

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

**Análisis estadístico de las fluctuaciones diarias
de los índices de los mercados financieros:
Un enfoque a partir de distribuciones estables de Levy**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

EDUARDO JAVIER PEÑA BAUTISTA

DIRECTOR

DR. LESTER AUGUSTO ALFONSO DÍAZ

Ciudad de México, mayo de 2021.

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Agradecimientos

A la convocatoria interna UACM proyectos de investigación del Colegio de Ciencia y Tecnología (CCyT) – 2019, por haberme dado el apoyo y la oportunidad de realizar este trabajo de investigación.

Al Laboratorio de Ciencias y Tecnologías Sustentables (LACyTES) por haberme dado la oportunidad de desarrollar este trabajo de investigación y por haberme apoyado con sus instalaciones las cuales son las más hermosas y cuentan con los mejores servicios y tecnología.

A mi universidad, por haberme dado la oportunidad de estudiar esta carrera en sus instalaciones, por medio de las cuales me apoye para la culminación de este proyecto.

Al instituto y a la Academia de Matemáticas por haberme apoyado con el fortalecimiento de mis conocimientos para lograr una generalización de lo ya aprendido en la carrera.

Le doy gracias a mis padres Margarito y Carmen por haberme apoyado en todo momento, por los valores que me inculcaron y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida, sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A mis hermanos, por ser parte importante en mi vida por el apoyo y porque lo damos todo por llegar lejos.

A mi director de tesis, el Dr. Léster Augusto Alfonso Díaz, por haberme guiado durante este proceso de investigación, por todo el conocimiento que me fue compartiendo día con día, por todos esos momentos de risa y trabajo, pero sobre todo por haberme brindado la confianza y oportunidad de trabajar con usted.

A mis profesores del laboratorio LACyTES: Dres. Rogelio Mendoza Pérez, José Alfredo Del Oso Acevedo y José Joaquín Lizardi del Ángel les quiero agradecer por todo el

apoyo brindado a lo largo de la carrera, por su tiempo, amistad y por sus conocimientos que me transmitieron.

A mis amigos, por haberme apoyado durante este trabajo, por todos esos momentos en los que nos apoyamos de manera conjunta para la obtención de resultados buenos, por toda esa confianza, amistad y sobre todo por estar ahí.

Resumen

La mayoría de los modelos financieros desarrollados durante los últimos 50 años en finanzas teóricas y empíricas descansan sobre la suposición de que el rendimiento o la distribución de precios siguen una distribución normal (Bachelier, 1900; Black and Scholes, 1973). Sin embargo, como muestran estudios recientes, esta suposición no está justificada por datos empíricos (Mantegna y Stanley, 2000). Por el contrario, las fluctuaciones muestran exceso de curtosis, más coloquialmente conocido como colas gruesas o colas pesadas. Por lo tanto, la familia de distribuciones estables, que tienen colas pesadas (Levy estable, Cauchy) ha sido propuesta en numerosos estudios para la modelación de datos empíricos.

En el caso particular de las distribuciones estables de Levy, se han publicado numerosos trabajos (Mandelbrot, 1963; Mantegna y Stanley, 1995) donde se muestra que son un buen modelo para modelar las fluctuaciones de los precios.

En este estudio, las fluctuaciones de los datos diarios de los índices bursátiles de los principales países emergentes (México, Brasil, India, Hong Kong, China y Rusia) fueron ajustados a distribuciones estables de Levy. Para cada caso, se realizaron pruebas de bondad de ajuste utilizando el criterio de Kolmogorov-Smirnov para evaluar cuantitativamente la calidad de los respectivos ajustes.

Para el criterio de Kolmogorov-Smirnov, los valores críticos fueron calculados de forma rigurosa a partir de simulaciones de Monte Carlo. Los resultados obtenidos demuestran que, para datos diarios, la familia de distribuciones estables de Levy son un buen modelo para modelar las fluctuaciones de los índices financieros.

Tabla de Contenidos

Agradecimientos.....	2
Resumen.....	4
Tabla de contenidos	5
Lista de figuras	7
Lista de tablas	8
Capítulo Uno	
1. Introducción	10
Capítulo Dos	
2. Las fluctuaciones de los Índices Bursátiles como caminatas aleatorias.....	13
2.1. Caso discreto unidimensional.....	13
2.2. El límite continuo.....	14
2.3. Convergencia a una distribución Gaussiana (Teorema del límite central), y velocidad de convergencia.....	14
Capítulo Tres	
3. Diferentes tipos de distribuciones utilizadas en la modelación estadística de los mercados financieros, y métodos para la estimación de los parámetros.....	16
3.1. Distribución alfa-estable de Levy.....	16
3.2. Distribución Gaussiana.....	22
3.3. Distribución Inversa Gaussiana.....	24
3.4. Estimación de los parámetros para una distribución alfa-estable.....	26
3.4.1. Método de Maximum Likelihood.....	26
3.4.2. Bondad de ajuste.....	28

Capítulo Cuatro

4. Análisis estadístico de las fluctuaciones de los diferentes índices bursátiles y cálculo de la bondad de ajuste para las diferentes distribuciones.....	30
4.1. Test de Kolmogorov – Smirnov.....	41
4.2. Resultados de la estimación del estadístico y valores límite a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	45

Capítulo Cinco

5. Conclusiones.....	49
Referencias.....	51

Lista de Figuras

Figura 1: Distribución Uniforme y suma de variables aleatorias S_2	18
Figura 2: Distribución Normal y suma de variables aleatorias S_2	18
Figura 3: Distribución Cauchy y suma de variables aleatorias S_2	18
Figura 4: Evolución de los activos para el Índice México " <i>IPC</i> "	31
Figura 5: Evolución de los activos para el Índice de Brasil " <i>Bovespa</i> "	31
Figura 6: Evolución de los activos para el Índice de la India " <i>Nifty 50</i> "	32
Figura 7: Evolución de los activos para el Índice de Rusia " <i>Russia</i> "	32
Figura 8: Evolución de los activos para el Índice de China " <i>Shanghai Composite</i> "	33
Figura 9: Evolución de los activos para el Índice de Hong Kong " <i>Hang Seng</i> "	33
Figura 10: Distribución temporal del logaritmo de los incrementos para el Índice de México.....	34
Figura 11: Distribución temporal del logaritmo de los incrementos para el Índice de Brasil.....	35
Figura 12: Distribución temporal del logaritmo de los incrementos para el Índice de India.....	35
Figura 13: Distribución temporal del logaritmo de los incrementos para el Índice de Rusia.....	36
Figura 14: Distribución temporal del logaritmo de los incrementos para el Índice de China.....	36
Figura 15: Distribución temporal del logaritmo de los incrementos para el Índice de Hong Kong.....	37

Lista de Tablas

Tabla 1: Estadísticos importantes para los diferentes índices bursátiles	38
Tabla 2: Estimación de los parámetros de la distribución alfa-estable de Levy para el Índice de Precios y Cotizaciones de México (IPC)	39
Tabla 3: Estimación de los parámetros de la distribución alfa-estable de Levy para el Índice IVOBESPA de Brasil	39
Tabla 4: Estimación de los parámetros de la distribución alfa-estable de Levy para el Índice Nifty 50 de la India	39
Tabla 5: Estimación de los parámetros de la distribución alfa-estable de Levy para el Índice IMOEX de Rusia.....	40
Tabla 6: Estimación de los parámetros de la distribución alfa-estable de Levy para el Índice Shanghai Composite de China.....	40
Tabla 7: Estimación de los parámetros de la distribución alfa-estable de Levy para el Índice Hang-Seng de Hong Kong.....	40
Tabla 8: Comparación entre valores límite teóricos y estimados de la distribución de Kolmogorov-Smirnov para el caso de la distribución alfa-estable de Levy	44
Tabla 9: Comparación entre valores límite teóricos y estimados de la distribución de Kolmogorov-Smirnov para el caso de la distribución Inversa Gaussiana.....	44
Tabla 10: Comparación entre valores límite teóricos y estimados de la distribución de Kolmogorov-Smirnov para el caso de la distribución Gaussiana.....	45
Tabla 11: Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov para el caso del IPC de México utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	46

Tabla 12: Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov para el caso del IVOBESPA de Brasil utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	46
Tabla 13: Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov para el caso del Nifty 50 de la India utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	47
Tabla 14: Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov para el caso del IMOEX de Rusia utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	47
Tabla 15: Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov para el caso del Shanghai Composite de China utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	48
Tabla 16: Aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov para el caso del Hang-Seng de Hong Kong utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.....	48

Capítulo Uno

Introducción.

Durante los últimos años, las fluctuaciones de los índices financieros se han modelado utilizando herramientas de la teoría de procesos estocásticos continuos. El estudio detallado de los mercados es un reto importante, ya que son un sistema complejo con un gran número de elementos internos que interactúan de manera no lineal, y básicamente son el resultado acumulativo de un gran número de decisiones que van surgiendo continuamente en el tiempo.

A principios del siglo XX, Louis Bachelier en su tesis de doctorado (Bachelier, 1900) postuló que las fluctuaciones de los precios siguen una distribución gaussiana. En años posteriores, el problema de la distribución de las fluctuaciones de los precios ha sido considerado por varios autores: El avance más importante ha sido el modelo de Black and Scholes (1973), en el que la hipótesis original propuesta por Bachelier, fue sustituida por un modelo en el que la diferencia de los logaritmos de los precios sigue una distribución gaussiana, por lo tanto, según Black and Scholes, la evolución obedece a un proceso geométrico browniano.

Sin embargo, entre los modelos alternativos propuestos, el más revolucionario fue el desarrollado por Mandelbrot (1963). Según la hipótesis de Mandelbrot, las fluctuaciones de los precios obedecen a una distribución estable de Levy. Los procesos de Levy (Mantegna y Stanley, 2002), son procesos estocásticos que obedecen a una forma generalizada del Teorema del Límite Central (TLC) y cumplen con la condición de estabilidad, o sea, al sumar dos variables aleatorias o más que obedecen a una distribución estable de Levy, obtenemos como resultado una nueva variable aleatoria con distribución estable de Levy.

El modelo de Levy es muy atractivo, porque los mercados financieros tienen fluctuaciones que no pueden ser descritas de forma satisfactoria a partir de los modelos de Bachelier (1900) y Black and Scholes (1973). Los procesos de Levy, al tener una varianza infinita, podrían entonces ser una alternativa para simular eventos extremos en los mercados.

La varianza infinita puede ser una de las limitantes del modelo propuesto por Mandelbrot, sin embargo, se logró un avance importante en el trabajo de Mantegna y Stanley

(1994), donde se introduce la distribución de Levy truncada. Debido al truncamiento de la distribución, estos procesos tienen varianza finita y convergen lentamente a una distribución gaussiana bajo convolución. El modelo original propuesto por Mantegna y Stanley (1994) fue mejorado por Koponen (1995), quien introdujo un decaimiento exponencial en la cola de la distribución en lugar del truncamiento propuesto por estos autores.

Las distribuciones estables se han ajustado con éxito a los rendimientos de las acciones de mercados financieros (Rachev and Mittnik, 2000).

Para el caso de México (Alfonso et.al, 2012) y de algunos países emergentes los datos de las series de tiempo observadas para los diferentes índices bursátiles se desvían de la normalidad debido a la presencia de valores extremos con valores mucho mayores a los esperados para un proceso gaussiano.

Este tipo de análisis puede ser útil pues permitirá a los analistas financieros tomar mejores decisiones respecto de los riesgos que se pueden producir e incluso realizar pronósticos precisos a futuro, ya que los resultados empíricos muestran que los retornos financieros dan un mejor ajuste con distribuciones estables que con un modelo gaussiano (Nolan, 2003).

El principal objetivo de este trabajo es averiguar si la distribución alfa estable de Levy se ajusta de manera adecuada al comportamiento de las fluctuaciones de algunos de los principales índices bursátiles de algunos de los países emergentes. En trabajos anteriores (Alfonso et al., 2012) se ha mostrado que, para datos diarios, las distribuciones alfa-estables de Levy son un buen modelo para el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). En nuestro estudio, también se presentarán los resultados obtenidos con otras distribuciones (como la gaussiana y la inversa gaussiana). El comportamiento de cada una de estas distribuciones se hará de forma rigurosa utilizando pruebas estadísticas formales.

Los datos utilizados en este estudio son los valores de cierre diario para un periodo de diez años (2005-2015). Se analizará el comportamiento de los principales índices bursátiles de algunos de los principales países emergentes tales como: China con el índice Shanghai Composite (SSEC), Brasil con el índice Bovespa (IBOVESPA), la India con el índice Nifty50 (NSE), Rusia con el índice MOEX (IMOEX), Hong Kong con el índice Hang Seng (HSI), además del (IPC) para México.

El trabajo de tesis que se presenta a continuación consta de cinco capítulos. En el capítulo 2 se introducen las caminatas aleatorias como modelo para las fluctuaciones de los índices bursátiles, en el capítulo 3 desarrollaremos el marco teórico, en el cual haremos mención de las tres distribuciones utilizadas para ajustar los datos empíricos, el modelo para estimar los parámetros de una distribución estable y las pruebas de bondad de ajuste, en el capítulo 4 se detalla la metodología para el análisis de los datos para los diferentes índices y en capítulo 5 está dedicado a la discusión de los resultados y las conclusiones.

Capítulo Dos

Caminatas aleatorias.

Por muchos años, dentro del área de la economía, estadística y finanzas apareció como un problema de primordial interés, poder modelar el comportamiento del precio de las acciones; debido a que, dentro de un mercado, los precios de los activos financieros fluctúan de manera aleatoria, en muchos casos, en torno a su valor esperado o “media”. Por ello, se adoptó el método llamado “paseo aleatorio” también conocido como “caminata aleatoria” como un buen modelo para describir el comportamiento de los índices financieros a lo largo de intervalos de tiempo.

En este capítulo, definiremos el concepto de caminata aleatoria, así mismo, mencionaremos algunas de sus propiedades estadísticas. Concretamente, discutiremos el teorema del límite central, y se formulará el teorema de Berry-Esseen que caracteriza la velocidad de convergencia a la normalidad.

2.1. Caso discreto unidimensional

Consideremos la suma de n variables aleatorias idénticamente distribuidas x_i :

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad (2.1)$$

Aquí $S_n = x(n\Delta t)$ es la suma de las n variables aleatorias o la posición del caminante en el momento $(n\Delta t)$, donde n es el número de pasos realizados y Δt el intervalo de tiempo necesario para realizar un paso. Las variables aleatorias idénticamente distribuidas se caracterizan por momentos $E\{x_i^n\}$ que no dependen de i . El ejemplo más simple es un paseo realizado tomando pasos aleatorios de tamaño s , que toma aleatoriamente los valores $\pm s$. El primer y segundo momento para tal proceso son:

$$E\{x_i\} = 0 \quad \text{y} \quad E\{x_i^2\} = s^2 \quad (2.2)$$

Para esta caminata aleatoria:

$$E(x_i x_j) = \delta_{ij} s^2 \quad (2.3)$$

De (2.1) - (2.3), obtenemos que:

$$E\{x(n\Delta t)\} = \sum_{i=1}^n E\{x_i\} = 0 \quad (2.4)$$

2.2 El límite continuo.

El límite continuo para un paseo aleatorio se puede obtener calculando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta t \rightarrow 0$ de forma tal que el producto $n\Delta t$ sea finito. Entonces:

$$E\{x^2(t)\} = ns^2 = \frac{s^2}{\Delta t} t \quad (2.5)$$

donde $D = \frac{s^2}{\Delta t}$ es el coeficiente de difusión. De forma que

$$E\{x^2(t)\} = Dt \quad (2.6)$$

Como se puede observar en (2.6), la varianza depende linealmente del tiempo, que es una característica de los procesos de difusión. Este proceso estocástico recibe el nombre de proceso de Wiener (“Wiener process”). Normalmente se asume que cuando $n \rightarrow \infty$, o $\Delta t \rightarrow 0$, estamos en presencia de un proceso Gaussiano. Sin embargo, la equivalencia ‘*Random walk*’ = ‘*Gaussian walk*’, solamente se cumple cuando $n \rightarrow \infty$, y no es válida en el límite discreto cuando n es finito y Δt es pequeño. Esto es debido a que en general, la función de densidad de probabilidad para S_n es gaussiana solamente en el límite. Para valores finitos de n esto no se cumple. La función de densidad de probabilidad del proceso $P(x(n\Delta t))$ en general es arbitraria.

2.3 Convergencia a una distribución gaussiana (Teorema del límite central), y velocidad de convergencia.

Supongamos que $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ es una variable aleatoria, expresada como la suma de n variables aleatorias x_i idénticamente distribuidas, con varianza finita ($E\{x_i\} = 0$ y $E\{x_i^2\} = s^2$) y:

Entonces, el teorema del límite central establece que:

$$\tilde{S}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

Tiene distribución gaussiana con varianza 1:

$$P_G(S_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-S_n^2/2\sigma_n^2} \quad (2.7)$$

Donde $P_G(S_n)$ denota la probabilidad de la variable aleatoria y análogamente podemos representar a σ_n como la raíz cuadrada de la varianza.

Para analizar la velocidad de convergencia a la distribución gaussiana tenemos el teorema de Berry-Esseen que en general nos da una estimación de la velocidad de convergencia de variables aleatorias a la normalidad.

Suponiendo que tenemos x_i variables aleatorias independientes distribuidas de manera idéntica, con función de distribución F tal que

$$E(x_i) = 0 \quad (2.8)$$

$$E(x_i^2) = \sigma^2 > 0 \quad (2.9)$$

$$E(|x_i|^3) = \rho < \infty \quad (2.10)$$

Podemos decir que la distancia entre la función de distribución acumulada $F_n(S) = \int_{-\infty}^S P(S_n) dS_n$ y la función de distribución asintótica gaussiana tiene la siguiente forma:

$$|F_n(S) - \Phi(S)| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3\sqrt{n}} \quad (2.11)$$

La desigualdad, nos dice que la velocidad de convergencia de la distribución S_n a la forma gaussiana está controlada por la relación del tercer momento del valor absoluto de x_i con el cubo de la desviación estándar de x_i .

Capítulo Tres

Diferentes tipos de distribuciones utilizadas en la modelación estadística de los mercados financieros, y métodos para la estimación de los parámetros.

En el capítulo anterior se discutieron algunas propiedades de las caminatas aleatorias. También enunciamos el teorema del límite central, que nos dice que la suma de variables aleatorias idénticamente distribuidas y con varianza infinita tienden a tener una distribución gaussiana.

En este capítulo, describiremos en detalle las propiedades de las distribuciones estadísticas estables de Levy (Mantegna y Stanley, 2000), que fueron utilizadas por primera vez por Mandelbrot (1963) para modelar las fluctuaciones de los precios. Estas distribuciones cumplen con la condición de estabilidad: la suma de variables aleatorias con distribución estable idénticamente distribuidas, sigue siendo una variable aleatoria con distribución estable y la misma forma funcional. En este caso, estamos en presencia de una versión generalizada del teorema del límite central.

A lo largo de este capítulo, se presentará una breve descripción de las tres distribuciones que utilizaremos en nuestro estudio: La distribución $\alpha - stable$ de Levy, la distribución Gaussiana y la distribución inversa Gaussiana.

3.1 Distribución alfa-estable de Levy

Como ya mencionamos, el pionero en el uso de las distribuciones alfa-estables fue Mandelbrot (1963), quien postuló que las fluctuaciones de los precios del algodón son un proceso estocástico con incrementos que siguen una distribución estable de Lévy. Las distribuciones estables se caracterizan por tener varianza infinita y por cumplir la condición

de estabilidad (mencionada anteriormente). Son una clase de distribuciones que se derivan de una versión generalizada del teorema del límite central.

Para las distribuciones estables no hay una forma general de poder describir la función de densidad y la función de distribución, que son definidas a partir de la transformada de Fourier de la función característica:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-itx} dt \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1) donde $\varphi(t)$ es la función característica, que para el caso de las distribuciones estables tiene diferentes parametrizaciones.

Supongamos que tenemos un paseo aleatorio unidimensional, con saltos X_i $1 \leq i \leq n$ independientes e idénticamente distribuidos con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$.

Sea:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \quad (3.2)$$

En este momento, una pregunta que nos podemos hacer es cuando la probabilidad de que el movimiento aleatorio haya arribado a la posición $x_1 + \dots + x_n$ ($F_{S_n}(x)$) luego de n pasos es la misma que $F(x)$ salvo por un factor de escala. En otras palabras, ¿Puede existir una $f(x)$ que produzca un proceso estocástico con una trayectoria lo suficiente similar o idéntica?

A continuación, en las siguientes gráficas, podemos observar la gráfica de la función de densidad de probabilidad para diferentes funciones en las imágenes representadas en el lado izquierdo; mientras que, en el lado derecho, se puede apreciar la convolución de variables aleatorias del mismo tipo que las funciones de probabilidad, estas funciones presentadas, pertenecen a la familia de distribuciones continuas.

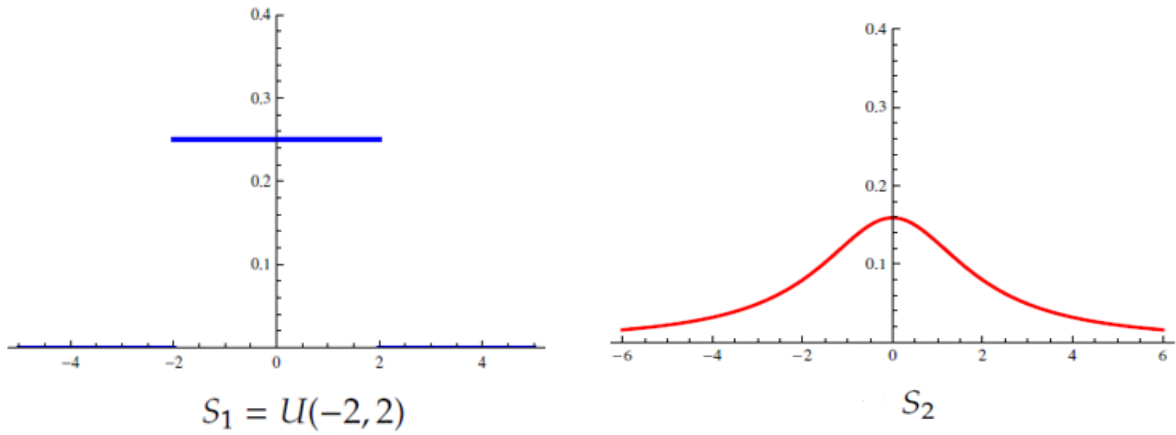


Figura 1: *Distribución Uniforme y suma de variables aleatorias S_2*

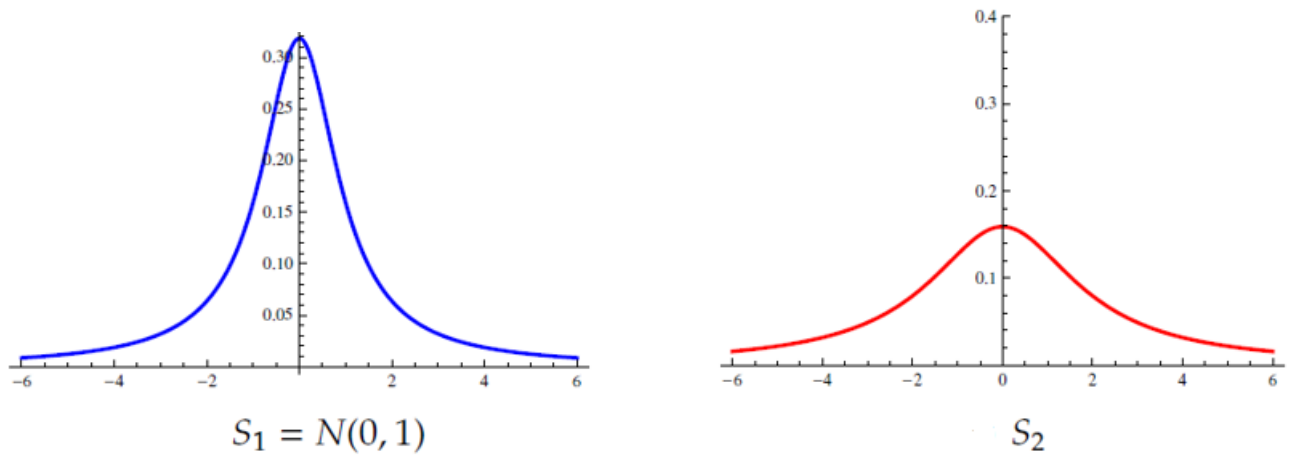


Figura 2: *Distribución Normal y suma de variables aleatorias S_2 .*

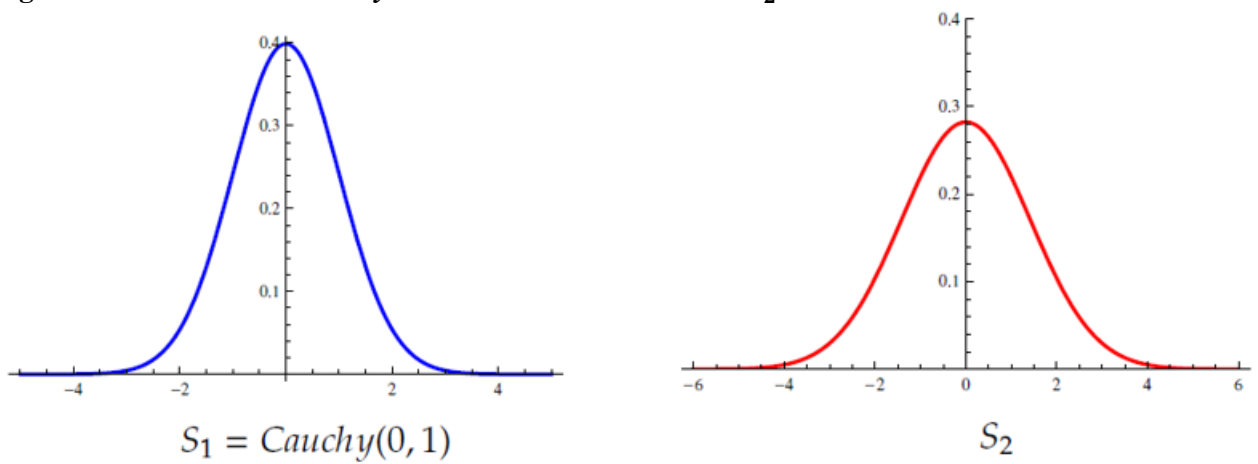


Figura 3: *Distribución de Cauchy y suma de variables aleatorias S_2 .*

En las gráficas anteriormente presentadas, se puede observar que para las variables S_1 posee diferentes representaciones de distribuciones considerando parámetros específicos y además en la función S_2 podemos ver una representación de la suma de variables con función de densidad S_1 , que en general, podemos notar que cuando sumamos más de una variable aleatoria similar el resultado será una nueva variable aleatoria con el mismo tipo de distribución, es decir, se cumple la propiedad de estabilidad.

Definición. Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común F, y sea

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \quad (3.3)$$

- Diremos que la distribución F es estable en sentido amplio si, para cada n, existen constantes $C_n > 0$ y γ_n tales que

$$S_n \stackrel{d}{=} C_n X + \gamma_n \quad (3.4)$$

y F no está concentrada en un punto (es decir, no es una delta). En otras palabras, la distribución de S_n es la misma que la de X salvo por un parámetro de posición y de escala.

- Diremos que la distribución F es estable en sentido estricto si $\gamma_n = 0 \quad \forall n$. Se puede probar que las constantes de normalización son de la forma

$$C_n = n^{1/\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha \leq 2 \quad (3.5)$$

la constante alfa será conocida como el exponente característico de la distribución.

Las funciones de distribución de Cauchy y Gaussiana son claros ejemplos de distribuciones estables. Más aún, la función característica de ambos procesos tiene la misma forma funcional

$$\varphi_n(q) = e^{-n\gamma|q|^\alpha} \quad (3.6)$$

donde si $\alpha = 1$ se trata de la distribución de Cauchy y será Gaussiana si $\alpha = 2$.

Lévy y Khintchine (Mantegna y Stanley, 2000) encontraron la forma general de la función característica para las distribuciones estables, que tiene la forma:

$$\text{Ln } \varphi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] & \text{para } \alpha \neq 1 \\ i\mu q - \gamma|q|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{q}{|q|} * \frac{2}{\pi} \text{Ln}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

donde α toma valores entre $0 < \alpha \leq 2$, γ es un factor de escala positivo, μ es un número real y β es un parámetro de asimetría con un rango entre -1 y 1 (el valor 0 es para el caso en que las distribuciones son simétricas) también conocidos como los parámetros característicos de una distribución estable. Posteriormente fueron definidas otras formas de la función característica para las distribuciones estables. Estas parametrizaciones fueron definidas por G. Samorodnitsky and Taqqu (1994), y tienen la forma:

$$\Phi_{(t)} = \begin{cases} e^{(-\gamma|t| [1 + i\beta(\frac{2}{\pi}) \text{sing}(t) \text{Ln}(|t|) + i\mu t])} & \text{si } \alpha = 1 \\ e^{(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\alpha\pi}{2}) \text{sing}(t) + i\mu t])} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $\text{sing}(t)$ representa el signo de t .

La forma analítica de la distribución estable de Lévy es conocida sólo para algunos valores de α y β , por ejemplos si

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1 \quad (\text{Lévy} - \text{Smirnov})$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad (\text{Cauchy})$$

$$\alpha = 2 \quad (\text{Gaussiana})$$

Como ya se mencionó una distribución estable se caracteriza por cuatro parámetros, un exponente o parámetro α conocido como el índice de estabilidad, un parámetro de escala γ , un parámetro de asimetría o sesgo β y un parámetro de posición o ubicación μ . Estos parámetros pueden interpretarse de la siguiente forma:

- α exponente característico: Este parámetro toma valores en el intervalo $(0, 2]$. En particular cuando $\alpha = 2$ tenemos la distribución normal. Podemos pensar que dicho parámetro indica un alejamiento de la normalidad, es decir, la distribución analizada se alejara de la distribución normal a medida que α tome valores más lejanos a 2. Así

mismo nos da una idea del decaimiento de la distribución cuando x toma valores muy Grandes.

- El parámetro de escala γ es incorrecto interpretarlo como la desviación estándar del proceso dado que éste existe sólo para el caso de $\alpha = 2$. Sin embargo, cuanto mayor sea el valor de γ mas ancha es la función de densidad.
- El parámetro β nos indica que tan sesgada es la función de densidad. Esto es, el parámetro toma valores que pertenecen en el intervalo $[-1, 1]$. Es decir, cuando $\beta = 1$ la función densidad está totalmente sesgada hacia la derecha, mientras que si $\beta = -1$ la densidad está sesgada hacia la izquierda y solo cuando $\beta = 0$ tenemos el caso simétrico.
- Para el caso del parámetro de localización, $\mu = E(X)$ en el caso de que los primeros momentos existan.

Para este trabajo, considerando la segunda parametrización de la función característica podemos calcular su función de densidad de probabilidad aproximando a partir de la Transformada de Fourier, que está definida como

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{(t)} e^{-itx} dt \quad (3.9)$$

Donde $\Phi_{(t)}$ denota la segunda parametrización ya mencionada en la ecuación (3.8).

A continuación, se puede enunciar un resultado muy conocido del que ya se han mencionado algunas ideas.

Proposición:

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución estable, simétrica y continua. Entonces su función característica de la suma S_n está dada por

$$\varphi_n(t) = e^{-n \gamma |t|^\alpha} \quad (3.10)$$

Las distribuciones estables de Lévy se caracterizan por la propiedad de estabilidad, la que nos dice que la suma de variables aleatorias mantiene el mismo parámetro o exponente de escala denotado por α (es decir sigue perteneciendo a la misma familia de distribuciones).

Asimismo, el comportamiento asintótico de las distribuciones estables de Lévy puede ser descrito mediante la siguiente expresión:

$$f(x; \alpha) \approx |x|^{-1-\alpha} \quad (3.11)$$

Por ende, la varianza de una distribución estable de Lévy es infinita para todo $\alpha < 2$.

3.2 Distribución Gaussiana.

En teoría de probabilidades, la distribución Gaussiana (o normal) es una de las distribuciones, más conocidas en distintas áreas de estudio tales como la Física y la Ingeniería debido a sus múltiples aplicaciones.

La distribución normal es muy importante dentro del área de la estadística ya que con frecuencia es utilizada para el análisis y ajuste de muestras de tamaño finito u no numerable, también se emplea para estimar el tiempo promedio en que ocurrirá cierto evento sujeto a condiciones bien definidas. Por otro lado, es posible emplear dicha distribución para describir fenómenos como el crecimiento o descenso de enfermedades o en el cálculo de las probabilidades de riesgo.

Decimos que una variable aleatoria X sigue una distribución gaussiana con parámetros μ (media) y σ^2 (varianza) si su función de densidad de probabilidad (pdf) la podemos definir de la siguiente manera.

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ \sigma > 0 \\ \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.12)$$

Así mismo, podemos definir su función de distribución

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (3.13)$$

En ocasiones también se puede representar su función de distribución acumulada (CDF) como:

$$\phi(x) = \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.14)$$

De igual manera, podemos mencionar la distribución de densidad de probabilidad y la función de distribución para una variable aleatoria que sigue una distribución Gaussiana estándar. Hablamos de la distribución estándar cuando sus parámetros toman los valores de $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ es entonces cuando la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria que se distribuye de manera estándar tiene la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}} \quad (3.15)$$

su función de distribución $F(x)$ la podemos expresar como

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t)^2}{2}} dt = \phi(x) \quad (3.16)$$

Sí X es una variable aleatoria con distribución Gaussiana, podemos decir que μ es el parámetro de localización o valor esperado (media), σ^2 es la varianza, también conocido como parámetro de escala o parámetro de forma. La distribución normal es simétrica respecto de su media, adoptando una forma de campana, es decir el área bajo la campana del lado izquierdo es la misma que la del lado derecho.

Propiedades:

1. Es simétrica respecto de su media.
2. La moda y la mediana toman ambas el mismo valor que su media.
3. Los puntos de inflexión de la curva se dan cuando x toma los valores $x = \mu \pm \sigma$.

4. Si $x \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$ entonces, se cumple que:
 $ax + b \rightarrow N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

3.3 Distribución Inversa Gaussiana.

Dentro de la teoría de probabilidad, la distribución inversa Gaussiana también conocida como "Distribución de Wald", es una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad la podemos definir como:

$$F(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \quad (3.17)$$

Definición:

Sea \mathcal{X} una variable aleatoria continua, diremos que sigue una distribución inversa gaussiana con función de densidad de probabilidad (pdf) denotada por:

$$\mathcal{X} \rightarrow IG(x; \mu, \alpha)$$

$$f(x; \mu, \alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{\alpha(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}}, \quad \forall x > 0 \quad (3.18)$$

donde

- $\mu \in \mathbb{R}^+$ es la media de la distribución.
- $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es el parámetro de escala.

La función de distribución de una variable aleatoria IG, se relaciona con la función de distribución normal estándar por medio de las siguientes probabilidades.

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{P}[X < x] &= \phi(z_1) + e^\mu \phi(z_2) \text{ para } 0 \leq x \leq \mu \\ \mathbb{P}[X > x] &= \phi(-z_1) - e^\mu \phi(z_2) \text{ para } \mu \leq x \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

con:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\mu}{x^{1/2}} - x^{1/2} \\ z_2 &= \frac{\mu}{x^{1/2}} + x^{1/2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En este caso podemos denotar como ϕ a la función de distribución acumulada de una variable que se distribuye de manera normal estándar. Las variables z_1 y z_2 están relacionadas por la siguiente identidad.

$$z_2^2 = z_1^2 + 4\mu \quad (3.21)$$

Un caso particular de la distribución IG, si suponemos que la variable aleatoria posee la forma $f(x; \mu, \alpha)$, misma que podemos transformar como $f(y; \mu_0, \mu_0^2)$ haciendo.

$$y = \frac{\mu^2 x}{\alpha} \quad \text{donde} \quad \mu_0 = \mu^3 / \alpha \quad (3.22)$$

Si $X \rightarrow IG(\mu_0 \omega; \alpha_0 \omega_i^2)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y x_i variables aleatorias independientes distribuidas de manera idéntica (*v. a. i. d.*) podemos definir la convolución “suma” de las variables aleatorias de la siguiente manera.

$$S = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow IG\left(\mu_0 \sum \omega_i, \alpha_0 \left[\sum \omega_i\right]^2\right) \quad (3.23)$$

Sin olvidar la siguiente condición necesaria para la suma de las variables.

$$\frac{Var[x_i]}{E[x_i]} = \frac{\mu_0^2 \omega_i^2}{\alpha_0 \omega_i^2} = \frac{\mu_0^2}{\alpha_0} \quad (3.24)$$

Donde $E[x_i]$ denota el valor esperando de la variable aleatoria y $Var[x_i]$ la varianza.

Propiedad:

Si $X \sim IG(x; \mu, \alpha)$ entonces para cualquier valor $t > 0$ se cumple que:

$$tX \sim IG(t\mu, t\alpha) \quad (3.25)$$

Hasta este punto, hemos hablado sobre las tres diferentes distribuciones que serán parte importante para el desarrollo de este trabajo. A continuación, discutiremos los diferentes métodos para la estimación de los parámetros de una distribución alfa estable de Lévy, así como los criterios formales de bondad del ajuste.

3.4 Estimación de los parámetros para una distribución estable.

A lo largo de esta sección, mencionaremos algunos métodos importantes por medio de los cuales se puede realizar la estimación de los parámetros de una distribución alfa estable de Levy. Específicamente nos enfocaremos en analizar uno de estos criterios para realizar una estimación mediante muestras de datos.

Un área importante dentro de la teoría estadística es la que está enfocada en la estimación paramétrica (Estadística Inferencial), la cual nos dice que el propósito de realizar o emplear la teoría de la estimación es llegar a un estimador o preferentemente a un resultado que sea confiable en la toma de ciertas decisiones según sea el caso. Para obtener el estimador, se toman en cuenta datos como los valores de cierre diarios de acciones financieras, los riesgos en aseguradoras, datos históricos de epidemias, entre muchos otros.

Para realizar la estimación de los parámetros de la distribución estable de Levy, existen los siguientes métodos: (1) El método de Maximum Likelihood (ML), (2) el método de tabulación de cuantiles o momentos, y (3) el método de regresión de la función característica. Para este trabajo, aplicaremos el método de Maximum Likelihood, que es muy eficiente y consistente en cuanto a la estimación paramétrica. Para el análisis de distribuciones estables, utilizamos la biblioteca desarrollada en MATLAB por J.P. Nolan (Nolan, et al, 2009).

Como ya mencionamos existen diferentes métodos que podemos utilizar para estimar los parámetros de la distribución estable de Levy, pero de todos ellos nos enfocaremos en el método de ML el cual discutiremos brevemente a continuación.

3.4.1 Método de Maximum Likelihood.

De manera general, el método nos permite calcular el valor del parámetro que maximice la función de máxima verosimilitud. El método ML es asintóticamente consistente, es decir, que a medida que el tamaño de la muestra aumente la estimación del valor del parámetro converge más rápidamente a un valor correcto.

Para las distribuciones estables no se conoce de manera explícita tanto su función de densidad de probabilidad como su función de distribución de probabilidad. Una manera de solventar este problema puede ser aproximar de manera numérica dichas distribuciones, el método inicialmente fue aplicado a las distribuciones estables por DuMouchel (1973).

A continuación, de manera breve mencionaremos algunos aspectos importantes del método.

1. El estimador de máxima verosimilitud, es consistente bajo condiciones de los parámetros.
2. Es asintóticamente normal, es decir, para muestras grandes el estimador de máxima verosimilitud sigue una distribución normal
3. En general, suele ser la aproximación más aceptable para el problema de estimación de parámetros.

Para ilustrar el método, consideremos una muestra compuesta por la serie de tiempo de tamaño finito denotada por $\{S_i\}_{i=1}^N$ de esta manera, suponiendo que los datos de nuestra muestra provienen de variables aleatorias distribuidas de forma idéntica, entonces, podemos denotar nuestra función de máxima verosimilitud como:

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0) = \sum_{i=1}^N \text{Log } S_0(S_i | \alpha, \beta, \gamma, \delta_0) \quad (3.26)$$

En donde $S_0(S_i | \alpha, \beta, \gamma, \delta_0)$ es la función de probabilidad para una distribución α -stable, con la parametrización S_0 . Los valores de los parámetros de la ecuación anterior, se eligen como la mejor estimación de la distribución estable. Para llevar a cabo la estimación de los parámetros empleamos la función STABLEFIT, que se encuentra integrado en la librería STABLE desarrollada por Nolan (2009).

3.4.2 Bondad del ajuste.

Para concluir este capítulo, discutiremos la bondad del ajuste. Para ello, mencionaremos algunos de los posibles criterios que se pueden utilizar para tomar la decisión de aceptar o rechazar una hipótesis estadística.

Existen diversos test de bondad de ajuste, aunque en la elaboración de este trabajo de investigación, explicaremos el criterio de Kolmogorov - Smirnov que será de gran utilidad para el desarrollo del mismo.

En general, las pruebas de bondad de ajuste miden la compatibilidad o la relación que puede existir entre los datos de una muestra aleatoria con una función de distribución de probabilidad. En otras palabras, hacer una prueba de bondad de ajuste en general implica examinar la muestra con alguna distribución desconocida para probar la hipótesis de contraste respecto de la distribución propuesta, si la prueba sale correcta, diremos que hayamos una distribución que modela de manera adecuada la muestra.

Podemos asumir que el método de bondad de ajuste consiste en definir un estadístico de prueba, es decir, se define una función que mide la distancia entre la distribución hipotetizada y los datos de la muestra, posteriormente, se calcula la probabilidad de que los datos tengan un valor mayor que el estadístico de prueba y el valor observado. Suponiendo que la hipótesis es cierta, esta probabilidad se considera como el nivel de confianza a considerar.

Existen diversos métodos o test que son importantes al aplicar el criterio de la bondad de ajuste, entre los métodos más importantes, se encuentran el test de Pearson denotado por χ^2 , es considerado como una prueba no paramétrica que mide la discrepancia entre una distribución observada y otra teórica indicando en qué medida las diferencias existentes entre ambas se deben al azar en el contraste de hipótesis. Algo importante, es notar que en la prueba de Pearson cuanto mayor sea el valor de χ^2 , será menos verosímil asumir una igualdad entre ambas distribuciones. Así como el test de Pearson, tenemos el test de Anderson-Darling, es una prueba no paramétrica que de manera general sirve para comparar el ajuste de una función de distribución acumulativa observada con una función de distribución acumulativa esperada.

El test de Anderson-Darling se usa para probar si una muestra de datos proviene de una población con distribución conocida, muchas veces se dice que la prueba de Anderson-Darling es una modificación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S) pues le da más peso a las colas de la distribución.

A continuación, hablaremos de la prueba “K-S” o también llamado el Test de Kolmogorov-Smirnov. Como se mencionó anteriormente, para este trabajo emplearemos este criterio para el cálculo de ciertos valores límites. La prueba de K-S no depende de la distribución, en el sentido de que los valores críticos no dependen de una distribución específica que se desee probar.

El test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, es una prueba no paramétrica que se utiliza para evaluar si una muestra proviene o no de una población con una distribución específica. Por otro lado, la prueba K-S se basa en el cálculo de la distancia máxima entre la función acumulativa de la distribución teórica y la función de distribución empírica ajustada a partir de la muestra.

Los detalles de la aplicación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov serán discutidos en el siguiente capítulo.

Capítulo Cuatro

Análisis estadístico de las fluctuaciones de los diferentes índices bursátiles, y cálculo de la bondad de ajuste para las diferentes distribuciones.

En este capítulo analizaremos los índices financieros de los principales países emergentes, aplicando las técnicas descritas en los capítulos anteriores. El análisis abarca un período de 10 años (del 2005 al 2015). En la siguiente lista, podemos ver el nombre de algunos de los principales países emergentes con sus respectivos índices bursátiles.

- I. México: Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)
- II. Brasil: Bovespa
- III. India: Nifty 50 (NSE)
- IV. Rusia: MOEX Russia (IMOEX)
- V. China: Shanghai Composite (SSEC)
- VI. Hong Kong: Hang Seng (HSI)

En las figuras 4 - 9, mostramos la evolución temporal de los índices mencionados. Como se puede observar, la dinámica de los activos financieros es típica de una “caminata aleatoria”.

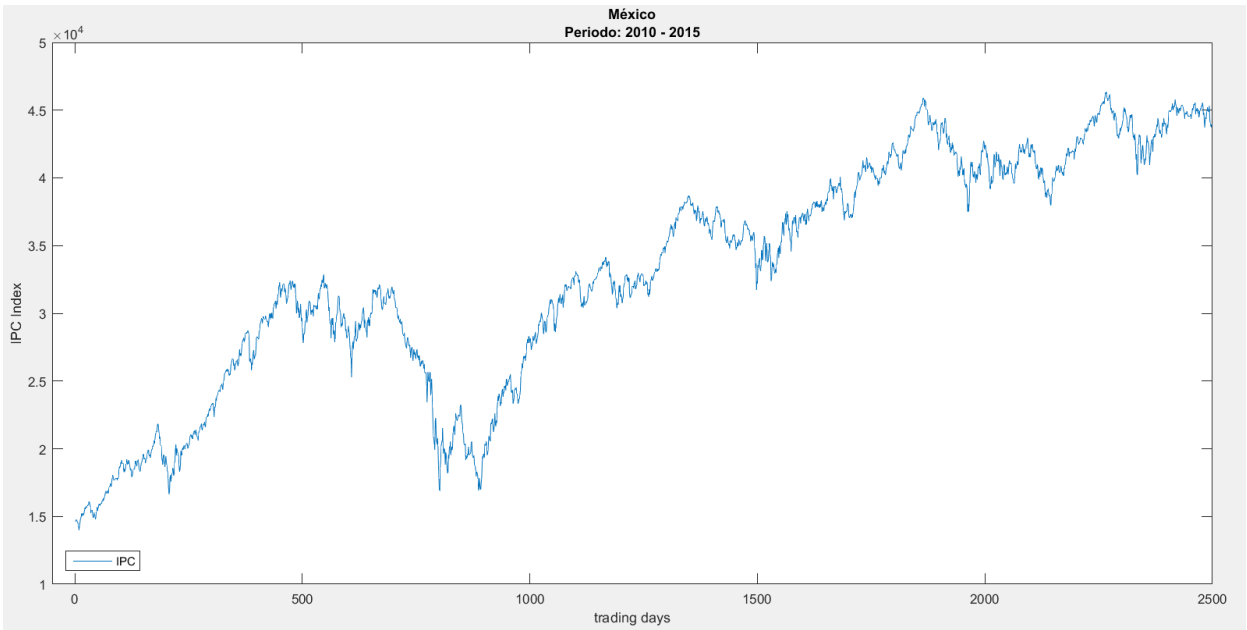


Figura 4: Evolución de los activos para el Índice de México.

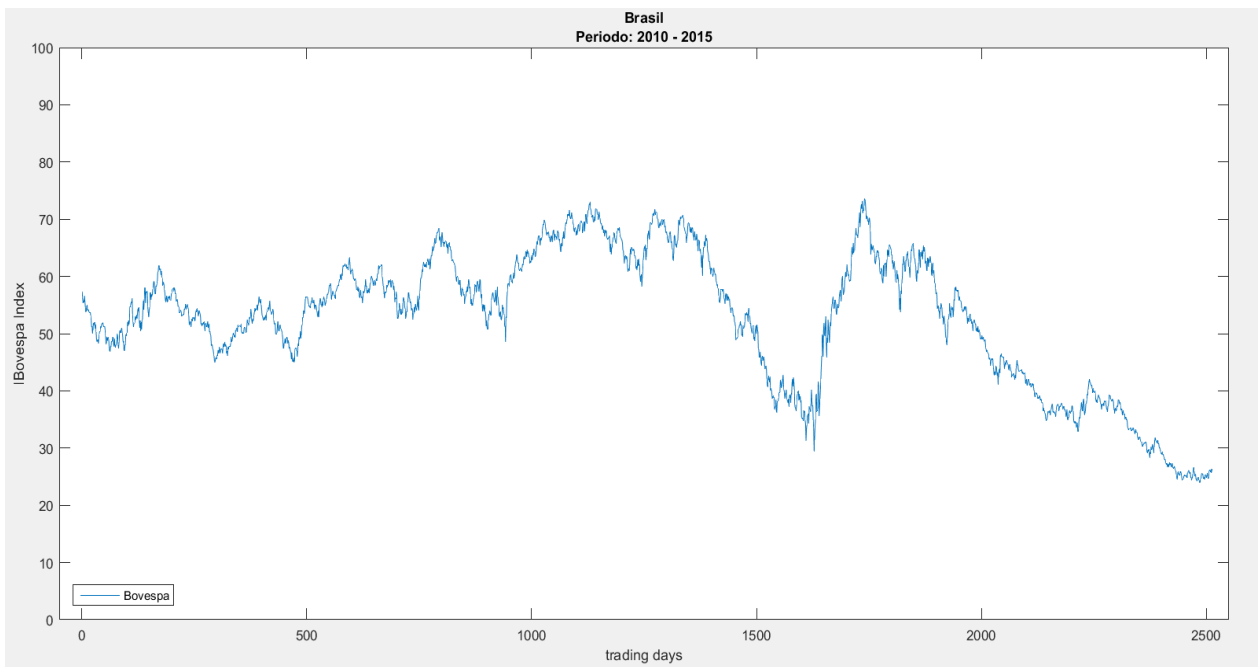


Figura 5: Evolución de los activos para el Índice de Brasil.

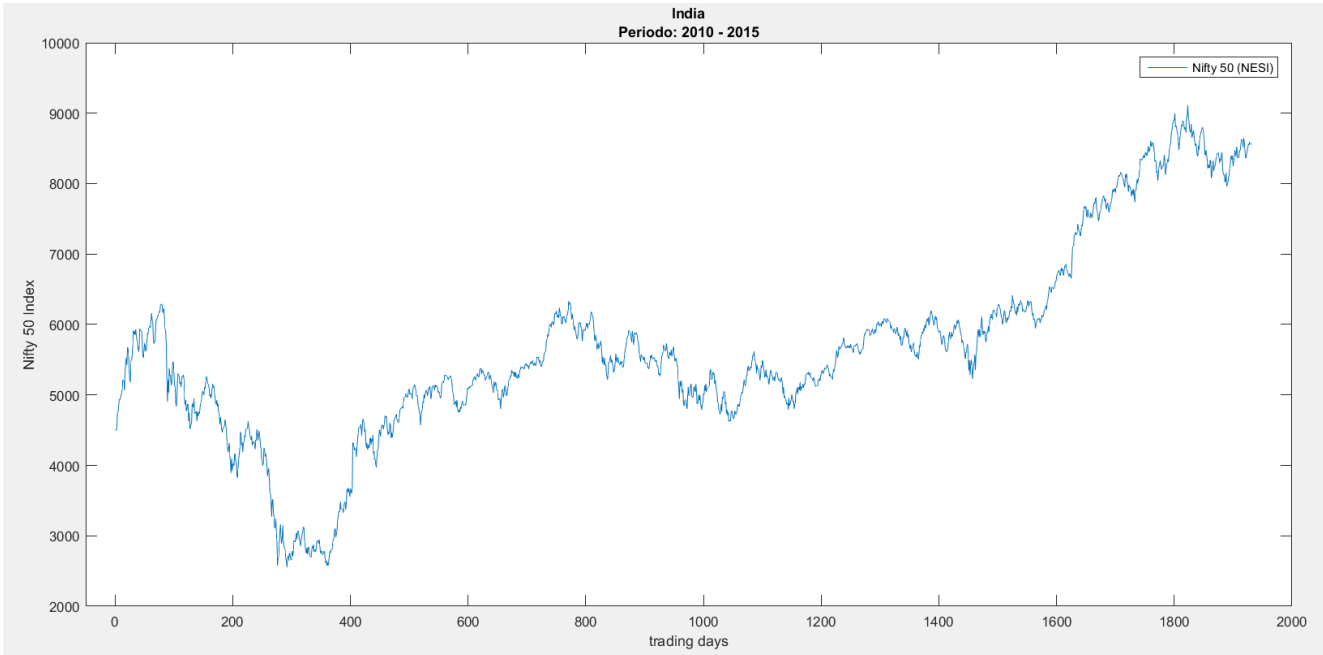


Figura 6: Evolución de los activos para el Índice de la India.

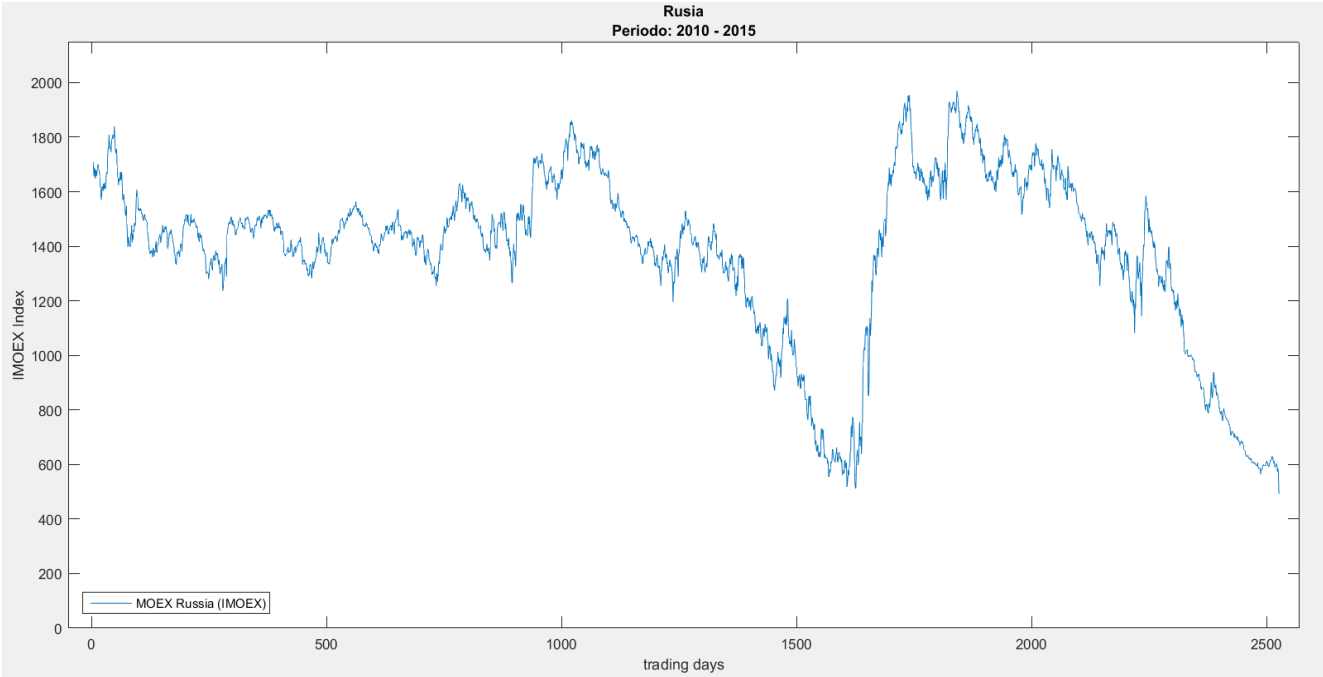


Figura 7: Evolución de los activos para el Índice de Rusia.

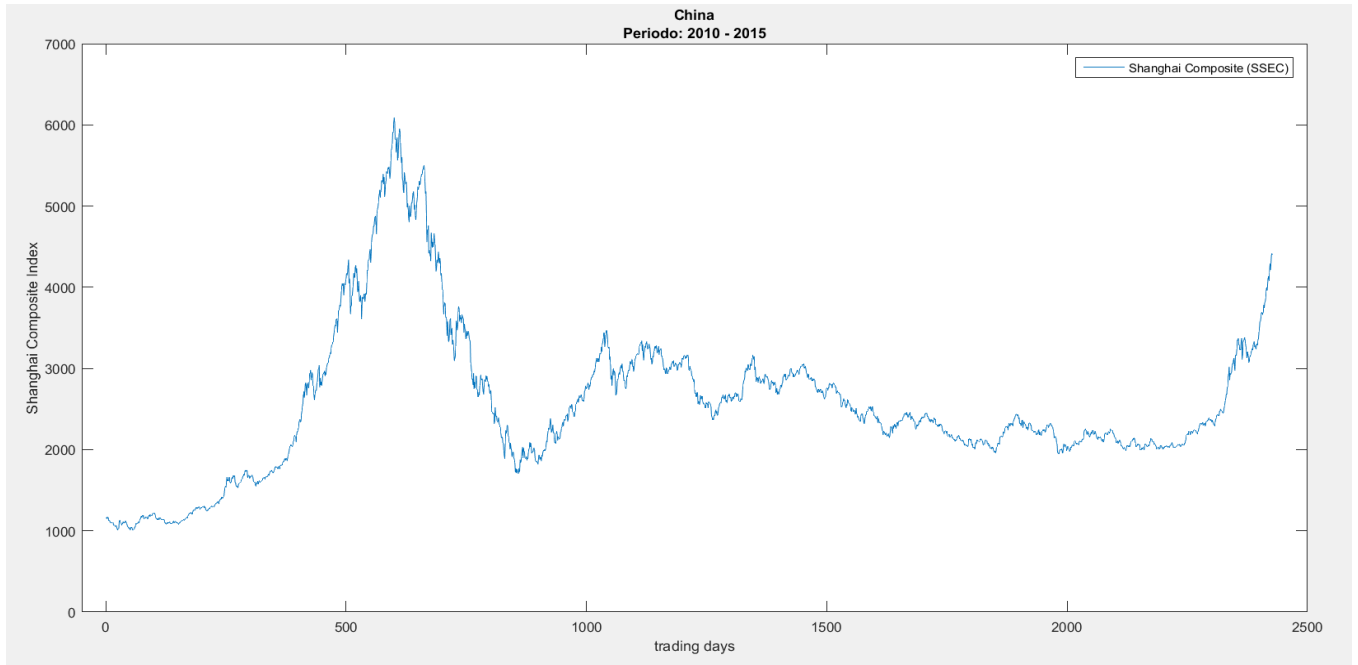


Figura 8: Evolución de los activos para el Índice de China.

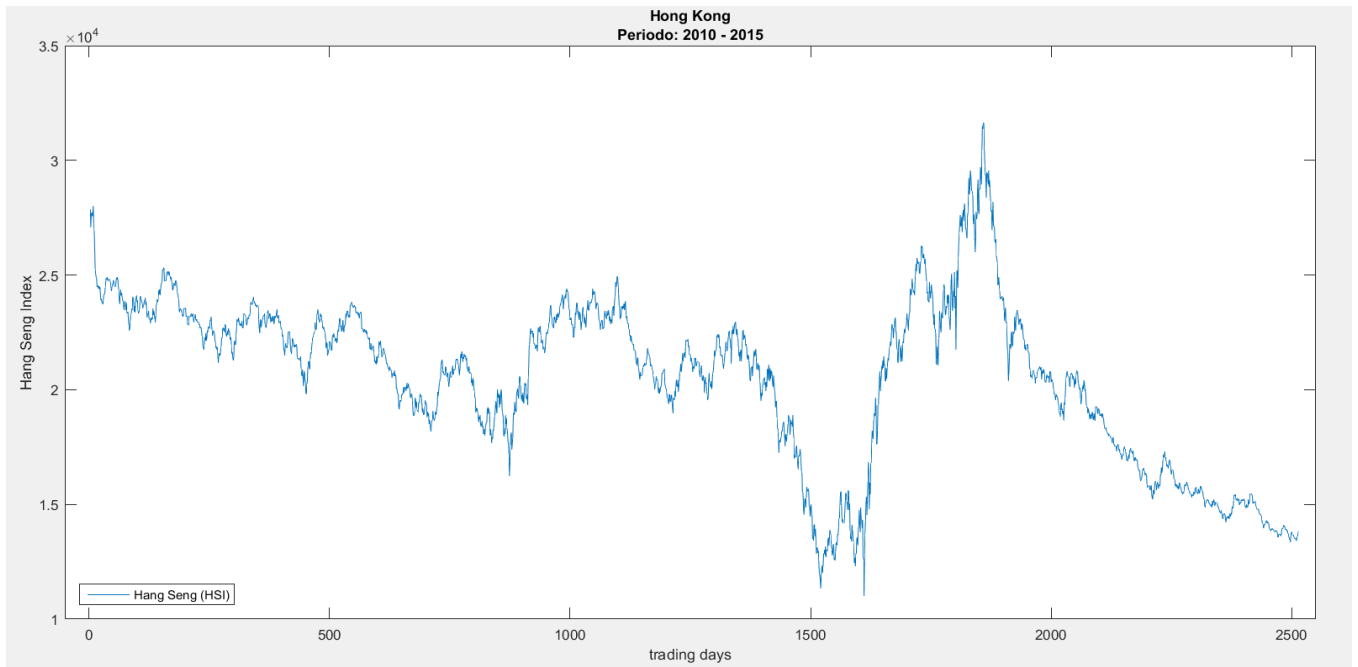


Figura 9: Evolución de los activos para el Índice de Hong Kong.

En el período de análisis, se encuentra incluido el “*crack*” o crisis económica del 2008. En nuestro estudio, trabajamos con las diferencias de los logaritmos de los precios, y no con los datos en bruto de cada una de series de tiempo esto con la finalidad de poder observar las series de tiempo de una manera diferente resaltando los valores extremos existentes. Por lo tanto, las fluctuaciones se calcularon como las diferencias sucesivas del logaritmo para cada índice de manera independiente mediante la siguiente expresión.

$$S(t) = \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t) \quad (4.1)$$

Denotando a $S(t)$ como la nueva serie de tiempo de manera independiente para cada uno de los índices analizados.

Una vez calculadas las diferencias de los logaritmos, podemos ver que existen valores de las fluctuaciones que representan una desviación importante respecto a la media que puede (Ver Figs. 10-15).

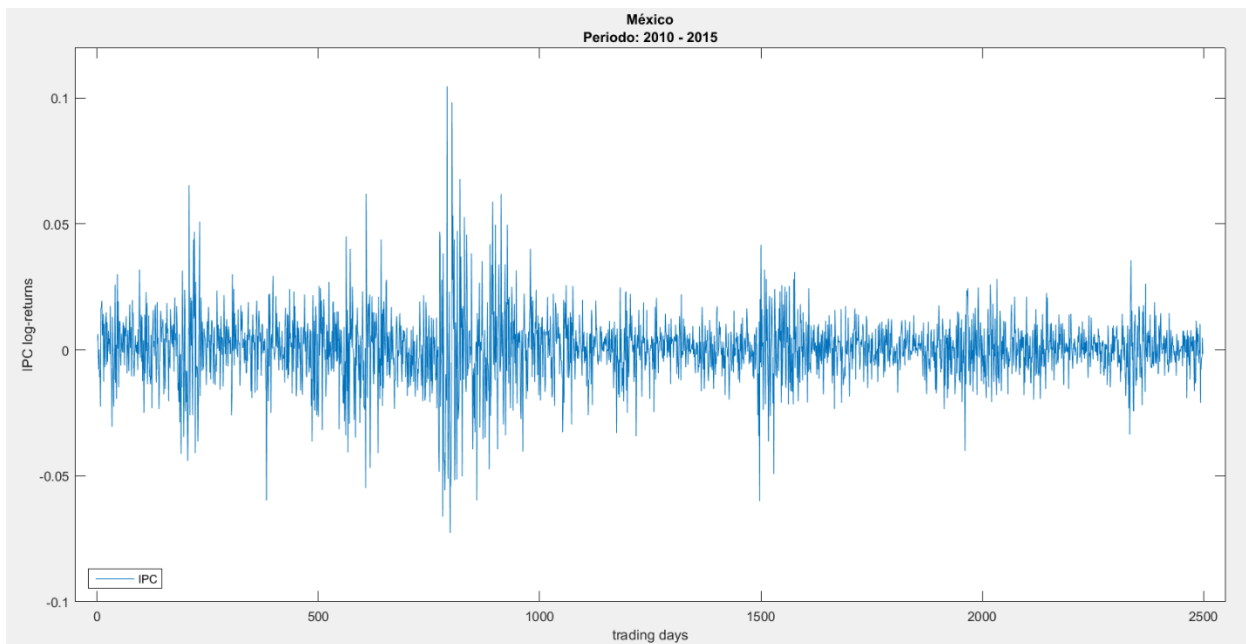


Figura 10: Evolución de las fluctuaciones para el Índice de Precios y Cotizaciones.

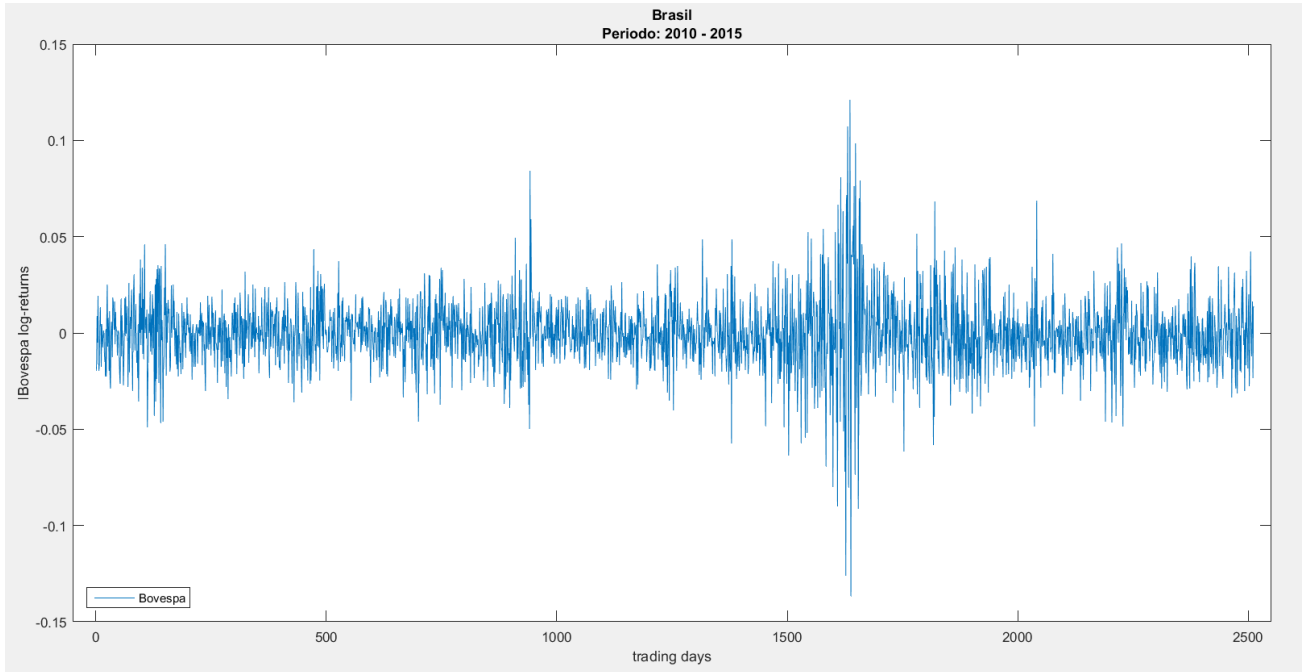


Figura 11: Evolución de las fluctuaciones para el Índice de Brasil (BOVESPA).

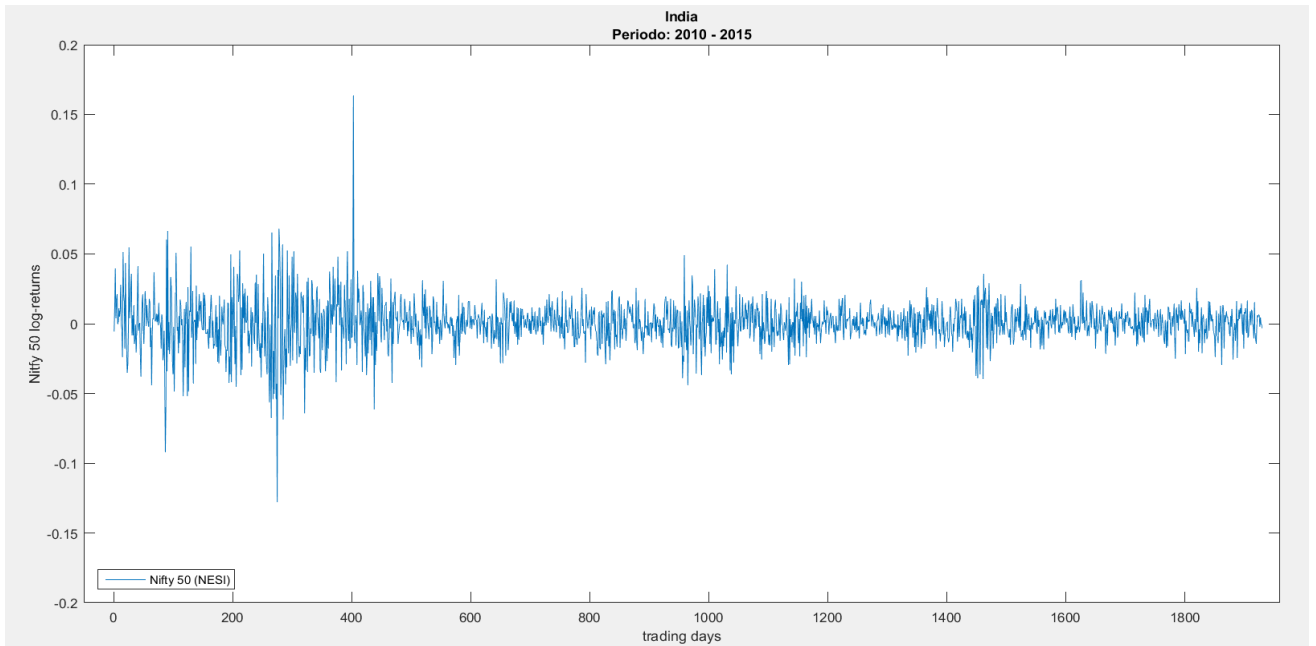


Figura 12: Evolución de las fluctuaciones para el Índice de India.

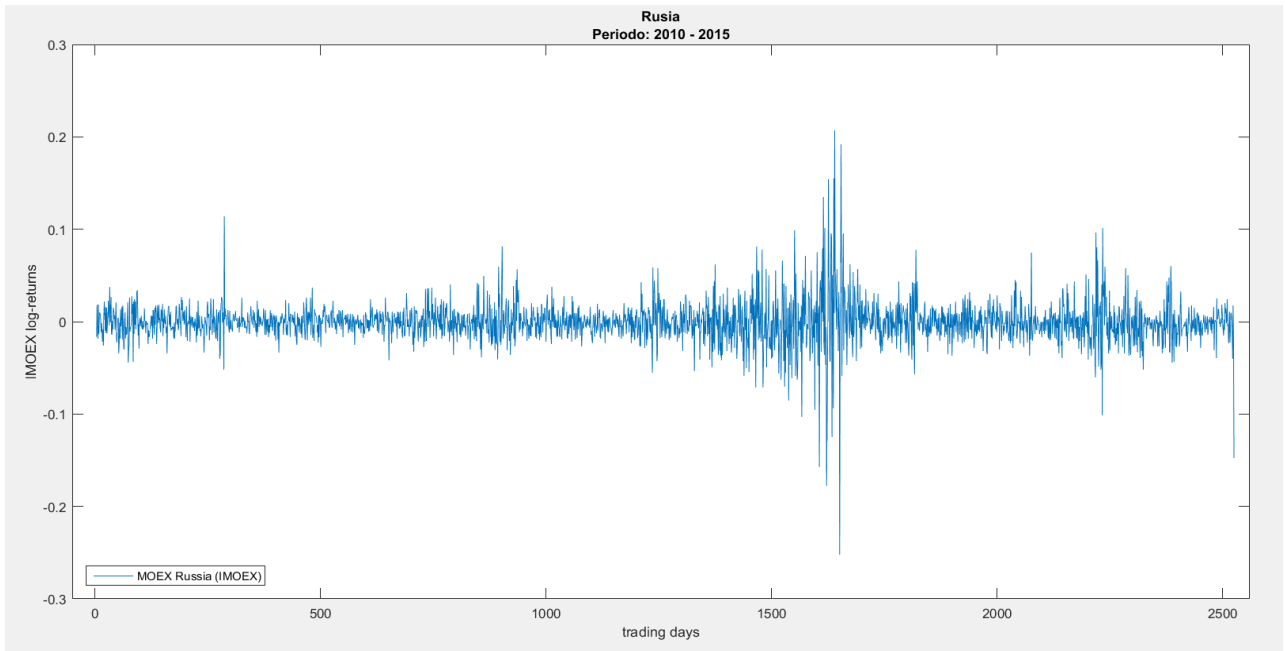


Figura 13: Evolución de las fluctuaciones para el Índice de Rusia.

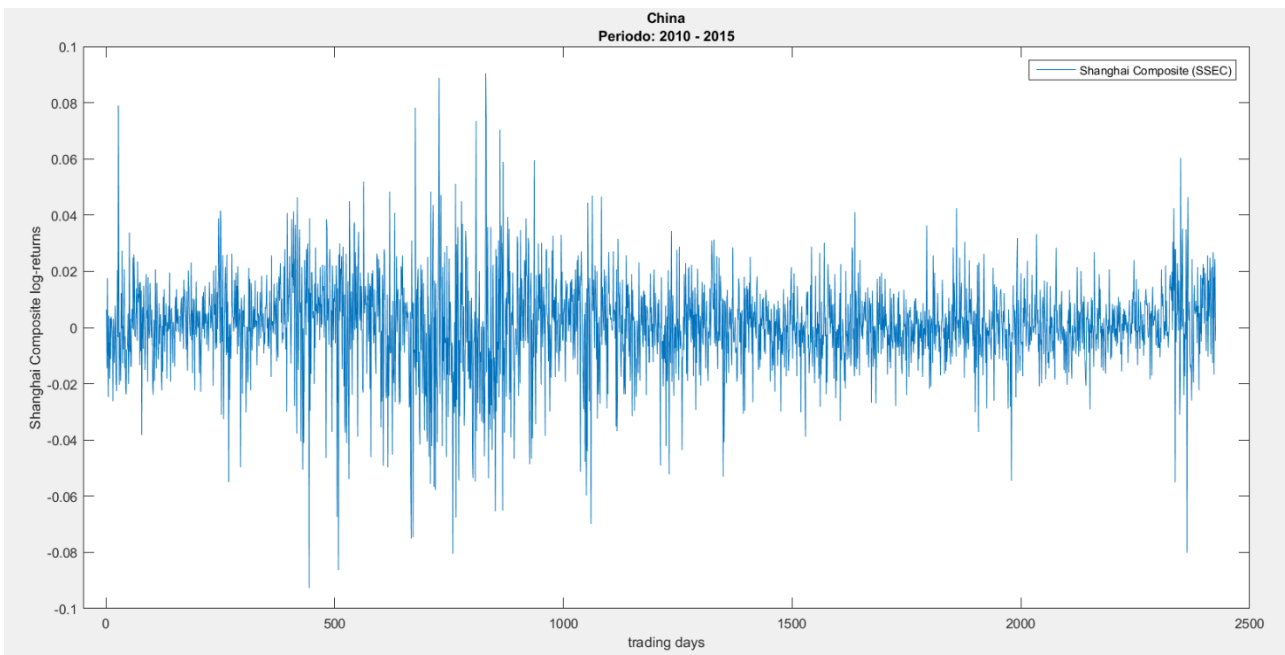


Figura 14: Evolución de las fluctuaciones para el Índice de China.

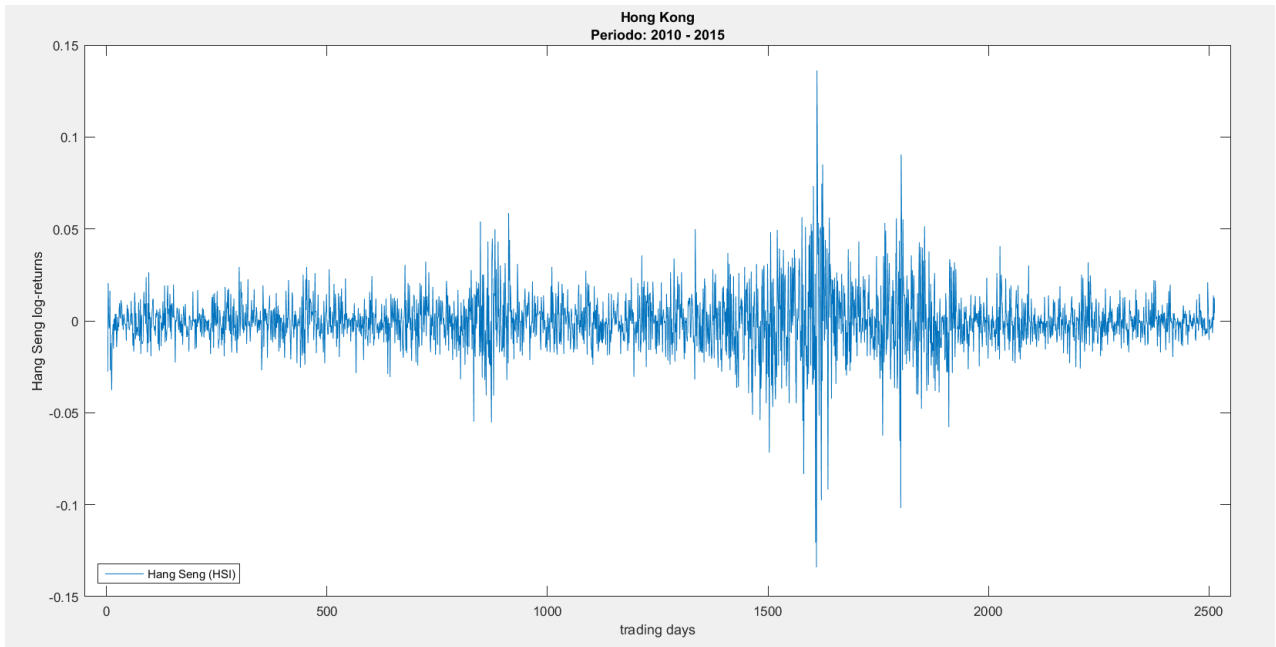
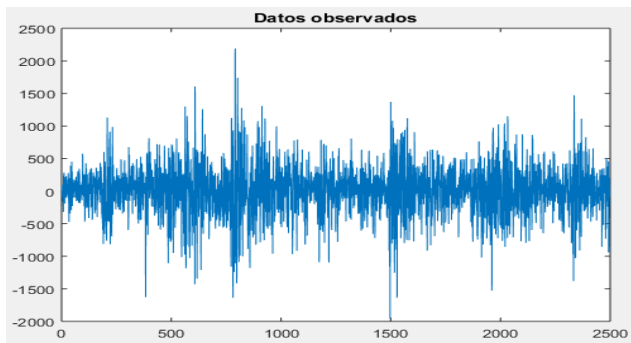
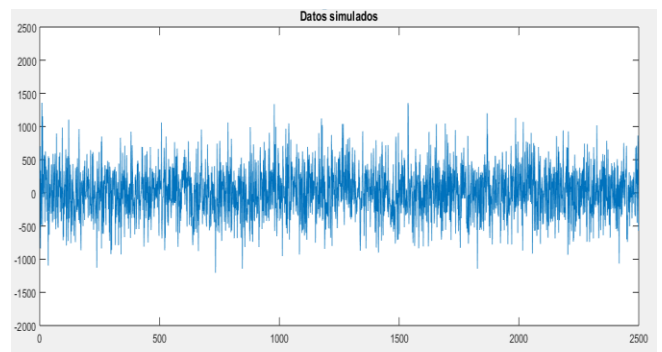


Figura 15: Evolución de las fluctuaciones para el Índice de Hong Kong.

Como pudimos observar en las gráficas anteriores, para este análisis es importante trabajar con las diferencias continuas de los logaritmos para nuestras series de tiempo, pues de esta manera podemos visualizar y detectar la presencia de valores extremos o datos atípicos que de manera normal no se presentan en un proceso Gaussiano, es decir, existe una variabilidad mucho mayor respecto del valor medio. Para ilustrar este problema, en la siguiente figura presentamos una muestra de datos observados, y datos simulados para un proceso gaussiano con la misma media y varianza que las observaciones.



Fluctuaciones observadas.



Proceso Gaussiano simulado.

Además del análisis gráfico de las diferencias de los logaritmos, es de gran importancia poder conocer el valor de algunos de sus estadísticos básicos tales como, la Media, la Varianza, la Kurtosis, y la Skewness, esto con la finalidad de poner tener una descripción más precisa de los datos y poder reforzar el análisis anterior. Esto lo podemos apreciar en la siguiente tabla para cada uno de los índices.

Tabla 1: Estadísticos importantes para los diferentes índices bursátiles.					
<i>País analizado</i>	<i>Índice</i>	Media	Varianza	Skewness	Kurtosis
<i>México</i>	<i>IPC</i>	4.3991×10^4	1.7586×10^4	0.1032	9.1519
<i>Brasil</i>	<i>Bovespa</i>	3.0877×10^4	3.2298×10^4	0.0308	8.7609
<i>India</i>	<i>Nifty 50 (NSEI)</i>	5.5267×10^4	1.7538×10^4	-0.0747	21.2322
<i>Rusia</i>	<i>IMOEX Russia</i>	4.2425×10^4	3.5983×10^4	-0.633	31.9085
<i>China</i>	<i>ShanghaiComposite (SSEC)</i>	5.4967×10^4	2.8499×10^4	-0.3691	6.7059
<i>Hong Kong</i>	<i>HangSeng (HSI)</i>	2.7884×10^4	1.9821×10^4	0.1846	9.5001

Donde:

1. **Media:** Nos indica cual es el centro de la distribución con la que estamos trabajando.
2. **Varianza:** Nos ayuda a saber la variabilidad global de los datos, esto es mide la dispersión de los datos respecto de la media. En términos financieros es la volatilidad del índice.
3. **Skewness:** Describe la asimetría de la distribución.
4. **Kurtosis:** Mide la pesadez de la cola de la distribución.

En el capítulo anterior, se mencionaron métodos para la estimación de los parámetros para cada una de las distribuciones, a continuación, en las *tablas "2 - 7"* podemos observar el resultado de los parámetros estimados para cada una de las distribuciones (alfa-estable, Gaussiana, inversa Gaussiana).

Tabla 2: Estimación de los parámetros de las distribuciones alfa-estable de Levy, gaussiana, e inversa gaussiana para el Índice de Precios y Cotizaciones de México.

IPC	PARÁMETROS				
Distribución	α	β	Υ	μ	σ
Gaussiana				4.3991×10^{-04}	1.7586×10^{-04}
NIG	52.7509	1.2690	0.0093	2.1688×10^{-04}	
α -stable	1.6072	-0.1821	0.0069	0.0010	

Tabla 3: Estimación de los parámetros de las distribuciones alfa-estable de Levy, gaussiana, e inversa gaussiana para el índice IVOBESPA de Brasil.

Bovespa	PARÁMETROS				
Distribución	α	β	Υ	μ	σ
Gaussiana				-3.0877×10^{-04}	3.2297×10^{-04}
NIG	40.1605	0.2978	0.01330	-4.0494×10^{-04}	
α -stable	1.7388	0.1851	0.0103	-0.0008	

Tabla 4: Estimación de los parámetros de las distribuciones alfa-estable de Levy, gaussiana, e inversa gaussiana para el índice Nifty 50 de la India.

Nifty 50 (NSEI)	PARÁMETROS				
Distribución	α	β	Υ	μ	σ
Gaussiana				3.3035×10^{-04}	2.5941×10^{-04}
NIG	34.8832	0.7898	0.0090	1.2557×10^{-04}	
α -stable	1.5852	0.2589	0.0066	-0.0018	

Tabla 5 Estimación de los parámetros de las distribuciones alfa-estable de Levy, gaussiana, e inversa gaussiana para el índice IMOEX de Rusia.					
IMOEX Russia	PARÁMETROS				
Distribución	α	B	Υ	μ	σ
Gaussiana				-4.3426×10^{-04}	4.9539×10^{-04}
NIG	17.9691	0.4104	0.0089	-6.3746×10^{-04}	
α -stable	1.4954	0.0989	0.0080	-0.0008	

Tabla 6: Estimación de los parámetros de las distribuciones alfa-estable de Levy, gaussiana, e inversa gaussiana para el índice Shanghai Composite de China.					
Shanghai Composite (SSEC)	PARÁMETROS				
Distribución	α	B	Υ	μ	σ
Gaussiana				5.4967×10^{-04}	2.8499×10^{-04}
NIG	55.3663	-6.2852	0.0155	0.0023	
α -stable	1.6188	-0.2018	0.0091	0.0014	

Tabla 7: Estimación de los parámetros de las distribuciones alfa-estable de Levy, gaussiana, e inversa gaussiana para el índice Hang-Seng de Hong Kong.					
HangSeng (HSI)	PARÁMETROS				
Distribución	α	β	Υ	μ	σ
Gaussiana				-2.9107×10^{-04}	4.2269×10^{-04}
NIG	14.4271	-1.4607	0.0060	3.2001×10^{-04}	
α -stable	1.4843	0.1295	0.0065	-0.007	

En las tablas anteriores se muestran los resultados del cálculo o la estimación de los cuatro parámetros de una distribución alfa estable de Levy, mismos que fue realizado

empleando las técnicas e insumos ya mencionados, el ajuste para la distribución Gaussiana, y para la inversa Gaussiana. Como podemos ver, para cada uno de los índices, el valor de α fue menor que 2, lo cual nos indica que el proceso estocástico está sometido a algún tipo de aleatoriedad “salvaje”, lejos de la normalidad y con grandes desviaciones. Para valores de α cercanos a 2, estaríamos en presencia de fluctuaciones de tipo Gaussiano, con probabilidades menores de valores extremos. Sin embargo, solamente a partir de pruebas de bondad de ajuste rigurosas podremos concluir cuál de las tres distribuciones ofrece el mejor ajuste.

Como señalamos, la existencia de desviaciones importantes respecto a la media confirma la sospecha de que el modelo Gaussiano puede no ser un buen modelo para ajustar las fluctuaciones de los precios. Otro aspecto a destacar es la kurtosis, que es positiva en todos los casos y nos indica cuan pesada es la cola de la distribución. Este valor es cercano a cero en el caso de fluctuaciones Gaussianas, y positivo en el caso de distribuciones con cola gruesa.

Como en este caso las distribuciones serán estimadas a partir de los datos, durante la aplicación del criterio de Kolmogorov-Smirnov, se realizaron simulaciones de Monte Carlo para calcular los valores críticos para una confianza del 5%.

4.1 Prueba de Kolmogorov-Smirnov.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov (Gnedenko, 2018) se utiliza para decidir si una muestra proviene de una población con una distribución específica. Esta prueba se basa en la función de distribución empírica (ECDF). Dado un conjunto de N datos ordenados, (x_1, x_2, \dots, x_n) , la ECDF se define como:

$$E_N = \frac{i}{n}$$

donde i es el número de puntos menores que x_i y los x_i están ordenados de menor a mayor valor. Esta es una función escalonada que aumenta en $1/N$ para cada valor de los datos ordenados.

El estadístico experimental para la prueba K-S se pueden obtener ordenando los datos en orden ascendente (x_1, x_2, \dots, x_n) y derivando la diferencia máxima entre la estadística de orden y la CFD $F(x_i)$:

$$D = \max \left[\max \left\{ \left| F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right|, \left| \frac{i}{n} - F(x_i) \right| \right\} \right] \quad (4.2)$$

La prueba de Kolmogorov-Smirnov es definida por:

- a) La Hipótesis nula H_0 : Los datos analizados siguen una distribución específica
- b) La Hipótesis alternativa H_1 : Los datos analizados no siguen la distribución especificada
- c) El estadístico de prueba definido por la ecuación (4.2).

La hipótesis nula H_0 (los datos analizados siguen una distribución específica) se rechaza si el estadístico de prueba, D , es mayor que el valor crítico (para un nivel de confianza dado) obtenido a partir de tablas estadísticas (Gnedenko, 2018). Hay variaciones de estas tablas en la literatura que utilizan escalas algo diferentes para el estadístico de prueba y las regiones críticas. Estas formulaciones alternativas deben ser equivalentes, pero es necesario asegurar que el estadístico de prueba se calcule de una manera que sea consistente con la forma en que se tabularon los valores críticos.

Una característica atractiva de esta prueba es que la distribución del estadístico de la prueba K-S en sí no depende de la función de distribución acumulativa subyacente que se esté probando.

Dado que en nuestro estudio los parámetros de las distribuciones se ajustaron a partir de los datos observados, no se pueden utilizar los valores críticos teóricos proporcionados por el criterio K-S (Gnedenko, 2018). En este caso, se pueden obtener *p-values* aproximados mediante simulaciones de Monte Carlo, por el método descrito en Kowaka et al. (1994).

Primero, se estima el vector de parámetros para una muestra dada de tamaño n , $\hat{\theta}$ siendo el resultado, y las estadísticas de prueba se calculan asumiendo que la muestra se distribuye de acuerdo con $F(x; \hat{\theta})$, devolviendo el valor de D . A continuación, una muestra de tamaño n de $F(x; \hat{\theta})$ es generada, y el vector de parámetros θ_l es estimado. Los estadísticos de prueba se calculan nuevamente asumiendo que la muestra se distribuye de acuerdo con $F(x; \hat{\theta}_l)$. La

simulación se repite 1000 veces y la estimación del *p-value* se calcula como el número relativo de ocasiones en las que los estadísticos de prueba son mayores que *D*.

En nuestro estudio, se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov (con un nivel de confianza del 5%) para probar si las fluctuaciones de los precios siguen una distribución alfa-estable, Gaussiana o inversa Gaussiana.

En las tablas “8 – 10”, podemos observar los resultados de los valores críticos que fueron calculados por medio del criterio KS considerando la distribución alfa estable de Levy, la distribución Inversa Gaussiana y la distribución Normal, sin olvidar que estos resultados se obtienen teniendo en cuenta que las distribuciones fueron ajustadas a partir de los datos.

Como se puede observar en las Tablas 8-10, los valores críticos estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo son siempre menores que los valores críticos teóricos, por lo que estamos en presencia de una prueba de bondad de ajuste mucho más rigurosa que para el caso de una distribución desconocida. A continuación, se presenta una descripción general de los pasos realizados para la simulación de los valores.

- I. Se genera una muestra de datos aleatorios, considerando el tamaño de nuestra muestra observada.
- II. Ordenar de manera ascendente los datos generados.
- III. Aplicar la técnica de la prueba K-S para el calculo de los valores limite.
- IV. Considerar las hipótesis planteadas sobre estos valores calculados.

TABLA 8: Comparación entre valores críticos teóricos y estimados de la distribución de Kolmogorov-Smirnov para el caso de la distribución alfa-estable de Levy (para una confianza del 5%, $\alpha=0.05$).					
Tamaño de muestra	Índice Bursátil	Valores críticos teóricos para la distribución de Kolmogorov-Smirnov	Valores críticos estimados mediante simulaciones Monte Carlo	Estadístico de prueba para la distribución estable	P-Value para la distribución estable
2498	IPC	0.0271	0.0208	0.0164	0.1331
2512	Bovespa	0.0270	0.0207	0.0182	0.1974
1930	Nifty 50 (NSEI)	0.0308	0.0231	0.0190	0.2010
2522	IMOEX RUSSIA	0.0269	0.0206	0.0145	0.1201
2426	ShanghaiComposite (SSEC)	0.0275	0.0185	0.0125	0.1133
2511	HangSeng (HSI)	0.0270	0.0190	0.0359	0.4379

TABLA 9: Comparación entre los valores críticos teóricos y estimados de la distribución de Kolmogorov-Smirnov para el caso de la distribución Inversa Gaussiana (IG).					
Tamaño de muestra	Índice Bursátil	Valores críticos teóricos para la distribución de Kolmogorov-Smirnov	Valores críticos estimados mediante Monte Carlo	Estadístico de prueba para la distribución IG	P-Value para la distribución IG
2498	IPC	0.0272	0.0207	0.0271	0.0100
2512	Bovespa	0.0270	0.0208	0.0270	0.0106
1930	Nifty 50 (NSEI)	0.0214	0.0207	0.0214	0.001
2522	IMOEX RUSSIA	0.0269	0.0212	0.0246	0.0101
2426	ShanghaiComposite (SSEC)	0.0270	0.0285	0.0269	0.0103
2511	HangSeng (HSI)	0.0271	0.0205	0.0271	0.0109

TABLA 10: Comparación entre valores límite teóricos y estimados de la distribución de Kolmogorov-Smirnov para el caso de la distribución Gaussiana.					
Tamaño de muestra	Índice Bursátil	Valores críticos teóricos para la distribución de Kolmogorov-Smirnov	Valores críticos estimados mediante Monte Carlo	Estadístico de prueba para la distribución Gaussiana	P-Value
2498	IPC	0.0271	0.0184	0.0654	0.0008
2512	Bovespa	0.0270	0.0182	0.0476	0.0036
1930	Nifty 50 (NSEI)	0.0308	0.0201	0.0509	0.0098
2522	IMOEX RUSSIA	0.0269	0.0206	0.0465	0.0030
2426	ShanghaiComposite (SSEC)	0.0275	0.0185	0.0355	0.0051
2511	HangSeng (HSI)	0.0270	0.0190	0.0479	0.0072

4.2 Resultados de la aplicación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

En este epígrafe discutiremos los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov. Como hemos mencionado, para llevar a cabo la prueba utilizamos los valores críticos (para una confianza del 5%) obtenidos a partir de simulaciones de Monte Carlo, utilizando el algoritmo descrito en el epígrafe anterior. Como señalamos en el epígrafe anterior, los valores estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo son menores, por lo que estamos en presencia de un criterio mucho más riguroso que el aplicado al caso cuando la distribución es conocida.

Los resultados se muestran en las Tablas 11-16. Se puede observar, que para el caso de la distribución α -estable la hipótesis nula (los datos analizados siguen una distribución específica α -estable), para una confianza del 5%, no puede ser rechazada para ninguno de los 6 índices analizados (México, Brasil, India, Hong Kong, China y Rusia). Esto confirma

de forma rigurosa la validez del modelo α -estable para modelar las fluctuaciones para datos diarios.

Por el contrario, para el caso de la distribución Gaussiana, la hipótesis nula se rechaza para todos los índices. En el caso de la distribución inversa Gaussiana (IG), la hipótesis nula, para una confianza del 5%, también se rechaza para todos los índices analizados.

Sin embargo, para la IG, para una confianza del 1% ($\alpha = 0.01$), la hipótesis nula no puede ser rechazada (excepto para el caso del índice Nifty 50 de la India). Los resultados obtenidos con la distribución inversa Gaussiana son congruentes con los obtenidos por Trejo et al. (2006), donde se muestra, que para los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores, el ajuste para IG es mejor que para la distribución Gaussiana.

Tabla 11: Aplicación del test de Kolmogorov-Smornov para el caso del IPC de México utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.				
IPC Kolmogorov-Smirnov			n=2498 datos nivel de confianza $\alpha = 0.05$	
Distribution	Valor Critico estimado	K-S: Prueba estadística	P-Value	Rechazar - H_0 ?
Gaussiana	0.0184	0.0654	0.0008	SI
NIG	0.0207	0.0271	0.0100	SI
α -estable	0.0208	0.0164	0.1331	NO

Tabla 12: Aplicación del test de Kolmogorov-Smornov para el caso del IVOBESPA de Brasil utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.				
Bovespa Kolmogorov-Smirnov			n=2512 datos confidencia $\alpha = 0.05$	
Distribution	Valor Critico estimado	K-S: Prueba estadística	P-Value	Rechazar - H_0 ?

Gaussiana	0.0182	0.0470	0.0012	SI
NIG	0.0208	0.0270	0.0106	SI
α-stable	0.0207	0.0182	0.1974	NO

Tabla 13: Aplicación del test de Kolmogorov-Smornov para el caso del Nifty 50 de la India utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.

Nifty 50 (NSEI)		n=1930 datos		
Kolmogorov-Smirnov		confidencia $\alpha = 0.05$		
Distribution	Valor critico estimado	K-S: Prueba estadística	P-Value	Rechazar - H_0 ?
Gaussiana	0.02717	0.832	0.0166	SI
NIG	0.0207	0.0214	0.001	SI
α-stable	0.0205	0.1460	0.0974	NO

Tabla 14: Aplicación del test de Kolmogorov-Smornov para el caso del IMOEX de Rusia utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.

IMOEX Russia		n=2522 datos		
Kolmogorov-Smirnov		confidencia $\alpha = 0.05$		
Distribution	Valor Critico estimado	K-S: Prueba estadística	P-Value	Rechazar - H_0 ?
Gaussiana	0.02717	0.832	0.16613×10^{-15}	SI
NIG	0.0212	0.0269	0.0101	SI
α-stable	0.0210	0.1460	0.0974	NO

Tabla 15: Aplicación del test de Kolmogorov-Smornov para el caso del Shanghai Composite de China utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.				
Shanghai Composite (SSEC) Kolmogorov-Smirnov			n=2426 datos confidencia $\alpha = 0.05$	
Distribution	Valor Critico estimado	K-S: Prueba estadística	P-Value	Rechazar - H_0 ?
Gaussiana	0.02717	0.832	0.16613×10^{-15}	SI
NIG	0.0285	0.0269	0.0103	SI
α-stable	0.0272	0.1460	0.0974	NO

Tabla 16: Aplicación del test de Kolmogorov-Smornov para el caso del Hang-Seng de Hong Kong utilizando los valores límites estimados a partir de simulaciones de Monte Carlo.				
Hang Seng (HSI) Kolmogorov-Smirnov			n=2515 datos confidencia $\alpha = 0.05$	
Distribución	Valor Critico estimado	K-S: Prueba estadística	P-Value	Rechazar - H_0 ?
Gaussiana	0.02717	0.832	0.16613×10^{-15}	SI
NIG	0.0205	0.0271	0.0109	SI
α-stable	0.0272	0.1460	0.0974	NO

Estos resultados confirman que la distribución α -estable es la mejor opción para modelar las fluctuaciones de los datos diarios.

Capítulo Cinco

Conclusiones.

Como pudimos observar a lo largo de este trabajo de investigación, la distribución Gaussiana no es un buen modelo para modelar las fluctuaciones de los datos diarios de los mercados financieros. En este caso, para todos los índices estudiados, la hipótesis nula (las fluctuaciones de los datos analizados siguen una distribución Gaussiana) se rechazan con la aplicación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov. Por lo tanto, se puede decir que el movimiento browniano no es la herramienta adecuada para modelar los índices financieros para los países emergentes.

Hemos demostrado que las distribuciones estables de Lévy son un buen modelo para ajustar las fluctuaciones de los datos diarios, conclusión que es respaldada con pruebas estadísticas formales.

Se realizó un análisis estadístico para los datos diarios considerando un periodo de diez años (2005-2015), y se analizó el comportamiento de los principales índices de algunos de los principales países emergentes tales como: China con el índice Shanghai Composite (SSEC), Brasil con el índice Bovespa (IBOVESPA), la India con el índice Nifty50 (NSE), Rusia con el índice MOEX (IMOEX), Hong Kong con el índice Hang Seng (HSI), además del (IPC) para México. Por medio de este análisis, pudimos observar que para un horizonte diario y considerando una confianza del 5% las fluctuaciones de los índices bursátiles de los países analizados (México, Brasil, Rusia, India, China y Hong Kong) se modelan adecuadamente a partir de una distribución estable de Lévy. Considerando estos resultados, a manera de conclusión podemos decir que, en el caso de los datos diarios, los procesos de Lévy nos proporcionan una descripción adecuada de las fluctuaciones de los mercados para los BRICs y México. La hipótesis de normalidad se rechaza para todos los índices analizados.

Como un trabajo a futuro es considerar este mismo análisis aplicando teoría de vuelos truncados. La metodología mostrada en este trabajo, se puede aplicar a otros períodos (2005 al 2020) dentro del cual está incluida la crisis generada por la pandemia del COVID-19.

Referencias:

- Alfonso, L., Mansilla, R. and Terrero-Escalante, C.A., 2012. On the scaling of the distribution of daily price fluctuations in the Mexican financial market index. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(10), pp.2990-2996.
- Bachelier, L., 1900. Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (Vol. 17, pp. 21-86).
- Black, F. and Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), pp.637-654.
- DuMouchel, W.H., 1973. On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. *The Annals of Statistics*, 1(5), pp.948-957.
- Koponen, I., 1995. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process. *Physical Review E*, 52(1), p.1197.
- Mandelbort, B., 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), pp.394-419.
- Mantegna, R.N. and Stanley, H.E., 1995. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature*, 376(6535), pp.46-49.
- Nolan, J.P., 2003. Modeling financial data with stable distributions. In *Handbook of heavy tailed distributions in finance* (pp. 105-130). North-Holland.
- Nolan, J.P., 2009. Stable distributions. *Math/Stat Department, American University*.
- Mantegna, R.N. and Stanley, H.E., 1994. Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: the truncated Lévy flight. *Physical Review Letters*, 73(22), p.2946.
- Rachev, S.T. and Mittnik, S., 2000. *Stable Paretian models in finance* (Vol. 7). Wiley.
- Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S., 1994. Lévy measures of infinitely divisible random vectors and Slepian inequalities. *The Annals of Probability*, 22(4), pp.1930-1956.
- Stanley, H.E. and Mantegna, R.N., 2000. *An introduction to econophysics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Trejo, Bárbara; Nuñez, José Antonio; Lorenzo, Arturo Distribución de los rendimientos del mercado mexicano accionario Estudios Económicos, vol. 21, núm. 1, enero-junio, 2006, pp. 85-118 El Colegio de México, A.C. Distrito Federal, México