lotka y que opera bajo las siguientes suposiciones:

1. La población de presa x_1 no sufre de escasez de comida ni otros factores ambientales en su contra.
2. La alimentación de la población depredadora x_2 depende exclusivamente del tamaño de la población presa x_1 .

3. La tasa de cambio de la población es proporcional a su tamaño.

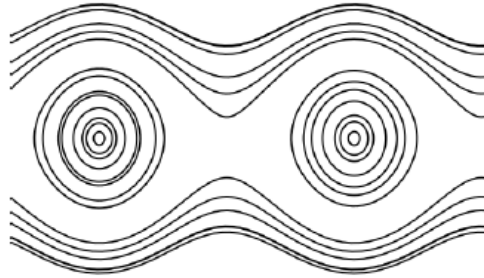


Figura 2.15: Diagrama de fase del péndulo, con centros $(n\phi, 0)$ para $n \in \mathbb{Z}$

El sistema Lotka-Volterra corresponde entonces, al par de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1x_1 - a_2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_3x_2 - a_4x_1x_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde a_1, a_2, a_3 y a_4 son constantes positivas.

Aunque el modelo es simple tiene sentido físico: en ausencia de interacción entre las especies ($a_2 = a_4 = 0$) el modelo se reduce a uno en el que la población presa x_1 crece sin límite, mientras que la población de depredadores x_2 se extingue eventualmente. En cambio, cuando hay interacciones (que se consideran proporcionales al producto de las poblaciones x_1, x_2) el crecimiento de x_1 se ve afectado mientras que la tasa de crecimiento de x_2 mejora, como es de esperarse.

Es fácil verificar que el sistema (2.11) tiene dos puntos críticos: a saber $(0, 0)$ y $\left(\frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_2}\right)$.

La estabilidad del primero de ellos puede tratarse mediante linealización y resulta ser de punto de silla.

Sin embargo, el otro punto crítico es no hiperbólico de manera que debe hacerse un análisis distinto al de linealización. No es difícil concluir, en este caso, que se trata de un centro y que los niveles de la población de presa y depredador oscilan alrededor de este punto fijo.

El modelo Lotka-Volterra no tiene en consideración la competencia entre las propias especies ya sea por la obtención de los recursos naturales (en el caso de la presa) o por el número limitado de presas (en el caso de los depredadores). Un sistema más realista que tiene presente estas interacciones se conoce como modelo de especies en competencia.

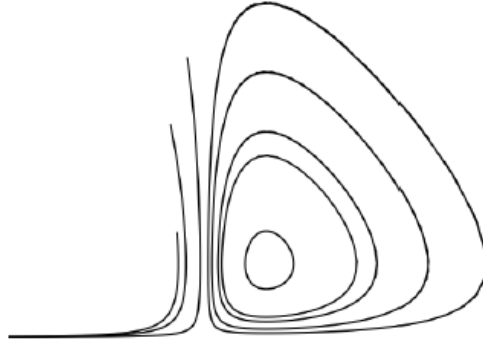


Figura 2.16: Diagrama de fase del modelo presa-depredador de Lotka-Volterra

Ejemplo 2.10 (Oscilador de Van Der Pol). Además de los fenómenos biológicos, el estudio de los circuitos eléctricos también da origen a ecuaciones diferenciales importantes: el oscilador de Van der Pol es un tipo de oscilador con amortiguamiento no lineal, planteado por el físico holandés Balthasar Van der Pol que obedece la ecuación diferencial de segundo orden.

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (2.12)$$

Aquí, x es la posición (dependiente de t) y λ es un parámetro que determina la no linealidad y el amortiguamiento. La forma bidimensional de la ecuación (2.12) corresponde al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cuando $\lambda = 0$ la ecuación (2.13) se reduce a la del oscilador armónico lineal. En cualquier otro caso ($\lambda > 0$) el sistema (2.13) posee un ciclo límite y el punto crítico en el origen es inestable.



Figura 2.17: Diagrama de fase del oscilador de Van Der Pol. Se evidencia el ciclo límite

2.3.3. Sistemas Lineales

Nos concentramos, en esta sección en sistemas planos $\dot{x} = f(x)$ donde la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un mapeo lineal. Es decir, el sistema lineal tiene forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Si hacemos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces reescribir el sistema (2.14) en la forma vectorial equivalente:

$$\dot{x} = f(x) = Ax \tag{2.15}$$

Podemos anticipar desde ya que hay un punto crítico del sistema en $\bar{x} = 0$.

Propiedades de las soluciones

A continuación hacemos un repaso de algunos resultados importantes acerca de las soluciones de sistemas lineales planos autónomos. Las pruebas de los resultados se pueden encontrar en cualquier texto elemental de ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.5. *Todo solución x de un sistema lineal plano tiene la forma:*

$$x = c_1u + c_2v$$

donde u, v son soluciones linealmente independientes de (2.15) y c_1, c_2 son constantes. En vista del teorema anterior, el problema se reduce a encontrar dos soluciones u, v que sean linealmente independientes. Tal conjunto de soluciones se conoce como conjunto fundamental de soluciones y a $x = c_1u + c_2v$ se le conoce como solución general. Las constantes c_1 y c_2 quedan determinadas una vez se especifica la condición inicial:

$$x(0) = x^0$$

Demostración. Ver [6]. □

Lema 2.6 (Criterio para la independencia lineal de soluciones). *Dos soluciones u y v del sistema (2.15) definidas sobre un intervalo I son linealmente independientes si y sólo si el determinante Wronskiano:*

$$W(u, v)(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{vmatrix}$$

es no nulo para toda $t \in I$.

Demostración. Ver [6]. □

Ejemplo 2.11. Consideremos el sistema plano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

este tiene forma vectorial:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x$$

Es fácil verificar que las funciones $u(t) = (e^{-2t}, -e^{-2t})$ y $v(t) = (3e^{6t}, 5e^{6t})$ son soluciones del sistema.

Más aún, estas soluciones son linealmente independientes y forman un conjunto fundamental de soluciones pues:

$$W(u, v)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 5e^{4t} + 3e^{4t} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Esto significa que toda solución del sistema tiene la forma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

Por analogía a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, buscamos soluciones del sistema (2.15) que tengan la forma:

$$x(t) = (k_1 \lambda e^{\lambda t}, k_2 \lambda e^{\lambda t})$$

Supongamos que x es una solución de la forma: (2.15) Entonces:

$$\dot{x} = (k_1 \lambda e^{\lambda t}, k_2 \lambda e^{\lambda t})$$

Si reemplazamos x y \dot{x} en la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x) = Ax$ y hacemos $K = (k_1, k_2)$ obtenemos:

$$K \lambda e^{\lambda t} = A(K e^{\lambda t})$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$ podemos dividir ambos lados de la ecuación anterior por $e^{\lambda t}$ y reordenando se obtiene:

$$AK = \lambda K$$

O equivalente:

$$(A - \lambda I)K = 0 \tag{2.16}$$

Lo anterior significa que si $x = x(t)$ es una solución de la forma propuesta, entonces λ y K deben satisfacer (2.16), es decir, λ debe ser un valor de A y K un vector de propio asociado a este valor propio λ , en estas condiciones:

$$x + k e^{\lambda t}$$

Es siempre solución de $\dot{x} = Ax$.

El resto de esta sección está dedicado a la obtención de dos soluciones que sean linealmente independientes u y v de manera que podamos escribir siempre la solución general de la forma antes descrita en términos de estas dos soluciones. En virtud de lo anterior, es lógico que las soluciones dependan de la forma de los valores propios de A : como determinante $(A - \lambda I) = 0$ es una ecuación algebraica de segundo grado, estos pueden ser reales y distintos, reales repetidos o complejos conjugados.

Ecuación Característica

Para hallar los valores propios λ de la matriz A de 2×2 del sistema (2.15). Computamos las raíces de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$

Notamos que:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Si escribimos $\Delta = \det(A) = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21})$ y $\tau = a_{11} + a_{22}$, la traza de A , entonces la ecuación característica es :

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \quad (2.17)$$

Por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_{1,2} = \tau \pm \sqrt{\frac{\tau^2 - 4\Delta}{2}}$ que pueden ser reales distintos reales repetidos y complejos conjugados, según $\tau^2 - 4\Delta$ sea positivo, cero o negativo.

Solución General

Enunciamos, sin prueba, un teorema acerca de la solución general del sistema para cada uno de estos casos.

Teorema 2.7 (Solución para valores propios reales distintos). *Si $\tau^2 - 4\Delta = 0$, entonces la ecuación característica (2.17) tiene una raíz real λ_1 de multiplicidad dos.*

- *Si existen dos vectores propios linealmente independientes K_1, K_2 asociados a λ_1 , entonces la solución general del sistema lineal plano $\dot{x} = Ax$ está dada por:*

$$x = x(t) = c_1(K_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2(K_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (2.18)$$

- *Si sólo se tiene un vector propio linealmente independiente K_1 , entonces la solución general del sistema lineal plano $\dot{x} = Ax$ tiene la forma:*

$$x = x(t) = c_1(k_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2(K_1 e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}) \quad (2.19)$$

donde P es un vector tal que $(A - \lambda_1 I)P = K_1$.

Demostración. Vease [6]. □

Teorema 2.8 (Solución para valores propios complejos conjugados). *Si $\tau^2 - 4\Delta < 0$, entonces la ecuación característica (2.17) tiene dos raíces complejas conjugadas $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ y la solución general del sistema lineal plano $\dot{x} = Ax$ está dada por:*

$$x = x(t) = c_1 e^{at} (\beta_1 \cos(bt) - \beta_2 \operatorname{sen}(bt)) + c_2 e^{at} (\beta_2 \cos(bt) - \beta_1 \operatorname{sen}(bt)) \quad (2.20)$$

donde $K_1 = B_1 + iB_2$ es un vector propio asociado al valor propio λ_1 .

Demostración. Vease [6]. □

2.3.4. Clasificación y estabilidad de puntos críticos ($\Delta \neq 0$)

Si A es no singular ($\det(A) = \Delta \neq 0$), el único punto crítico del sistema lineal plano $\dot{x} = f(x) = Ax$ es $\bar{x} = 0$.

El comportamiento cualitativo de las soluciones que no son de equilibrio, en un sistema lineal, es muy similar y nos permite establecer una clasificación para el punto crítico $\bar{x} = 0$. Hemos visto ya en ejemplos anteriores que algunas soluciones se alejan o acercan a los puntos críticos, otras se enrollan alrededor del punto crítico, entre otras cosas. A continuación justificaremos cada uno de estos posibles casos según sean los valores propios de A (como se vio en la sección anterior).

Valores propios reales distintos y negativos (nodo estable)

Consideramos el caso $\tau^2 - 4\Delta > 0$ y λ_1, λ_2 son valores propios de A tales que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

En este caso, toda solución es de la forma (2.18)

$$x = c_1(K_1 e^{\lambda_1 t}) + c_2(K_2 e^{\lambda_2 t})$$

Podemos reescribir la solución como:

$$x = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, entonces de acuerdo a la ecuación anterior $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. A largo plazo, $x(t) \cong c_1 K_1 e^{(\lambda_1 t)}$ y por lo tanto si $c_1 \neq 0$ entonces $x \rightarrow 0$ a lo largo de la recta determinada por el vector propio K_1 si en cambio, $c_1 = 0$ entonces $x(t) = c_2 K_2 e^{(\lambda_1 t)}$ y $x \rightarrow 0$ desde una de las direcciones determinadas por el vector propio K_2 .

En particular, si el punto inicial x^0 está en alguna de las rectas determinadas por K_1 o K_2 la solución tiende a 0 a través de la recta.

En cualquier caso, $x \rightarrow 0$ y decimos que el punto crítico $\bar{x} = 0$ es un nodo (estable) o sumidero nodal.

Valores propios reales distintos y positivos (nodo inestable)

Como antes $\tau^2 - 4\Delta > 0$ pero ahora $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ toda solución puede escribirse también como:

$$x = e^{\lambda_1 t} [c_1 K_1 + c_2 K_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$$

Supondremos de nuevo, que $\lambda_1 > \lambda_2$ Entonces a lo largo plazo $|x(t)| \approx |c_1 K_1 e^{(\lambda_1 t)}| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

El patrón de las trayectorias es idéntico al caso anterior pero estas se alejan del punto crítico $\bar{x} = 0$ en lugar de acercarse. En este caso el punto crítico $\bar{x} = 0$ se le llama *nodo(inestable)* o *sumidero nodal*.

Valores propios reales distintos y de signo opuesto(punto de silla)

De nuevo la solución es de la forma:

$$x = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Suponemos que $\lambda_1 > \lambda_2$.

Si $c_1 = 0$ por ejemplo, cuando x^0 está sobre la recta determinada por K_2 entonces como $\lambda_2 < 0$, $x \rightarrow 0$ a lo largo de esta recta. Si $c_2 = 0$ (por ejemplo, cuando x^0).

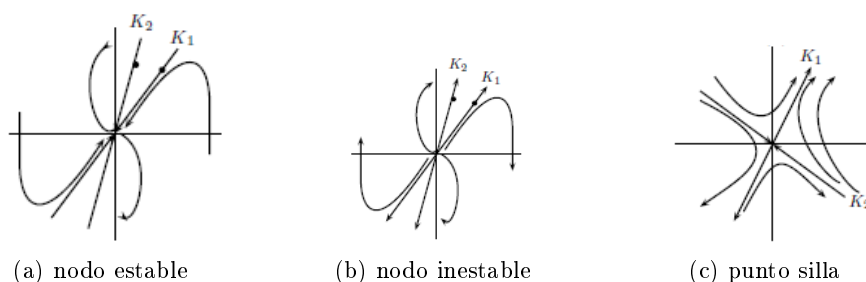


Figura 2.18: soluciones

Está sobre la recta determinada por K_1 , entonces dado que $\lambda_1 > 0$, $\|x\| \rightarrow \infty$ a lo largo de la recta determinada por K_1 .

Las soluciones que parten de otros puntos iniciales, para las cuales $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ el término dominante en la solución es $e^{(\lambda_1 t)}$ y como $\lambda_1 > 0$ entonces las soluciones se hacen no acotadas a medida que aumenta t de manera asintótica a la recta determinada por K_1

Resumiendo, las soluciones que no comienzan en ninguna de las rectas determinadas por K_1 o K_2 son tales que $\|x\| \rightarrow \infty$ y lo hacen de manera asintótica a la recta determinada por K_1 . De otro lado, las únicas soluciones que tienden al punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ son aquellas que comienzan sobre la recta determinada por K_2 y lo a lo largo de dicha recta. En este caso, el punto crítico se llama punto de silla y es, evidentemente, un equilibrio inestable.

Valor propio real repetido(nodo degenerado)

En este caso $\tau^2 - 4\Delta = 0$ y hay un único valor propio real de multiplicidad dos $\lambda_{1,2} = \lambda$. Dos vectores propios linealmente independientes (nodo propio degenerado)

Si se pueden conseguir dos vectores propios K_1 y K_2 linealmente independientes asociados al valor propio λ , entonces toda solución es de la forma (2.19), que puede reescribirse como:

$$x = (c_1 K_1 + c_2 K_2) e^{\lambda t}$$

En este caso el punto crítico $\bar{x} = 0$ se dice nodo propio, nodo degenerado o punto estrella y es estable o inestable según $\lambda < 0$ o $\lambda > 0$ respectivamente.

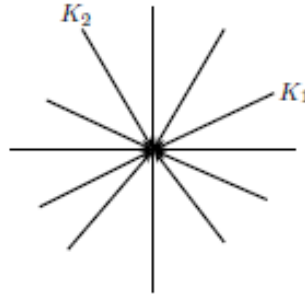


Figura 2.19: Nodo propio degenerado

Un solo vector linealmente independiente (nodo impropio degenerado)

En este caso apenas es posible conseguir un vector propio K_1 linealmente independiente asociado al valor propio λ , ahora las soluciones, según la fórmula (2.19), son de la forma:

$$x = c_1(K_1 e^{\lambda t}) + c_2(K_1 t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t})$$

El comportamiento de todas las soluciones $x = x(t)$ es similar: la recta determinada por K_1 es una asíntota $y \|x\| \rightarrow 0$ si $\lambda < 0$ o $\|x\| \rightarrow \infty$ si $\lambda > 0$ si $\lambda < 0$, entonces el punto crítico $\bar{x} = 0$ se llama *nodo impropio estable* o simplemente nodo degenerado estable y si $\lambda > 0$ el punto crítico $\bar{x} = 0$ se llama *nodo impropio inestable* o *nodo degenerado inestable*.

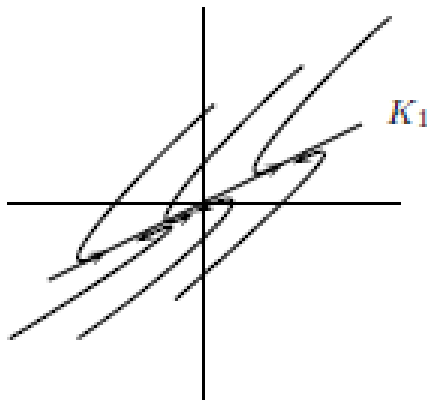


Figura 2.20: Nodo impropio degenerado

Valores propios complejos conjugados(centro, punto de espiral)

Finalmente, estamos en el caso $\tau^2 - 4\Delta < 0$ y los valores propios de A son complejos conjugados: $\lambda_{1,2} = a \pm ib$.

Si $K_1 = B_1 + iB_2$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = a + ib$, entonces por la fórmula (2.20) la solución es de la forma:

$$x = c_1 e^{at} (B_1 \cos(bt) - B_2 \sin(bt)) + c_2 e^{at} (B_2 \cos(bt) + B_1 \sin(bt))$$

Valor propio imaginario puro

Cuando $\tau = 0$, τ_1 es un imaginario puro y la solución se puede escribir como:

$$x = C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)$$

donde C_1 y C_2 son vectores constantes. Esto implica que todas las soluciones son periódicas con periodo $\frac{2\pi}{b}$ y es fácil ver que corresponden a elipses centradas en el origen.

En este caso, el punto crítico $\bar{x} = 0$ se llama centro y orientación de todas las órbitas es la misma.

Valor propio con parte real no nula

Si $\tau \neq 0$, entonces los valores propios tienen parte real $a \neq 0$ y las órbitas del sistema son espirales que se alejan o acercan todas al punto crítico $\bar{x} = 0$ debido al término e^{at} que aparece en la solución. El punto crítico se llama un *punto espiral* y es estable cuando $\lambda < 0$ es inestable cuando $\lambda > 0$

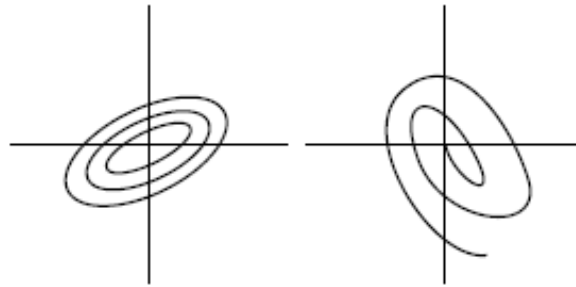
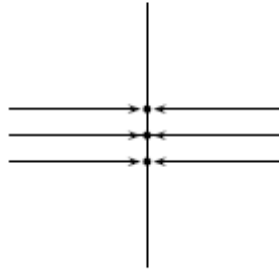


Figura 2.21: Centro y punto de espiral

2.3.5. Clasificación y estabilidad de puntos críticos ($\Delta = 0$)

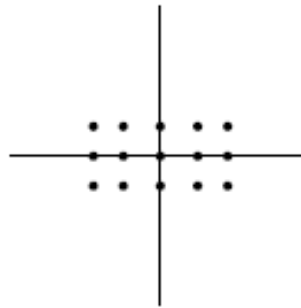
Cuando el sistema lineal plano es $\dot{x} = f(x) = Ax$ con A una matriz singular (i.e. $\det(A) = \Delta = 0$), entonces es un resultado elemental del algebra lineal que hay una infinidad

Figura 2.23: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

de puntos críticos (soluciones a $Ax = 0$) además del origen $x = 0$. Las soluciones en la sección: valores propios reales distintos y negativos (nodo estable) siguen siendo válidas en este caso, aunque se advierte ya de la ecuación característica (2.17) que los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Caso la matriz cero ($\mathbf{A}=\mathbf{0}$)

En este caso todo punto $x \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico, así que toda trayectoria en el plano de fase es trivial.

Figura 2.22: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$

Es posible demostrar que en este caso el sistema es topológicamente equivalente a uno con matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el diagrama de fase es similar a la figura (1.18) donde todo punto $(0, x_2)$ es de equilibrio.

De nuevo, es posible verificar que este sistema es topológicamente equivalente a uno con matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el diagrama de fase es similar a la figura (1.19), donde todo punto $(0, x_2)$ es de equilibrio pero el sentido de las flechas es contrario al del caso anterior.

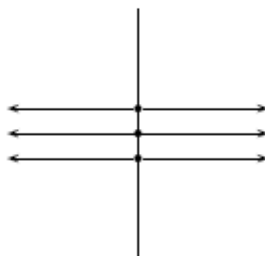


Figura 2.24: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

En este caso, tanto Δ como τ son nulos. Esto es $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$ y $a_{11} + a_{22} = 0$. Es posible analizar el comportamiento de las soluciones y puntos de equilibrio a partir de estas ecuaciones considerando los distintos casos $a_{11} = 0$ o $a_{11} \neq 0$, etc.

Sin embargo, cualquiera sea el caso, el sistema lineal es equivalente a uno con matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyo diagrama de fase asociado es como a continuación.

Nota 2.4. Aunque no se dijo explícitamente para cada caso, es claro que todos los puntos de equilibrio son inestables si $\Delta = 0$.

Criterio de Estabilidad para Sistemas Lineales

A continuación enunciamos un criterio de estabilidad para sistemas lineales.

Teorema 2.9. *Sea $\dot{x} = f(x) = Ax$ un sistema lineal plano y \bar{x} un punto de equilibrio del mismo sistema.*

(a) *Si $\det(A) \neq 0$ y todos los valores propios de A tienen parte real negativa o son imaginarios puros, $\bar{x} = 0$ es un punto crítico asintóticamente estable (y por tanto estable).*

(b) *Si $\det(A) = 0$ o hay valores propios de A con parte real positiva, el punto crítico \bar{x} es inestable. Debido a lo anterior a menudo la clasificación de puntos críticos y estabilidad se realiza según los valores propios de A tengan o no parte real no nula.*

Definición 2.3.13 (Matriz hiperbólica). Decimos que A es hiperbólica si todos sus valores propios tienen parte real no nula.

Con esta definición, notamos que la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema lineal con matriz de coeficientes hiperbólica depende exclusivamente del signo de la parte real.

2.4. Sistemas no lineales

Consideramos en este capítulo sistemas lineales planos autónomos $\dot{x} = f(x)$ donde f es una función no necesariamente lineal es decir es una transformación lineal

Supondremos que f de al menos función clase C^1 de manera que sea posible considerar la linealización de f mediante su derivada (matriz jacobiana) y estudiar las propiedades de este sistema lineal con el objetivo de deducir información sobre el comportamiento del sistema original. A continuación formalizamos el concepto de linealización mediante expansión en serie de Taylor.

Linealización

Consideremos un sistema plano como en la ecuación 2.3 de la forma:

$$\dot{x} = f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \quad (2.21)$$

Donde f es una función arbitraria de clase C^1 .

En este caso no necesariamente el sistema tiene un punto crítico en $x = 0$ y mucho menos debe ser el único.

Ejemplo 2.12. Como vimos en el ejemplo del péndulo matemático está descrito por la ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x} + \text{sen}(x) = 0$ y puede escribirse en forma vectorial con $x = (x_1, x_2)$ como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen}(x_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto el péndulo matemático tiene un punto crítico en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ pero también en todos los puntos $(n\phi, 0)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Sea \bar{x} uno de estos puntos críticos y supongamos que f es diferenciable en \bar{x} , entonces podemos expandir f como serie de Taylor alrededor de \bar{x}

$$f(x) = Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + h(x) \quad (2.22)$$

Por lo tanto, el sistema no lineal, cerca de es \bar{x} :

$$\dot{x} = f(x) = df(\bar{x})(x - \bar{x}) + h(x)$$

Por lo tanto, el sistema no lineal, cerca de \bar{x} es:

$$\dot{x} = f(x) = df(\bar{x})(x - \bar{x}) + h(x)$$

A continuación introducimos el cambio de coordenadas $y = x - \bar{x}$, entonces tenemos:

$$y = df(\bar{x})y + g(y) \quad (2.23)$$

En la ecuación (2.23) $g(0) = 0$ y $Dg(0) = 0$ así que el teorema de Valor Medio implica que $g(y)$ es pequeño en comparación a y cerca del origen. Más precisamente, dado $m > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|g(y)\| \leq m \|y\|$$

siempre que $\|y\| < \delta$

En otras palabras, $g(y)$ puede hacerse tan pequeño, como se desee tomando y suficientemente pequeño. Por esta razón resulta natural pensar que la estabilidad de \bar{x} pueda describirse en términos del sistema lineal.

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y \quad (2.24)$$

Si $Df(\bar{x})$ es invertible, el único punto crítico es $\bar{y} = 0$ y puede clasificarse según los criterios vistos en la sección 1.2. se quisiera poder llegar a las mismas conclusiones para \bar{x} , pero esto no será siempre posible como se verá más adelante.

2.4.1. Criterio de estabilidad para sistemas no lineales

A partir de la linealización de f en un punto crítico \bar{x} es posible determinar la estabilidad del mismo de manera análoga al caso lineal teorema (2.9). El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en, describe la estabilidad en dos casos particulares.

Teorema 2.10. *Sea f de clase C^1 , $\dot{x} = f(x)$ un sistema plano y \bar{x} un punto crítico del mismo.*

(a) *Si todos los valores propios de $Df(\bar{x})$ tienen parte real negativa, entonces \bar{x} es un punto crítico asintóticamente estable (y por lo tanto, estable).*

(b) *Si al menos un valor propio de $Df(\bar{x})$ tiene parte real positiva, entonces \bar{x} es un punto crítico inestable.*

Demostración. Ver [6]. □

Ejemplo 2.13. Considérese el sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1^2 + x_2^2 - 6 \\ \dot{x} &= x_1^2 - x_2 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $(\sqrt{2}, 2)$ y $(-\sqrt{2}, 2)$ y la matriz jacobiano $Df(x)$ está dada por:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean:

$$A_1 = Df(\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, A_2 = Df(-\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

A_1 tiene un valor propio real positivo pues $\det(A_1) < 0$ así que puede concluirse que $(\sqrt{2}, 2)$ es un punto crítico inestable. Por otro lado, A_2 tiene determinante positivo y traza negativa, así que ambos valores propios tienen partes reales negativas. Por el criterio de estabilidad, $(-\sqrt{2}, 2)$ es un punto crítico estable.

Aunque aún no podemos asegurarlo (más adelante se hará) podríamos pensar que el punto crítico $(\sqrt{2}, 2)$ es un punto de espiral. Este sería el caso si el sistema fuera lineal y, como ilustra la figura 2.1, la evidencia numérica refuerza esta idea.

Nótese que el teorema (2.10) no ofrece información alguna para cuando hay valores propios con parte real nula. Esto no es casualidad pues en tal caso no es posible determinar la naturaleza del punto crítico a partir de la linealización, como ilustra el siguiente ejemplo.



Figura 2.25: Diagrama de fase en cercanías del punto crítico $(-\sqrt{2}, 2)$

Ejemplo 2.14. Sea $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrario y consideremos el sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

La linealización del sistema en el punto crítico $\bar{x} = 0$ es:

$$\dot{x} = Df(\bar{x})(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x_1$$

Sin importar el valor de μ Los valores propios de $Df(\bar{x})$ son $\lambda_{1,2} = \pm i$, de manera que no podemos utilizar el criterio de estabilidad pues tienen parte real nula. La razón la ofrece el siguiente argumento:

Notese que:

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2)^2 = 2\mu(x_1^2 + x_2^2)^2$$

Entonces, si $\mu < 0$, $\|x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\bar{x} = 0$ es asintóticamente estable. Si en cambio $\mu > 0$ entonces $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y el punto crítico $\bar{x} = 0$ resulta ser inestable.

Esta dependencia de μ no aparece en la linealización del sistema y por lo tanto este ejemplo demuestra que el teorema (2.10) es tan preciso como es posible.

Clasificación de puntos críticos

Quisiéramos repetir la clasificación hecha en la sección 1.2 para los puntos críticos de sistemas no lineales y nombrar los puntos críticos como nodos, puntos de silla, centros, etc.

Por supuesto, la idea es utilizar la linealización para tal fin, sin que sea necesario resolver el sistema de manera explícita.

Desde el principio sabemos que esta tarea no es tan sencilla como en el caso lineal: el ejemplo (2.14) demuestra que cuando hay valores propios con parte real nula no podemos ni siquiera determinar utilizando solo la matriz jacobiana la estabilidad del punto crítico, mucho menos deducir si se trata de un centro, punto espiral, nodo, etc.

Por el contrario, si se vuelve al diagrama de fase del ejemplo (2.13) notamos que no sólo pudimos deducir, utilizando el criterio de estabilidad, la estabilidad de los puntos críticos sino que estos coinciden, además con el tipo de punto crítico del sistema linealizado.

Por ejemplo, para $\bar{x} = (-\sqrt{2}, 2)$ el sistema lineal plano tiene un punto de espiral y este es el mismo comportamiento que presenta el punto crítico en el sistema no lineal. Podría pensarse, entonces que las dificultades aparecen únicamente cuando la matriz jacobiano $Df(\bar{x})$ no es hiperbólica, es decir, tiene valores propios con parte real nula y que, en caso contrario, las soluciones del sistema no lineal tienen el mismo comportamiento geométrico que las del sistema lineal correspondiente. En efecto, este es el caso, como se verá a continuación.

Definición 2.4.1 (Puntos críticos hiperbólicos). Un punto crítico \bar{x} de un sistema lineal plano $\dot{x} = f(x)$ es *hiperbólico* si la matriz jacobiana en ese punto, $Df(\bar{x})$ es hiperbólica (tiene valores propios todos con parte real no nula)

Ya sabemos del ejemplo (2.14) que en puntos críticos no hiperbólicos puede ser imposible conocer el comportamiento de las soluciones en vecindad del mismo a partir de la linealización. El caso es contrario cuando se trata de puntos hiperbólicos, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.11. (Hartman-Grobman)

Sea f de clase C^1 y \bar{x} un punto crítico hiperbólico del sistema plano $\dot{x} = f(x)$. Entonces hay una vecindad de \bar{x} en la cual $\dot{x} = f(x)$ es topológicamente equivalente a su linealización $\dot{x} = Df(\bar{x})$.

Demostración. Ver [6]. □

El teorema anterior garantiza, entonces, que para puntos críticos hiperbólicos el comportamiento del sistema no lineal cerca del punto es “idéntico” al del sistema lineal correspondiente y por tanto todas las nociones antes vistas coinciden. Para puntos críticos no hiperbólicos es necesario utilizar otras técnicas (o hallar las soluciones del sistema) para determinar el comportamiento. Dentro de estas técnicas se encuentra el método directo de Lyapunov que ataca el problema de la estabilidad directamente sobre la ecuación diferencial en cuestión en lugar de su linealización. Aunque esto pareciera muy adecuado, se requiere de ciertas funciones (conocidas como “funciones de Lyapunov”) cuya existencia no está garantizada y que, en general, no pueden construirse de manera metódica.

Combinando el teorema (2.11) con el criterio de estabilidad teorema (2.10) es posible construir la tabla 4.3.1, que clasifica los equilibrios de sistemas no lineales (por supuesto, también aplica para sistemas lineales).

Vlrs propios(df)	Linealización		Sistemas no lineal	
	Tipo	Estabilidad	Tipo	Estabilidad
Equilibrios Hiperbólicos				
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	nodo	I.	nodo	I.
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nodo	A.E.	nodo	A.E.
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	punto silla	I.	punto silla	I.
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	punto espiral	I.	punto espiral	I.
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	punto espiral	A.E.	punto espiral	A.E.
Equilibrios Hiperbólicos				
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo Propio/impropio	I.	Nodo/punto espiral	I.
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo Propio/impropio	A.E.	Nodo/punto espiral	A.E.
$\lambda_{1,2} = \pm ib$	Centro	E.	Centro/punto espiral	E.

Figura 2.26: Clasificación de equilibrio en sistemas no lineales

Capítulo 3

Problemas comunes del sensor lambda

Como se ha venido describiendo los sistemas de control ofrecen grandes ventajas, pero también tienen algunas desventajas, si el sistema no es lo suficientemente redundante, este puede ser sacado de su estado estable, los motores de combustión interna se podrían atacar desde diferentes puntos de vista, es decir para modelar su comportamiento se puede tener como punto de partida, la termodinámica del sistema o todo el movimiento de sus componentes internos; otro punto que tampoco se conoce con exactitud es el tipo de controlador que implementa la ECU para llevar a cabo sus tareas, es decir no sé sabe si el controlador es PID, por atraso adelante, control por polos y ceros, control fraccional o alguna otra técnica de control, esto para el usuario final no representa un gran problema ya que el sistema cumple con su función. Pero por ese lado el sistema puede considerarse de alguna manera como robusto, la verdadera problemática viene de la instrumentación, es decir de la propia naturaleza de los sensores.

En el caso del sensor lambda se tiene un gran problema, este se fue resolviendo a lo largo de la evolución de dicho sensor, por ejemplo los sensores de primera generación sólo constan de un cable por donde se recibe la señal, es necesario hacer énfasis que a lo largo del presente trabajo se llegó a la conclusión de que la temperatura de operación de dicho dispositivo es fundamental, los sensores de primera generación presentan ese inconveniente ya que alcanzan su temperatura de funcionamiento un periodo considerable de tiempo desde que enciende el motor hasta alcanzar la temperatura idónea, ellos representan un consumo de combustible alto durante ese periodo y por ende una cantidad considerable de gases de combustión no regulados de forma correcta.

Este problema se atendió con la segunda generación de sensores, estos de 4 cables cuentan ya con una resistencia interna que sirve para calentar el dispositivo para alcanzar la temperatura de operación más rápido, reciben una señal PWM ver figura (3.1) (Pulse With Modulation ó modulación por ancho de pulso) que sirve para con-

trolar la cantidad de energía suministrada a la resistencia, este pulso es monitoreado por la ECU y lo ajusta de acuerdo a las condiciones de temperatura.

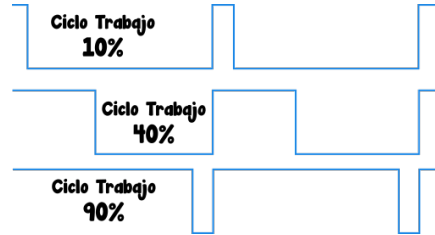


Figura 3.1: Señal PWM

Como se puede observar en la figura (3.1) el ciclo de trabajo se puede manipular, configurando el tiempo en que la señal se mantiene en alto, adicionalmente como se mencionó con anterioridad el sensor genera una señal muy pequeña, por ello se ve afectada por el ruido electrónico para esto se introdujo un cable adicional con una tierra que viene desde la ECU para no tener el problema de tierra flotada, es decir que la señal se está midiendo con una referencia errónea, estas mejoras trajeron consigo una mayor eficiencia en el sistema y un tiempo menor para que el sistema alcance su estado estable, es decir temperatura de trabajo, alrededor de los 90°C en el motor, unos 300 °C para el sensor lambda y unas 900RPM en relantí.

El mejor desempeño se obtiene cuando el sensor lambda alcanza su temperatura de trabajo ideal por ello se ideó precalentarla para llegar lo más rápido posible a esa temperatura.

Los sensores de última generación 6 cables sólo se diferencian de los anteriores porque estos generan voltajes negativos en su señal, esto no lo hace el sensor por naturaleza, se implementa un arreglo de amplificadores operacionales para lograr un offset de la señal.

En estos dispositivos el tiempo de vida varía, de forma significativa, una pieza OEM (original Equipment Manufacturer o equipo original de fábrica) llega a tener una vida promedio de hasta 8 años, mientras que un pieza de recambio puede durar apenas de 3 a 4 años emitiendo los valores esperados.

3.1. Instrumentación y consideraciones

3.1.1. Diseño del dispositivo

Esta sección es técnica y describe las partes y consideraciones de las etapas de su diseño:

- características de los componentes electrónicos

- naturaleza de los sensores eléctricos
- necesidades de diseño

Todo sensor electrónico tiende a tener el efecto de histéresis, (3.2) por ello las mediciones no son del todo correctas, y esto conlleva a un error en los datos recabados por ello es la importancia de este dispositivo en primera instancia la segunda es que dicho aparato permite regular la cantidad de gasolina suministrada al sistema OBD en lazo cerrado. Como se mencionó con anterioridad la vida de estos dispositivos, en el caso de una pieza de recambio es muy corta, además que la temperatura de trabajo juega un papel crucial, de forma experimental en el presente trabajo se encontró que tan sólo al alcanzar la temperatura de trabajo, 300 °C, se genera de un 40 % a 50 % de la señal sin la presencia de gas alguno.

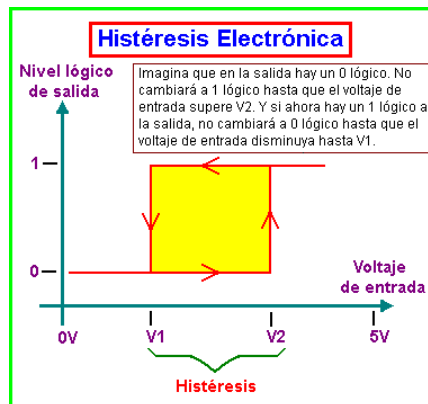


Figura 3.2: Histeresis

Este efecto hace que los valores se tengan que ajustar para que de forma ideal se obtenga un respuesta lineal del sensor, esto se hace ajustando la curva de calibración por algún método matemático, como lo es el de mínimos cuadrados.

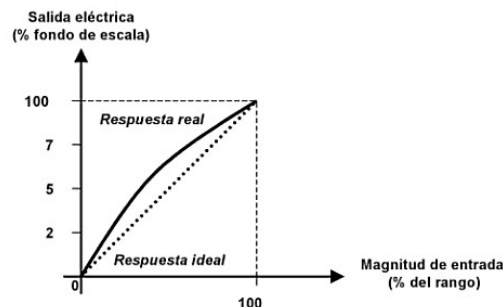


Figura 3.3: Curva de calibración de un sensor.

Figura 3.3: Curva de calibración

Al irse degradando la sonda lambda esta deja de producir el voltaje esperado y el ruido electrónico acaba por suprimir cualquier lectura que esta emita.

Esta situación no es detectada como una falla por la ECU, sino que al entrar en valores por debajo de los 300mV, el sistema reacciona aumentando la cantidad de combustible suministrada al motor con ello se inicia una serie de eventos desafortunado como lo son:

- Alto consumo de combustible.
- Ineficiencia en la cámara de combustión.
- Daños al convertidor catalítico por estar funcionando con exceso de combustible.
- Altos niveles de gases contaminantes.

A menos que el sensor no emita voltaje alguno la ECU registra un código de avería y encenderá, no en todos los casos, la luz de advertencia “check engine”, la degradación del sensor sucede de tal manera que es totalmente aleatoria, algunas veces lo hace exponencialmente y otras simplemente deja de emitir voltaje, todo ello es atribuible a los materiales de construcción de la sonda, todas las ECU se encuentran programadas para notificar sólo si el sistema de precalentamiento se encuentra dañado y este si enciende de manera inmediata la luz de advertencia.

El dispositivo consta de los siguientes módulos y actualmente se encuentra en su versión 3

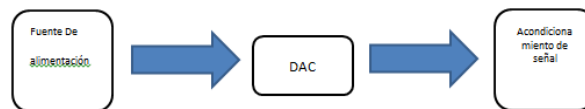


Figura 3.4: Bloques del dispositivo

3.2. Descripción

- **Fuente de alimentación.** El primer módulo se trata de un regulador de voltaje que acondiciona las tensiones para que puedan trabajar los demás circuitos electrónicos, el voltaje nominal de cualquier vehículo a gasolina es de 12vcc, los componentes del dispositivo trabajan con voltajes simétricos de +5vcc y -5vcc.
- **DAC.** Este bloque es el encargado de realizar la construcción de la señal “ideal” mediante un microcontrolador, para que la ECU lea estos datos y en consecuencia regule la cantidad de gasolina suministrada, el sistema genera una señal digital que para sea leída correctamente por la ECU debe ser convertida a su forma analógica, esto se hace mediante un filtro pasa bajas que como nos dice

la teoría del muestreo dejando solo pasar el primer armónico de la señal esta se reconstruirá de manera fiel.

- **Acondicionamiento.** Como la señal obtenida del DAC no es del tamaño correcto en amplitud y tiene un pequeño offset de origen, este debe de acondicionarse para poder manipular los resultados deseados, ellos se logra mediante una serie de configuraciones con amplificadores operacionales

La señal que especifica el fabricante para que una sensor de oxígeno sea aceptado y leída por la ECU, es de un periodo de 1Hz aproximadamente y una amplitud de 500mV, ver figura (3.5), esta señal se especifica de forma digital, es decir cuadrada.

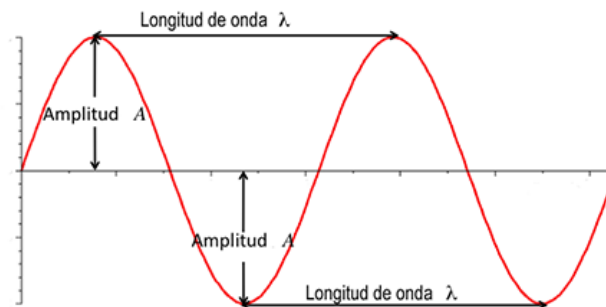


Figura 3.5: Características de una onda

Aunque en la práctica eso es completamente erróneo y como se describirá en el apartado de resultados, que una señal digital, no es leída de forma correcta por la ECU, por ello se debe convertir a su representación analógica, es decir de la digital solo dejar el primer armónico, para ello nos basaremos en la serie de Fourier.

Definición 3.2.1. Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sigma \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sen \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo.

donde a_n y b_n se denominan coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de la función $f(t)$

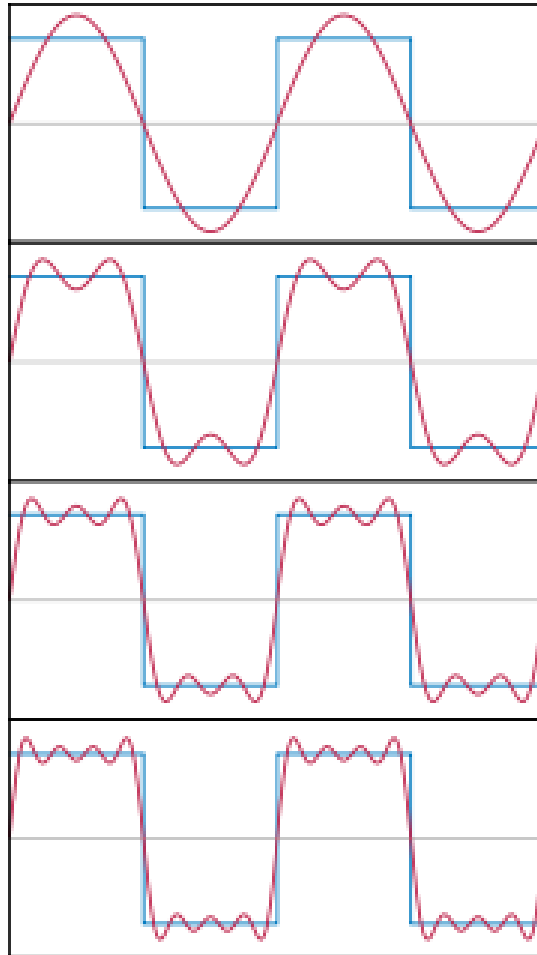


Figura 3.6: 1er, 2do, 3er, 4to armónico

En el presente trabajo es necesario sólo trabajar con el primer armónico, los demás son interpretados como un constante por la ECU, es decir el sistema interpreta que la lectura esta fija y esto carga un error dependiendo si el voltaje lo detecta como algo, se cargará un error de mezcla rica e inmediatamente el sistema intentará compensar esa lectura reduciendo la cantidad de combustible suministrado, por otro lado si el voltaje es bajo se cargará un error de mezcla pobre y se suministrará más combustible al sistema.

Por ello se debe ser cuidadoso que al generar la señal para que esta se encuentre dentro de los valores esperados, en la práctica un sensor nuevo mantiene una frecuencia de al menos unos $10Hz$ a $15Hz$ y esta va disminuyendo con el uso.

Para poder generar la frecuencia idónea se tiene que calcular el periodo de la señal de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$T = \frac{1}{f}$$

El microcontrolador en esta tarea es sumamente conveniente ya que se puede controlar de forma muy simple mediante programación el periodo de la señal, pero este no puede ser un oscilador simple, es decir la señal debe encontrarse oscilado entre un mezcla rica y una pobre, por ello no es posible implementar un oscilador con amplificadores operacionales, por ejemplo, ya que estos se mantiene fijos a la frecuencia que se les diseñe, pero adicionalmente nos encontramos con el problema de que la señal es demasiado lenta, la implementación de los osciladores con amplificadores operacionales son a partir de los Khz. Por ello mediante código de programación se generará una señal que se adecúe a nuestras necesidades; Para dejar pasar solo el primer armónico nos auxiliaremos de un filtro pasa bajas, dadas las características de la señal no es conveniente implementar filtros más sofisticados, por ejemplo un Butterworth ver figura 19 o un MFB figura 18 (multiple feedback o de multiple retroalimentación).

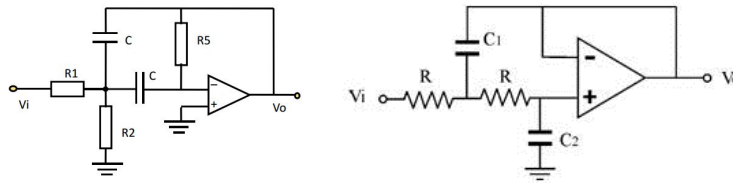


Figura 3.7: Filtro MFB y Butterwoth

Aunque este tipo de filtros tiene una respuesta en su pendiente de 20dB para uno de primer orden, la baja frecuencia de la señal impide el uso de amplificadores comerciales, como por ejemplo el TL082 o el TL741, se necesitarían implementar dispositivos de instrumentación, cosa que adicionalmente a los costos de estos, ellos utilizan tecnología CMOS (Complementary metal-oxide-semiconductor o semiconductor complementario de óxido metálico).

Un problema de utilizar esta tecnología es que es muy susceptible a las descargas electrostáticas, al recibir un ciento de mili-amperes, el componente puede resultar dañado con facilidad y dado que el diseño ya cuenta con 2 dispositivos de este tipo se requiere reducir la vulnerabilidad a este tipo de daño. Por ello se implementará un filtro RC (resistencia-capacitor) de primer orden. Para diseñar este filtro se tiene que tomar en cuenta la frecuencia de corte en nuestro caso es alrededor 1Hz se tiene:

$$F_c = \frac{1}{RC}$$

En la etapa de acondicionamiento se tiene otro componente CMOS que es un circuito integrado que nos ayuda para poder utilizar los amplificadores operacionales necesarios

para poder quitar el offset de la señal ver figura (3.8) , estos dispositivos necesitan para su funcionamiento una alimentación con voltaje negativo, y dado que la fuente disponible en todos los vehículos es de 12 V_{cc} positivos.

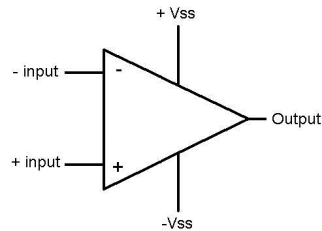


Figura 3.8: Amplificador operacional

El siguiente esquemático muestra el circuito implementado:

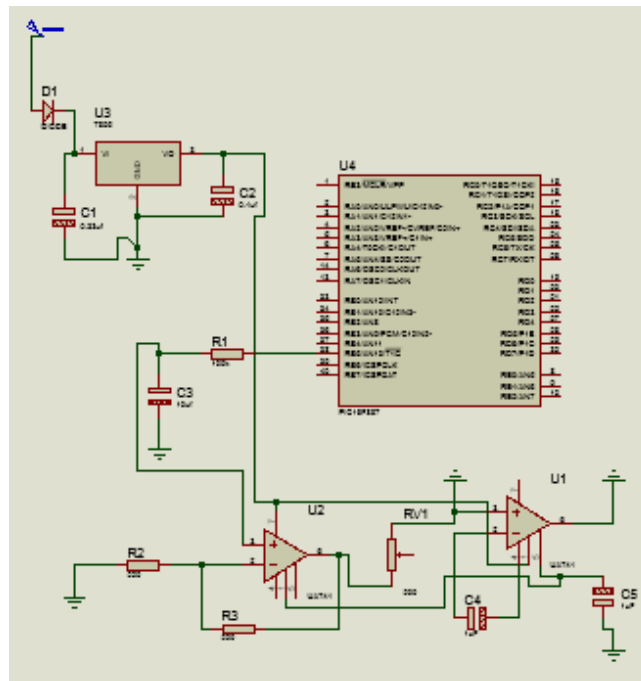


Figura 3.9: Esquema eléctrico

La señal generada por el circuito es analógica ya que en distintas pruebas una señal digital aunque estuviera dentro de los rangos de valores esperados por la ECU esta no es leída de forma correcta.

A continuación se muestra una forma de la señal obtenida después del filtrado, es decir solo dejando pasar el primer armónico de la señal digital (cuadrada).

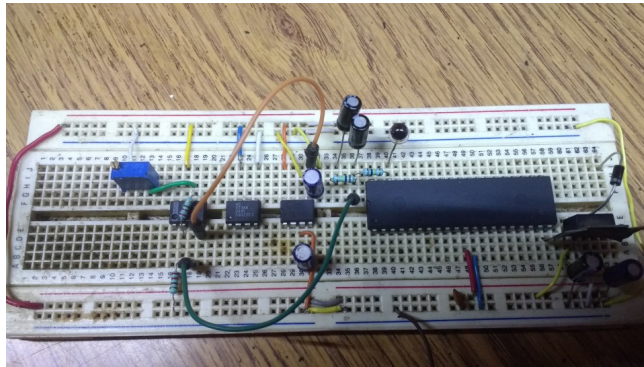


Figura 3.11: Prototipo del dispositivo

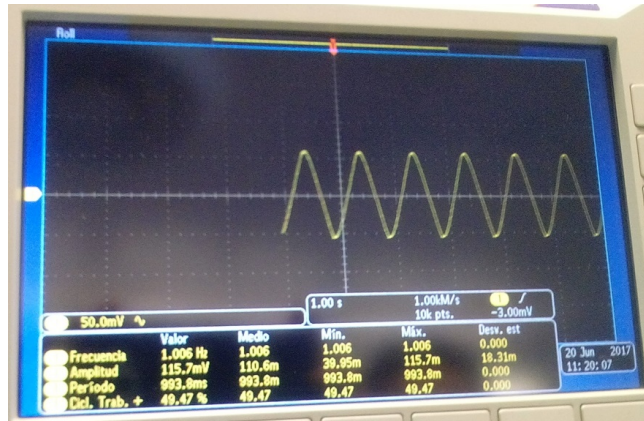


Figura 3.10: Señal filtrada

La señal mostrada es de una amplitud muy pequeña pero cuenta con las características de frecuencia de una señal legible por la ECU, por ello se introduce una etapa de acondicionamiento donde podemos manipular la amplitud de dicha señal a placer, los fabricantes señalan que dicho sensor lambda debe estar entre los 500mV y los 600mV oscilando de forma constante.

3.3. Resultados experimentales obtenidos

La versión actual y presentada en este trabajo se encuentra en su tercera versión, los primeros prototipos a pesar de ser diseñados de acuerdo a las especificaciones del fabricante resultaron en la inmediata carga de un error en la ECU y con ello provocando todas las problemáticas descritas en capítulos anteriores.

El prototipo se probó en 2 motores con tecnologías OBD y OBDII, durante un período

de 1 año, hay que hacer un hincapié que solo se utilizaron esos 2 vehículos ya que no se tiene la disposición de otros, en ambos casos los datos después de los ajustes necesarios fueron los siguientes:

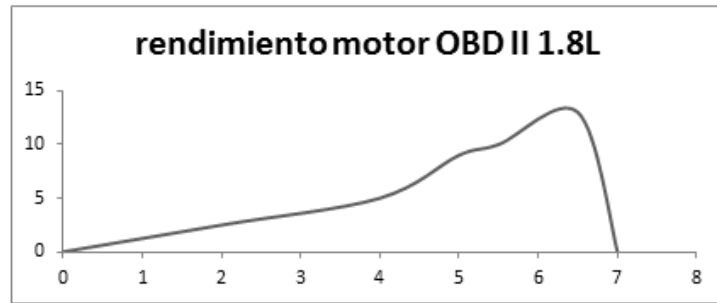


Figura 3.12: *voltaje vs km/l obd2*

La gráfica mostrada en la figura (3.12) se muestra una escala de *km* entre voltaje, es decir el dispositivo se ajustó la amplitud de la señal de salida, se comprobaron los valores que el fabricante da por correctos es decir al rededor de los $500mV$, medidos de forma externa con la ayuda de un voltímetro, esto se usó como punto de referencia para obtener la curva mostrada. Recordemos que la motivación de la presente tesis es la instrumentación del multi-citado sensor, por ello una de las necesidades es que el dispositivo sea capaz de no cargar ningún código de error a la ecu.

En el caso del motor OBD II 1.8L se obtuvo una mejora significativa en el consumo de combustible, estos datos se obtuvieron en condiciones de tráfico normal de la CDMX, sin embargo aunque en si hay una mejora significativa, esta conlleva a una pérdida de potencia, para poder medir dicha pérdida se necesitaría de un equipo especial (dinamómetro) con el cual no se cuenta, pero se estima dicho valor entre un 10 % y 15 % dependiendo del valor al que se ajuste el sensor.. Gracias a la correcta programación de los ciclos del sensor (alto-bajo), esta es una de las aportaciones que se logró.

Para el motor OBD 2.5L, es un motor con sobre alimentador (turbo), en este la mejora de consumo también fue significativa, aunque menor que en el motor 1.8L, esto es debido a que el cilindraje es mayor, en este tipo de motor la reducción de potencia es perceptible solo al arranque donde se tiende a genera un retardo de alrededor de los *3segundos*, y posteriormente el motor desarrolla su potencia normalmente. El gráfico mostrado. como en el caso anterior muestra una escala de *Km* contra *voltaje*, el ajuste donde no se cargan errores a la ECU fue a partir de los $650mv$.

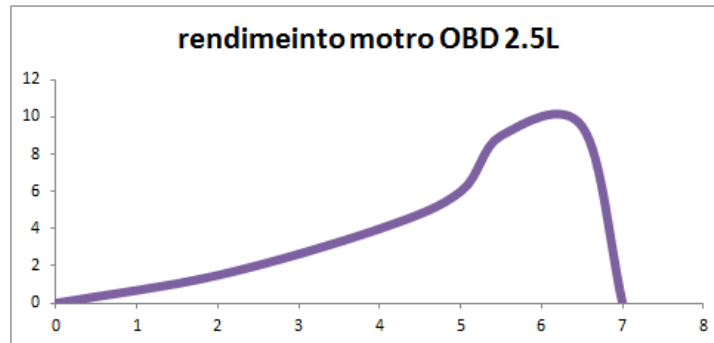


Figura 3.13: *voltaje vs km/l obd*

En ambos casos podemos ver que la curva tiene una caída abrupta a partir de los $700mV$, aunque este valor no genera ningún código de error a la ECU, si gace que el el sistema solo cuente con la potencia suficiente para mantenerse andando sin carga, es decir solo es capaz mantenerse encendido sin poder caminar, con este resultado podemos intuir que ese es un extremo del sistema, donde este se vuelve críticamente estable. La pérdida de potencia es perceptible al accionar el acelerador a fondo, o de forma brusca, es decir al sistema se le alimenta con una entrada grande, pero este gracias al dispositivo responde de forma sobre amortiguada figura, (1.5) haciendo que la aceleración sea de forma mucho más suave y lento.

Conclusiones

Al cabo de un año de experimentación se obtuvieron los siguientes resultados:

- El dispositivo cumple con la función de sustituir al sensor de oxígeno sin alterar la instalación de equipo original (OEM), adicionalmente en comparación con el sensor de fábrica, este logra controlar efectivamente la cantidad de combustible suministrada al motor a placer sin cargar error alguno en la ECU, con ello se logra una disminución en el consumo del mismo, al ingresar una menor cantidad de combustible en la cámara de combustión, se esperaría una disminución de gases de combustión, este último punto se tendría que investigar más a fondo ya que para ello es necesario equipo de medición de gases.
- Este instrumento no se ve afectado por la temperatura de operación, como sucede con el original, que necesita alcanzar una temperatura de 300 grados Celsius para operar de forma normal, ya que desde que se enciende el dispositivo diseñado, este opera ya con la señal correcta, no interfiere con el resto del sistema, los demás actuadores aún pueden hacer su trabajo, por ejemplo seguir controlando la marcha mínima ya sea en ralentí o con algún accesorio encendido, por ejemplo usar el aire acondicionado. No afecta la garantía del vehículo ya que no altera la instalación original del sensor, se puede utilizar el mismo contacto para poder conectar el nuevo dispositivo.
- Un inconveniente del dispositivo es que aunque funciona de forma correcta se debe ajustar a la curva de calibración interna de la ECU, en el sistema OBDII se comprobó que aunque el dispositivo se encuentra calibrado en una escala correcta, la ECU lee un valor por debajo del fijado, esto es debido a la programación que el fabricante le dio al sistema, con ello se concluye que cada fabricante da una curva de calibración diferente en cada modelo.
- Dado el diseño del dispositivo este es compatible con cualquier generación de sensores, sea de primera, segunda, tercera o cuarta generación, haciendo esta otra aportación, el dispositivo es de uso universal, hasta la fecha de publicación de esta tesis.

En cuando a la información obtenida por los fabricantes de estas partes podemos concluir categóricamente que:

- Los datos proporcionados con las descripciones del funcionamiento de las ECU, son desconocidos, por lo tanto no se tiene la ecuación diferencial ordinaria del sistema.
- Los datos técnicos del sensor de oxígeno, distan por mucho de los que la ECU da por buenos para un funcionamiento óptimo (naturaleza de la señal, amplitud y frecuencia de la misma).
- Para el factor λ , se desconocen los parámetros de entrada y como fueron obtenidos.
- Dada toda esta falta de información, el modelo matemático se deja para un estudio posterior del presente trabajo, ya que el único objetivo de la tesis es la instrumentación
- Como se mencionó el sensor oxígeno OEM, genera la mitad de su señal con él simple hecho tener una temperatura alta, esto en términos generales podría interpretarse como un error del 50 % de los datos obtenidos, por lo tanto se tiene una duda razonable sobre el uso extensivo de dicho sensor analizado.

3.4. Obsevaciones finales

- Para las mejoras al sensor λ no se planteó y resolvió resolvió la ecuación diferencial ordinaria asociada, lo cual está fuera de los alcances del presente trabajo.
- Sin embargo, se realizaron una serie de cambios prácticos en la lectura y procesamiento del sensor lambda, que permitieron corregir gran parte de los errores que presentan los sensores comerciales, su viabilidad no se ha demostrado matemáticamente pero si de forma experimental con la prueba del dispositivo.
- La mejora en términos generales consiste en dividir la señal enviada por el dispositivo en pequeños bloques discretizados que son recuperados por el convertidor analógico de manera adecuada, mientras que los sensores comerciales envían una señal constante que provoca los errores mencionados.

Glosario de Términos en inglés

- CHECK ENGINE** Luz de advertencia en todos los automotores comercializados en México de 1995 a la fecha.
- CMOS** El semiconductor complementario de óxido metálico o complementary metal-oxide-semiconductor (CMOS) es una de las familias lógicas empleadas en la fabricación de circuitos integrados. Su principal característica consiste en la utilización conjunta de transistores de tipo pMOS y tipo nMOS configurados de forma tal que, en estado de reposo, el consumo de energía es únicamente el debido a las corrientes parásitas, colocado en la placa base. En la actualidad, la mayoría de los circuitos integrados que se fabrican usan la tecnología CMOS. Esto incluye microprocesadores, memorias, procesadores digitales de señales y muchos otros tipos de circuitos integrados digitales de consumo considerablemente bajo.
- DAC** Es un dispositivo para convertir un código digital (generalmente binario, compuesto de ceros y unos) a una señal analógica (corriente, voltaje o carga eléctrica). Hay distintos componentes que pueden intervenir en este proceso, como interruptores simples, red de resistores, fuentes actuales o condensadores. Un convertidor de analógico a digital (ADC) realiza la operación inversa.
- DTC** Códigos DTC (siglas de Diagnostic Trouble Codes, lo que es Códigos de Problemas de Diagnóstico, traducido al inglés).
- ECM** Módulo de Control de Motor (ECM, por sus siglas en inglés: Engine Control Module).
- ECU** Unidad de control de motor o ECU (sigla en inglés de engine control unit) es una unidad de control electrónico que administra varios aspectos de la operación de combustión interna del motor. Las unidades de control de motor más simples sólo controlan la cantidad de combustible que es inyectado en cada cilindro en cada ciclo de motor. Las más avanzadas controlan el punto de ignición, el tiempo de apertura/cierre de las válvulas, el nivel de impulso mantenido por el turbocompresor, y control de otros periféricos.
- EEPROM** Son las siglas de Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory (ROM programable y borrable eléctricamente). Es un tipo de memoria ROM que pue-

de ser programada, borrada y reprogramada eléctricamente, a diferencia de la EPROM que ha de borrarse mediante un aparato que emite rayos ultravioleta. Son memorias no volátiles.

EGR Las siglas EGR quieren decir Exhaust Gas Recirculation, que en castellano viene a significar “recirculación de los gases del escape”. Como ya hemos adelantado, su función principal es la de reducir las emisiones de óxidos de nitrógeno (NOx) para contaminar menos y adaptarse a las normativas vigentes. Para conseguirlo se redirigen parte de esos gases que van saliendo por el escape de nuevo al circuito de admisión.

EOBD Es un sistema de diagnóstico a bordo en vehículos (coches y camiones). Actualmente se emplean los estándares OBD-II (Estados Unidos), EOBD (Europa) y JOBD (Japón) que aportan un monitoreo y control completo del motor y otros dispositivos del vehículo.

EPROM Son las siglas de Erasable Programmable Read-Only Memory (ROM programable borrable). Es un tipo de chip de memoria ROM no volátil inventado por el ingeniero Dov Frohman de Intel. Está formada por celdas de FAMOS (Floating Gate Avalanche-Injection Metal-Oxide Semiconductor) o transistores de puerta flotante, cada uno de los cuales viene de fábrica sin carga, por lo que son leídos como 1 (por eso, una EPROM sin grabar se lee como FF en todas sus celdas).

ESP ESP, ESC, DSC, VDC, VSA y VSC son las siglas comerciales del control electrónico de estabilidad, uno de los avances tecnológicos en materia de seguridad activa más importantes de los últimos tiempos. Su función es conseguir que el vehículo se mantenga en la trayectoria marcada por el conductor con el volante, reduciendo en buena medida los siniestros viales derivados de un derrape.

FI Full injection.

Full Injection Sistema electrónico de inyección de combustible.

MIL Es una luz de advertencia que al dar vuelta al switch esta se apaga dentro de los 5 segundos posteriores, puede tener la leyenda de “check engine”o “services engine soon”o simplemente el ideograma de un motor.

MIMO Sistema con múltiples entradas y múltiples salidas (Multiple Output, Multiple Input).

MPFI Sistema de inyección de gasolina multipuerto (Multiple Port Fuel Injection).

OBD Sistema de diagnóstico a bordo (On Board Diagnostic).

OEM Equipo original del fabricante (Original Equipment Manufacturer).

- PID** Un controlador PID (Controlador Proporcional-Integral-Derivativo) es un mecanismo de control por realimentación ampliamente usado en sistemas de control industrial. Este calcula la desviación o error entre un valor medido y un valor deseado.
- PWM** La modulación por ancho de pulsos (también conocida como PWM, siglas en inglés de pulse-width modulation) de una señal o fuente de energía es una técnica en la que se modifica el ciclo de trabajo de una señal periódica (una senoidal o una cuadrada, por ejemplo), ya sea para transmitir información a través de un canal de comunicaciones o para controlar la cantidad de energía que se envía a una carga.
- RAM** La memoria de acceso aleatorio (Random Access Memory, RAM) se utiliza como memoria de trabajo de computadoras y otros dispositivos para el sistema operativo, los programas y la mayor parte del software. En la RAM se cargan todas las instrucciones que ejecuta la unidad central de procesamiento (procesador) y otras unidades del computador, además de contener los datos que manipulan los distintos programas.
- RELANTI** El ralenti es el régimen mínimo de revoluciones por minuto (giros o vueltas por minuto) a las que se ajusta un motor de combustión interna para permanecer en funcionamiento de forma estable sin necesidad de accionar un mecanismo de aceleración o entrada de carburante. Por ejemplo, en un automóvil, sin necesidad de presionar el pedal del acelerador. El ralenti puede ser modificado según los consumidores de energía que estén conectados como el aire acondicionado, el electroventilador, las luces, entre otros. Este régimen, en móviles terrestres, suele estar comprendido entre las 700 y las 1100 rpm.
- RPM** Revoluciones por minuto.
- SISO** Sistema de una sola entrada y una sola salida (Simple Input- Simple Output).
- TBI** Cuerpo de aceleración (Throttle Body Injection).
- TTL** Son las siglas en inglés de transistor-transistor logic, es decir, lógica transistor a transistor. Es una tecnología de construcción de circuitos electrónicos digitales. En los componentes fabricados con tecnología TTLRS los elementos de entrada y salida del dispositivo son transistores bipolares.

Bibliografía

- [1] Amplificadores operacionales y circuitos integrados lineales, Robert F. Coughlin, Frederick F. Driscoll, 1993, Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
- [2] Diseño con amplificadores operacionales y circuitos integrados analógicos, Sergio Franco, 3ra edición, 2005, McGraw Hill Interamericana
- [3] Dispositivos Electrónicos, Floyd, 8ta edición, 2008, Pearson Educación
- [4] Electrónica: Teoría de circuitos y Dispositivos electrónicos, Robert L. Boylestad, Louis Nashelsky, 2009, Prentice Hall
- [5] Física para ciencias e ingeniería, Raymond A. Serway & John W. Jewett, Jr, 2008 septima edición, CENGAGE Learning
- [6] Sistemas de control para ingeniería, Norman S. Nise, 3ra edición, 2006, Compañía editorial continental.
- [7] <https://mdautomotive.es/los-sistemas-diagnostico-obd-obdii-\conector-protocolos-estandares/>
- [8] <http://bdigital.unal.edu.co/50970/1/1130672811.2015.pdf>