

---

CONTROL ÓPTIMO DE VELOCIDAD ANGULAR DE UN  
MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA DE CAMPO  
DEVANADO

---

T E S I S

QUE PARA OBTENER POR EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN SISTEMAS  
ELECTRÓNICOS INDUSTRIALES

P R E S E N T A:

CARLOS ÁVILA GÓMEZ

D I R E C T O R:

DR. CUAUHTÉMOC GUERRERO TEJADA

MÉXICO, D. F., DICIEMBRE 2020

## SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

### RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

### DERECHOS RESERVADOS<sup>©</sup>

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

**INTEGRACIÓN DEL JURADO :**

**PRESIDENTE:** Dr. Marcos Ángel González Olvera.

**SECRETARIO:** Dr. Efrén Bernardo Ramírez Solíz

**VOCAL:** Dr. Mario Villafuerte Bante

**1<sup>ER</sup> SUPLENTE:** Dr. Cuauhtémoc Guerrero Tejada.

**PLANTEL DE ADSCRIPCIÓN:** UACM, PLANTEL SAN LORENZO TEZONCO.

**SAN LORENZO TEZONCO**

**DIRECTOR DE TESIS:**

Dr. Cuauhtémoc Guerrero Tejada.  
UACM, Plantel San Lorenzo Tezonco.

*La concepción y culminación de este trabajo contiene el aporte de otros trabajos previos, cuya contribución fue de manera indirecta, como muestra de agradecimiento, el resultado de este es dedicado a todos y cada uno de ellos.*

*También, se agradece al Dr. Cuauhtémoc Guerrero Tejada por el aporte de su tiempo, paciencia y experiencia en el esmero por la corrección de los detalles en este trabajo.*

*“Lo que no se define, no se puede medir.  
Lo que no se mide, no se puede mejorar.  
Lo que no se puede mejorar, se degrada siempre”  
ya sea cualitativa o cuantitativamente.”*

Sir William Thomson, **Lord Kelvin**.

## Agradecimientos

Ofrezco mi mayor agradecimiento a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (**UACM**) y su modelo educativo, que hizo posible mi formación académica al culminar con el presente trabajo, abriendo nuevas metas y oportunidades que serán aprovechadas en el futuro.

También se agradece a los espacios ofrecidos con el personal a cargo así como el equipo prestado en los laboratorios, biblioteca, aulas, área de alimentos, etc. que permiten ser parte del apoyo diario para todos los alumnos, así como la cantidad de Maestros y Doctores que ofrecen aportar su conocimiento en beneficio de la comunidad académica y también a todas aquellas personas que son solidarias en la estancia de la **UACM**, haciendo una vida académica más fácil y amena.

Antes que un gesto de agradecimiento, se ofrece la culminación de este trabajo como muestra del cariño y voto de confianza recibido por parte mis seres queridos: a mi madre Oliva G. quien es la columna vertebral de forma moral en la familia; a mi padre Alberto Á., el poste donde confiamos sujetarnos todos los miembros de la familia en los momentos difíciles, y hermanos, con quienes comparto una vida en la mayoría de los momentos más importantes y no he dudado de su apoyo.

A quien con paciencia y cariño ofreció su apoyo en los momentos más difíciles y de mucha tensión, se preocupó por mi seguridad y bienestar en cada uno de los momentos que podía, exigiendo resultados e impulsando a ser mejor día con día, a A. Beatriz S.

A la lista de amigos dentro y fuera de esta casa de estudios, que entre momentos muy escasos, compartimos experiencia, administrando así buenos y malos momentos, sirvieron y servirán como ánimo y estímulo en otras tareas a futuro.

Finalmente a la parte espiritual, que me ha sido inculcado desde el uso de razón, que de alguna manera influye gran parte de nuestra vida y que de alguna manera la intento entender.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Motivación	3
1.3. Planteamiento del problema	4
1.4. Objetivo	5
<b>2. Motor de CD. Modelos y sus propiedades</b>	<b>6</b>
2.1. Datos históricos del motor de CD	6
2.2. Partes básicas del motor de CD	7
2.3. Ecuaciones de la dinámica del motor de CD	9
2.4. Modelos matemáticos del motor de CD	11
2.4.1. Modelo en el dominio del tiempo	11
2.4.2. Propiedades del modelo en espacio de estados del motor de CD	13
2.4.2.1. Parámetros del motor de CD	13
2.4.2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov del motor de CD	13
2.4.2.3. Controlabilidad del motor de CD	18
2.4.2.4. Observabilidad del motor de CD	21
2.4.3. Modelo en el dominio de la frecuencia	24
2.4.4. Función de transferencia por ecuaciones diferenciales del motor de CD	25
2.4.5. Propiedades de la función de transferencia del motor de CD	26
2.4.5.1. Análisis de la respuesta frente a una señal de frecuencia	28
2.4.5.2. Comportamiento de las raíces del motor de CD para un lazo cerrado de control proporcional	31
<b>3. Motor de CD y obtención de velocidad a partir de la medición de posición</b>	<b>34</b>
3.1. Modelo en el dominio del tiempo del motor de CD	35
3.1.1. Estabilidad del motor de CD con medición de posición por el método directo de Lyapunov	35
3.1.2. Controlabilidad del motor de CD con medición de posición	37
3.1.3. Observabilidad del motor de CD con medición de posición	38
3.2. Modelo en función de transferencia del motor de CD	39
3.2.1. Polos de función de transferencia del motor de CD con medición de posición	39
3.3. Velocidad filtrada a partir de la posición medida	40
3.3.1. Diferenciador sucio de segundo orden	41
3.3.1.1. Modelo en espacio de estados de la función de transferencia del filtro de segundo orden	41

3.3.1.2. Analisis del diagrama de Bode del filtro de 2do orden . . . . .	43
3.4. Construcción del modelo matemático del motor de CD con la dinámica del dife- renciador sucio . . . . .	44
3.5. Cancelación de polos y ceros . . . . .	46
3.6. Transformación en subespacios observable y no observable . . . . .	48
3.6.1. Transformación de similitud . . . . .	48
3.6.2. Subespacio observable y no observable . . . . .	49
3.7. Teorema de estabilidad de Kharitonov . . . . .	51
3.7.1. Estructura de estabilidad para la incertidumbre independiente . . . . .	52
<b>4. Control óptimo de la velocidad angular del motor de CD a partir de la medición de la posición angular</b>	<b>56</b>
4.1. Principio de separación . . . . .	56
4.2. Regulador óptimo cuadrático <i>LQR</i> . . . . .	59
4.2.1. Ecuación de Riccati . . . . .	60
4.2.2. Metodología para obtener las ganancias <i>K</i> del controlador <i>LQR</i> . . . . .	61
4.3. Control óptimo por retroalimentación con acción integral del error . . . . .	62
4.4. Filtro de Kalman . . . . .	64
4.4.1. Metodología para obtener las ganancias del filtro de Kalman . . . . .	66
4.5. Simulaciones de control óptimo del motor de CD . . . . .	67
4.5.1. Construcción de la matriz del controlador <i>LQR</i> . . . . .	67
4.5.2. Construcción de la matriz del observador con el filtro de Kalman . . . . .	67
4.5.3. Resultados de simulación . . . . .	69
4.5.4. Estabilidad del motor de CD ante cambios de valor en sus parámetros bajo el esquema de control óptimo . . . . .	76
<b>5. Conclusiones</b>	<b>81</b>
5.1. Trabajos futuros . . . . .	82
<b>A. Valor de parámetros y datos nominales del motor de CD D5505P</b>	<b>84</b>
<b>B. Eliminación Gaussiana por derivación de la descomposición LU</b>	<b>85</b>
A. Resumen de pasos . . . . .	87
<b>C. Algunos organismos de certificación</b>	<b>89</b>
<b>D. Separación de parte controlable de la no controlable</b>	<b>91</b>
<b>E. Algoritmo propuesto para control óptimo <i>LQR</i> con filtro de Kalman</b>	<b>92</b>

# Índice de figuras

2.1. Motor de CD. En la parte superior, se muestra el modelo físico de la máquina BALDOR RELIANCE Mo. D5505P [Baldor-ABB <sup>®</sup> , 2019] el cual es objeto de estudio del presente trabajo. En la parte inferior se muestran de manera general las partes que componen a un motor de CD, esta Figura es adaptada de [ABB BALDOR, 2019], en [Maloney, 2006] también es posible encontrar una descripción similar para el motor de CD. . . . .	8
2.2. Diagrama del motor de CD: esquema que simboliza la configuración del motor de CD por excitación separada; del lado derecho se muestra el arreglo que corresponde al campo, del lado izquierdo se muestra el arreglo que corresponde a la armadura. Figura adaptada de [Chiasson, 2005] y [Rashid, 2004]. . . . .	10
2.3. Diagrama de bloques del sistema Lineal e Invariante en el Tiempo (Linear Time-Invariant, LTI por sus siglas en inglés) (2.6) representado en espacio de estados. Figura adaptada de [Kuo, 1996], [Ogata, 2010], [Franklin et. al., 1991], por nombrar algunos. . . . .	13
2.4. Estabilidad entorno al estado de equilibrio $\mathbf{x}_e$ en el sentido de <i>Lyapunov</i> . Figura tomada de [Haddad / Chellaboina, 2008, Capítulo 3]. . . . .	14
2.5. Estabilidad asintóticamente estable para un estado $\mathbf{x}_e$ . Figura tomada de [Haddad / Chellaboina, 2008, Capítulo 3]. . . . .	15
2.6. Esquema del motor de CD en el dominio de la frecuencia según conjunto de ecuaciones (2.61) [Chiasson, 2005, Capítulo 2]. . . . .	26
2.7. Gráfica de función seno, obtenida en MatLab <sup>®</sup> . . . . .	30
2.8. Diagrama de bloques para un sistema realimentado, donde la ganancia $K_{rlocus}$ está en arreglo en cascada con la planta $G(s)$ ; imagen adaptada de [Franklin et. al., 1991] y [Kuo, 1996]. . . . .	31
2.9. Lugar geométrico de las raíces de la ecuación (2.71), la trayectoria de las asíntotas comienza con los polos en lazo abierto (2.62) o en (2.71) con ganancia $K_{rlocus} = 0$ . Figura obtenida en MatLab . . . . .	33
3.1. a) características de una señal digital para cualquier canal del encoder $\{\bar{A}, A$ y $B\}$ . b) muestra el desfase de las señales digitales entre los canales $A$ y $B$ emitidos por parte del encoder conocida como cuadratura. Imagen adaptada de [Kuo / Golnaraghi, Capítulo 6]. . . . .	41
3.2. Diagrama de Bode del filtro de segundo orden (3.21) o diferenciador sucio según valores elegidos para $\lambda_d$ . En la parte superior se muestra la magnitud, en la parte inferior se muestra el cambio de pase o desfase para cada valor de $\lambda_d$ . Figura obtenida de MatLab <sup>®</sup> . . . . .	43

3.3. Representación de unión de dos sistemas en espacio de estados en un arreglo en cascada. Para fines de este trabajo el *System 1* es el modelo del motor de CD, *System 2* es el modelo del filtro de segundo orden [Goodwin et. al., 2000, pp 510]. 45

4.1. Esquema de control por retroalimentación de estados y acción integral del error, donde la planta pertenece al sistema (3.31) formado por (3.1) y (3.26) cuyo arreglo es en cascada, la matriz  $\mathbf{K}$  son las ganancias para retroalimentar el sistema y  $k_i$ , es la ganancia integral del error. Figura adaptada de [Ogata, 1998, Capítulo 12] 57

4.2. Esquema de control por retroalimentación de estados con controlador de acción integral del error, donde las matrices de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  pertenecen al sistema (3.32) y  $\mathbf{C}$  es la matriz de salidas tomadas para la retroalimentación de la acción integral del error. Figura adaptada de [Hendricks et. al., 2008]. . . . . 62

4.3. Esquema de control óptimo para el motor de CD en cascada con el filtro de segundo orden (3.32), compuesto por el control por retroalimentación de estados con acción integral del error, integrado por la técnica LQR en conjunto con el estimador de estados compuesto por el filtro de Kalman. . . . . 69

4.4. Señal de referencia  $r_{\omega ref}$ , lacual está definida por la función (4.64). Esta función es empleada como señal de entrada  $r$  en el diagrama (4.3). El propósito de la forma de esta señal es únicamente ilustrativa para conocer la respuesta del control óptimo. . . . . 70

4.5. conjunto trayectorias de velocidades, las cuales son: velocidad de referencia a la entrada del sistema ( $r$ ), velocidad verdadera del motor de CD ( $V$ ), velocidad filtrada ( $Vel_{fil}$ ) y velocidad estimada ( $Vel_{estimada}$ ). . . . . 71

4.6. Error de velocidad, Diferencia entre velocidad deseada - velocidad filtrada. . . . 72

4.7. Error de velocidad. Diferencia entre velocidad filtrada - velocidad estimada. . . . 72

4.8. Conjunto de gráficas que contienen las trayectorias de posición las cuales son la deseada, la verdadera y la estimada. . . . . 73

4.9. Error de posición. Diferencia entre la posición deseada y la posición verdadera. . 74

4.10. Error de posición. Diferencia entre la posición verdadera y la posición estimada. 74

4.11. Voltaje  $u$  que demanda el bloque de control. . . . . 75

4.12. Corriente que demanda el bloque de control a la salida del sistema de control. . 75

4.13. Diferencia de demanda entre el sistema del motor de CD con y sin cambio de parámetros. . . . . 79

4.14. Corriente frente a un cambio de parámetros en el motor de CD, con tiempo de simulación de 0.02 [s]. . . . . 79

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

A lo largo de la historia, el ser humano se ha favorecido de herramientas para atender múltiples tareas, sin embargo, estas herramientas son cada vez más versátiles y necesarias para nuestra vida cotidiana. La historia está cubierta de múltiples avances en los cuales al paso del tiempo se han convertido en retos y desafíos realizando múltiples procedimientos cada vez más complejos que permiten regular el funcionamiento de algún sistema.

Personajes sobresalientes e inventores han marcado una diferencia importante con teorías matemáticas, las cuales son indispensables para desarrollar nuevas herramientas resolviendo o mejorando sistemas dentro de los cuales son aplicados a nuestra vida cotidiana.

Hoy por hoy, los sistemas automáticos ejecutan y controlan procesos de forma autónoma, la cual reemplaza la mano humana a su mínima expresión, conservando o mejorando la calidad de una tarea o producto final; estos sistemas están estudiados desde el punto de vista matemático, el cual tiene como base las ecuaciones que determinan su comportamiento en relación a la naturaleza de su funcionamiento. Históricamente estas ecuaciones tienen distintos orígenes, han sido de diferentes importantes portadores los que han hecho que los avances científicos hagan una herramienta sumamente poderosa e imprescindible para la vida cotidiana tal es el caso de Leonhard Euler, Isaac Newton, Joseph Fourier, Karl Gauss, Bernhard Riemann, Pierre de Laplace, Jacopo Riccati, solo por nombrar algunos. Actualmente el uso de sus teorías son muy diversas y al ser aplicadas a los sistemas físicos han tenido el poder de cambiar el sentido de la historia para siempre.

El primer aporte registrado como trabajo de control fue por el ingeniero e inventor James Watt [19-Enero-1736, Greenock, Escocia; 25-Agosto-1819 Birmingham, Inglaterra] en 1788 [Ogata, 1998, Capítulo 1], quien presentó el diseño de un mecanismo autorregulado de velocidad para la máquina de Thomas Newcomen (1712) [Thomas Newcomen, 2020], considerado un invento sumamente ingenioso para su época. Esta invención abrió un panorama muy amplio a las máquinas de vapor, por lo que este mecanismo se vuelve de suma importancia por las aplicaciones de la revolución industrial. En términos de sistemas electrónicos y para resolver el mismo, la solución combina sensores, micro-controladores, actuadores de potencia (neumático y/o hidráulicos) entre otros, y como tal podrá existir las disyuntiva en elegir la mejor. Por el momento, solo se puede pensar que, ambos sistemas de control resuelven las necesidades requeridas

Una de las primeras propuesta de control por retroalimentación fue hecha por Nicolas Fyodo-

rovich Minorsky [[Fyodorovich Minorsky, 2020](#)] [23-Septiembre-1885, Korcheva, Rusia; 31-Julio-1970, Italia]. Su trabajo propone las base para el controlador automático PID, para la dirección automática de embarcaciones. Entre sus trabajos más sobresalientes tiene lugar la teoría de mecanismos de dinámica no lineal.

El Ingeniero eléctrico Harold Locke Hazen [01-Agosto-1901, Estados Unidos; 21-Febrero-1980, Estados Unidos] [[Harold Locke Hazen, 2020](#)] es quien introduce el término de servomecanismos para sistemas del control de posición, construido con relevadores haciendo mucho más eficientes los procesos de la industria eléctrica.

La primera teoría de estabilidad de sistemas en lazo cerrado fue hecha por Harry Nyquist [7-Febrero-1889, Suecia; 4-Abril-1976, Estados Unidos] [[Harry Theodor Nyquist, 2020](#)] quién publicó su artículo en 1932 como estabilidad de amplificadores de realimentación. Dentro del campo de la ecuaciones diferenciales destaca el trabajo de Aleksandr Lyapunov [25-Mayo-1857, Rusia; 03-Noviembre-1918] [[Aleksandr Lyapunov, 2020](#)] ya que las aportaciones de la teoría de control fungen un papel muy importante; ya que basado en integrales, ecuaciones diferenciales y teoría de probabilidad desarrolló lo que ahora se conoce como teoría general de Lyapunov (1899), permitiendo definir la estabilidad a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el estudio del comportamiento en las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, sobresale Rudolf E. Kalman [19-Mayo-1930, Hungría; 02-Julio-2016, Estados Unidos] [[Rudolf E. Kalman , 2020](#)], quien realiza profundas investigaciones en torno a este tema. Sin duda su trabajo más importante es conocido hoy en día como el Filtro de Kalman, que a fines de 1958 y a principios de 1959 obtiene los primero resultados en función del tiempo discreto, combinando su trabajo con el filtrado de Wiener, Kolmogorov, Bode, Shannon, Pugachev y otros para canalizar los resultados en el dominio del tiempo o espacio de estados, ofreciendo un nuevo enfoque para problemas de predicción y filtrados lineales.

La técnicas de control óptimo [[Optimal control, 2020](#)] fue desarrollada en los años de la carrera espacial, formalizando nuevas tecnologías, especialmente para resolver problemas de optimización a sistemas influenciados por fuerzas externas. La técnica consta en resolver el sistema debido a un índice de desempeño o función de costo cuadrático, una vez resuelta, es posible encontrar una trayectoria adecuada a la salida del sistema, según la optimización del costo deseada, e.i., el comportamiento del sistema será óptimo utilizando el menor consumo de recursos posible.

Hoy en día, se sabe que la herramienta más importante en torno al estudio de cualquier sistema son las ecuaciones diferenciales, las cuales contienen la información necesaria para la dinámica a través del tiempo, asociada a ellas (ecuaciones diferenciales). Aplicando alguna o varias técnicas de control a un sistema, en términos de los modelos matematicos, permiten tener dominio sobre los sistemas. La teoría de control contiene diversas técnicas, y en los últimos años sus avances han resuelto problemas muy complejos, permitiendo tener dominio sobre casi cualquier sistema. Como tal, los avances dados en la ciencia y tecnología muestran de lo importante que son en nuestros días, teniendo mejores herramientas para enfrentar las problemáticas que vengan en el futuro, haciendo más confiables y precisos los sistemas que estén asociados a estos.

Cabe señalar que entre las novedosas teorías de control, existe una importante reformulación para resolver la idea de qué herramienta matemática responde correctamente según las necesidades que se tengan en el sistema, por lo que la buena implementación de cualquier teoría de control, trae consigo profundos impactos positivos.

El motor de corriente directa (CD) por sí solo es visto como un sistema, el cual por sus propiedades puede facilitar un alto par de arranque y estabilidad en la velocidad angular, por lo que ofrece un amplio rango de control de velocidad. Esta combinación de propiedades son muy apreciadas en sistemas de alta precisión o alto rendimiento. Por estas propiedades son usados en vehículos de tracción variable, en algunos sistemas de alambrado nulo (uso exclusivo de acumuladores eléctricos), entre otros más. Textualmente en [Guerrero et. al., 2020] describe que:

“Los motores de corriente directa en la actualidad se siguen considerando como una opción viable cuando un sistema es utilizado en un rango amplio de operación, debido a sus excelentes propiedades operacionales y características de control.”

Para fines de este trabajo, se pone en práctica la técnica de control óptimo LQR (Linear quadratic regulator) con la finalidad de controlar la velocidad angular del motor de CD, considerando que se dispone de la señal de la medición de la posición angular, visto desde un ambiente matemático.

## 1.2. Motivación

La compilación total de información así como las habilidades adquiridas a lo largo de la carrera de Ingeniería en Sistemas Electrónicos Industriales (ISEI) según el plan de estudios por parte del Colegio de Ciencia y Tecnología (CCyT) [UACM ISEI, 2019], permite tener las herramientas necesarias para planear, diseñar, evaluar, construir, instalar, operar, administrar y mantener sistemas electrónicos, cuyo conocimiento están encaminados a las máquinas de uso industrial.

Dentro del panorama de conocimientos adquiridos se encuentra la teoría de máquinas eléctricas con la cual se cuenta con lo necesario para el análisis del motor de CD. Cabe señalar que dentro de las habilidades adquiridas está la aplicación de técnicas de control electrónico de uso más común en la industria para el arranque de motores, así también se cuenta con el conocimiento de manejo de software numérico como herramienta de análisis y diseño para los controladores. De acuerdo con lo anterior, se cuenta con la capacidad de poner en práctica un esquema de control para un sistema como es el caso del motor de CD.

Dentro del plan de estudio para la carrera de ISEI se abordan múltiples técnicas de control aplicadas a distintos sistemas, sin embargo estos temas contienen únicamente las ideas principales desde un ambiente teórico. En la estructura de este trabajo se desea profundizar de manera matemática en el conocimiento de la técnica de control óptimo lo que significa un desafío en la investigación e implementación numérica enfocado al motor de CD, todo con el beneficio de obtener una mejor experiencia de manera especializada al esquema de control LQR.

Como una ventaja, se dispone físicamente en el laboratorio de “Sistemas de Potencia” (C-005), en el plantel de San Lorenzo Tezonco, un motor de CD de marca BALDOR RELIANCE Mo. D5505P, con el cual se han realizado trabajos previos. Como consecuencia de lo anterior, se tiene el conocimiento de la máquina eléctrica de forma matemática, así como sus parámetros y datos nominales por parte del fabricante.

Por otra parte, el apoyo en la colaboración en otros trabajos previos, trajo el diseño de un convertidor de voltaje CD a CD (CD-CD) para alimentar la armadura del motor de CD. Para el diseño del sistema del convertidor, se usan las habilidades adquiridas por parte de sistemas

de potencia eléctrica, así como los conocimientos de sistemas electrónicos, en conjunto, se optó por realizó el diseño electrónico del sistema dividido en tres etapas, las cuales se realizan de manera independiente, estas etapas son *Acondicionamiento de Señal*, *Fuente de Alimentación Eléctrica con protección por sobrecorriente* y *Red Snubber*.

Dado el conjunto de elementos conocidos por el motor de CD y uniendo las herramientas anteriores, es posible diseñar e implementar la simulación en un espacio de trabajo del software de Matlab <sup>®</sup> & Simulink <sup>®</sup> del esquema de control óptimo para el sistema del motor de CD, explorando así, la mejor respuesta de los múltiples resultados que pueda arrojar esta implementación; esperando obtener la mejor respuesta en el sistema.

### 1.3. Planteamiento del problema

Actualmente el motor de CD es aprovechado en múltiples sistemas, el control de velocidad es una de las variables más explotadas para sistemas que demandan precisión. Existen instrumentos de medición muy sofisticados que sirven como herramientas para relacionar técnicas de control, sin embargo, es muy poco explotado el control de velocidad midiendo la posición, por lo cual se aprovecha un instrumento sencillo y poco complicado de adjuntar al eje de un motor de CD.

Una de las técnicas de control muy poco exploradas en esta máquina es el control LQR, que cuyo propósito es minimizar el consumo de energía suministrada llegando así a una velocidad de referencia de forma óptima.

La fuente eléctrica que suministra el voltaje de alimentación al motor de CD tiene un rango de corriente máximo. Para evitar el sobreconsumo de energía eléctrica dada la demanda de el par de carga, se puede sensar a la entrada y salida el consumo de corriente en los devanados de la máquina, evitando la pérdida de las propiedades eléctricas o en el peor de los casos el daño permanente del sistema electrónico o la pérdida permanente de los devanados del motor de CD.

Dadas algunas de las problemáticas mencionadas, y para fines de este trabajo se toman las siguientes consideraciones:

- A1.** Se dispone de la medición de la corriente de armadura, denotada como  $i_a$ , así como también de la posición angular definida como  $\theta_R$  del eje del motor. Estas mediciones están acondicionadas electrónicamente como señales analógicas.
- A2.** Se conocen los parámetros del motor de CD, siendo de dos naturalezas, mecánica y eléctrica.
- A3.** Se conocen los valores nominales del motor de CD, estos son proporcionados por el fabricante en la placa de datos de la máquina.
- A4.** El suministro de voltaje a la armadura  $V_s$ , es considerada la entrada al sistema, al igual que una perturbación externa  $\tau_L$  dado por el par de carga.
- A5.** Por propiedades físicas y mecánicas relacionadas al motor de CD, se considera la velocidad angular filtrada  $\omega_f$  como una señal deseada y velocidad angular  $\omega_R$  como la velocidad entorno a los datos de placa.

## 1.4. Objetivo

Dadas las consideraciones de **A1-A5**, se desea diseñar un esquema de control óptimo para el motor de CD, partiendo de la medición de posición angular en el eje de este, cuyo transductor óptico mecánico (encoder) es el instrumento empleado como herramienta para la técnica LQR empleada en el presente trabajo. También es considerado el par de carga como perturbación externa y la fuente de voltaje de alimentación en la armadura como la señal de entrada al sistema.

El ajuste de las ganancias para el controlador óptimo es muy delicado, por lo que al implementar del control LQR será simulada en software donde se espera seleccionar la mejor respuesta como velocidad angular que se apegue a la referencia y a su vez se pueda notar la minimización del costo de energía a la entrada del sistema.

# Capítulo 2

## Motor de CD. Modelos y sus propiedades

Los motores de corriente directa (CD) son utilizados en múltiples áreas, ya sea de velocidad fija o variable, resolviendo tareas de pequeña escala hasta las de forma industrial. Los voltajes de alimentación para estos varían según su aplicación, teniendo como ejemplo valores de algunos volts (mV), hasta miles de volts (kV). La capacidad de par de arranque, tracción eléctrica y estabilidad al variar la velocidad son algunas de las ventajas que pueden aprovecharse haciendo más confiable la precisión de su trabajo. Según sea el diseño de éste, el campo (estator) puede ser fabricado en diferentes materiales con el fin de obtener un campo magnético al accionar la máquina eléctrica; los materiales pueden ser de campo magnético permanente o configuración de inductores de alambre de cobre (conocidos también como devanados). Para la armadura (rotor), la fabricación es únicamente con inductores de cobre. Para fines prácticos, el resto de las páginas de este trabajo serán referidas las partes del estator y rotor como el campo y la armadura del motor de CD, respectivamente. Por sus propiedades físicas y eléctricas, el motor de CD es considerado una máquina electromecánica.

El contenido de este capítulo, está encaminado a conocer el comportamiento dinámico del motor de CD, partiendo desde sus propiedades físicas. La teoría que aquí se presenta, fue consultada desde distintas fuentes.

### 2.1. Datos históricos del motor de CD

Se entiende que la primera forma de energía corresponde a la corriente directa o corriente continua, presentada en la Exposición Universal de París de 1867, llamando la atención, uno de los primeros prototipos de motores de CD a mediados del siglo XIX. En 1832 Michael Faraday (1791-1867), presentó un prototipo de motor constituido por un disco de cobre, que giraba bajo la influencia de los polos de un imán en forma de herradura. El interés de mejorar y tener este descubrimiento, otros personajes también desarrollaron máquinas eléctrica como Herman de Jacobi en 1834, así como Henry, Robert Davison, Froment, Davenport y otros, resaltando así las fechas más sobresalientes sobre esta fascinante invención a lo largo del siglo XIX [Roldan, 2014]. De los acontecimientos destacados en el desarrollo de máquinas eléctricas se puede mencionar los siguientes:

- I. **1831.** Michael Faraday (Reino Unido) presenta la teoría de la inducción electromagnética. Es el principio en el que está basado los motores eléctricos.

- II. **1837.** Thomas Davenport (Estados Unidos) Desarrolla el motor de corriente directa.
- III. **1870.** Zénobe Théophile Gramme (Bélgica) Construye la primera máquina de corriente directa y el dínamo. Patenta la teoría de la máquina magneto-eléctrica para generar corriente eléctrica.
- IV. **1887.** Nikola Tesla (Serbia.) presentó el motor de inducción. Empieza el desarrollo industrial de las corrientes alternas.
- V. **1890.** Nikola Tesla (Serbia.) presentó el motor de corriente alterna trifásico

El presente trabajo está enfocado al motor de (CD). Textualmente se hace la siguiente cita extraída de [Chapman, 2005, Capítulo 8] donde se hace una comparativa a las máquinas de CD y de CA.

“Las máquinas de CD son generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica de CD y motores que convierten energía eléctrica de CD en energía mecánica. La mayoría de las máquinas de CD son semejantes a las máquinas de CA en el sentido de que tienen voltaje y corriente de CA dentro de ellas; las máquinas de CD cuentan con una salida de CD simplemente por que hay un mecanismo que convierte los voltajes internos CA en voltajes CD en sus terminales. Puesto que a este mecanismo se le llama conmutador, a la maquinaria CD también se le conoce como *maquinaria de colector a de conmutación*”.

## 2.2. Partes básicas del motor de CD

Nombrando de manera muy general, las partes más importantes del motor de CD pueden estar fabricadas en distintos materiales, sin embargo, para fines de este trabajo se describirán de forma estándar, i.e., se describirán las piezas más comunes entre estas máquinas.

Algunas definiciones por parte de fabricantes como SIEMENS<sup>®</sup> [SIEMENS, 2019], WEG<sup>®</sup> [WEG<sup>®</sup>, 2019] y BALDOR<sup>®</sup> - ABB<sup>®</sup> [BALDOR<sup>®</sup>-ABB<sup>®</sup>, 2019], los cuales se apegan a algunas normativas de fabricación (Apéndice C), la Figura 2.1 describe algunas partes importantes del motor de CD. En la parte superior se muestra el aspecto físico del motor adquirido por la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, para el laboratorio de Sistemas de Potencia y en la parte inferior de la Figura 2.1 se muestra el esquema con las partes principales con las que es fabricado un motor de CD estándar.

- I. **Carcasa.** Laminada o Chapa de acero, en forma cilíndrica, rectangular, hexagonal u octagonal, permitiendo la alimentación por convertidores estáticos en regímenes de alta dinámica. Esta pieza que cubre y protege gran parte del motor, normalmente es la parte fija que está unida al campo, como se puede apreciar en la Figura 2.1. En alguno de los casos esta cuenta con aberturas de ventilación y caja de terminales. La protección puede ser totalmente cerrada, abierta, a prueba de goteo, a prueba de explosiones, de tipo sumergible, etc. La caja de terminales permite la alimentación de energía eléctrica a los devanados internos, estos pueden ser el campo y la armadura. Para fines de este trabajo, la configuración de arranque entre el campo y la armadura es de alimentación independiente, e.i., tanto la armadura como el campo tienen una fuente de alimentación independiente.

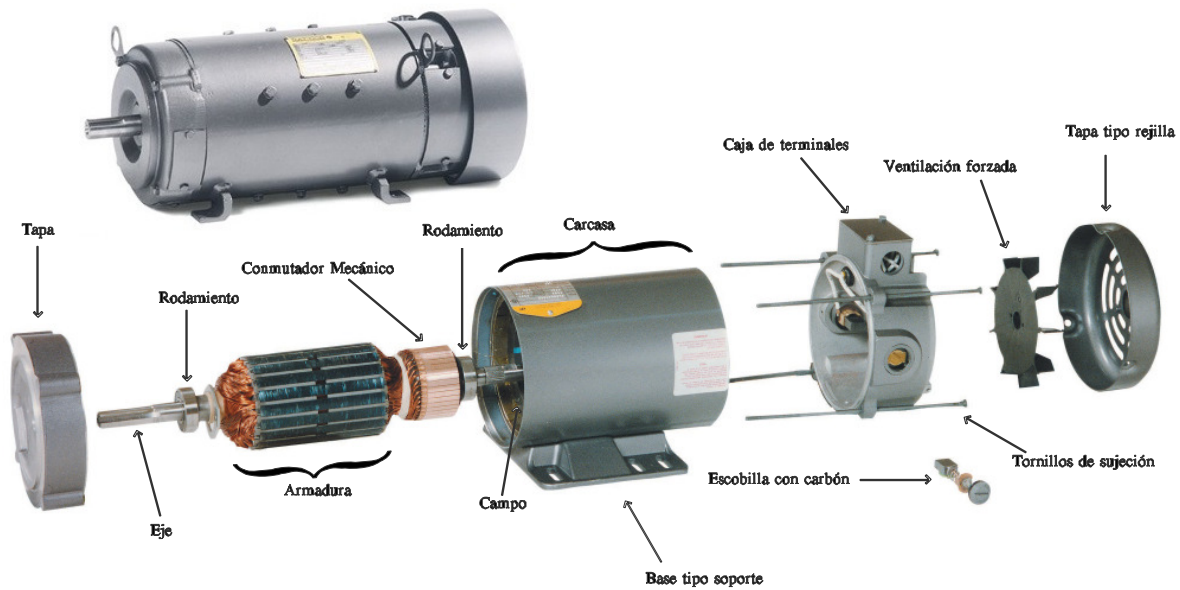


Figura 2.1: Motor de CD. En la parte superior, se muestra el modelo físico de la máquina BALDOR RELIANCE Mo. D5505P [Baldor-ABB®, 2019] el cual es objeto de estudio del presente trabajo. En la parte inferior se muestran de manera general las partes que componen a un motor de CD, esta Figura es adaptada de [ABB BALDOR, 2019], en [Maloney, 2006] también es posible encontrar una descripción similar para el motor de CD.

- II. **Rodamientos.** Permite el libre movimiento radial en el eje del motor de CD, por lo cual, transfiere el movimiento generado en la armadura a lo largo del eje y así a su vez también la fuerza o par de carga. Por lo general según la capacidad del motor de CD, el diseño del componente principal del rodamiento puede ser de bolas o rodillos metálicos, los cuales reducen significativamente la fricción, evitando el desgaste excesivo en el consumo en la potencia de alimentación en la máquina.
- III. **Conjunto de Escobillas.** Arreglo de cepillos metálicos sujetos desde la carcasa, los cuales ejercen la conexión eléctrica entre la parte fija y giratoria dentro del motor de CD. Estos elementos tienen como finalidad de realizar la presión necesaria sobre el conmutador permitiendo el paso de la corriente a los devanados de la armadura, estos son de larga duración con muelles, normalmente están compuesta de electro-grafito, grafito natural, carbón amorfo, metalo-grafito, baquelita o especificadas según las condiciones de carga.
- IV. **Campo.** Es la parte fijada a la carcasa del motor. Esta pieza funciona como base, permitiendo llevar a cabo la rotación del motor. En este caso, el campo del motor no se mueve mecánicamente. Normalmente estos están contruidos en dos tipos, de fabricación en devanados, los cuales contienen los polos del campo, o por imán permanente.

Los motores de construcción de campo devanado están contruidos principalmente en un arreglo de anillos de silicio laminado, formando un paquete el cual favorece el sentido del flujo magnético. El arreglo de los inductores o bobinas están contruidas con alambre de

cobre esmaltado de barniz clase H y con sistema de aislamiento e impregnación clase F o H, los cuales indican el número de polos. El mínimo número de polos son dos y según sea su diseño se les encuentran en múltiplos de dos.

Los motores de imán permanente, no necesitan excitación externa, el material que principalmente los compone es de ferrita cerámica, cuando es magnetizado el material es de larga duración y mantenimiento sencillo.

- V. **Conmutador Mecánico.** Principalmente funge un papel de interruptor mecánico rotativo, ayudando a cambiar la polaridad, o el flujo magnético de la bobina en la armadura cierto periodo de giro, por lo regular, el arreglo está al final de cada una de las bobinas de la armadura. La conexión se hace desde la fuente eléctrica, pasando por las escobillas llegando así al conmutador.
- VI. **Armadura.** Sea para las dos diferentes clase de motor de CD, de imán permanente o de campo devanado, la armadura es la parte móvil del motor que está unida al eje, en la Figura 2.1 se muestra todo el conjunto del rotor. Esta parte del motor, tiene la tarea de transferir la energía eléctrica para obtener como resultado en el eje energía mecánica. El campo también está constituido por un arreglo de láminas de silicio, que abrazan al eje sin tocarlo, y entre sus ranuras se encuentra el arreglo de inductores de alambre de cobre esmaltado barniz clase H con sistema de aislamiento e impregnación clase F o H.
- VII. **Tapas.** Fabricadas en aleación de fundición o de soldadura permanente, está diseñada para funcionar como soporte de uno de los dos rodamientos del eje y cerrar la protección interna del motor, en algunos de los casos sirve como soporte para las escobillas.

El nombre de las piezas descritas son partes básicas del motor de CD, sin embargo, es posible conocer que hay piezas adicionales que lo constituyen, y dependerá del grado de protección, uso en función del tiempo que se le pueda aprovechar.

Se toma como referencia la Figura 2.1, por ser el objeto de estudio, adquirido por la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) en el plantel de San Lorenzo Tezonco, en el laboratorio de Potencia (C-005). Este motor de CD está bajo los estándares de fabricación tipo NEMA MG2.

## 2.3. Ecuaciones de la dinámica del motor de CD

En [Chiasson, 2005, Capítulo 1] se describe con mucho detalle, la deducción de las ecuaciones del motor de CD. En este apartado, únicamente se señala las ecuaciones necesarias para construir el modelo que representa al motor de CD, el cual, es la base matemática para este trabajo.

Un motor de CD, de fabricación de campo devanado (conocido así, por los devanados de alambre de cobre en el campo), puede ser alimentado de manera independiente, i.e., una fuente de alimentación para el campo y otra para la armadura. En la Figura 2.2 se muestra esta configuración, usualmente llamada de excitación separada. Los circuitos que se muestran en esta Figura son dos de naturaleza eléctrica, y un circuito de naturaleza mecánica.

El circuito eléctrico del campo para el motor de CD está construido en un arreglo de embobinados de alambre de cobre, los cuales equivalen a una reactancia inductiva, por lo que en

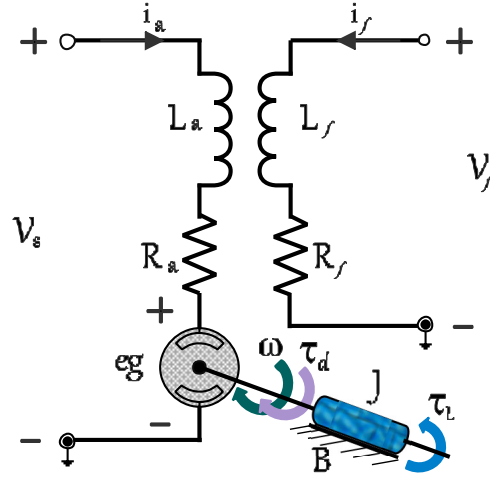


Figura 2.2: Diagrama del motor de CD: esquema que simboliza la configuración del motor de CD por excitación separada; del lado derecho se muestra el arreglo que corresponde al campo, del lado izquierdo se muestra el arreglo que corresponde a la armadura. Figura adaptada de [Chiasson, 2005] y [Rashid, 2004].

el diagrama esquemático de la Figura 2.2 se presentan del lado derecho con un resistor ( $R_f$ ) y un inductor ( $L_f$ ). Al tratarse de una configuración de alimentación separada, esta malla es excitada por una fuente de voltaje  $V_f$ . Para efectos del presente trabajo, el voltaje  $V_f$  siempre es constante y es alimentado con un voltaje nominal según la Tabla A.2 en el Apéndice A, i.e. es un voltaje de corriente directa, por lo cual, se tiene un flujo magnético siempre constante, y esto equivale a un imán permanente.

El circuito eléctrico que representa a la armadura del motor de CD, se ubica del lado izquierdo de la Figura 2.2. En un arreglo en serie se encuentra un inductor  $L_a$ , un resistor  $R_a$  y una fuerza contra-electromotriz  $e_g$  (**fcem**) y dicha malla es alimentada por una fuente  $V_s$ . Esta fuente puede variar la amplitud del voltaje según lo requiera la dinámica del motor. La armadura consta de un arreglo de embobinados de alambre de cobre, donde sus terminales están conectados a un conmutador mecánico, el cual, es alimentado de energía eléctrica por medio de escobillas.

Por ley de voltajes de Kirchhoff, la malla del arreglo de la armadura se puede expresar en términos de la corriente que circula a través de la armadura y la fuerza contra-electromotriz  $e_g$  (**emf**) [Krishnan, 2001], así como la excitación a este devanado por medio de la fuente  $V_s$ , lo cual resulta como

$$V_s = L_a \frac{d}{dt} i_a + R_a i_a + e_g \quad (2.1)$$

donde la fuerza contra-electromotriz  $e_g$  está en términos de la constante de la fem inducida  $K_b$  y la velocidad angular  $\omega_R$  [Krishnan, 2001], es decir,

$$e_g = K_b \omega_R \quad (2.2)$$

Cabe hacer mención que, la constante de fuerza contra-electromotriz  $K_b$  tiene una relación directa entre una constante de proporcionalidad  $K$  la cual depende del número de vueltas en el devanado y el flujo magnético del campo  $\phi$ , que si este último es constante, el parámetro  $K_b$  es constante [Krishnan, 2001], i.e. bajo la suposición de que se tiene un flujo magnético en el campo  $\phi$  constante, se tiene que

$$K_b = K\phi \quad (2.3)$$

El tercer y último circuito, corresponde a la parte electromecánica del motor de CD. En [Slemmon, 1992, Capítulo 4] se describe al motor de CD de forma ideal, de tal manera que el par electromagnético es

$$\tau_m = K_b i_a \quad (2.4)$$

Bajo el principio de la segunda ley de Newton, interactúan fuerza (par) y carga mecánica en el eje del motor de CD, entre las cuales existe una relación dinámica que produce un par de fuerza cinética, causado por la fuerza angular ejercida desde la armadura ( $\tau_m$ ). El coeficiente de fricción ( $B$ ) provocado por los rodamientos se opone al movimiento cinético ocasionado por ( $\tau_m$ ), así como el momento de inercia ( $J$ ) originado en el instante que gira la armadura, y por último el término de la perturbación externa ( $\tau_L$ ) hacia la máquina. En conjunto, en el instante que existe un movimiento angular en el motor de CD, será por la existencia de un par de fuerza ejercido en el eje del motor, que equivale a la sumatoria de fuerzas que restan par de fuerza al mismo eje, por lo cual se expresa de la siguiente manera

$$K_b i_a = J \frac{d}{dt} \omega_R + B \omega_R + \tau_L \quad (2.5)$$

Las ecuaciones diferenciales (2.1) y (2.5) son las que dan información del comportamiento del motor de CD cuando es excitado por un voltaje de alimentación a las terminales de los devanados de la armadura. De estas expresiones depende la construcción de los modelos en el dominio del tiempo y la frecuencia.

## 2.4. Modelos matemáticos del motor de CD

Antes de realizar alguna estrategia de control a un sistema físico, se requiere conocer el comportamiento de este. Para ello, en el presente trabajo, las ecuaciones diferenciales obtenidas para el motor de CD, dadas por (2.1) y (2.5), son usadas con el fin de construir los modelos en espacio de estados y función de transferencia (en el dominio del tiempo y la frecuencia respectivamente), con el propósito de hacer uso de herramientas de análisis para conocer la respuesta dinámica del motor de CD.

### 2.4.1. Modelo en el dominio del tiempo

Cuando se realiza un modelo en el dominio del tiempo de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, éste es conocido como modelo en espacio de estados cuya estructura clásica es [Kuo, 1996, Capítulo 5]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t) \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.6b)$$

donde

- I.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ : vector de estados.
- II.  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ : vector de entrada.
- III.  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ : vector de salida.
- IV.  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ : vector de perturbación externa.
- V.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Matriz de estados.
- VI.  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ : Matriz de entradas.
- VII.  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ : Matriz de salidas.
- VIII.  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ : Matriz de transferencia directa o matriz de realimentación de avance.
- IX.  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ : Matriz de perturbación externa

Al ser representado por las ecuaciones (2.1) y (2.5) al motor de CD, se puede observar que si es excitado a la entrada por una fuente de voltaje  $V_s$ , las variables de estado pueden ser definidas como la corriente de armadura y la velocidad angular, i.e.,  $x_1 = i_a$  y  $x_2 = \omega_R$ , respectivamente, por lo que el vector de estados se denota como  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ . Así mismo, el vector de salida se define como  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$  con  $y_1 = \omega_R$  y  $y_2 = i_a$ , así como el vector de perturbación  $\mathbf{w} = \tau_L \in \mathbb{R}$ , i.e., el par de carga se considera con una perturbación externa. Bajo estas consideraciones, las ecuaciones diferenciales (2.1) y (2.5) teniendo en cuenta (2.2), el modelo en espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ L_a \\ 0 \end{bmatrix} V_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -J \end{bmatrix} \tau_L \quad (2.7a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (2.7b)$$

El modelo en espacio de estados para el motor de CD dado por (2.7) se puede considerar que está muy apegado a la realidad, ya que por la tecnología que se tiene es posible disponer de las señales de medición de corriente eléctrica así como de la posición angular, ambas señales se consideran en el vector de salida y por otro lado, el par de carga no se desprecia si no que se considera que es una fuerza externa (como una perturbación) que puede influir en la respuesta del sistema. En otras palabras, con este modelo se puede utilizar para realizar alguna estrategia de control lineal sin despreciar algunas cuestiones propios al motor de CD.

La representación en diagrama de bloques respecto al modelo en espacio de estados del motor de CD (2.7) se representa en la Figura 2.3.

Para fines prácticos, el diagrama representado por la Figura 2.3 será expresado como un solo bloque conocido como planta del motor de CD.

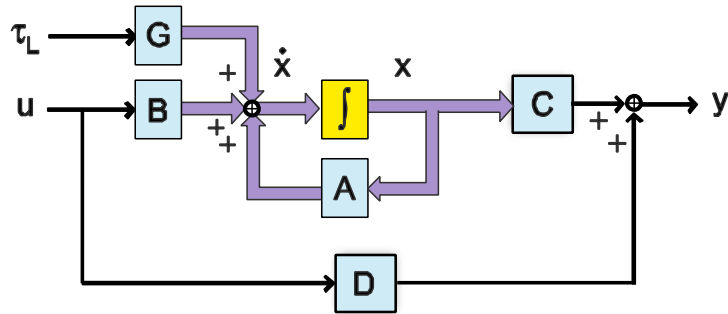


Figura 2.3: Diagrama de bloques del sistema Lineal e Invariante en el Tiempo (Linear Time-Invariant, LTI por sus siglas en inglés) (2.6) representado en espacio de estados. Figura adaptada de [Kuo, 1996], [Ogata, 2010], [Franklin et. al., 1991], por nombrar algunos.

## 2.4.2. Propiedades del modelo en espacio de estados del motor de CD

El motor de CD está representado matemáticamente por las ecuaciones en espacio de estados (2.7), por su arreglo, el sistema es de segundo orden, donde los estados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . En este apartado se realizan los análisis de estabilidad por el método directo de Lyapunov así como la Controlabilidad y la Observabilidad del sistema.

### 2.4.2.1. Parámetros del motor de CD

A lo largo de este trabajo, se dará uso al conjunto de parámetros del motor de CD, los cuales se definen como:

- $R_a$  [ $\Omega$ ]. Resistencia en el devanado de la armadura.
- $L_a$  [H]. Inductancia en el devanado de la armadura.
- $K_b$  [V s/rad]. Constante electromotriz.
- $J$  [Kg m<sup>2</sup>]. Momento de inercia.
- $B$  [N m/rad/s]. Constante de fricción.

**Propiedad 1** (Parámetros del Motor de CD). *Dado el conjunto de parámetros del motor de CD son  $\{ R_a, K_b, L_a, B \text{ y } J \} \in \mathbb{R}$  y son distintos de cero, cuyo orden representa la jerarquía numérica, i.e.,  $R_a > K_b > L_a > B > J > 0$ .*

Cabe señalar que en el Apéndice A la Tabla A.1 contiene los valores que corresponden a estos parámetros.

### 2.4.2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov del motor de CD

Se dice en [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] que si un sistema está posicionado en un punto de equilibrio, permanecerá en ese punto, si no es perturbado o afectado por ninguna excitación por parte de la entrada, i.e.,  $\mathbf{u}_0 = 0$  y  $\mathbf{w}_0 = 0$ . Un estado  $\mathbf{x}_e$  es descrito como un punto de equilibrio el cual para un sistema lineal puede ser encontrado en la solución de

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_e \quad (2.8)$$

También se dice que en un sistema lineal continuo, el origen es el único estado de equilibrio si la matriz  $\mathbf{A}$  es no singular para todo  $t$ .

**Propiedad 2** (Punto de Equilibrio). *El modelo matemático del motor de CD dado por (2.7a) tiene como punto de equilibrio el origen, i.e., sin excitación de la fuente de voltaje  $V_s = 0$  y sin perturbación del par de carga  $\tau_L = 0$ , el motor de CD tiene punto de equilibrio*

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

por lo que el motor de CD permanece en reposo.

**Prueba.** De forma directa en el modelo (2.7a), se tiene de la definición de punto de equilibrio que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} 0 \quad (2.10)$$

El determinante de la matriz de estados ( $\mathbf{A}$ ) es

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{JL_a} (BR_a + K_b^2) \neq 0 \quad (2.11)$$

Dado que los parámetros del motor de CD cumplen con la **Propiedad 1** y el determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  del modelo (2.7a) es distinto de cero, queda demostrado que el único punto de equilibrio que tiene el sistema del motor de CD es el origen.  $\square$

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3], hay una definición para la **estabilidad en el sentido de Lyapunov**, la cual señala que el estado  $\mathbf{x}_e$  es un punto de equilibrio estable para el tiempo  $t = t_0$  si para cualquier valor  $\varepsilon > 0$  existe un número  $\delta(\varepsilon, t_0)$ , tal que si la norma euclidiana  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$  para toda  $t \geq t_0$ .

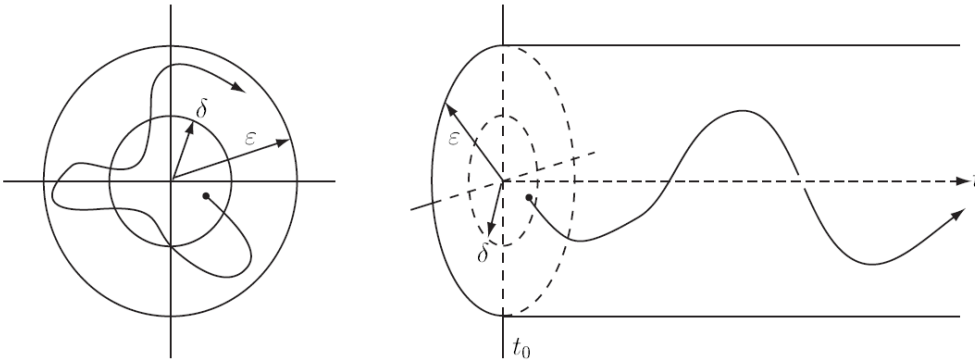


Figura 2.4: Estabilidad entorno al estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  en el sentido de *Lyapunov*. Figura tomada de [Haddad / Chellaboina, 2008, Capítulo 3].

En la Figura 2.4, se muestra en un plano de fase, la respuesta de los dos estados de un sistema de segundo orden. De acuerdo a la Figura 2.4 la estabilidad en el sentido de *Lyapunov*

indica que, si el estado inicial del sistema  $\mathbf{x}_0$  está dentro del área del disco de radio  $\delta$  entonces la trayectoria deberá permanecer todo el tiempo dentro del área que define el radio  $\varepsilon$ .

En [Hendricks et. al., 2008] se describe una definición más de estabilidad; el estado  $\mathbf{x}_e$  es un punto de equilibrio estable asintóticamente para el tiempo  $t = t_0$ , si el sistema es estable en el *sentido de Lyapunov* y si existe un número  $\delta(t_0)$  tal que si  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0$ . Si  $\delta$  es independiente del tiempo inicial  $t_0$  el sistema es uniformemente y asintóticamente estable.

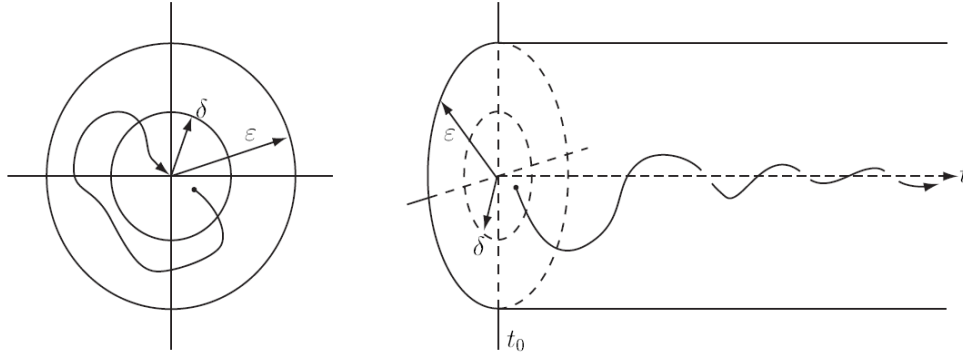


Figura 2.5: Estabilidad asintóticamente estable para un estado  $\mathbf{x}_e$ . Figura tomada de [Haddad / Chellaboina, 2008, Capítulo 3].

Tomando como referencia la Figura 2.5, el estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  es asintóticamente estable, si la solución al sistema comienza en  $(\mathbf{x}_0)$ , algún punto dentro del área  $\delta$  cuya trayectoria no sea mayor a  $\varepsilon$ , esta tiende a converger al estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ .

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3.7.5] el método directo de *Lyapunov* está definido de la siguiente manera:

**Definición** Los métodos de *Lyapunov* para la estabilidad son conocidos como método directo [Haddad / Chellaboina, 2008] y está basado en la noción de una función definida positiva del vector de estados  $\mathbf{x}$  [Hendricks et. al., 2008]. La función escalar continua  $V(\mathbf{x})$  es definida positiva si y solo si

- I.  $V(0) = 0$ ,
- II.  $V(\mathbf{x}) > 0$  para todo el estado  $\mathbf{x}$  distinto de cero y
- III.  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  por  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ .

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] se definen dos teoremas, los cuales describen la estabilidad en el sentido de *Lyapunov* de un sistema. Estos son:

**Teorema 1.** (Descrito como Teorema de estabilidad **3A**). El sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.12)$$

es estable en el sentido de *Lyapunov* si  $V(\mathbf{x}, t)$  es una función definida positiva y si y sólo si

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad (2.13)$$

**Teorema 2.** (Descrito como Teorema de estabilidad **3B**). *El sistema es asintóticamente estable si  $V(\mathbf{x}, t)$  es una función definida positiva y si y sólo si*

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}, t) < 0 \quad (2.14)$$

Si la función definida positiva, satisface el Teorema 1 o el Teorema 2, es llamada *función de Lyapunov*.

**Propiedad 3** (Estabilidad asintótica del motor de CD). *El modelo matemático en espacio de estados del motor de CD dado por (2.7a), sin excitación de voltaje de alimentación  $V_s = 0$ , y sin perturbación del par de carga  $\tau_L = 0$ , tiene como punto de equilibrio el origen, de acuerdo a la **Propiedad 2** y este es asintóticamente estable de acuerdo al Teorema 2.*

**Prueba.** Sea el modelo del motor de CD en espacio de estados (2.7a), se propone una función cuadrática definida positiva como

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.15)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estados del motor de CD, y la matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y ( $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ ) es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La matriz  $\mathbf{P}$  debe de ser definida positiva, para que la función (2.15) sea definida positiva de acuerdo a la definición. Así mismo, derivando respecto al tiempo (2.15), considerando (2.7a) y realizando manipulación algebraica se tiene

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left( \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \right) \mathbf{x} \quad (2.17)$$

El término encerrado en paréntesis del lado izquierdo de (2.17) se define como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (2.18)$$

por lo que (2.17), resulta como

$$\frac{dx}{dt}V(x) = -x^T \mathbf{Q} x \quad (2.19)$$

Para que (2.19) satisfaga la condición del **Teorema 2**, la matriz  $\mathbf{Q}$  debe de ser definida positiva.

Por lo tanto, se debe de encontrar la estructura de las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  para asegurar que se cumpla (2.18). La matriz de estados del motor de CD es  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , por lo que se propone que la matriz  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sea

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Se ve de forma directa que la matriz  $\mathbf{Q}$ , dada en (2.20), es definida positiva. Reemplazando las expresiones matriciales que se tienen en (2.7a) y (2.20), la expresión (2.18) resultante es

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & \frac{K_b}{J} \\ -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Realizando las operaciones en (2.21), el conjunto de ecuaciones en términos de los elementos de la matriz  $\mathbf{P}$  son

$$\begin{aligned} 2\frac{K_b}{J}P_{12} - 2\frac{R_a}{L_a}P_{11} &= -1 \\ \frac{K_b}{J}P_{22} - \frac{K_b}{L_a}P_{11} - \left(\frac{B}{J} + \frac{R_a}{L_a}\right)P_{12} &= 0 \\ 2\frac{K_b}{L_a}P_{12} + 2\frac{B}{J}P_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Los valores para cada variable de la matriz  $\mathbf{P}$  están definidos como.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\beta_1\beta_2} \begin{bmatrix} L_a [K_b^2\beta_3 + \beta_1 B] & K_b J L_a (R_a - B) \\ K_b J L_a (R_a - B) & J [R_a\beta_1 + K_b^2\beta_3] \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= B L_a + R_a J \\ \beta_2 &= R_a B + K_b^2 \\ \beta_3 &= L_a + J \end{aligned}$$

Por cuestiones físicas inherentes a la máquina, los parámetros (eléctricos y mecánicos) son positivos, i.e., satisfacen la **Propiedad 1**. Se utiliza el criterio de *Sylvester* como condición necesaria para conocer si la matriz  $\mathbf{P}$  es definida positiva.

El **primer menor principal dominante** de la matriz  $\mathbf{P}$  es

$$\det([\mathbf{P}_{11}]) = \frac{1}{2(R_a B + K_b^2)(B L_a + R_a J)} L_a [K_b^2(L_a + J) + (B L_a + R_a J) B] \quad (2.23)$$

El resultado del determinante dado en (2.23) es positivo. El **segundo menor principal dominante** es el determinante de la matriz  $\mathbf{P}$  (2.22) es

$$\det([\mathbf{P}]) = \frac{1}{2\beta_1\beta_2} \left( L_a [K_b^2\beta_3 + \beta_1 B] \right) \left( J [R_a\beta_1 + K_b^2\beta_3] \right) - [K_b J L_a (R_a - B)]^2 \quad (2.24)$$

Al manipular algebraicamente (2.24) se obtiene

$$\det([\mathbf{P}]) = \frac{1}{2\beta_1\beta_2} \left( L_a J \left[ 2L_a J (\psi_1 + R_a^2 B^2 + K_b^4) + \beta_2 \psi_2 + \psi_1 \beta_3^2 + J^2 K_b^4 \right] + L_a^4 K_b^4 \right) \quad (2.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= K_b^2 R_a B \\ \psi_2 &= L_a^2 B^2 + J^2 R_a^2 \end{aligned}$$

La expresión algebraica dada en (2.25) es el segundo menor principal dominante de  $\mathbf{P}$  el cual es positivo.

Debido a que el primer y el segundo menor principal dominantes de la matriz  $\mathbf{P}$  son positivos, entonces la matriz  $\mathbf{P}$  es definida positiva, por lo tanto, se cumple que la función cuadrática (2.15) es definida positiva. Además, la suposición de la estructura de la matriz  $\mathbf{Q}$  es definida positiva, por lo tanto se puede decir que la función (2.19) es negativa definida. Con esto, satisface lo que establece en el **Teorema 2**, por lo que se prueba que el modelo en espacio de estados del motor de CD (2.7) es asintóticamente estable.  $\square$

### 2.4.2.3. Controlabilidad del motor de CD

En textos académicos se exponen múltiples técnicas para conocer la controlabilidad de los sistemas, sin embargo, la existencia de éste, está ligado a la existencia de un vector que pueda ofrecer una solución al control del sistema en lazo cerrado por medio de las entradas.

Sea la matriz  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$  de controlabilidad, la cual tiene una estructura de

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad |\mathbf{AB} \quad |\mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad |\dots \quad |\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{S}$  es construida por el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  del modelo (2.7a), por lo que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . El sistema es controlable si y solo si el **Rango** de la matriz  $\mathbf{S}$  equivale al orden  $n$  [Kuo, 1996, Capítulo 5].

**Propiedad 4** ( Controlabilidad del motor de CD ). *Sea el modelo del motor de CD (2.7), se entiende que es **completamente controlable**, si al suministrar un voltaje  $V_s$  a la entrada del sistema (en las terminales de los devanados de la armadura del motor de CD), pueda alterar o afectar **todas** las variables de estado del sistema, i.e., a la corriente de armadura  $i_a$  y a la velocidad angular de la máquina  $\omega_R$  por medio de una ganancia en lazo cerrado.*

**Prueba.** Sustituyendo las matrices del motor de CD dadas en (2.7) en (2.26), la matriz resultante de controlabilidad se expresa como

$$\mathbf{S} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \quad (2.27)$$

con

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a^2} \\ \frac{K_b}{JL_a} \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad (2.27), es lineal independiente si dado el par de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  cumplen con la expresión  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones, donde  $c_{1,2}$  son escalares diferentes de cero

$$c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a^2} \\ \frac{K_b}{JL_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \frac{c_1}{L_a} & -\frac{c_2 R_a}{L_a^2} & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{c_2 K_b}{JL_a} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La solución para el sistema de ecuaciones dado en (2.28), se ve de forma directa que las constantes  $c_1$  y  $c_2$  son cero, i.e.,  $c_1 = c_2 = 0$  por esta razón el vector  $\mathbf{v}_1$  no será múltiplo del

vector  $\mathbf{v}_2$  [Poole, 2011, Capítulo 2], esto implica que, los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son linealmente independientes, lo que implica que la matriz de controlabilidad  $\mathbf{S}$  tiene rango completo. i.e.,  $Rango(\mathbf{S}) = 2$  por lo que se demuestra que el modelo en espacio de estados (2.7) es completamente controlable.  $\square$

Como una medida de comparación, se expone el criterio de controlabilidad a través del Gramiano por el método de la ecuación matricial de Lyapunov [Williams II / Lawrence, 2007, Capítulo 6]

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (2.29)$$

Cabe señalar que la ecuación (2.29) es similar a (2.18), por lo que las propiedades para su construcción son las misma.

Considerando a (2.29) y si la matriz de estados  $\mathbf{A}$  del sistema (2.7a) tiene valores propios con parte real negativa, entonces, es posible encontrar la estructura de la matriz  $\mathbf{W}_c$  (Gramiano de controlabilidad). Como requisito para (2.29), la matriz  $\mathbf{W}_c$  es simétrica definida positiva, si se cumple lo anterior, entonces el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  son totalmente controlables

El Teorema 7 en [Fortuna / Frasca, Capítulo 2] describe a la ecuación (2.29) como la ecuación matricial de Lyapunov, donde existe solución única si

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0, \quad \forall i, j$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $\mathbf{A}$  y  $\mu_1, \dots, \mu_n$  son los de  $\mathbf{A}^T$ .

Considerando la ecuación de Lyapunov (2.29), si  $\mathbf{A}$  es la matriz de estados de un sistema es que asintóticamente estable, entonces por el Teorema 7 existe una solución integral

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}t} dt \quad (2.30)$$

donde la estructura matricial del Gramiano  $\mathbf{W}_c$  es no singular para cualquier valor de  $t > 0$  [Naidu, 2000, Apéndice B.4]. Además, si el producto de la matriz  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  es positiva definida, también deberá de ser  $\mathbf{W}_c$  [Fortuna / Frasca, Capítulo 5].

**Prueba.** Dada la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema en espacio de estados (2.7a) donde sus valores se obtiene por

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (2.31)$$

manipulando algebraicamente se obtiene

$$\lambda_{1,2} = -\frac{BL_a + R_a J \pm \sqrt{[BL_a + R_a J]^2 - 4(R_a B + K_b^2) J L_a}}{2J L_a} \quad (2.32)$$

y el conjunto de parámetros del motor de CD satisfacen la **Propiedad 1**. Considerando la ecuación (2.32), el análisis para los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  tendrán el siguiente criterio:

- R1.** Sea  $[BL_a + R_a J]^2 > 4(R_a B + K_b^2) J L_a$ , los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  tendrán dos valores propios reales y diferentes los cuales se encontrarán del lado izquierdo del plano complejo  $s$  con la posibilidad de que un valor propio se encuentre muy cerca del origen.
- R2.** Sea  $[BL_a + R_a J]^2 = 4(R_a B + K_b^2) J L_a$ , tendrán dos valores propios reales e iguales, los cuales se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$  sobre el eje real.

**R3.** Sea  $[BL_a + R_aJ]^2 < 4(R_aB + K_b^2)JL_a$ , tendrán dos valores propios complejos conjugados los cuales se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$ .

En cualquiera de los casos de los puntos **R**'s, los valores propios de la matriz **A** tienen parte real negativa, por lo que se entiende que existe una solución a la ecuación matricial de Lyapunov (2.29). La estructura del Gramiano  $\mathbf{W}_c$  tiene como requisito, que sea una matriz simétrica definida positiva, por lo cual se puede expresar como

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} W_{c(1,1)} & W_{c\phi} \\ W_{c\phi} & W_{c(2,2)} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Sustituyendo las matrices del sistema de motor de CD en espacio de estados (2.7) en la ecuación de matricial de Lyapunov (2.29), así como las matriz de Gramiano (2.33), se tiene

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{c(1,1)} & W_{c\phi} \\ W_{c\phi} & W_{c(2,2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{c(1,1)} & W_{c\phi} \\ W_{c\phi} & W_{c(2,2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & \frac{K_b}{J} \\ -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Resolviendo la ecuación matricial (2.34)

$$\begin{aligned} -2W_{c(1,1)}\frac{R_a}{L_a} - 2W_{c\phi}\frac{K_b}{L_a} &= -\frac{1}{L_a^2} \\ \frac{K_b}{J}W_{c(1,1)} - \frac{K_b}{L_a}W_{c(2,2)} - W_{c\phi}\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right) &= 0 \\ 2W_{c\phi}\frac{K_b}{J} - 2\frac{B}{J}W_{c(2,2)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

La estructura matricial del Gramiano de controlabilidad (2.34) es

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} W_{c(1,1)} & W_{c\phi} \\ W_{c\phi} & W_{c(2,2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\beta_1} \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_aL_a} [K_b^2JR_a + R_a^2JB + B^2L_aR_a] & K_bB \\ K_bB & K_b^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

donde

$$\beta_1 = K_b^2L_aB - K_b^2JR_a - R_a^2JB - B^2L_aR_a$$

Para comprobar que la matriz  $\mathbf{W}_c$  sea no-singular se realiza la operación matricial  $\det([\mathbf{W}_c])$ , por lo tanto

$$\det([\mathbf{W}_c]) = \frac{1}{2\beta_1} \begin{bmatrix} -K_b^2 \\ R_aL_a \end{bmatrix} [K_b^2JR_a + R_a^2JB + B^2L_aR_a] - K_b^2B^2 \quad (2.37)$$

reduciendo la expresión (2.37) se obtiene

$$\det([\mathbf{W}_c]) = \frac{K_b^2}{2L_a(K_b^2L_aB - K_b^2JR_a - R_a^2JB - B^2L_aR_a)} [-K_b^2J - BR_aJ - 2L_aB^2] \quad (2.38)$$

La expresión (2.38) es el  $\det([\mathbf{W}_c]) \neq 0$  si  $[K_b^2 L_a B] \neq [-K_b^2 J R_a - R_a^2 J B - B^2 L_a R_a]$  donde también cumple con la **Propiedad 1**, por lo tanto se demuestra que la estructura del Gramiano es no singular.

Dado que la estructura de  $\mathbf{W}_c$  en (2.36) es simétrica positiva, entonces el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  de la expresión en espacio de estados del motor de CD (2.7a) es completamente controlable. □

#### 2.4.2.4. Observabilidad del motor de CD

Para fines de este trabajo, es importante conocer la dinámica de los estados del sistema a partir de la medición de alguna salida, por lo cual es importante asociar alguna técnica de observabilidad que soluciones este problema.

Antes a este punto no es claro saber si se puede asociar algún observador al modelo del motor de CD (2.7), para ello se aplica el criterio de obserbabilidad que determinará si el sistema es observable

Sea la matriz  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz de observabilidad, estructurada como

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

La matriz de observabilidad  $\mathbf{V}$ , está construida según el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  del modelo en espacio de estados del motor de CD (2.7), donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ . El sistema es completamente observable si la matriz  $\mathbf{V}$  tiene Rango del orden  $n$  [Kuo, 1996, Capítulo 5].

**Propiedad 5** (Observabilidad del motor de CD). *Sea el modelo del motor de CD (2.7), el sistema será completamente observable si el rango de la matriz de observabilidad  $\mathbf{V}$  (2.39) es de orden  $n$ . Si se cumple el criterio de observabilidad, entonces es posible diseñar un observador para el sistema del motor de CD, para conocer todos y cada uno de los estados a la salida conociendo la corriente medida en el armadura  $i_a$  y la velocidad angular  $\omega_R$  en el eje del motor.*

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] describe el uso del Gramiano de observabilidad como herramienta de análisis de la independencia lineal, para un intervalo de tiempo  $t_0 = 0$  hasta  $t_f$ , expuesta de la siguiente manera.

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{C} \mathbf{C}^T e^{-\mathbf{A}^T t} dt \quad (2.40)$$

donde  $e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right]$  [Ogata, 2010, Capítulo 9.7, Apéndice B].

Al igual que en la prueba de controlabilidad,  $\mathbf{W}_o$  tiene solución si, la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema en espacio de estados (2.7) tiene valores propios con parte real negativa.

Como requisito para la estructura de la matriz de  $\mathbf{W}_o$ , es que el Gramiano de observabilidad sea simétrica definida positiva y no singular para cualquier  $t > 0$  [Naidu, 2000, Apéndice B.4]. El productor de  $\mathbf{C} \mathbf{C}^T$  también es una matriz simétrica definida positiva.

El sistema en espacio de estados (2.7), es totalmente observable si tiene una estructura matricial  $\mathbf{W}_o$  después de la manipulación matemática de (2.40), por lo tanto la matriz  $\mathbf{V}$  (2.39) es linealmente independiente y tiene rango de orden  $n$ .

**Prueba.** En la prueba de controlabilidad, se puede preciar que los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  tienen parte real negativa, cuyos criterios en los puntos  $\mathbf{R}$ 's describen la posible posición de cada uno de ellos en el plano complejo  $s$ , por lo tanto, es posible encontrar la estructura de la matriz del gramiano de observabilidad  $\mathbf{W}_o$ .

Dado el modelo en espacio de estados del moto de CD (2.7), donde se emplea el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  para construir la matriz  $\mathbf{V}$  de observabilidad (2.39) cuyo arreglo es el siguiente

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

donde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{K_b}{J} \\ -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{B}{J} \\ -\frac{K_b}{L_a} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Dada la expresión  $e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right]$  aplicada a la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema del motor de CD (2.7) se obtiene la siguiente expresión

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{B}{J}}{k_1} & -\frac{\frac{K_b}{L_a}}{k_1} \\ \frac{\frac{K_b}{J}}{k_1} & \frac{s + \frac{R_a}{L_a}}{k_1} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

donde

$$k_1 = s^2 + \left( \frac{B}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) s + \frac{R_a B + K_b^2}{L_a J} \quad (2.44)$$

Dadas las raíces del polinomio  $k_1$  desde la factorización de un binomio cuya expresión es la siguiente

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2JL_a} \left[ - (BL_a + R_a J) \pm \sqrt{(BL_a + R_a J)^2 - 4(R_a B + K_b^2) JL_a} \right]$$

Se sabe que el conjunto de valores (parámetros del motor de CD) cumplen con la **Propiedad 1**, por lo tanto, el análisis para los términos independientes de (2.44) serán muy similares a los puntos  $\mathbf{R}$ 's de la ecuación 2.32 cuyo propósito es indicar la posible ubicación de las raíces en el plano complejo  $s$ .

Por lo tanto la ecuación matricial (2.43) en término de  $\alpha_{1,2}$  se expresará como

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{B}{J}}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} & -\frac{\frac{K_b}{L_a}}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \\ \frac{\frac{K_b}{J}}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} & \frac{s + \frac{R_a}{L_a}}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Usando la transformada inversa de Laplace en la matriz (2.45), cuya expresión pasa del dominio de  $s$  a una solución en el dominio de  $t$ , a esta matriz de transformación se le conoce como matriz de transición de estados [Ogata, 2010]

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left[ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right]$$

la matriz (2.45) en términos de  $t$  se expresar como

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \frac{B-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{B-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} e^{-\alpha_2 t} & \frac{K_b}{L_a} (e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t}) \\ \frac{K_b}{J} (e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t}) & \frac{R_a-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{R_a-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} e^{-\alpha_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Dado que  $\phi^{-1}(t) = \phi(-t) = e^{-\mathbf{A}t}$  [Ogata, 2010, Capítulo 9 pp 666], la matriz (2.46) se convierte en

$$e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \frac{B-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{B-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} e^{\alpha_2 t} & \frac{K_b}{L_a} (e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t}) \\ \frac{K_b}{J} (e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t}) & \frac{R_a-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{R_a-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Dada la ecuación del Gramiano de observabilidad (2.40), la solución integral se puede expresar como

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{C} \mathbf{C}^T e^{-\mathbf{A}^T t} dt = \begin{bmatrix} \beta \left[ \frac{1}{L_a} \right]^2 + \psi_1^2 & \beta \left[ \left( \frac{1}{J} \right) \psi_1 + \left( \frac{1}{L_a} \right) \psi_2 \right] \\ \beta \left[ \left( \frac{1}{J} \right) \psi_1 + \left( \frac{1}{L_a} \right) \psi_2 \right] & \beta \left[ \frac{1}{J} \right]^2 + \psi_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{B-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{B-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} e^{\alpha_2 t} \\ \psi_2 &= \frac{R_a-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{R_a-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} e^{\alpha_2 t} \\ \beta &= K_b (e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t}) \end{aligned}$$

Se puede apreciar que la expresión (2.48), cumple con las características de una matriz simétrica definida positiva. Por otra parte, para comprobar que el Gramiano de observabilidad  $\mathbf{W}_o$  sea una matriz no singular, se realiza su determinante  $\det([\mathbf{W}_o])$  de la siguiente manera

$$\det[\mathbf{W}_o] = \overbrace{\left( \beta \left[ \frac{1}{L_a} \right]^2 + \psi_1^2 \right) \left( \beta \left[ \frac{1}{J} \right]^2 + \psi_2^2 \right)}^{\mathbf{a}} - \underbrace{\beta^2 \left[ \left( \frac{1}{J} \right) \psi_1 + \left( \frac{1}{L_a} \right) \psi_2 \right]^2}_{\mathbf{b}} \quad (2.49)$$

Si el término de  $\mathbf{a}$  es diferente de  $\mathbf{b}$  se puede demostrar que el determinante de la matriz (2.48) es

$$\det[\mathbf{W}_o] \neq 0$$

Por lo tanto si la estructura del Gramiano de observabilidad es una matriz simétrica definida positiva y además es no singular; se demuestra que los vectores  $v_1$  y  $v_2$  de la matriz observabilidad (2.41) son linealmente independientes, por lo tanto, el rango de la matriz  $\mathbf{V}$  (2.41) es de orden  $n$ , i.e.,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ ; por lo que se concluye que el modelo en espacio de estados del motor de CD (2.7) es completamente observable.  $\square$

### 2.4.3. Modelo en el dominio de la frecuencia

A partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales, que representan al modelo de un sistema lineal e invariante en el tiempo, es posible manipular de manera algebraica el orden de estas a modo de encontrar una relación dinámica; el grado de la función final, responde al número de ecuaciones del modelo inicial. La función de transferencia se define como “la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, con todas las condiciones iniciales iguales a cero” [Kuo, 1996, Capítulo 3], de manera matemática la función de transferencia se expresa como  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ ; la función de transferencia también se conoce como una relación entrada-salida del sistema, el orden está definido como el  $n$ -ésimo de la ecuación diferencial.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 u(t) \quad (2.50)$$

Los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  y  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  son constantes, aplicando la expresión  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$  a la ecuación (2.50), el sistema entrada-salida queda expresado de forma algebraica

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_0 Y(s) = b_{n-1} s^{n-1} U(s) + \cdots + b_0 U(s) + f(s, x_0) \quad (2.51)$$

donde  $f(s, x_0)$  es una función estándar con condiciones iniciales a cero, se tiene que  $Y(s) = G(s)U(s)$  es la expresión entrada-salida y es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{zeros}_s}{\text{polos}_s} \quad (2.52)$$

donde

$$\text{polos}_s = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (2.53a)$$

$$\text{zeros}_s = b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_0 \quad (2.53b)$$

La función de transferencia en su forma condensada y de manera general se expresa como [Goodwin et. al., 2000, Capitulo 4.8]

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + \beta_i)}{\prod_{j=1}^n (s + \alpha_j)} \quad (2.54)$$

donde  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  y  $\beta_i \in \mathbb{C}$ .

En [Ogata, 2010] se describe una relación entre los modelos en términos de función de transferencia y el modelo en espacio de estados, donde se puede hacer la transformación directa. Sea un modelo en espacio de estados que tiene la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.55a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.55b)$$

Aplicando la transformada de Laplace en (2.55) se obtiene

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (2.56a)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (2.56b)$$

donde las condiciones iniciales son  $\mathbf{x}(0) = 0$ , (2.56a) se puede expresar como

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad (2.57)$$

pre-multiplicando ambos términos de la ecuación por  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) \quad (2.58)$$

este término se puede sustituir en (2.56b) cuyo resultado es

$$Y(s) = \left( \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) U(s) \quad (2.59)$$

dado que la relación entrada salida es (2.52), las funciones de transferencia se pueden obtener directamente del modelo en espacio de estados por la ecuación

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.60)$$

Para el modelo en espacio de estados de (2.6) se puede obtener las funciones de transferencia seleccionando únicamente una entrada e ignorando la otra, ya que no es posible obtener las funciones de transferencia por la ecuación (2.60) para las dos entradas en la misma operación. Se dice en [Goodwin et. al., 2000, Capitulo 4] que una función de transferencia es una relación entre la entrada y la salida donde se describe las propiedades del sistema de manera algebraica.

#### 2.4.4. Función de transferencia por ecuaciones diferenciales del motor de CD

Dadas las ecuaciones diferenciales (2.5) y (2.1) que representan la dinámica del motor de CD, al hacer uso de la transformada de Laplace con condiciones iniciales iguales cero en estas, se obtiene la siguiente expresión

$$V_s(s) = (R_a + L_a s)I_a(s) + K_b \Omega(s) \quad (2.61a)$$

$$K_b I_a(s) - \Gamma_L(s) = (B + J s)\Omega(s) \quad (2.61b)$$

donde  $V_s(s)$  es el voltaje que alimenta a la armadura del motor de CD o también conocido como señal de entrada al sistema,  $I_a$  es la corriente medida en la armadura,  $\Omega(s)$  la salida es la velocidad angular en el eje del motor,  $\Gamma_L(s)$  es la perturbación externa al eje del motor también es considerada una entrada más al sistema, el conjunto de constantes  $\{B, L_a, R_a, J, K_b\}$  son parámetros de la máquina.

El esquema del motor de CD que responde al grupo de ecuaciones (2.61), se muestra en la Figura 2.6

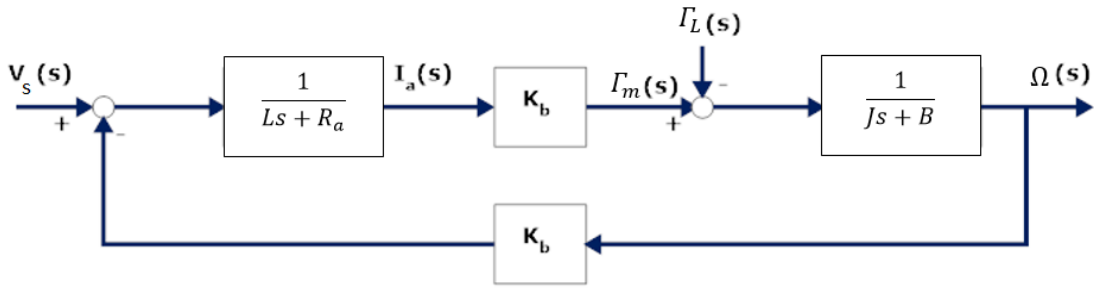


Figura 2.6: Esquema del motor de CD en el dominio de la frecuencia según conjunto de ecuaciones (2.61) [Chiasson, 2005, Capítulo 2].

Dado el conjunto de ecuaciones en el dominio de Laplace  $s$  (2.61) y después de la manipulación algebraica, en consideración con una perturbación nula  $\Gamma_L(s) = 0$  y tomando en cuenta la entrada  $V_s(s)$  al sistema con la salida  $\Omega(s)$ , la expresión de la función de transferencia resultante es

$$\frac{\Omega(s)}{V_s(s)} = \frac{\frac{K_b}{JL_a}}{s^2 + s \left( \frac{JR_a + BL_a}{JL_a} \right) + \frac{BR_a + K_b^2}{JL_a}} \quad (2.62)$$

Otra función de transferencia para el motor de CD según el grupo de ecuaciones (2.61) donde se toma en consideración la entrada a  $V_s$  y la salida a  $I_a$ , el producto de entrada-salida relacionada se expresa como

$$\frac{I_a(s)}{V_s(s)} = \frac{s \frac{1}{L_a} + \frac{B}{JL_a}}{s^2 + s \left( \frac{JR_a + BL_a}{JL_a} \right) + \frac{BR_a + K_b^2}{JL_a}} \quad (2.63)$$

Claramente se puede ver que el denominador (polinomio característico) es común entre las ecuaciones (2.62) y (2.63) este polinomio también es conocido como polinomio característico de la función de transferencia, cuyo contenido son los polos o las raíces del sistema.

Como características de la función de transferencia (2.62) resaltan los siguientes aspectos:

- I. La ecuación característica o polinomio característico es de segundo orden o  $n = 2$ .
- II. El sistema no tiene ceros pero tiene una constante, que ante una excitación el estado estacionario, no llega al valor de la excitación.

### 2.4.5. Propiedades de la función de transferencia del motor de CD

Dadas la construcción de las ecuaciones en relación entrada-salida (*Función de transferencia*) del motor de CD expresada en las ecuaciones (2.62) y (2.63), el polinomio característico tiene dominio en ambas ecuaciones. Las funciones de transferencia serán el objeto de estudio para los criterios de estabilidad de Routh Hurwitz, análisis del diagrama de Bode y lugar geométrico de las Raíces.

**Propiedad 6** (Estabilidad por el cálculo de la raíces). *Dado los polos del polinomio característico de las funciones de transferencia (2.63) y (2.62) del motor de CD, el sistema es estable si todas las raíces del polinomio están del lado izquierdo del plano complejo  $s$ .*

**Prueba.** Dados los modelos en función de transferencia (2.62) y (2.63), el polinomio característico tiene las siguientes raíces

$$s_1, s_2 = \frac{-(JR_a + BL_a) \pm \sqrt{(JR_a + BL_a)^2 - 4JL_a(BR_a + K_b^2)}}{2JL_a} \quad (2.64)$$

Se sabe que los parámetros del motor de CD cumple con la **Propiedad 1**, por lo cual, las raíces del polinomio característico son los polos del sistema, y la ubicación de estos dependerá del radicando de (2.64), cuyo criterios son los siguientes<sup>1</sup>:

- FT1** Si  $(JR_a + BL_a)^2 > 4JL_a(BR_a + K_b^2)$  entonces  $s_1$  y  $s_2$  del polinomio característico de la función de transferencia tendrán dos valores reales y diferentes los cuales se encontrarán del lado izquierdo del plano complejo  $s$  con la posibilidad de que un valor se encuentre muy cerca del origen.
- FT2** Si  $(JR_a + BL_a)^2 = 4JL_a(BR_a + K_b^2)$  entonces el polinomio característico de la función de transferencia tendrá dos valores para  $s_1$  y  $s_2$  reales e iguales, los cuales se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$  sobre el eje real.
- FT3** Si  $(JR_a + BL_a)^2 < 4JL_a(BR_a + K_b^2)$  entonces  $s_1$  y  $s_2$  del polinomio característico de la función de transferencia serán dos valores complejos conjugados los cuales se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$ .

□

Para cualquiera que sea el caso, según los puntos **FT**'s el modelo en función de transferencia del motor de CD garantizan tener raíces parte real negativa en el plano complejo  $s$ , por lo que se puede mencionar que el sistema es estable para el tiempo  $t_o < t$ .

**Propiedad 7** (Estabilidad por el criterio de Routh Hurwitz). *Los modelos en función de transferencia de (2.62) y (2.63) comparten el mismo polinomio característico con las mismas propiedades, por lo que visto como un sistema, el motor de CD es completamente estable si al construir el arreglo de Routh Hurwitz con el polinomio característico no presenta cambio de signo en su primera columna.*

Se sabe que por medio de la **Propiedad 6**, el sistema del motor de CD es estable, sin embargo en este apartado se demostrará que no serán necesarias las raíces para conocer la estabilidad del sistema y únicamente será necesario el polinomio característico, por lo cual, las ecuaciones en función de transferencia, están dadas por (2.62) y (2.63), donde el polinomio característico es

$$JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_b^2 \quad (2.65)$$

$s^2$	$JL_a$	$BR_a + K_b^2$
$s^1$	$JR_a + BL_a$	0
$s^0$	$BR_a + K_b^2$	0

Tabla 2.1: Arreglo del polinomio característico según el criterio de Routh Horwitz

**Prueba.** De [Ogata, 2010, Capítulo 5], el arreglo del criterio de **Routh Hurwitz** se expresa en términos del polinomio (2.65), el cual se muestra en la Tabla 2.1

Se sabe que los parámetros del motor de CD cumplen con la **Propiedad 1**, por lo tanto, en términos del criterio de estabilidad de Routh Hurwitz, el motor de CD es estable dado que satisface la condición de que en la primera columna de la Tabla 2.1 todos tienen un valor positivo, i.e., no hay cambios de signos en la primera columna, lo cual indica que las raíces del polinomio característico están en el semiplano izquierdo. Con esto se prueba que los polos de la función de transferencia (2.62) y (2.63) están en el semiplano izquierdo, por lo que el sistema es estable.  $\square$

#### 2.4.5.1. Análisis de la respuesta frente a una señal de frecuencia

El término de una *señal de frecuencia*, está referido a una señal sinusoidal, i.e., de tipo  $V_s = A_p \sin(\omega t \pm \phi)$  donde  $A_p$  es la amplitud,  $t$  es el tiempo que dura el periodo,  $\phi$  es el desfase de adelanto a atraso de la señal y  $\omega$  es la velocidad angular de la fuente de alimentación <sup>2</sup> para el motor de CD, este último visto como sistema. Para fines de este trabajo, el análisis tiene como objetivo la respuesta en estado estacionario a la salida del sistema de tipo cualitativo.

En [Ogata, 1998, Capítulo 8] se describe al diagrama logarítmica o de Bode como una herramienta de dos gráficas distintas, cuya representación es la magnitud y el ángulo de fase, ambas en términos de la frecuencia.

**Propiedad 8** (Análisis de Bode). *Dado el sistema en un modelo de función de transferencia del motor de CD (2.62), este se puede representar en una gráfica de Bode, cuyo análisis en la magnitud y el ángulo de fase es con respecto a la señal sinusoidal que alimenta a la armadura de la máquina electromecánica y el movimiento angular que tiene de salida. El sistema es interpretado como un filtro paso bajas, i.e., la señal sinusoidal de voltaje de entrada es atenuada a la salida en el movimiento del eje del motor y además la señal de salida tiene un atraso de fase con respecto a la señal de entrada.*

Como una herramienta de análisis, en la magnitud se interpretará el proceso de la señal sinusoidal a la salida del motor de CD con respecto a la señal de entrada, i.e., se compara el efecto que repercute a la velocidad angular en el eje del motor, si la fuente de alimentación es de tipo sinusoidal, así mismo se examina el desplazamiento de la fase en el eje del motor con respecto a la frecuencia de la fuente de alimentación.

**Prueba.** Dada la función de transferencia del motor de CD (2.62), se puede separar la parte real  $\mathbb{R}$  de la parte imaginaria  $\mathbb{I}$  donde  $s = j\omega$

<sup>1</sup>El criterio de esta raíces coinciden con los criterios **R's** de la ecuación 2.32, sin embargo, se exponen aquí con el fin de contar con estos de forma rápida en esta sección

<sup>2</sup>También puede ser expresado en términos de la frecuencia donde  $\omega = 2\pi f$  y  $f = \frac{1}{T}$  donde  $T$  es el periodo de la señal.

$$G(j\omega) = \frac{K_b [BR_a + K_b^2 - \omega^2 JL_a]}{\beta_{mag}} - j \frac{\omega K_b (JR_a + BL_a)}{\beta_{mag}} \quad (2.66)$$

donde

$$\beta_{mag} = [BR_a + K_b^2 - \omega^2 JL_a]^2 + [\omega (JR_a + BL_a)]^2$$

La representación de la magnitud de la ecuación (2.66) es

$$|G(j\omega)| = \frac{K_b}{\sqrt{[BR_a + K_b^2 - \omega^2 JL_a]^2 + \omega^2 (JR_a + BL_a)^2}} \quad (2.67)$$

Suponiendo que al motor de CD lo alimenta una fuente de voltaje con una frecuencia casi cero o muy baja frecuencia  $\omega \cong 0$ , la magnitud en términos logarítmicos es

$$|G(j\omega)| = 20 \log [K] \quad (2.68)$$

donde  $K = \frac{K_b}{BR_a + K_b^2}$  es una constante positiva, lo que significa que la asíntota en bajas frecuencias es una línea horizontal recta a lo largo de la gráfica de la magnitud y no incluye cambios en su trayectoria, por lo que, en términos del funcionamiento del motor de CD, el valor de la amplitud  $A_p$  de la señal sinusoidal de voltaje, permitirá tener el tiempo para que la velocidad angular en el eje pueda llegar a su velocidad nominal correspondiente al voltaje, donde la importancia de la polaridad de alimentación únicamente será para conocer el sentido de giro.

Dada la expresión (2.66) como términos de la magnitud del diagrama de Bode del motor de CD para altas frecuencias donde  $\omega \cong \infty$ , se pueden despreciar los valores de los parámetros por parte de la **Propiedad 1**, por lo cual, la magnitud se puede expresar en términos de  $\omega$

$$|G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\frac{1}{\omega^4} + \frac{1}{[\omega^3 + \omega]^2}} \quad (2.69)$$

Reduciendo la expresión (2.69) con propiedades logarítmicas, para altas frecuencias la magnitud describe una gráfica que tendrá una recta de pendiente negativa de 40 dB.

Para fines del funcionamiento del motor de CD; si la frecuencia  $\omega$  en la señal de entrada ( $V_s = A_p \sin(\omega t)$ ) aumenta su valor, el eje perderá movimiento, lo que significa que para frecuencias muy altas, el eje del motor perderá capacidad de movimiento.

Cabe señalar que el sentido de giro en el eje del motor de CD, depende de la polaridad de la fuente que lo esté alimentado, por lo que una señal de voltaje de tipo sinusoidal (cierto periodo de tiempo la amplitud es positiva  $A_p$  y en otro periodo de tiempo la amplitud es negativa  $-A_p$  como se muestra en la Figura 2.7, fluctuando la polaridad a lo largo del tiempo), obligará al eje de la máquina a cambiar de sentido y velocidad angular según la polaridad y frecuencia de esta, por lo tanto, al suponer que la frecuencia de alimentación es muy baja y la amplitud  $A_p$  de la señal es positiva, el eje de la máquina podría tener un giro en el sentido de las manecillas del reloj, por lo cual, el sentido de giro cambiará cuando la amplitud sea negativa  $-A_p$ .

Según la señal de tipo sinusoidal de la Figura 2.7, el motor de CD puede accionar y detener el eje a lo largo de su amplitud, repitiendo la misma acción pero en sentido contrario al cambiar la polaridad de su amplitud. El tiempo de cambio dependerá del periodo de la frecuencia de

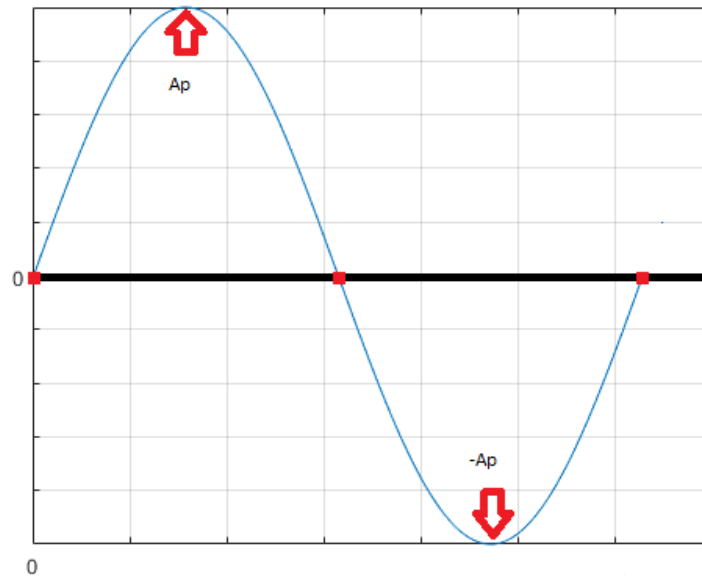


Figura 2.7: Gráfica de función seno, obtenida en MatLab <sup>®</sup>.

la señal de alimentación, por lo que para altas frecuencias el cambio de velocidad y giro será posible verlo como una vibración en una posición angular.

En términos de sistemas electrónicos, el motor de CD atenúa la señal de salida con respecto a la señal de entrada, por lo cual es posible ver el cambio de giro para señales de baja frecuencia, pero por el contrario, para altas frecuencias ya no es muy posible observar esta clase de cambios en el eje, esto se debe a que la señal de salida ya no puede seguir fielmente a la señal de entrada, esto se debe a que hay desfase de la señal de entrada con respecto a la señal de salida.

Para representar el desfase o cambio de fase en términos de (2.66) para el diagrama de Bode, la expresión es

$$\varphi = -\tan^{-1} \left[ \frac{\omega (JR_a + BL_a)}{[BR_a + K_b^2 - \omega^2 JL_a]} \right] \quad (2.70)$$

Es importante describir que la función de transferencia (2.62) tiene dos polos, el análisis de fase está elaborado a partir de la expresión completa por lo que las raíces  $s_1$  y  $s_2$  de (2.64) del polinomio característico están implícitas en este. De la expresión (2.70) se desprenden los siguientes criterios:

- I. En bajas frecuencias donde  $\omega \cong 0$ , no existe desfase alguno, esto confirma que el eje del motor de CD sigue fielmente a la frecuencia sinusoidal del voltaje de entrada.
- II. Existe un cambio de fase de  $-90^\circ$ , cuando  $\omega (JR_a + BL_a) = BR_a + K_b^2 - \omega^2 JL_a$ , esto significa que la frecuencia en el eje del motor de CD se atrasa con respecto a la frecuencia del voltaje de entrada.
- III. Cuando el valor de  $\omega$  es muy grande o  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi$ , existe un retraso de fase total aproximado a  $-180^\circ$  entre la frecuencia del movimiento en el eje y la frecuencia de la señal de voltaje de alimentación en el motor de CD.

□

Dado el análisis de Bode realizado por la parte de la magnitud (2.67) y por parte de la fase (2.70), el motor de CD tiene un comportamiento con características de un filtro paso bajas, debido a que la señal de salida en bajas frecuencias sigue fielmente a la entrada y no existe desfase alguno entre ellas, pero por el contrario, cuando la señal aumenta su frecuencia, la señal de salida es atenuada con respecto a la señal de entrada y esta atenuación es acompañada de un desfase de  $180^\circ$  entre ambas.

#### 2.4.5.2. Comportamiento de las raíces del motor de CD para un lazo cerrado de control proporcional

Como parte de una herramienta de control clásico, el lugar geométrico de las raíces satisface con un método gráfico, la localización de todos los puntos y su trayectoria (asíntotas) que corresponde a los polos y ceros en el plano complejo  $s$  para un sistema en lazo cerrado. La trayectoria comienza a partir de la ubicación de los polos en lazo abierto, dibujando a su paso la ubicación de todos y cada uno de estos en lazo cerrado hacia los ceros del sistema (finitos e infinitos), el factor de la trayectoria de los polos por el plano complejo es a través de una ganancia  $K_{rlocus}$  cuyo valor es desde cero hasta infinito.

**Propiedad 9** (Análisis de las raíces para el sistema del motor de CD). *Dado el modelo en función de transferencia (2.62) del motor de CD en lazo abierto, se puede predecir la trayectoria de los polos en lazo cerrado, por lo que se puede describir las raíces del motor de CD por efecto de una ganancia  $K_{rlocus}$  en lazo cerrado, donde el motor de CD y la ganancia  $K_{rlocus}$  están en un arreglo en cascada.*

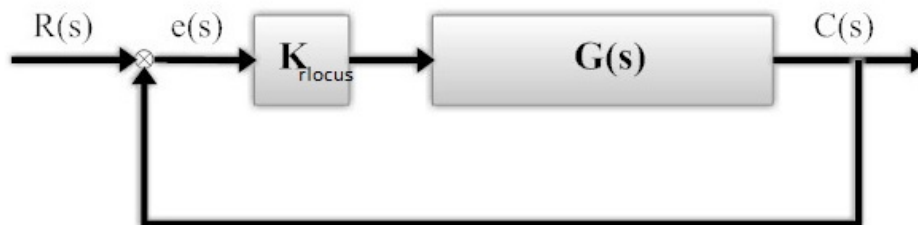


Figura 2.8: Diagrama de bloques para un sistema realimentado, donde la ganancia  $K_{rlocus}$  está en arreglo en cascada con la planta  $G(s)$ ; imagen adaptada de [Franklin et. al., 1991] y [Kuo, 1996].

**Prueba.** Visto al sistema como un diagrama de bloques tal y como lo muestra la Figura 2.8, donde la función de transferencia (2.62) es  $G(s)$ , el cual está en un arreglo en cascada con la ganancia  $K_{rlocus}$ , ambos bloques tienen una realimentación unitaria de control cuyo propósito es conocer la dinámica de los polos de la función de transferencia a lo largo del plano complejo  $s$ . Dado que el sistema del motor de CD cumple con la **Propiedad 1** la dinámica de los polos es según el valor que tenga la ganancia  $K_{rlocus}$  cuyos valores son desde cero hasta infinito. El lazo cerrado de la función de transferencia (2.62), tiene el arreglo según el diagrama de bloque de la Figura 2.8

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_{rlocus} \frac{K_b}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{JR_a + BL_a}{JL_a}\right) s + \frac{BR_a + K_b^2 + K_b K_{rlocus}}{JL_a}} \quad (2.71)$$

donde  $R(s)$  es la entrada ( $V_s$ ) y  $C(s)$  es la salida ( $\Omega$ ), donde las raíces del polinomio característico son:

$$q_1, q_2 = -\frac{1}{2JL_a} \left[ JR_a + BL_a \pm \sqrt{(JR_a + BL_a)^2 - 4JL_a (BR_a + K_b^2 + K_b K_{rlocus})} \right] \quad (2.72)$$

La trayectoria de las asíntotas, comienzan en la ubicación de las raíces en el plano complejo  $s$  en lazo abierto, por lo cual, la **Propiedad 6** describe las posibles posiciones que tienen en los puntos **FT**'s, estos mismo coinciden con la ecuación (2.72) cuando  $K_{rlocus} = 0$ .

Cuando la ganancia  $K_{rlocus} \neq 0$  en la ecuación (2.72), las raíces del polinomio característico tendrán un punto en común sobre el eje real cuando

$$(JR_a + BL_a)^2 = 4JL_a (BR_a + K_b^2 + K_b K_{rlocus}) \quad (2.73)$$

a partir de este punto, el producto de las raíces comparten la misma parte real negativa con distinto signo de la parte imaginaria. Si  $0 \ll K_{rlocus}$  la trayectoria o asíntotas de las raíces serán:

**RL1.** A medida que  $K_{rlocus}$  incrementa su valor, la parte real de las raíces  $q_1$  y  $q_2$  es  $-\frac{JR_a + BL_a}{2JL_a}$ .

**RL2.** Los valores de la parte imaginaria  $\pm \frac{\sqrt{(JR_a + BL_a)^2 - 4JL_a (BR_a + K_b^2 + K_b K_{rlocus})}}{2JL_a}$  tienen una trayectoria recta sobre el plano complejo  $s$  y estos se extienden en paralelo a lo largo del eje imaginario.

Según las raíces del sistema en la **Propiedad 6** se describe al motor de CD como un sistema estable, debido a que las raíces se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$ . Los puntos **RL**'s describen la trayectoria de los polos a lo largo del plano complejo, dado que el valor de una ganancia  $0 < K_{rlocus}$  en (2.71) hace cambiar los valores de las raíces dentro del lado izquierdo del plano, se concluye que el motor de CD es estable para todos los valores de las raíces según la ganancia  $K_{rlocus}$  para un lazo de control.  $\square$

En [Ogata, 1998, Capítulo 6] describe la teoría del lugar geométrico de las raíces, cuyo trazo depende de la ecuación característica (2.71). El ángulo que determina la trayectoria para cada raíz asíntotas está dada de la siguiente manera:

$$\theta_a = \frac{(2k + 1) \pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (2.74)$$

donde  $\theta_a$  son los ángulos de las asíntotas,  $k$  es el número que le corresponde a cada asíntota, el valor del denominador es la diferencia entre al número de polos finitos ( $n$ ) y el numero de ceros finitos ( $m$ ) de (2.62) donde  $n - m = 2$ .

Cabe señalar que el ángulo de las asíntotas (2.74) tiene coincidencia con el punto **RL2**.

Dada la ecuación (2.71) y el conjunto de valores de los parámetros del motor de CD de la Tabla A.1 en el Apéndice A; el lugar geométrico de las raíces se muestra de manera gráfica en la Figura 2.9

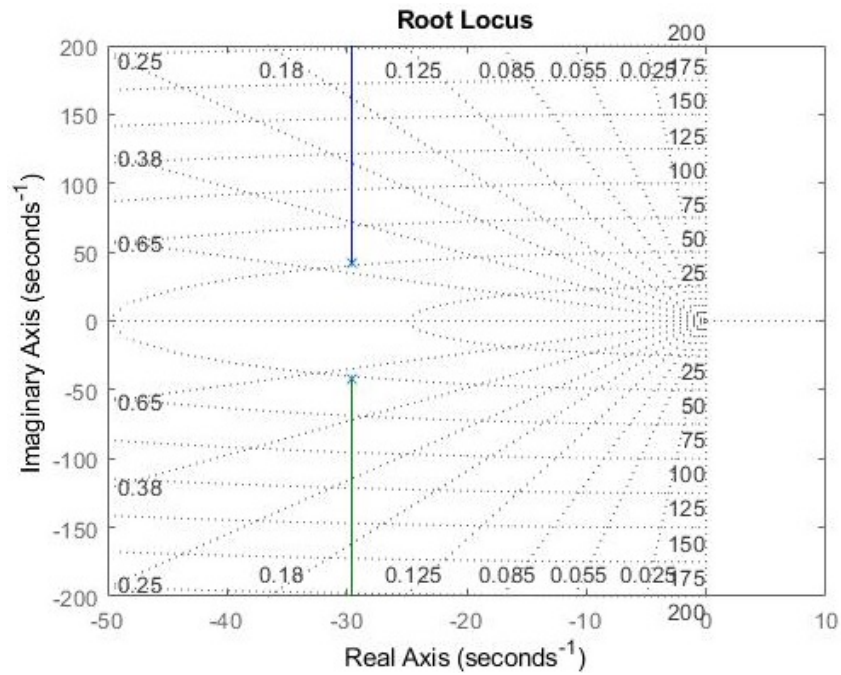


Figura 2.9: Lugar geométrico de las raíces de la ecuación (2.71), la trayectoria de las asíntotas comienza con los polos en lazo abierto (2.62) o en (2.71) con ganancia  $K_{rlocus} = 0$ . Figura obtenida en MatLab

La trayectoria de los polos (finitos) de la ecuación (2.71) según la ganancia  $K_{rlocus}$  están trazados en la Figura 2.9, donde se cumple los puntos **RL**'s por lo cual también satisface la **Propiedad 6** y la **Propiedad 9** para efectos de estabilidad del motor de CD.

# Capítulo 3

## Motor de CD y obtención de velocidad a partir de la medición de posición

Se tiene entendido que dentro de la extensa gama de tareas que desempeña un motor de CD, para algunas, es importante conocer la velocidad de giro en el eje de este. Actualmente existen instrumentos de medición con la capacidad de realizar esta tarea, lamentablemente no en todos los sistemas es posible acoplar estos instrumentos por lo que representa una desventaja frente a esta necesidad. Por otra parte es posible realizar esta tarea de medición con elementos más sencillos y comunes acoplados al motor de CD. En el presente capítulo, se abordará este problema ofreciendo una posible solución, donde se puede medir la posición angular en el eje, a partir de un dispositivo electromecánico rotatorio (encoder), por lo que a partir de la posición angular medida  $\theta_R$  se pueda obtener la velocidad angular.

Para conocer la velocidad a partir de la posición medida, se centra en métodos matemáticos del cálculo, donde dadas las propiedades físicas en la tasa de cambio en la función de la posición angular con respecto al tiempo  $\Delta t$ , la derivación de la posición angular  $\omega_R$  es proporcional a la velocidad angular  $\theta_R$  expresada como

$$\frac{d}{dt}\theta_R = \omega_R \quad (3.1)$$

Esta propiedad, suma un estado al análisis matemático del motor de CD (2.7), donde el conjunto de ecuaciones (2.1), (2.5) y (3.1) integran el nuevo modelo matemático para este apartado.

Tomando en cuenta las condiciones físicas del motor de CD, donde visto como un sistema, se tiene como entradas el voltaje  $V_s$  y la perturbación  $\tau_L$ , y como salidas la corriente de armadura  $i_a$  y la posición angular  $\theta_R$ . Se propone el uso del algoritmo “*filtro diferenciador sucio de 2do orden compensado*” empleado por [Mujica et. al., 2014], cuyo propósito es obtener el estado de la velocidad a la salida del sistema, tomando como referencia la posición medida.

Finalmente, la unión de los modelos matemáticos (motor de CD y filtro de 2do orden), se convierten en la planta del sistema, donde se conoce la velocidad angular a partir de la posición medida por parte de un codificador rotatorio acoplado en el eje.

### 3.1. Modelo en el dominio del tiempo del motor de CD

Dado el conjunto de ecuaciones (3.1), (2.1) y (2.5), donde las variables de estado están definidas por el vector  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ , tal que  $x_1 = i_a$  es la corriente de armadura,  $x_2 = \omega_R$  es la velocidad angular y  $x_3 = \theta_R$  es la posición angular; las variables de salida están definidas por el vector  $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T \in \mathbb{R}^2$  donde  $y_1 = i_a$  la corriente medida en la armadura y  $y_2 = \theta_R$  es la posición medida por parte del encoder acoplado en el eje del motor de CD; las variables de entrada se define como  $u_1 = V_s$  es el voltaje suministrado a los devanados de la armadura y  $u_2 = \tau_L$  es una perturbación externa al eje del motor de CD. La construcción del modelo en espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} V_s + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \tau_L \quad (3.2a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_L \quad (3.2b)$$

El aumento de un estado al modelo (2.7), reestructura las dimensiones en las matrices de este, por lo que la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ .

#### 3.1.1. Estabilidad del motor de CD con medición de posición por el método directo de Lyapunov

**Propiedad 10** (Múltiples puntos de equilibrio o estabilidad marginal). *Dada la Propiedad 2 del punto de equilibrio en el Capítulo 2, aplicada al sistema (3.2) cuyo sistema tiene múltiples puntos de equilibrio*

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \\ x_{3(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde no tiene importancia la posición en el eje de la máquina  $\bar{x}_3$ , el motor de CD permanecerá en un punto de equilibrio.

**Prueba.** La expresión (3.3) describe que el sistema del motor de CD, tiene múltiples puntos de equilibrio; dado que el determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  del modelo en espacio de estados (3.2a) es

$$\det[\mathbf{A}] = 0 \quad (3.4)$$

Por lo tanto, si la máquina no tiene excitación por parte de la fuente de voltaje  $V_s = 0$  y no tiene perturbación del par carga  $\tau_L = 0$ , el sistema permanece en reposo cualquiera que sea el ángulo que tenga el eje.  $\square$

Dado que el sistema del motor de CD (3.2), no satisface los **Teoremas** (1 y 2) de estabilidad en el sentido de Lyapunov en la **Propiedad 3**; se dice en [Joao, 2009, Capítulo 8] que el sistema es marginalmente estable, donde describe la estabilidad de Lyapunov por las condiciones de los valores propios, cuya estabilidad es marginalmente estable, si y solo si, todos los valores propios de la matriz **A** en el sistema (3.2a) tienen parte real negativa o tienen parte real cero.

**Prueba.** Con la ecuación matricial de Lyapunov de la **Propiedad 3**  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  (2.18) y la matriz **A** del modelo en espacio de estados del motor de CD (3.2a), se puede construir la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & \frac{K_b}{J} & 0 \\ -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{B}{J} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

resolviendo el producto matricial  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ , la ecuación resultante es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{12} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{13} & \chi_{23} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{-\mathbf{Q}} \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= 2\frac{K_b}{J}P_{12} - 2\frac{R_a}{L_a}P_{11} \\ \chi_{12} &= P_{13} + \frac{K_b}{J}P_{22} - \frac{K_b}{L_a}P_{11} - \left[\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right]P_{12} \\ \chi_{13} &= \frac{K_b}{J}P_{23} - \frac{R_a}{L_a}P_{13} \\ \chi_{22} &= 2P_{23} - 2\frac{K_b}{L_a}P_{12} - 2\frac{B}{J}P_{22} \\ \chi_{23} &= P_{33} - \frac{K_b}{L_a}P_{13} - \frac{B}{J}P_{23} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Algebraicamente el conjunto de ecuaciones (3.7) no tiene solución, dado que el arreglo matricial tiene 5 ecuaciones para encontrar 6 elementos de la matriz **P**, por lo que existe una inconsistencia en este método. Sin embargo, es posible demostrar la estabilidad del motor de CD (3.2). Dado los valores propios de la matriz **A** en el sistema cuya expresión es

$$\lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{-(JR_a + BL_a) \pm \sqrt{(JR_a + BL_a)^2 - 4JL_a(BR_a + K_b^2)}}{2JL_a} \\ 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Dada la expresión (3.8), tal que los parámetros del motor de CD cumplen con la **Propiedad 1** del Capítulo 2, donde dos valores son complejos conjugados con parte real negativa, y el último valor propio tiene parte real cero, tal que, según [Joao, 2009, Capítulo 8] se dice que el sistema es marginalmente estable, ya que se demuestra que existe un valor propio de parte real en el origen.

□

### 3.1.2. Controlabilidad del motor de CD con medición de posición

Se dice que el modelo en espacio de estados del motor de CD (3.2), es totalmente controlable si cumple con la independencia lineal de la matriz de controlabilidad (2.26). El método utilizado para esta demostración es el mismo usado en la primera prueba de la **Propiedad 4** del capítulo 2, i.e., de manera algebraica según [Poole, 2011, Capítulo 2].

**Prueba.** La construcción de la matriz controlabilidad (2.26) con el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  tiene la siguiente

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a^2} & \frac{JR_a^2 - K_b^2 L_a}{JL_a^3} \\ 0 & \frac{K_b}{JL_a} & -\left(\frac{L_a B + R_a J}{J^2 L_a^2}\right) K_b \\ 0 & 0 & \frac{K_b}{JL_a} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Descomponiendo la matriz en vectores, el arreglo se puede reescribe como

$$\mathbf{S} = \left[ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right]$$

donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a^2} \\ \frac{K_b}{JL_a} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{JR_a^2 - K_b^2 L_a}{JL_a^3} \\ -\left(\frac{L_a B + R_a J}{J^2 L_a^2}\right) K_b \\ \frac{K_b}{JL_a} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

el arreglo de vectores (3.10) son  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  cada uno. Dado que  $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = 0$ , cuya expresión demuestra que la matriz (3.9) tiene independencia lineal, se sustituyen los vectores se reescribe como

$$c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a^2} \\ \frac{K_b}{JL_a} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \frac{JR_a^2 - K_b^2 L_a}{JL_a^3} \\ -\left(\frac{L_a B + R_a J}{J^2 L_a^2}\right) K_b \\ \frac{K_b}{JL_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \frac{c_1}{L_a} & -\frac{c_2 R_a}{L_a^2} & c_3 \left(\frac{JR_a^2 - K_b^2 L_a}{JL_a^3}\right) & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{c_2 K_b}{JL_a} & -c_3 \left(\frac{L_a B + R_a J}{J^2 L_a^2}\right) K_b & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_3 K_b}{JL_a} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado el conjunto de vectores de (3.11) y teniendo en cuenta que los parámetros del motor de CD cumplen con la **Propiedad 1** del Capítulo 2, la solución es  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , por lo tanto, se cumple que  $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = 0$ . Cada vector de (3.10) tiene independencia lineal, por lo tanto el par de matrices  $[\mathbf{A}; \mathbf{B}]$  del modelo en variables de estado (3.2) es totalmente controlable.  $\square$

### 3.1.3. Observabilidad del motor de CD con medición de posición

El modelo del motor de CD (3.2) es totalmente observable ya que cumple con la **Propiedad 5** del Capítulo 2 de esta mismo trabajo, teniendo como estados medidos a  $i_a$  y  $\omega_R$ .

La prueba de observabilidad está desarrollada según la independencia lineal algebraica de [Poole, 2011, Capítulo 2].

**Prueba.** La construcción de la matriz de observabilidad (2.39) está en torno al par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  del modelo en espacio de estados del motor de CD (3.2), por lo que el arreglo es

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{K_b^2}{JL_a} & \frac{K_b R_a}{JL_a} + \frac{BK_b}{JL_a} & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

donde el arreglo de vectores de (3.12) es

$$\mathbf{V} = \left[ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right]$$

donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{R_a}{L_a} \\ 0 \\ \frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{K_b^2}{JL_a} \\ \frac{K_b}{J} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{K_b}{L_a} \\ 1 \\ \frac{K_b R_a}{JL_a} + \frac{BK_b}{JL_a} \\ -\frac{B}{J} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

para fines de la solución de  $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = 0$ , el conjunto de vectores (3.12), se propone el arreglo matricial como

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \vdots & 0 \\ -\frac{c_1 R_a}{L_a} & -\frac{c_2 K_b}{L_a} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \vdots & 0 \\ c_1 \left( \frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{K_b^2}{JL_a} \right) & c_2 \left( \frac{K_b R_a}{JL_a} + \frac{BK_b}{JL_a} \right) & 0 & \vdots & 0 \\ \frac{c_1 K_b}{J} & -\frac{c_2 B}{J} & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

la solución satisface que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , por lo que se dice que los vectores (3.13), son linealmente independientes.  $\square$

Dada la independencia lineal de los vectores (3.13), donde el conjunto de parámetros del motor de CD cumplen con la **Propiedad 1** del Capítulo 2, se dice que la matriz de observabilidad (3.12) tiene rango de orden  $n$ , por lo que el modelo en espacio de estados del motor de CD, satisface la **Propiedad 5** del Capítulo 2, por lo que se concluye que el sistema es totalmente observable.

## 3.2. Modelo en función de transferencia del motor de CD

Las funciones de transferencia, están en relación a las ecuaciones diferenciales (2.5), (2.1) y (3.1) que representan la dinámica del motor de CD; aplicando en estas la transformada de Laplace con condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene

$$V_s(s) = (R_a + Ls)I_a(s) + K_b\Omega(s) \quad (3.15a)$$

$$K_b I_a(s) - \Gamma_L(s) = (B + Js)\Omega(s) \quad (3.15b)$$

$$s\Theta_R(s) = \Omega(s) \quad (3.15c)$$

Suponiendo que el sistema del motor de CD no tiene perturbación externa o  $\tau_L = 0$ , i.e., únicamente cuenta con el voltaje  $V_s$  como entrada y como salida, la posición angular en el eje  $\theta_R$ , la función de transferencia es

$$\frac{\Theta_R(s)}{V_s(s)} = \frac{\frac{K_b}{JL_a}}{s \left[ s^2 + \left( \frac{JR_a + BL_a}{JL_a} \right) s + \frac{BR_a + K_b^2}{JL_a} \right]} \quad (3.16)$$

En relación a esta expresión, se puede destacar lo siguientes puntos:

- I. La ecuación característica es de orden  $n = 3$ .
- II. Dado que los parámetros del motor de CD cumplen con la **Propiedad 1** del Capítulo 2, por lo cual dos de las raíces del polinomio tienen parte real negativa con parte imaginaria y una raíz se encuentra en el origen.
- III. El sistema, no tiene ceros pero cuenta con una constante, que ante una excitación el estado estacionario no llegue al valor de la excitación.

Otra función de transferencia, donde también se puede suponer que no hay perturbación externa  $\tau_L = 0$ , donde la entrada es el voltaje  $V_s$  y como salida es la corriente de armadura  $I_a$ ; está se define como

$$\frac{I_a(s)}{V_s(s)} = \frac{\frac{Js+B}{JL_a}}{s^2 + s \left( \frac{BL_a + JR_a}{JL_a} \right) + \frac{BR_a + K_b^2}{JL_a}} \quad (3.17)$$

Cabe señalar que hasta el momento no existe cambio alguno entre las funciones de transferencia (3.17) y (2.63).

### 3.2.1. Polos de función de transferencia del motor de CD con medición de posición

Dada la expresión (3.16) las raíces del polinomio característico están dadas por

$$s_{1,2} = \frac{-(JR_a + BL_a) \pm \sqrt{(JR_a + BL_a)^2 - 4JL_a(BR_a + K_b^2)}}{2JL_a} \quad (3.18a)$$

$$s_3 = 0 \quad (3.18b)$$

Las raíces  $s_1$  y  $s_2$  de (3.18a), las misma que en (2.64), por lo tanto, también son las mismas características de los puntos **FT**'s.

Para el caso de la raíz  $s_3$  de (3.18b), de la cual se trata de un polo ubicado en el origen, no comparte ninguno de los puntos **FT**'s para la parte real de (2.64), sin embargo tampoco esta del lado derecho del plano complejo  $s$ , por lo que el polinomio característico de la función de transferencia (3.16) del motor de CD cumplen parcialmente con la **Propiedad 6** de estabilidad.

Dado el arreglo de Routh Hurwitz, el polinomio característico de (3.16) se puede expresar como

$s^3$	$JL_a$	$BR_a + K_b^2$
$s^2$	$JR_a + BL_a$	0
$s^1$	$BR_a + K_b^2$	0
$s^0$	0	0

Tabla 3.1: Arreglo del polinomio característico (3.16) según el criterio de Routh Horwitz

El arreglo de Routh-Horwitz de la tabla 3.1 es un caso especial, dado que todos los términos de  $s^0$  son ceros, por lo que el polinomio auxiliar es

$$P(s) = (BR_a + K_b^2) \quad (3.19)$$

Según en [Ogata, 1998, Capítulo 5] el encontrar un renglón con todos sus elementos en cero, significa que hay dos pares de raíces de igual magnitud y signo opuesto, para obtener estos pares se resuelve derivando  $P(s)$  (3.19) con respecto a  $s$ , por lo tanto se obtiene

$$\frac{d}{ds}P(s) = BR_a + K_b^2 \quad (3.20)$$

reemplazando este valor en la Tabla 3.1 se convierte en

$s^3$	$JL_a$	$BR_a + K_b^2$
$s^2$	$JR_a + BL_a$	0
$s^1$	$BR_a + K_b^2$	0
$s^0$	$BR_a + K_b^2$	0

Tabla 3.2: Arreglo del polinomio característico (3.16) según el criterio de Routh-Horwitz transformado

Según [Kuo, 1996, Capítulo 6] el arreglo de Routh-Hurwitz obtenido en la Tabla 3.2, la estabilidad del motor de CD en la función de transferencia (3.16), es marginalmente estable, dado que la ecuación tiene pares de raíces complejas conjugadas, que son simétricas con respecto al origen del plano  $s$ . Debido a que todos los ceros ocurren en un renglón que corresponden a una potencia impar de  $s$ , todas las raíces del polinomio auxiliar pueden estar en el eje de  $j\omega$ .

### 3.3. Velocidad filtrada a partir de la posición medida

Dado que el motor de CD marca BALDOR<sup>®</sup> RELIANCE Mo. D5505P no tiene implícito en su fabricación algún instrumento de medición en el eje, se ha acoplado a este un transductor rotativo (encoder), el cual para fines de este trabajo se usa uno de sus canales cuyo propósito

es obtener la velocidad angular en función de la señal digital. Este dispositivo tiene mucha importancia ya que la medición de este representa el estado de salida en el sistema.

Para fines de este trabajo el transductor rotativo empleado es de cuadratura óptico marca Dynapar® brand Mo. HS35R [Dynapar, 2019] el cual cuenta con tres canales, esto son  $\{\bar{A}, A$  y  $B + Index(Z)\}$ .  $\bar{A}$  tiene una señal de desfase de  $180^\circ$  con respecto a la posición de  $A$ , así mismo, el canal  $B$  tiene una señal de desfase de  $90^\circ$  con respecto a  $A$ , y finalmente el canal de  $Index(Z)$  es una señal de un solo pulso a lo largo de un giro en el eje, con una posición estratégica cuyo objetivo es indicar el giro completo. Por razones de simplicidad se emplea una señal, cuyo canal es  $A$  y en Figura 3.1 muestra su forma

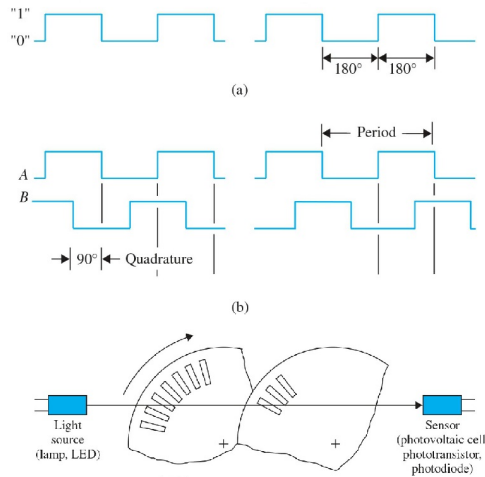


Figura 3.1: a) características de una señal digital para cualquier canal del encoder  $\{\bar{A}, A$  y  $B\}$ . b) muestra el desfase de las señales digitales entre los canales  $A$  y  $B$  emitidos por parte del encoder conocida como cuadratura. Imagen adaptada de [Kuo / Golnaraghi, Capítulo 6].

### 3.3.1. Diferenciador sucio de segundo orden

En [Mujica et. al., 2014] describe el uso de un modelo en espacio de estados segundo orden, el cual es usado como un filtro para obtener la velocidad y aceleración desde una posición angular. Este mismo filtro es usado con el objetivo de obtener la velocidad angular  $\omega_f$  a partir del estado de la posición medida  $\theta_R$ .

#### 3.3.1.1. Modelo en espacio de estados de la función de transferencia del filtro de segundo orden

El filtro de segundo orden es de orden relativo 1, i.e. en la función de transferencia se tiene un cero en el origen y dos polos en el semiplano izquierdo, donde la función de transferencia es

$$\frac{\Omega_f(s)}{\Theta(s)} = \lambda_d^2 \frac{1}{s + \lambda_d} \frac{1}{s + \lambda_d} s = \frac{\lambda_d^2 s}{s^2 + 2\lambda_d s + \lambda_d^2} \quad (3.21)$$

donde  $\Theta(s)$  es la posición angular medida y  $\Omega_f(s)$  es la velocidad angular filtrada.

Para unir el filtro (3.21) con el sistema del motor de CD (3.16) es en un arreglo en cascada.

**Propiedad 11** (Descomposición de Función de Transferencia a Modelo en Espacio de Estados). *El modelo de la función de transferencia (3.21) del filtro de segundo orden, grado relativo 1, se puede representar en un modelo en espacio de estados.*

**Prueba.** En [Ogata, 2010, Capítulo 9] se describe que mediante la manipulación algebraica es posible obtener el modelo en espacio de estados o dominio de  $t$  a partir del modelo en el dominio de  $s$ . Asociando un producto unitario en términos de potencia negativas  $s^{-n}$  tanto para el numerador y el denominador donde  $n$  es la potencia más grande del denominador; para la función (3.21) se puede expresar como

$$\frac{\Omega(s)}{\Theta(s)} = \left[ \frac{\lambda_d^2 s}{s^2 + 2\lambda_d s + \lambda_d^2} \right] \left[ \frac{s^{-2}}{s^{-2}} \right] = \frac{\lambda_d^2 s^{-1}}{\lambda_d^2 s^{-2} + 2\lambda_d s^{-1} + 1} \quad (3.22)$$

De la misma manera se usa una variable auxiliar, formando la unidad, ya que de este modo no alterando el producto entre el numerador ni el denominador, la variable auxiliar ayudará a separar el numerador del denominador tal como se muestra en la siguiente grupo de ecuaciones

$$\frac{\Omega(s)}{\Theta(s)} = \left[ \frac{\lambda_d^2 s^{-1}}{\lambda_d^2 s^{-2} + 2\lambda_d s^{-1} + 1} \right] \left[ \frac{X(s)}{X(s)} \right] \quad (3.23)$$

Igualando los numeradores así como los denominadores de (3.23) se tiene

$$\Omega(s) = [\lambda_d^2 s^{-1}] X(s) \quad (3.24a)$$

$$\Theta(s) = [\lambda_d^2 s^{-2} + 2\lambda_d s^{-1} + 1] X(s) \quad (3.24b)$$

En [Kuo, 1996, Capítulo 5] se describe encontrar una relación causa y efecto apropiada, donde la ecuación (3.24a) satisface este pre-requisito. La ecuación (3.24b) tiene la entrada en el primer miembro donde al acomodar los términos se expresa como

$$X(s) = \Theta(s) - [\lambda_d^2 s^{-2} + 2\lambda_d s^{-1}] X(s) \quad (3.25)$$

Definiendo el vector de estados es  $x_f = \begin{bmatrix} x_{1f} & x_{2f} \end{bmatrix}^T$ , donde  $x_{1f} = s^{-2}X(s)$  y  $x_{2f} = s^{-1}X(s)$ , por lo tanto el modelo en espacio de estados de (3.21) se expresa como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1f} \\ \dot{x}_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_d^2 & -2\lambda_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_d^2 \end{bmatrix} \theta(t) \quad (3.26a)$$

$$y_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} \quad (3.26b)$$

□

### 3.3.1.2. Análisis del diagrama de Bode del filtro de 2do orden

Dada la **Propiedad 8** del Capítulo 2, la cual puede ser aplicada el modelo en función de transferencia (3.21), donde al separar la parte real  $\mathbb{R}$  de la imaginaria  $\mathbb{I}$ , cuando  $s = j\omega$ , se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{2\omega^2\lambda_d^3}{[\lambda_d^2 - \omega^2]^2 + 4\omega^2\lambda_d^2} + j \frac{\omega\lambda_d^2[\lambda_d^2 - \omega^2]}{[\lambda_d^2 - \omega^2]^2 + 4\omega^2\lambda_d^2} \quad (3.27)$$

donde la magnitud se puede expresar como

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega^2\lambda_d^4}{\sqrt{[2\omega^2\lambda_d^3]^2 + [\omega\lambda_d^2(\lambda_d^2 - \omega^2)]^2}} \quad (3.28)$$

y la fase se puede expresar como

$$\varphi = -\tan^{-1} \left[ \frac{\lambda_d^2 - \omega^2}{2\omega\lambda_d} \right] \quad (3.29)$$

Dada una señal de tipo sinusoidal, que sea suministrada al sistema (3.21), donde los valores de  $\lambda_d$  son mayores a cero con el fin de no afectar la estabilidad, se puede mostrar de manera gráfica la trayectoria de las asíntotas de la magnitud y fase en un diagrama de Bode para los valores de  $\lambda_d \in [10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6]$  en la Figura 3.2

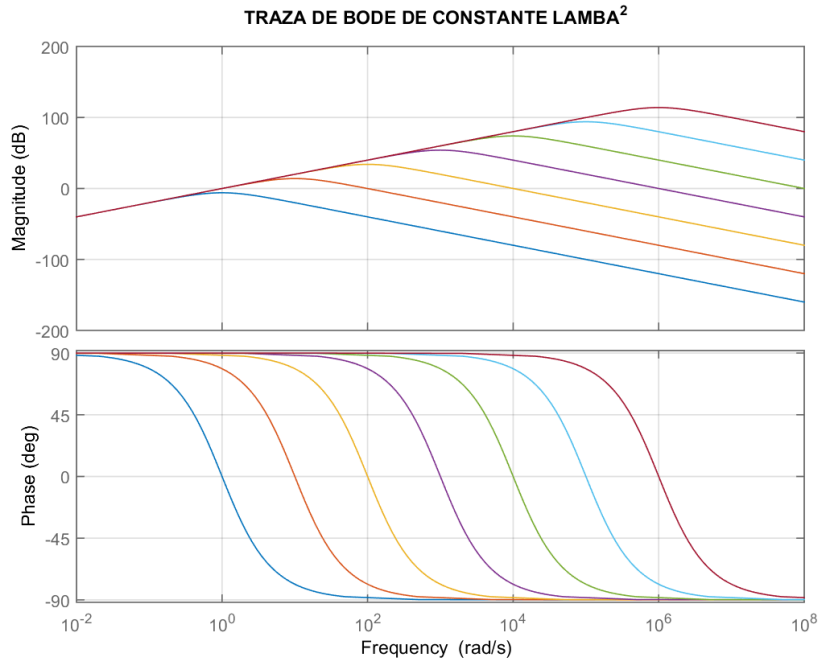


Figura 3.2: Diagrama de Bode del filtro de segundo orden (3.21) o diferenciador sucio según valores elegidos para  $\lambda_d$ . En la parte superior se muestra la magnitud, en la parte inferior se muestra el cambio de pase o desfase para cada valor de  $\lambda_d$ . Figura obtenida de MatLab<sup>®</sup>

Gráficamente el filtro tiene un comportamiento de tipo paso-bandas el cual se puede mostrar el comportamiento en la parte superior de la Figura 3.2 cuyas frecuencias son atenuadas antes y después de la frecuencia de corte. La frecuencia de corte (f.c.) está definida por el valor de  $\lambda_d$  en los polos simples de la función de transferencia (3.21).

En la parte inferior de la Figura 3.2 se muestra el ángulo de desfase, el cual para bajas frecuencias la señal de salida está adelantada a la señal de entrada por  $90^\circ$ . Para frecuencias altas la señal de salida se atrasa  $90^\circ$  ante la señal de entrada.

### 3.4. Construcción del modelo matemático del motor de CD con la dinámica del diferenciador sucio

De acuerdo a lo que se abordado en los capítulos y secciones anteriores del presente trabajo, se tiene que el motor de corriente directa es modelado en donde se tiene como mediciones la corriente de armadura y la velocidad angular, pero en la realidad de lo que se dispone para mediciones de naturaleza mecánica, es de un dispositivo que (en términos generales se puede decir) proporciona la medición de la posición angular. El interés del presente trabajo es controlar la velocidad angular, no la posición angular. Debido a esto último, se utiliza el modelo matemático del motor de CD con medición de la posición (3.2) en cascada con el filtro de segundo orden grado relativo 1 con una representación en espacio de estados dada por (3.26), con esto se tiene que se excita al motor de CD con un voltaje en los devanados de la armadura y se obtiene como salida la medición de la corriente de la armadura así como una velocidad filtrada, esta última proporcionada por el filtro de segundo orden.

Para unir dos modelos en espacio de estados en los que intervienen el modelo del motor de CD (3.2) y el filtro de segundo orden (3.26) en un arreglo en cascada, donde el modelo completo se puede expresar en términos de espacio de estados (2.55) según [Goodwin et. al., 2000, Capítulo 17]

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30a)$$

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad (3.30b)$$

La construcción de la planta, está dado por el modelo en espacio de estados del motor de CD, expresado por las matrices  $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  y  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  y el modelo del filtro de segundo orden expresado por las matrices  $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  y  $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ , el esquema que corresponde al sistema en un arreglo en cascada, se expresa en la Figura 3.3. Como observación adicional, solamente se tiene una salida del Sistema 1 denotada como  $u_2(t)$ , la cual es la posición angular  $\theta_R$ , i.e., no se considera como salida a la corriente de armadura y se desprecia el par de carga  $\tau_L = 0$ .

Sustituyendo los modelos de los sistemas (3.2) y (3.26) en la expresión (3.30) se obtiene

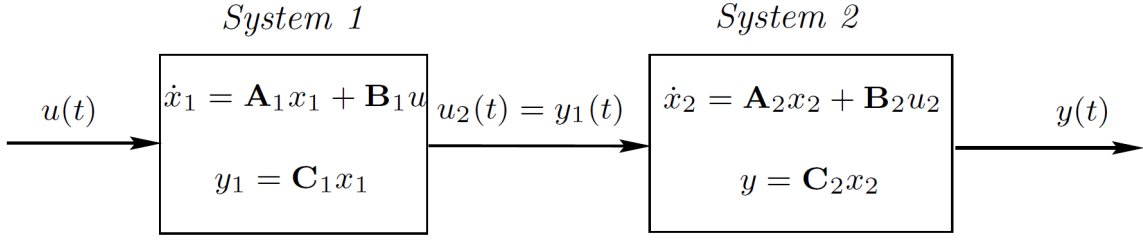


Figura 3.3: Representación de unión de dos sistemas en espacio de estados en un arreglo en cascada. Para fines de este trabajo el *System 1* es el modelo del motor de CD, *System 2* es el modelo del filtro de segundo orden [Goodwin et. al., 2000, pp 510].

Sustituyendo los modelos de los sistemas (3.2) y (3.26) en la expresión (3.30) se obtiene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_d^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_d^2 & -2\lambda_d \end{bmatrix} \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_L \quad (3.31a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x] \quad (3.31b)$$

El nuevo modelo en espacio de estados aumentado, cuenta con un vector de estados de la forma  $\bar{x}_n = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3 \ \bar{x}_4 \ \bar{x}_5]^T = [i_a \ \omega_R \ \theta_R \ \theta_f \ \omega_f]^T \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  el sistema (3.31), es el modelo en cascada de la nueva planta del sistema para el motor de CD, con la propiedad de poder obtener la velocidad a partir de la posición cuya expresión completa es la siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_d^2 & -\lambda_d^2 & -2\lambda_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_L \quad (3.32a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (3.32b)$$

donde  $i_a$  es la corriente en el devanado de la armadura,  $\omega_R$  es la velocidad angular en el eje del motor,  $\theta_R$  es la posición angular en el eje del motor,  $\theta_f$  es la posición angular filtrada y  $\omega_f$  es la velocidad angular filtrada .

### 3.5. Cancelación de polos y ceros

En [Goodwin et. al., 2000, Capítulo 17] y en [Antsaklis/Michel, 2000, Capítulo 6], se describe como una herramienta de controlabilidad a **PBH** (*PBH test* por *Popov – Belivith – Hautus*), en [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] se describe como el teorema de controlabilidad CC3, para un sistema lineal e invariante en el tiempo de la forma (2.55) es controlable si y solo si las dimensiones  $n \times (n + m)$  de la matriz

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

tiene rango  $n$  para cualquier escalar complejo de  $s$ .

En [Goodwin et. al., 2000, Capítulo 17] se define que un sistema es no completamente observable si y solo si existe un valor del vector distinto de cero  $x \in \mathbb{C}^n$  y un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \beta\mathbf{h} \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{h} = 0 \quad (3.34b)$$

donde  $\mathbf{h}$  es un vector columna  $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$

**Propiedad 12** (PBH test Popov - Belevitch - Hautus). *El modelo conformado por el motor de CD con salida únicamente la medición de la posición angular así como el filtro de segundo orden, dado por (3.32) no es completamente observable.*

**Prueba.** Sé asume que  $u(t), u_2(t), y_1(t), y(t) \in \mathbb{R}$  [Goodwin et. al., 2000, Capítulo 17], donde el arreglo matricial del sistema 1 (3.2) es el sistema del motor de CD y el sistema 2 (3.26) es el filtro de segundo orden, al hacer la combinación de manera matricial (3.30), la matriz  $\mathbf{A}$ , es usada para el test PBH. Considerando el polo en el origen del subsistema 1 como  $\beta$  y eligiendo un vector  $\mathbf{h} \neq 0$  definido como.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

donde  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^2$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_d^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_d^2 & -2\lambda_d & \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Para fines de simplicidad, se realiza la operación algebraica sólo para el vector  $\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \end{bmatrix}^T$  se tiene

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_b}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{h}_1 = \beta \mathbf{h}_1 \quad (3.37)$$

Las ecuaciones que componen el sistema es

$$\left(\beta + \frac{R_a}{L_a}\right) h_{11} + \frac{K_b}{L_a} h_{12} = 0 \quad (3.38a)$$

$$-\frac{K_b}{J} h_{11} + \left(\beta + \frac{B}{J}\right) h_{12} = 0 \quad (3.38b)$$

$$\beta h_{13} - h_{12} = 0 \quad (3.38c)$$

Eligiendo un valor arbitraria para  $h_{13} = 1$ , el valor para los otros elementos de  $\mathbf{h}_1$  resulta como

$$h_{12} = \beta \quad (3.39a)$$

$$h_{11} = \frac{(\beta J + B)\beta}{K_b} \quad (3.39b)$$

El valor propio es  $\beta = 0$ , lo que implica que el valor tanto de  $h_{11}$  como  $h_{12}$  es cero, el vector  $\mathbf{h}_1$  es.

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta J + B}{K_b}\right)\beta \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Por otro lado, para las matrices de la parte de (3.36), considerando que  $\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}^T$ , se llega a

$$\left( \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{h}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_d^2 & -2\lambda_d \end{bmatrix} \mathbf{h}_2 = \beta \mathbf{h}_2 \quad (3.41)$$

Realizando operaciones

$$h_{21} = -\frac{\lambda_d^2}{\beta^2(2\lambda_d + \beta) + \lambda_d^2} \quad (3.42)$$

$$h_{22} = \frac{\beta\lambda_d^2}{\beta^2(2\lambda_d + \beta) + \lambda_d^2} \quad (3.43)$$

Debido a que  $\beta = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} h_{21} &= -1 \\ h_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

El vector  $\mathbf{h}_2$  resulta como

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Al considerar la matriz de salida del sistema en cascada y el vector  $\mathbf{h}$  se tiene.

$$\left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.47)$$

La expresión (3.47) cumple con la prueba **P B H** (3.34), por lo tanto el modelo en espacio de estados (3.32) es no completamente observable, dado que los estados del *sistema 1* no es observables desde la salida  $y(t)$  en el *sistema 2*.  $\square$

Visto desde la perspectiva entre las funciones de transferencia (3.16) y (3.21), donde el modelo en cascada según la Figura 3.3, se define el arreglo como  $G_f(s) = \frac{\Theta_R(s) \Omega_f(s)}{V_s(s) \Theta_R(s)}$  expresado como

$$G_f(s) = \frac{\frac{K_b}{JL_a}}{s \left[ s^2 + \left( \frac{JR_a + BL_a}{JL_a} \right) s + \frac{BR_a + K_b^2}{JL_a} \right]} \frac{s \lambda_d^2}{[s^2 + 2\lambda_d s + \lambda_d^2]} \quad (3.48)$$

La anulación algebraica del cero del sistema (3.21) por parte del polo de ((3.16)) en la expresión (3.48), es clave de la que el sistema (3.32) no sea totalmente observable.

La función de transferencia para el sistema (3.32), donde la entrada es el voltaje de alimentación al motor de CD  $V_s$  y como salida es la velocidad angular filtrada  $\Omega_f$  es

$$G_f(s) = \frac{\lambda_d^2 \frac{K_b}{JL_a}}{s^4 + \frac{1}{JL_a} \alpha_1 s^3 + \frac{1}{JL_a} \alpha_2 s^2 + \frac{\lambda_d}{JL_a} \alpha_3 s + \frac{\lambda_d^2}{JL_a} (K_b^2 + BR_a)} \quad (3.49)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2JL_a \lambda_d + BL_a + JR_a \\ \alpha_2 &= 2[BL_a + JR_a] \lambda_d + JL_a \lambda_d^2 + BR_a + K_b^2 \\ \alpha_3 &= 2[K_b^2 + BR_a] + [BL_a + JR_a] \lambda_d^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Cabe señalar que la función de transferencia que corresponde a la relación entre la entrada  $V_s$  y la salida  $I_a$  no cambia en su estructura y conserva la misma forma que (2.63).

## 3.6. Transformación en subespacios observable y no observable

### 3.6.1. Transformación de similitud

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] describe que dado un modelo expresados en espacio de estados, es posible hacer una transformación para generar otros con las mismas características.

A veces es necesario cambiar el modelo a una forma diferente del modelo inicial, esto es hacer una *transformación similar*. Si una variables de estados  $\mathbf{x}$  de orden a la  $n$ , es posible obtener de otro sistema, multiplicando por una matriz de constantes no singular  $\mathbf{P}$  de dimensiones  $n \times n$ , cuya transformación puede ser reversible

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} \quad (3.51)$$

Reescribiendo el modelo en espacio de estados (2.6) en términos de (3.51) con relación al nuevo vector  $\mathbf{z}$  se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_t \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_t \mathbf{u}(t) \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_t \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_t \mathbf{u}(t) \quad (3.52b)$$

con las matrices de (3.52) definidas como

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{PAP}^{-1}, \quad \mathbf{B}_t = \mathbf{PB}, \quad \mathbf{C}_t = \mathbf{CP}^{-1}, \quad \mathbf{D}_t = \mathbf{D}. \quad (3.53)$$

donde según la Figura 3.3 y el modelo en espacio de estados de (3.32),  $\mathbf{A}_t \in \mathbb{R}^{(n1+n2) \times (n1+n2)}$ ,  $\mathbf{B}_t \in \mathbb{R}^{(n1+n2) \times (m1+m2)}$ ,  $\mathbf{C}_t \in \mathbb{R}^{(r1+r2) \times (n1+n2)}$  y  $\mathbf{D}_t \in \mathbb{R}^{r \times m}$

Al construir el nuevo modelo en espacio de estados con el grupo de matrices transformadas (3.53), compartirán las mismas propiedades y características que el modelo inicial.

### 3.6.2. Subespacio observable y no observable

Dada la propiedad de transformación (3.51), donde en [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] describe que si un sistema es no observable es posible transformar y descomponer el modelo de espacio de estados en un sistema similar que comparten las mismas características donde se puede seleccionar la parte observable de la no observable.

El modelo (3.32) es un sistema no observable, donde la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , por lo tanto la matriz de observabilidad (2.39 del sistema (3.32) se define como  $\mathbf{V}_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cuyo rango  $(\mathbf{V}_o) = p < n$ .

La matriz de transformación  $\mathbf{P}$  que es necesaria para el conjunto de ecuaciones (3.53) se construye a partir de los renglones de la matriz  $\mathbf{V}_o$ , cuya elección son los primeros  $p$  renglones, i.e.,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_p$  y el número de renglones complementarios son de  $n - p$ , los cuales son de elección arbitraria, i.e.,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-p}$ , tal que la matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la cual es no singular y tiene la siguiente forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_p \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{(n-p)} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Las matrices de transformación (3.53) para los subespacios  $\mathbf{z} = \mathbf{Px}$ , se definen de la siguiente forma

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{no} \end{bmatrix} \quad (3.55a)$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{B}_{no} \end{bmatrix} \quad (3.55b)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{CP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55c)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}_o \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{B}_o \in \mathbb{R}^{p \times m}$  y  $\mathbf{C}_o \in \mathbb{R}^{r \times p}$ , donde el par de matrices  $[\mathbf{A}_o, \mathbf{C}_o]$  son completamente observables tal que  $G(s)$  de (3.49) es

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1}\mathbf{B}_o = G(s) \quad (3.56)$$

**Propiedad 13** (Separación de parte observable de la no observable). *El modelo en espacio de estados dado en (3.32) no es completamente observable por lo que se puede transformar a subespacios observable y no observable y el subespacio observable tiene la misma relación entrada-salida que el sistema completo, i.e., tienen la misma función de transferencia.*

**Prueba.** Dado que la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  de (3.32) entonces la matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ , la construcción de la matriz de transformación  $\mathbf{P}$  de (3.51) es generada a partir de la construcción de la matriz (2.39) donde  $\mathbf{V}_o \in \mathbb{R}^{10 \times 5}$ , de la siguiente forma

$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_d^2 & -\lambda_d^2 & -2\lambda_d \\ \beta_4 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_d^2 & -2\lambda_d^3 & 2\lambda_d^3 & 3\lambda_d^2 \\ \frac{K_b(\beta_2 + \beta_3)}{L_a} - \frac{R_a\beta_4}{L_a} & -\frac{R_a\beta_1}{L_a} - \frac{K_b\beta_5}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_b\lambda_d^2}{J} & -2\lambda_d^3 - \frac{B\lambda_d^2}{J} & 3\lambda_d^4 & -3\lambda_d^4 & -4\lambda_d^3 \\ \beta_4^2 - (\beta_2 + \beta_3)\beta_1 & \beta_1\beta_5 + \beta_1\beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2K_b\lambda_d^3}{J} + (-\beta_2 - \beta_3)\lambda_d^2 & 3\lambda_d^4 + \frac{2B\lambda_d^3}{J} + \beta_5\lambda_d^2 & -4\lambda_d^5 & 4\lambda_d^5 & 5\lambda_d^4 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

donde

$$\beta_1 = \frac{K_b R_a}{L_a^2} + \frac{BK_b}{JL_a}, \quad \beta_2 = \frac{BK_b}{J^2}, \quad \beta_3 = \frac{K_b R_a}{JL_a}, \quad \beta_4 = \frac{R_a^2}{L_a^2} - \frac{K_b^2}{JL_a}, \quad \beta_5 = \frac{B^2}{J^2} - \frac{K_b^2}{JL_a} \quad (3.58)$$

La matriz  $\mathbf{V}_o$  tiene rango  $p = 4$  por lo que tiene 4 renglones que son linealmente independientes, por lo tanto, se eligen los 4 primeros renglones para la matriz  $\mathbf{P}$  y el último renglón se elige de forma arbitraria, en este caso se propone  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , por lo que la estructura de la matriz  $\mathbf{P}$  es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_d^2 & -\lambda_d^2 & -2\lambda_d \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Sustituyendo las correspondientes matrices del sistema no observable (3.32) con la matriz  $\mathbf{P}$  (3.59) en las expresiones de (3.55) y realizado las operaciones algebraicas, la elección de los subespacios observables son

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_b^2}{JL_a} - \frac{R_a B}{JL_a} & 0 & -\frac{R_a}{L_a} - \frac{B}{J} & 0 \\ -\frac{R_a\lambda_d^2}{K_b} & 3\lambda_d^2 - 4\lambda_d^2 & -\frac{L_a\lambda_d^2}{K_b} & -2\lambda_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ -\frac{R_a}{L_a^2} \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_b}{JL_a} \\ 0 \end{bmatrix} \tau_L \quad (3.60a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} \quad (3.60b)$$

Finalmente el modelo en variable de estados (3.60) es completamente controlable y observable, donde el vector de estados es  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3 \ \tilde{x}_4]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ . □

Para la transformación de espacio de estados a función de transferencia  $\frac{\Omega_f(s)}{V_s(s)}$  de (3.56) se expresa como

$$\frac{\Omega_f(s)}{V_s(s)} = \frac{\frac{K_b \lambda_d^2}{JL_a}}{s^4 + FFT_1 s^3 + FFT_2 s^2 + \lambda_d FFT_3 s + \lambda_d^2 FFT_4} \quad (3.61)$$

donde

$$\begin{aligned} FFT_1 &= 2\lambda_d + \frac{B}{J} + \frac{R_a}{L_a} \\ FFT_2 &= \lambda_d^2 + \frac{2\lambda_d B}{J} + \frac{2\lambda_d R_a}{L_a} + \frac{K_b^2}{JL_a} + \frac{BR_a}{JL_a} \\ FFT_3 &= \frac{\lambda_d B}{J} + \frac{\lambda_d R_a}{L_a} + \frac{2}{JL_a} (K_b^2 + BR_a) \\ FFT_4 &= \frac{K_b^2 + BR_a}{JL_a} \end{aligned}$$

Cabe señalar que la función de transferencia (3.61) es la misma con (3.49). Como dato adicional, las funciones de transferencia con relación  $\frac{I_a}{V_s}$  obtenidas a partir de los modelos (3.32) y (3.60) con la transformación matricial de (3.56), es la misma relación entrada salida con (2.63).

### 3.7. Teorema de estabilidad de Kharitonov

El teorema de Kharitonov es una herramienta de análisis para evaluar la estabilidad de un sistema. De manera general, este teorema puede ser considerado como prueba de estabilidad robusta de Hurwitz [Bhattacharyya & Kell 1995, Capítulo 5]. El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz evalúa la estabilidad de un polinomio a través de sus coeficientes fijos, mientras que por medio del teorema de Kharitonov estudia la estabilidad de un polinomio con coeficientes inciertos conocidos como incertidumbre.

El teorema de Kharitonov está relacionado con la teoría de control robusto, la cual contiene una metodología de diseño ligada a la incertidumbre, requiriendo algún nivel de eficiencia del sistema a controlar. En [Bhattacharyya & Kell 1995, Capítulo 7] se asume que en el teorema de Kharitonov los coeficientes del polinomio característico del sistema varían de manera independiente, esta variación se refiere a un intervalo de valores dentro de cada coeficiente del polinomio.

### 3.7.1. Estructura de estabilidad para la incertidumbre independiente

Se tiene entendido que la estructura de incertidumbre no es posible expresarla de manera matemática, lo cierto es que es importante para conocer el grado de robustez del sistema [Barmish, 1994, Capítulo 5].

Se dice que un polinomio de un sistema con coeficientes fijos es estable (o Hurwitz) si todas las raíces se encuentran estrictamente de lado izquierdo del plano complejo  $s$ . Según [Barmish, 1994] la estabilidad de control robusto define que dada una familia de polinomios  $P = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$  de un sistema es robustamente estable si cada uno de los polinomios ( $P(s, q)$ ) tiene sus raíces del lado izquierdo del plano complejo  $s$ , donde  $q$  representa el vector del parámetro de incertidumbre real y  $Q$  es el conjunto de todos los parámetros delimitados a la incertidumbre.

En la familia de polinomios  $p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q)s^i$  contiene un valor con incertidumbre independiente en  $a_i(q)$  con cada valor de  $i$ , donde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  representa el valor de incertidumbre en un intervalo de valores en un máximo y mínimo representado de la siguiente manera.

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \quad (3.62)$$

donde  $q_i = a_i(q)$  y  $q_i^- =$  valor mínimo de  $a_i(q)$ ,  $q_i^+ =$  valor máximo de  $a_i(q)$  tal que  $q \in Q$ .

En [Bhattacharyya & Kell 1995, Capítulo 5], describe que una familia de polinomios de  $P$  son un intervalo de polinomios si  $P(\cdot, q)$  tienen una estructura de incertidumbre independiente, donde cada coeficiente depende continuamente de  $q$  y los valores de cada polinomio  $Q$ .

El arreglo del conjunto de polinomios de Kharitonov se expresa de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \\ K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\ K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \dots \\ K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

**Definición.** En [Barmish, 1994, Capítulo 5] define el polinomio de Kharitonov como una familia de polinomios de  $P$ , los cuales son robustamente estable si y solo si cada polinomio de (3.63) es estable, y se dice que cada polinomio es estable cuando estrictamente todas las raíces de éste se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$ .

El teorema de estabilidad robusta de Kharitonov está construido respecto al polinomio característico del sistema, en [Shin et. al., 2003] definen al sistema como  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ , mientras que en [Panneerselvam / Ayyagari, 2013] expone una solución por medio de “eliminación Gaussiana por derivación de la descomposición LU” esto es (en el Apéndice B se expone dicha eliminación)

En [Panneerselvam / Ayyagari, 2013], se propone construir una matriz  $\mathbf{H}_k = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{r \times r}$  con los coeficientes del polinomio característico, donde  $r = n - 1$ ,  $k = 1, 2, 3$  y  $4$  (el coeficiente de  $i$  es el mismo en cada polinomio de Kharitonov mostrado en la ecuación (3.63), al emplear la técnica de “eliminación Gaussiana por derivación de la descomposición LU” se obtiene una matriz  $\mathbf{H}_{nl}$  como resultado de la técnica empleada donde se define la estabilidad del polinomio. El arreglo de la matriz  $\mathbf{H}_k$  tiene el siguiente arreglo

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

La estabilidad de Hurwitz está en verificar algún cambio de signo en cada uno de los elementos mientras se construye la matriz  $\mathbf{H}_{nl}$ . El arreglo de la matriz construida en base a la técnica aplicada a la matriz  $\mathbf{H}_{nl}$  es la siguiente.

$$\mathbf{H}_{nl} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Según [Ford, 2015, Capítulo 11.4], la técnica de la “Eliminación Gaussiana por derivación de la descomposición LU” tiene como propósito, encontrar los elementos de la diagonal superior en la matriz  $\mathbf{H}_{nl}$  (3.65) con los valores de los elementos de la matriz  $\mathbf{H}_k$  (3.64), la expresión que permite realizar esta transformación es

$$RH_{n_{j+1}} = RH_{j+1} - \left[ \frac{a_{j+1,i}}{a_{i,i}} \right] RH_i \quad (3.66)$$

donde el término  $RH_{n_{j+1}}$  pertenece al renglón transformado de la matriz  $\mathbf{H}_{nl}$  por lo que  $j$  es el valor del renglón.  $RH_{j+1}$  y  $RH_i$  son los valores tomados de los renglones de la matriz  $\mathbf{H}_k$ .  $a_{j+1,i}$  y  $a_{i,i}$  son los valores de los elementos de la matriz  $\mathbf{H}_k$ , en el Apéndice B se propone el algoritmo empleado para este trabajo.

**Propiedad 14** (Estabilidad del motor de CD con incertidumbre en sus parámetros). *El polinomio característico del modelo en función de transferencia motor de CD (3.61), tiene estabilidad robusta, por lo que el sistema es estable por el teorema de Kharitonov si los parámetros dados en la Propiedad 1 tienen incertidumbre.*

**Prueba.** Dado que el teorema de Kharitonov en [Barmish, 1994, Capítulo 5], se construye el polinomio característico teniendo como base al sistema (3.60). Se emplean los valores de la Tabla A.1 del Apéndice A y de forma arbitraria se propone la incertidumbre para un rango de tolerancia muy cerca de los valores reales, tal y como se expone en la Tabla 3.3.

.	Valor – nominal	Variación $\pm$ (%)	Intervalo	Unidades
$R_a$	17.352	5 %	[16.4844 , 18.2196]	$[\Omega]$
$L_a$	0.036274	10 %	[0.0326446 , 0.0399014]	$[H]$
$B$	0.015170	10 %	[0.013653 , 0.016687]	$[N \text{ m/rad/s}]$
$K_b$	3.007	40 %	[1.8042 , 4.2098]	$[V \text{ s/rad}]$
$J$	0.0012547	15 %	[0.0010664 , 0.0014429]	$[Kg \text{ m}^2]$

Tabla 3.3: Valores de Incertidumbre para los valores del motor CD BALDOR-RELIANCE® Mo.D5505P.

El polinomio característico tendrá relación con la función de transferencia de (3.61), donde serán sustituidos los valores de la Tabla (3.3), si tomamos el valor de  $\lambda_d = 1$ , el polinomio resultante es.

$$P_k = \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (3.67)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_4 &\in [1] \\ \alpha_3 &\in [519.7376, 470.18] \\ \alpha_2 &\in [101001, 314039.2] \\ \alpha_1 &\in [200446.8, 626672] \\ \alpha_0 &\in [99964.54, 313101.94] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Sustituyendo los valores de los intervalos (3.68) en la familia de polinomios de Kharitonov (3.63), se obtiene

$$K_1(s) = 313101.94 + 626672s + 101001s^2 + 519.7376s^3 + s^4 \quad (3.69a)$$

$$K_2(s) = 99964.54 + 200446.8s + 314039.2s^2 + 470.18s^3 + s^4 \quad (3.69b)$$

$$K_3(s) = 99964.54 + 626672s + 314039.2s^2 + 519.7376s^3 + s^4 \quad (3.69c)$$

$$K_4(s) = 313101.940 + 200446.8s + 101001s^2 + 470.180s^3 + s^4 \quad (3.69d)$$

Según en [Panneerselvam / Ayyagari, 2013], la familia de polinomios de Kharitonov (3.69) construye a la matriz  $\mathbf{H}_i$  por cada polinomio, y junto a esta, se construye la matriz  $\mathbf{H}_{ni}$  de acuerdo con el algoritmo propuesto en el ApéndiceB, por lo tanto, el grupo de matrices son

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 519.7376 & 1 & 0 & 0 \\ 626672 & 101001 & 519.7376 & 1 \\ 0 & 313101.94 & 626672 & 101001 \\ 0 & 0 & 0 & 313101.94 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_{n1} = \begin{bmatrix} 519 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 99795 & 519 & 1 \\ 0 & 0 & 625060 & 100997 \\ 0 & 0 & 0 & 313101 \end{bmatrix} \quad (3.70a)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 470.18 & 1 & 0 & 0 \\ 200446.8 & 314039.2 & 470.18 & 1 \\ 0 & 99964.54 & 200446.8 & 314039.2 \\ 0 & 0 & 0 & 99964.54 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_{n2} = \begin{bmatrix} 470 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 313612 & 470 & 1 \\ 0 & 0 & 200297 & 314038 \\ 0 & 0 & 0 & 99964 \end{bmatrix} \quad (3.70b)$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 519; 7376 & 1 & 0 & 0 \\ 626672 & 314039; 2 & 519; 7376 & 1 \\ 0 & 99964; 54 & 626672 & 314039; 2 \\ 0 & 0 & 0 & 99964; 54 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_{n3} = \begin{bmatrix} 519 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 312833 & 519 & 1 \\ 0 & 0 & 626506 & 314038 \\ 0 & 0 & 0 & 99964 \end{bmatrix} \quad (3.70c)$$

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 470.18 & 1 & 0 & 0 \\ 200446.8 & 101001 & 470.18 & 1 \\ 0 & 313101.94 & 200446.8 & 101001 \\ 0 & 0 & 0 & 313101.94 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_{n4} = \begin{bmatrix} 470 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100574 & 470 & 1 \\ 0 & 0 & 198989 & 100997 \\ 0 & 0 & 0 & 313101 \end{bmatrix} \quad (3.70d)$$

Por otro lado, en [Barmish, 1994, Capítulos 5] se describe que el sistema es estable si y solo si cada raíz del polinomio se encuentra del lado izquierdo del plano complejo  $s$ . Las raíces de cada uno de los polinomios (3.69) son

$$r_1 = [-2.5667 \pm 1.7842i, -0.0585 - 0.0055] \quad (3.71a)$$

$$r_2 = [-2.3477 \pm 5.0855i, -0.0032 \pm 0.0047i] \quad (3.71b)$$

$$r_3 = [-2.5887 \pm 4.9597i, -0.0183 - 0.0017i] \quad (3.71c)$$

$$r_4 = [-2.3410 \pm 2.1276i, -0.0099 \pm 0.0146i] \quad (3.71d)$$

Dadas las raíces de cada uno de los polinomios (3.71) y la relación de las matrices (3.70) se puede concluir que el sistema del motor de CD en un arreglo en cascada con el filtro de segundo orden representado en la función de transferencia (3.61) o (3.49), es estable con incertidumbre en sus parámetros.

□

# Capítulo 4

## Control óptimo de la velocidad angular del motor de CD a partir de la medición de la posición angular

Los equipos servo-mecánicos son mayormente usado en los sistemas electromecánicos; para el campo de la robótica, los movimientos dependen directamente de la velocidad y de la posición en sus mecanismos, esto es debido a que en sus aplicaciones demandan un alto grado de precisión, por ejemplo, en máquinas de control numérico, de manipulación por láser, entre otras.

La técnica de control asociada a un sistema electromecánico cuyo movimiento esté a cargo del motor de CD, dependerá de las limitaciones o libertades del sistema.

Por lo general, la técnica de control óptimo es usada en sistemas para minimizar el consumo del valor a la entrada, mientras que los estados a la salida tienen un comportamiento óptimo según sea su referencia, sin embargo también puede ser adaptado para funcionar a la inversa donde, pueda minimizar el costo de los estados en la salida con un consumo controlado del valor a la entrada.

### 4.1. Principio de separación

Dado que la implementación de control y observador unidos en un sistemas es delicado, conviene conocer si el diseño es posible realizarlo cada uno por separado.

El principio de separación permite conocer si los valores propios del observador no dependen del controlador, esto proporciona la información suficiente para conocer la independencia de diseños. El análisis se realizado al modelo en espacio de estados del sistema con el observador, el controlador y la planta integrados.

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 5] se describe el diseño de control óptimo, el cual consiste en proveer una señal a la entrada tal que el controlador realice que la planta se comporte de manera deseada, i.e., el comportamiento a la salida del sistema cambie según las especificaciones de diseño óptimo.

El diseño del controlador LQR (*Regulador Cuadrático Lineal* o LQR por sus siglas en inglés), no es para determinar los parámetros de control directamente, sino es a través las matrices de ponderación de una función de costos cuya comportamiento del control a la salida del sistema es de manera óptima, minimizando la entrada.

Un sistema en espacio de estados, donde el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  son completamente controlables y usando la ley de control  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ , la dinámica del sistema está determinada por

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} \quad (4.1)$$

donde los valores propios del sistema en lazo cerrado se pueden determinar por  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ .

Los valores propios del observador se pueden determinar por  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ , donde el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  son totalmente observables.

[Hendricks et. al., 2008, Capítulo 4] sugiere, que el diseño del controlador debe de ser más rápida en la dinámica que la del observador.

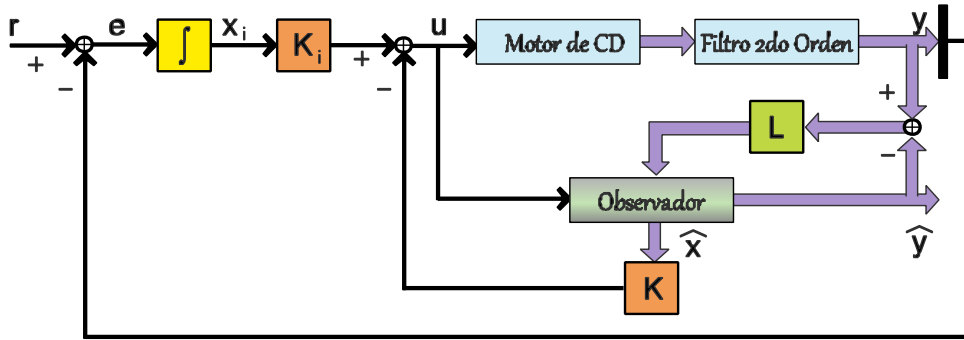


Figura 4.1: Esquema de control por retroalimentación de estados y acción integral del error, donde la planta pertenece al sistema (3.31) formado por (3.1) y (3.26) cuyo arreglo es en cascada, la matriz  $\mathbf{K}$  son las ganancias para retroalimentar el sistema y  $k_i$ , es la ganancia integral del error. Figura adaptada de [Ogata, 1998, Capítulo 12]

**Propiedad 15** (Independencia de diseño entre controlador y observador). *Para la planta del sistema (3.32) en el esquema de la Figura 4.1, el diseño del control, es independiente al diseño observador.*

**Prueba.** Dado que en [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 4] se describe la combinación del controlador con acción integral del error y el observador en un conjunto de ecuaciones que relacionan al esquema de la Figura 4.1, lo cuales para fines de este trabajo se describen como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4.2a)$$

$$\dot{x}_i = r - C_i x \quad (4.2b)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{LC}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (4.2c)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_i x_i \quad (4.2d)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2e)$$

donde (4.2a) es el modelo de (3.32). La expresión (4.2b) es la diferencia entre la referencia de entrada y los estados retroalimentados, los cuales son, la posición angular medida  $\theta_R$  y la

velocidad filtrada  $\omega_f$  están determinados por (4.2e) donde  $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$  a la salida del sistema. La expresión 4.2c está integrado por el conjunto de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ y } \mathbf{C}]$  del modelo (3.32), donde  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 & \hat{x}_4 & \hat{x}_5 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  son los estados estimados,  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 & \mathbf{l}_4 & \mathbf{l}_5 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$  son las ganancias del observador y  $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$  es la diferencia entre los estados del sistema de la planta y los estados estimados.

La expresión (4.2d) está definida como la entrada al sistema, cuya suma son las ganancias del controlador definidas como

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 5}$ ,  $\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_i & k_{ii} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  y  $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i & x_{ii} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ .

Al construir el arreglo (4.2a) en términos de (4.2d) la expresión obtenida es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{x}_i \quad (4.4)$$

Los arreglo para los estados según el observador Luenberger está dado como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.5)$$

Definiendo como un sistema el esquema de control en la Figura 4.1 de la forma (4.2a) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{K}_i & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ -\mathbf{C}_i & 0 & 0 \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{K}_i & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_r \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (4.6)$$

donde la referencia  $\mathbf{r} \in [r_{\omega D} \text{ y } r_{\theta D}]$  es velocidad y posición deseada respectivamente

Usando la matriz para la transformación de similitud, cuya forma es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_r & 0 \\ \mathbf{I}_n & 0 & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{I}_n$  y  $\mathbf{I}_r$  son matrices identidad de orden  $\mathbb{R}^5$  y  $\mathbb{R}^2$  respectivamente.

Dada la transformación de similitud por (3.51), el arreglo de vectores de estados esta dado como

$$\mathbf{z} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \\ \mathbf{e}_e \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

donde  $\mathbf{x}$  son los estados del modelo (3.32),  $\mathbf{x}_i$  son los estados que corresponde al controlador y  $\hat{\mathbf{x}}$  corresponden a los estados del observador.

La relación de transformación (3.51), donde intervienen el arreglo de matrices (4.6) y (4.7), cuyo resultado es

$$\mathbf{A}_{at} = \mathbf{P}\mathbf{A}_a\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_i & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{C}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Realizando la división entre los estados del controlador y el observador combinados en (4.9), cuya expresión se puede apreciar como

$$\mathbf{A}_{at} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_i & \vdots & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{C}_i & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{at(11)} & \vdots & \mathbf{A}_{at(12)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{A}_{at(21)} & \vdots & \mathbf{A}_{at(22)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde la submatriz  $\mathbf{A}_{at(11)}$  tiene relación con los estados de los controladores por retroalimentación de estados y por acción integral del error, la submatriz  $\mathbf{A}_{at(22)}$  tiene relación con los estados del observador y la submatriz  $\mathbf{A}_{at(12)}$  tiene únicamente relación con el controlador de retroalimentación de estados.  $\mathbf{A}_{at}$  se define como la matriz triangular por bloques cuyo valores propios son

$$\det(\lambda_d \mathbf{I} - \mathbf{A}_{at}) = \det(\lambda_d \mathbf{I} - \mathbf{A}_{at(11)}) \cdot \det(\lambda_d \mathbf{I} - [\mathbf{A} - \mathbf{LC}]) = 0 \quad (4.11)$$

Es posible observar en la expresión 4.11, que los valores propios del observador, no dependen de los valores propios de controlador, por lo tanto, es posible diseñar el esquema de control de manera independiente al esquema de observador<sup>1</sup>.  $\square$

## 4.2. Regulador óptimo cuadrático $LQR$

[Hendricks et. al., 2008, Capítulo 5] señala que en la teoría de control clásico, el ingeniero que esté a cargo del diseño de un sistema de control, debe de tener cierta experiencia para tomar en cuenta algunos parámetros de diseño para obtener la respuesta deseada en el sistema.

En [Ogata, 1998, Capítulo 13.5] se describe que si el sistema es totalmente controlable, la técnica de control  $LQR$  (Linear-Quadratic-Regulator por sus siglas en inglés) propone usar los valores apropiados del control óptimo  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  para determinar las ganancias de  $\mathbf{K}$  con el fin de minimizar una función de costo. En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 5] se define la función de costo como

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (4.12)$$

Dada la expresión (4.12),  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices de factor de ponderación o Matrices de peso, las cuales son definidas positivas o hermitianas, tal que  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^m$  cuya expresión es la siguiente

<sup>1</sup>Esta prueba también fue elaborada en un trabajo similar en [Fabián, 2015]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{n \times n} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

### 4.2.1. Ecuación de Riccati

En [Fortuna / Frasca, Capítulo 8] se considera a un sistema lineal e invariante en el tiempo de la forma (2.6) en la cual se desprecia la perturbación externa y es completamente controlable, usando la ley de control

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (4.14)$$

la dinámica del sistema es gobernado como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (4.15)$$

Usualmente, (4.15) indica la matriz del sistema en lazo cerrado. Si el sistema es totalmente controlable y totalmente observable, entonces los valores propios pueden ser fijados de forma arbitraria.

En [Ogata, 1998, Capítulo 12] se describe que si (4.15) es estable o sus valores propios tienen parte real negativa entonces se puede minimizar la ecuación de costo (4.12). Por lo tanto, al sustituir (4.14) en (4.12) se obtiene

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}^T \left[ \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \right] \mathbf{x} dt \quad (4.16)$$

en términos de la expresión cuadrático

$$\mathbf{x}^T \left[ \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \right] \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \left( \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \right) \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$  y es definida positiva de coeficientes constantes, con una estructura dada como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Resolviendo la derivada, donde se sustituye la ecuación 4.15 en la derivada de la ecuación (4.17) y realizando las operaciones algebraicas se obtiene la expresión de Riccati, la cual tiene la siguiente forma

$$\mathbf{x}^T \left[ \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \right] \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T \left[ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \right] \mathbf{x} \quad (4.19)$$

Comparando ambos lados de la ecuación y suponiendo que es validad para toda  $\mathbf{x}$  se puede expresar de la siguiente manera.

$$-\left( \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \right) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \quad (4.20)$$

Considerando que  $\mathbf{R}$  es una matriz definida positiva la cual tiene como propiedad  $\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$  donde  $\mathbf{T}$  es una matriz no singular. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (4.20) se puede expresar como

$$\left(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T\right) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{K} = 0 \quad (4.21)$$

La expresión dada en (4.21) se puede reescribir como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{K} = 0 \quad (4.22)$$

Sumando en ambos lados de (4.22) el término de  $\mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ , se obtiene

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{B}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{I} - \mathbf{K}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{K} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{K} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (4.23)$$

Empleando algebraicamente la ecuación anterior se obtiene

$$\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (4.24)$$

En [Hendricks et. al., 2008, capítulo 5], la matriz  $\mathbf{P}$  es conocida como la solución de la ecuación de Riccati. para algunos casos la solución podría no ser única, sin embargo se puede forzar una solución de matriz definida positiva asegurando así la estabilidad del sistema, siempre y cuando el sistema sea controlable.

Realizando las operaciones algebraicas en (4.23), la expresión condensada de la ecuación de Riccati es

$$\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (4.25)$$

donde la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  está definido por

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (4.26)$$

En [Ogata, 1998, Capítulo 12] se describe a (4.26) como la matriz de ganancias óptima.

En [Hendricks et. al., 2008, capítulo 5] se describe a la matriz  $\mathbf{P}$  de (4.25) como la solución de la ecuación de Riccati.

### 4.2.2. Metodología para obtener las ganancias $\mathbf{K}$ del controlador LQR

En [Ogata, 1998, Capítulo 13] se describe la metodología para obtener las ganancias de la matriz  $\mathbf{K}$  que corresponde al control óptimo, haciendo uso de la ecuación matricial de Riccati (4.25), donde el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  del sistema (2.6) son completamente controlables y elección de las matrices  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}]$  (4.13) para la función de costo (4.12) son apropiadas según el diseño, entonces es posible realizar los siguientes pasos

- I. Con el debido conjunto de matrices del sistema  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q} \text{ y } \mathbf{R}]$  se resuelve la ecuación matricial de Riccati (4.25) para obtener la matriz  $\mathbf{P}$ .
- II. Sustituyendo la matriz  $\mathbf{P}$  en la ecuación (4.26) se obtiene la matriz de ganancias de el control óptimo  $\mathbf{K}^2$ .

---

<sup>2</sup>En el Apéndice E se muestra el Algoritmo E.2, el cual es empleado en el presente trabajo para obtener las ganancias de la matriz  $\mathbf{K}$  a través del comando `lqr` en MatLab<sup>®</sup>.

### 4.3. Control óptimo por retroalimentación con acción integral del error

En [Ogata, 2010, Capítulo 10] se describe un esquema de bloques tal y como se muestra en la Figura 4.2 para un modelo en espacio de estados de la forma (2.6a) y (2.6b) cuyo control es por retroalimentación de estados con acción integral del error.

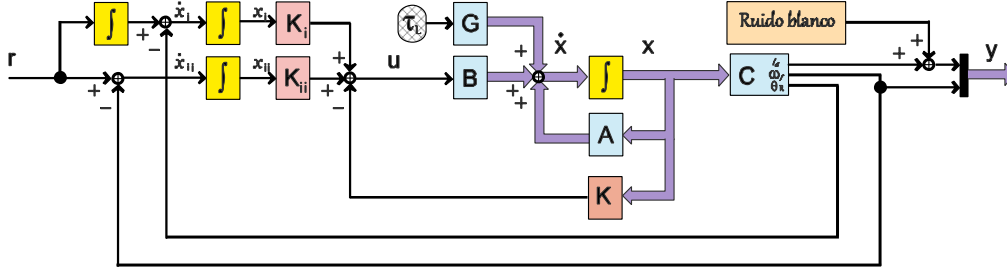


Figura 4.2: Esquema de control por retroalimentación de estados con controlador de acción integral del error, donde las matrices de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  pertenecen al sistema (3.32) y  $\mathbf{C}$  es la matriz de salidas tomadas para la retroalimentación de la acción integral del error. Figura adaptada de [Hendricks et. al., 2008].

Las ecuaciones que relacionan al sistema de la Figura 4.2 están definidas como (4.2a), (4.2b), (4.2d) y (4.2e).

Suponiendo que la entrada del sistema es tomada como referencia, la dinámica se representa en términos de (4.2a) y (4.2b)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t) \quad (4.27)$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estados del sistema y  $\mathbf{x}_n$  son las salidas del integrador  $[x_i, x_{ii}]$

En [Ogata, 2010] se describe que el sistema es asintóticamente estable tal que  $\mathbf{x}(\infty)$ ,  $\mathbf{x}_n(\infty)$  y  $u(\infty)$  tiendan a valores constantes, así también en el estado estacionario  $\dot{\mathbf{x}}_n(t) = 0$  para obtener  $\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{r}$ . Si se considera a  $\mathbf{r}(t)$  como una entrada escalón, se tiene que  $\mathbf{r}(\infty) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$  es decir, una constante para  $t > 0$ . Teniendo estos criterios como una diferencia en (4.27) se expresa como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) - \dot{\mathbf{x}}_n(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (4.28)$$

definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) &= \mathbf{x}_e(t) \\ \mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(\infty) &= \mathbf{x}_{en}(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned}$$

donde se puede definir un nuevo vector de error  $e(t)$

$$e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \mathbf{x}_{en}(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

El vector  $u_e(t)$  está definido en (4.3) el cual se puede expresar en términos del error descrito de la siguiente forma

$$u_e(t) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \mathbf{x}_{en}(t) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

donde  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}_i$  están dadas en (4.3). La ecuación (4.28) es reducida y representada de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \bar{\mathbf{B}}u_e \quad (4.31)$$

donde

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C}_i & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

y la ecuación (4.30) se convierte en

$$u_e = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{e} \quad (4.33)$$

donde

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Haciendo la sustitución de la ecuación (4.33) en la ecuación (4.31) la ecuación de estado del error se expresa como

$$\dot{\mathbf{e}} = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}})\mathbf{e} \quad (4.35)$$

Para emplear el control óptimo en la técnica por retroalimentación de estados y acción integral del error, se une esta técnica a la función de costo (4.12), tomando en cuenta que las matrices del sistema están definidas como estados y entradas por (4.32). La función de costos se define como

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + u^T R u] dt \quad (4.36)$$

donde  $\mathbf{e}$  es el vector del error de los estados y  $u$  es la entrada, por lo tanto la solución de *Riccati* (4.25) se puede expresar como

$$\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{P} = 0 \quad (4.37)$$

Cabe señalar que para fines de este trabajo, los estados que son empleados para la retroalimentación están definidos por  $\mathbf{C}_i$ , los cuales son  $[\theta_R, \omega_f]$ , i.e., los estados  $[x_3, x_5]$  del sistema en espacio de estados (3.32), por lo tanto, las ganancias del controlador óptimo (4.34) en términos de la matriz de Riccati (4.37) son

$$\bar{\mathbf{K}}_{LQR} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

donde la metodología para obtener la matriz de ganancias  $\mathbf{K}_{LQR}$  puede ser empleada tal y como se expresa en la Sección 4.2.2.

## 4.4. Filtro de Kalman

El uso de técnicas estocásticas es la parte medular del Filtro de Kalman Continuo (FKC), la cual es usada como una herramienta para estimar los estados a la salida para la técnica de control óptimo LQR, cuyo propósito es conocer todos y cada uno de los estados del sistema por lo cual realiza la tarea de un *obseador óptimo*.

Para [Ashish, 2002, Capítulo 7] una planta ruidosa es un sistema estocástico, tal modelo es contaminado por ruido blanco para un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{4.39}$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de salida,  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de ruido de proceso,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^r$  es el ruido medido y las matrices  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  y  $\mathbf{G}\}$  son conocidas.

Como definición, de manera general en [Devore, 2008, Capítulo 5] se describe a la covarianza como dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  que no son independientes descritas matemáticamente como

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy \tag{4.40}$$

donde  $(X - \mu_X)$  y  $(Y - \mu_Y)$  son las desviaciones de las variables con respecto a sus valores medios, la covarianza es el producto esperado de las desviaciones y  $f(x, y)$  es la función de densidad de probabilidad.

En [Petko et. al, 2019, Capítulo 2.4.3] se asume que los vectores  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  de la ecuación (4.39) es ruido blanco Gaussianos de media cero con covarianzas

$$E[\mathbf{v}(t + \tau) \mathbf{v}(t)^T] = \mathbf{V} \tag{4.41a}$$

$$E[\mathbf{w}(t + \tau) \mathbf{w}(t)^T] = \mathbf{W} \tag{4.41b}$$

$$E[\mathbf{v}(t + \tau) \mathbf{w}(t)^T] = 0 \tag{4.41c}$$

donde  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  son matrices definidas positivas. El producto esperado entre los vectores de  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  son no correlaciones (4.41c), i.e, los vectores  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  no están fuertemente relacionados entre sí, en [Devore, 2008, Capítulo 5 pp198] textualmente describe

“La covarianza depende *tanto* del conjunto de pares posibles *como* de las probabilidades”

por lo que el ruido de proceso y el ruido medido representado por los vectores  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  respectivamente, son independientes.

Para [Hendricks et. al., 2008, Capitulo 7], las condiciones iniciales por el objeto de control son

$$E\{\mathbf{x}(t_0)\} = \mathbf{x}_0 \tag{4.42a}$$

$$E\{[\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0][\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0]^T\} = \mathbf{Q}_0 \tag{4.42b}$$

definiendo el error de estimación como

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.43)$$

minimizado por una función de costo cuadrático

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \right] \quad (4.44)$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  son los estados del motor de CD y  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  son los estados estimados (o estado óptimo). El filtro de Kalman es un observador óptimo y minimiza una medida estocástica del error estimado

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{N}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \quad (4.45)$$

el cual es llamado *filtro óptimo en tiempo continuo* (o filtro de Kalman-Bucy), donde  $\mathbf{L}$  es la matriz de ganancias, las matrices  $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}\}$  son de las mismas dimensiones a  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  de (4.39) respectivamente. La ganancia de la matriz multiplica al residuo  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ . La ecuación (4.45) se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{C}] \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{N}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \quad (4.46)$$

La estabilidad del filtro está determinado por los valores propios de  $\mathbf{M} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ . Si el par de matrices  $[\mathbf{C}, \mathbf{M}]$  son observable, entonces existe una matriz de ganancias  $\mathbf{L}$  tal que el filtro sea estable. Sustituyendo los arreglos de ecuaciones de (4.39) y (4.45) en la solución diferencial de (4.43), es posible manipular de manera algebraica para encontrar la solución

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{N}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 7] supone que  $\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}\mathbf{u}(t)$  por lo que la covarianza del error de estado estimado es mínima por tal motivo

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) - \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{w}(t) \quad (4.48)$$

Tomando el valor medido de ambos lados de la ecuación, ya que el orden de la expectativa y diferenciación pueden ser reversibles (son operaciones lineales), despreciando el valor medio del ruido  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  a un valor cero, para un error imparcial se puede expresar como

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \quad (4.49)$$

donde la expresión (4.45) en combinación con (4.49) permite expresar la ecuación en términos del observador óptimo

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \quad (4.50)$$

donde también se puede expresar de la siguiente manera

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (4.51)$$

En [Hendricks et. al., 2008] se describe las ecuaciones (4.50) y (4.51) como un observador óptimo, el estado estimado es el valor medio del estado

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) = E\{\mathbf{x}(t)\} \quad (4.52)$$

La condición inicial para el error estimado es  $\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{e}_0$ , empleando este valor en  $\mathbf{M}$  en la ecuación (4.49) la ecuación se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{LC}]\mathbf{e}(t) + [\mathbf{G} - \mathbf{L}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

donde esta expresión se describe [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 6], donde para cualquier entrada de la matriz de ruido es redefinida como  $\mathbf{G}' = [\mathbf{G} - \mathbf{L}]$ , por lo tanto es posible reescribir la ecuación que describe el desarrollo en el tiempo de la varianza de el error de reconstrucción como

$$\dot{\mathbf{Q}} = [\mathbf{A} - \mathbf{LC}]\mathbf{Q} + \mathbf{Q}[\mathbf{A} - \mathbf{LC}]^T + \mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^T + \mathbf{L}\mathbf{W}\mathbf{L}^T \quad (4.54)$$

donde la condición inicial está dada por  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$  (4.42b), empleando la solución usada en el apartado del “Regulador Óptimo Cuadrático  $LQR$ ” es posible encontrar el valor óptimo  $\mathbf{L}$  minimizando la matriz de covarianza de error del estimado visto en la ecuación anterior, para mayor información también se puede ver en [Hendricks et. al., 2008, Apéndice C].

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1} \quad (4.55)$$

Es usada como la expresión de Riccati de una forma más corta de la ecuación (4.54)

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^T - \mathbf{Q}\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Q} \quad (4.56)$$

La ecuación (4.56) es la solución para el filtro de Kalman. El término  $\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T$  representan la respuesta interna debido al ruido a la entrada del sistema,  $\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^T$  aumenta la incertidumbre estadística del sistema debido al estado del ruido,  $-\mathbf{Q}\mathbf{C}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Q}$  representa de manera general la incertidumbre que decrece como resultado de la medición. Estos tres últimos términos, junto con la derivada en el tiempo, son términos dependientes para la ecuación del sistema de Lyapunov en la cual, se puede representar la solución en términos de la ecuación de Riccati para encontrar el error de la covarianza en el sistema. La solución para (4.56) es cuando la derivada del sistema es cero ( $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ ), lo cual produce una solución algebraica. Esta ecuación tiene el error de covarianza para el filtro de Kalman, cuya expresión es “filtro óptimo en estado estacionario” para el sistema, cuya expresión es

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^T - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{Q} = 0 \quad (4.57)$$

donde la matriz  $\mathbf{L}$ , son las ganancias para el filtro de Kalman cuya expresión es la ecuación (4.55).

#### 4.4.1. Metodología para obtener las ganancias del filtro de Kalman

Por lo tanto, si el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  de un sistema en espacio de estados de la forma (2.6), son completamente observables y la elección de las matrices apropiada de las matrices de ponderación para la función de costo del filtro de Kalman  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(m+m) \times (m+m)}$  satisfacen a (4.44) entonces

- I. Con el conjunto de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{W}$  y  $\mathbf{V}]$  se resuelve la ecuación matricial de Riccati (4.57) para obtener la matriz  $\mathbf{Q}$ .
- II. Sustituyendo la matriz  $\mathbf{Q}$  en la ecuación (4.55) se obtiene la matriz de ganancias del observador óptimo  $\mathbf{L}^3$ .

## 4.5. Simulaciones de control óptimo del motor de CD

El grupo de simulaciones realizadas en este apartado están elaboradas en MatLab<sup>®4</sup> cuyo código para el workspace de programación se encuentra en el Apéndice E & Simulink<sup>®5</sup> donde el tiempo de simulación es 45 [s] de velocidad fija y un método ode4 (Runge-Kutta) con un tiempo fundamental de muestreo de 0.00001 [s].

### 4.5.1. Construcción de la matriz del controlador LQR

Dado el modelo en espacio de estados (3.32) cuyo par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  y la matriz  $\mathbf{C}_i$  de la ecuación (4.2e) son empleadas para construir la expresión (4.32), reemplazando el valor de los parámetros de la Tabla A.1 en el Apéndice A, la expresión se muestra de la forma siguiente

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -478.36 & -82.90 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 2396.6 & -12.09 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40000 & -40000 & -400 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 27.57 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Proponiendo el par de matrices de ponderación  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}]$  como se propone en (4.13) para la función de costo (4.12), tomando en cuenta los parámetros del motor de CD de la Tabla A.1 en el Apéndice A en las matrices (4.58) y haciendo uso de la metodología propuesta en la Sección 4.2.2, se obtienen las ganancias de la matriz  $\bar{\mathbf{K}}_{LQR}^6$

### 4.5.2. Construcción de la matriz del observador con el filtro de Kalman

Dado que el modelo en espacio de estados (3.32) es no completamente observable, se realiza una transformación de similitud (3.51) con el propósito de separar la parte observable de la

<sup>3</sup>En el Apéndice E se muestra el Algoritmo E.3, el cual es empleado en el presente trabajo para obtener las ganancias de la matriz  $\mathbf{L}$  a través del comando `kalman` en MatLab<sup>®</sup>.

<sup>4</sup>MatLab<sup>®</sup> R2018b (9.5.0.944444) Copyright 1984-2018. The MathWorks, Inc.

<sup>5</sup>Simulink<sup>®</sup> R2018b (9.2) Copyright 1990-2018. The MathWorks, Inc.

<sup>6</sup>En el Apéndice E se propone un algoritmo en el Software de Matlab<sup>®</sup> para resolver este problema, el cual fue empleado para el presente trabajo.

no observable a través del grupo de matrices (3.53). La transformación y separación de los estados no observables dan como resultado el modelo (3.60). Representado de forma numérica con  $\lambda_d = 200$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.04 \times 10^5 & 0 & -4.9 \times 10^2 & 0 \\ -2.3 \times 10^5 & -4 \times 10^4 & -4.8 \times 10^3 & -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27.57 \\ 0 \\ -1.3 \times 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.3 \times 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_L$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

donde la connotación  $\tilde{x}_n$ , es empleada únicamente para describir al modelo en espacio de estados (4.59) que fué obtenido a través de la transformación (3.51) de un modelo no observable.

Las ganancias de la matriz de Kalman están determinadas como  $\mathbf{L}_t$  cuya metodología está dada por la sección 4.4.1 para el sistema (4.59).

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 4] se describe que si un sistema inobservable (sistema original), después de la descomposición en subespacios y separar la parte observable (expresión reducida), esta parte también puede regresar a los estados originales (expresión ampliada). A través de la transformación de similitud (3.51) y el arreglo de la matriz de transformación  $\mathbf{P}$  (3.54) pueden regresar a los estados originales el sistema reducida. Para el caso de la matriz de ganancias del observador  $\mathbf{L}_t$ , la transformación se realiza de la forma

$$\mathbf{L} = \text{inv}(\mathbf{P})\mathbf{L}_t \quad (4.60)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la misma (3.59) y  $\mathbf{L}_t$  es la matriz de ganancias de los estados reducidos. Si la matriz de observabilidad original del sistema tiene rango  $p$ , la matriz de ganancias es particionada como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_t \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix}^T \quad (4.61)$$

tal que donde  $\mathbf{L}_t$  tiene vectores renglón de  $p$  y  $\mathbf{v}_t$  tiene los vectores renglón  $n - p$  los cuales son de elección arbitraria, para fines de este trabajo es elegido como  $\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ , por lo tanto, la matriz de ganancias para el filtro de Kalman en el sistema original están determinadas como  $\mathbf{L}$ <sup>7</sup>. El arreglo para el control y observador óptimo construido a lo largo de este trabajo se muestra en la Figura 4.3

En la Figura 4.3, se muestra el esquema de control para los fines de este trabajo, cuyas conjunto de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ y } \mathbf{G}]$  y  $[\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o \text{ y } \mathbf{G}_o]$  pertenecen al modelo en espacio de estados (3.32) y la matriz  $[\mathbf{C}_i]$  es (4.2e), donde los valores para la constante de  $\tau_L = 0.15$ , las ganancias de la matriz  $\mathbf{K}$ ,  $k_i$  y  $k_{ii}$  están determinadas en (4.38), las ganancias de la matriz  $\mathbf{L}$  están determinadas en (4.61) y también se considera un escalar de ruido blanco para efectos de medición en el sensor de corriente con una potencia de  $0.1 \times 10^{-12}$  en un tiempo simple de  $0.1 \times 10^{-3}$  según el bloque de simulación en Simulink<sup>®</sup>.

<sup>7</sup>En el Apéndice E se propone un algoritmo en el Software de Matlab<sup>®</sup> para resolver este problema.

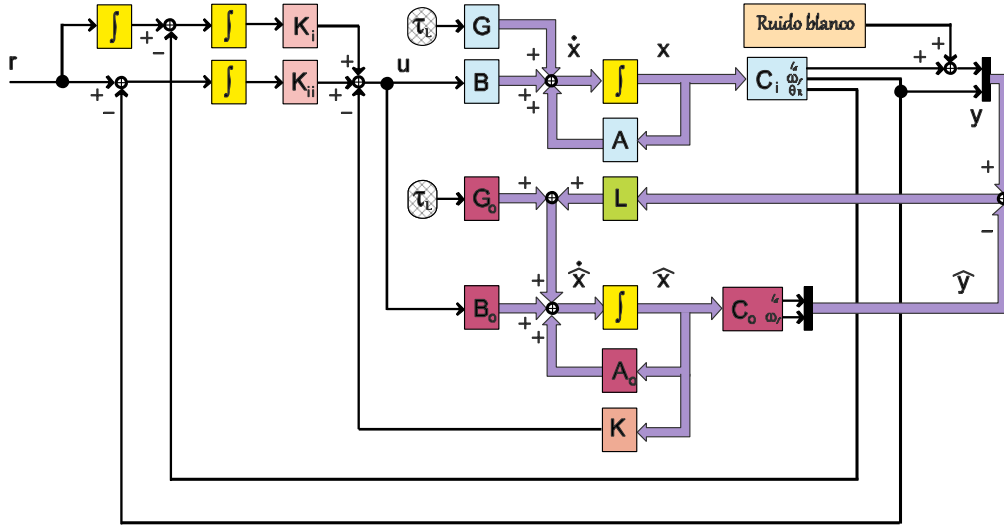


Figura 4.3: Esquema de control óptimo para el motor de CD en cascada con el filtro de segundo orden (3.32), compuesto por el control por retroalimentación de estados con acción integral del error, integrado por la técnica LQR en conjunto con el estimador de estados compuesto por el filtro de Kalman.

### 4.5.3. Resultados de simulación

Tomando como referencia la Figura 4.3 cuya planta del sistema es el modelo (3.32) donde las ganancias del controlador óptimo y las del integrador del error  $[K, K_i$  y  $K_{ii}]$  se pueden obtener por la metodología de la Sección 4.2.2, las cuales son expuestas en (4.38), donde para fines de este trabajo se eligen los siguientes valores

$$\bar{K}_{LQR} = \begin{bmatrix} 0.1415 & 0.0284 & 12.1293 & 0.0029 & 10.789 \times 10^{-6} & -22.3607 & -.1773 \times 10^{-6} \end{bmatrix}^8 \quad (4.62)$$

Las ganancias del estimador  $L$ , se pueden obtener por la metodología expuesta en la Sección 4.4.1. para fines de este trabajo se eligen los siguientes valores

$$L = \begin{bmatrix} 1.5541 & -0.8210 \\ 0.80862 & 7.07663 \\ -0.95212 & -4.83427 \\ -0.94451 & -4.88455 \\ -0.45616 & 3.47327 \end{bmatrix}^9 \times 10^2 \quad (4.63)$$

La función elegida como entrada el sistema  $r_{wref}$  tiene la siguiente expresión

<sup>8</sup>Los valores propuestos para estas ganancias están en torno a la metodología de la Sección 4.2.2, donde el algoritmo empleado en el software de Matlab<sup>®</sup> se muestra en Algoritmo E.2 en el Apéndice E. Los parámetros del motor de CD empleados en el algoritmo se muestran en la Tabla A.1 en el Apéndice A.

<sup>9</sup>Los valores propuestos para estas ganancias están en torno a la metodología de la Sección 4.4.1, donde el algoritmo empleado en el software de Matlab<sup>®</sup> se muestra en Algoritmo E.3 en el Apéndice E. Los parámetros del motor de CD empleados en el algoritmo se muestran en la Tabla A.1 en el Apéndice A.

$$r_{\omega ref} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq t < 5 \\ 250(t) - 5(250) & 5 \leq t < 7 \\ 500 & 7 \leq t < 10 \\ -250(t) + 3000 & 10 \leq t < 12 \\ 0 & 12 \leq t < 13 \\ -250(t) + 13(250) & 13 \leq t < 14 \\ -250 & 14 \leq t < 15 \\ 250(t) - 4000 & 15 \leq t < 16 \\ 0 & 16 \leq t < 17 \\ 150(t) - 17(150) & 17 \leq t < 19 \\ 300 & 19 \leq t < 20 \\ 0 & 20 \leq t < 23 \\ 400 & 23 \leq t < 24 \\ -180(t) + 4720 & 24 \leq t < 29 \\ -500 & 29 \leq t < 32 \\ \frac{100}{3}(t) - \frac{3500}{3} & 32 \leq t < 38 \\ 500 & 38 \leq t < 40 \\ -\frac{500}{3}(t) + \frac{500}{3}(40) + 500 & 40 \leq t < 43 \\ 0 & 43 \leq t < 45 \end{array} \right. \quad (4.64)$$

donde la forma gráfica de la función (4.64) se muestra en la figura 4.4

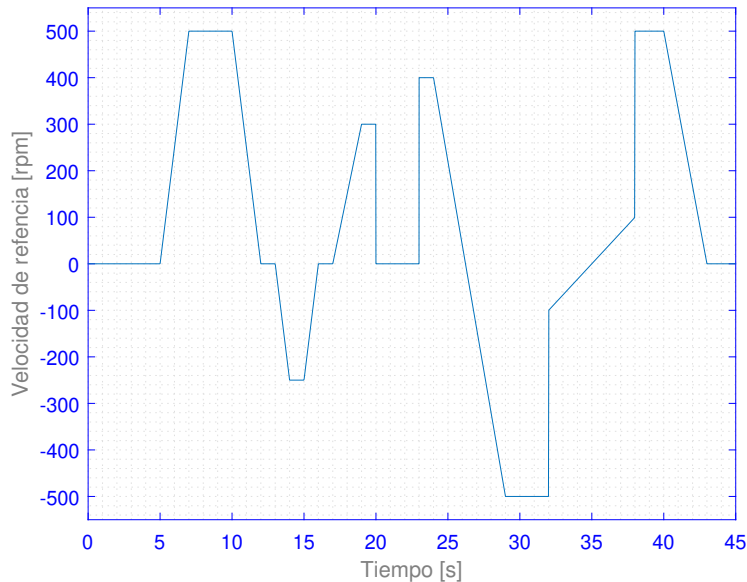


Figura 4.4: Señal de referencia  $r_{\omega ref}$ , la cual está definida por la función (4.64). Esta función es empleada como señal de entrada  $r$  en el diagrama (4.3). El propósito de la forma de esta señal es únicamente ilustrativa para conocer la respuesta del control óptimo.

La función  $r_{\omega ref}$  (4.64) está en unidades de  $[rpm]$ , a esta función se le hace una conversión a  $[rad/s]$  justo a la entrada del sistema, e.i., si se toma como referencia la Figura 4.3 en la

entrada del sistema  $r$  los valores son en  $[rad/s]$ . El propósito de esta función es, ilustrar de manera simulada por software el comportamiento del control de velocidad para el motor de CD.

La simulación de las velocidades con respecto al esquema de control y observador mostrado en la Figura 4.3, son expuestas de la siguiente manera

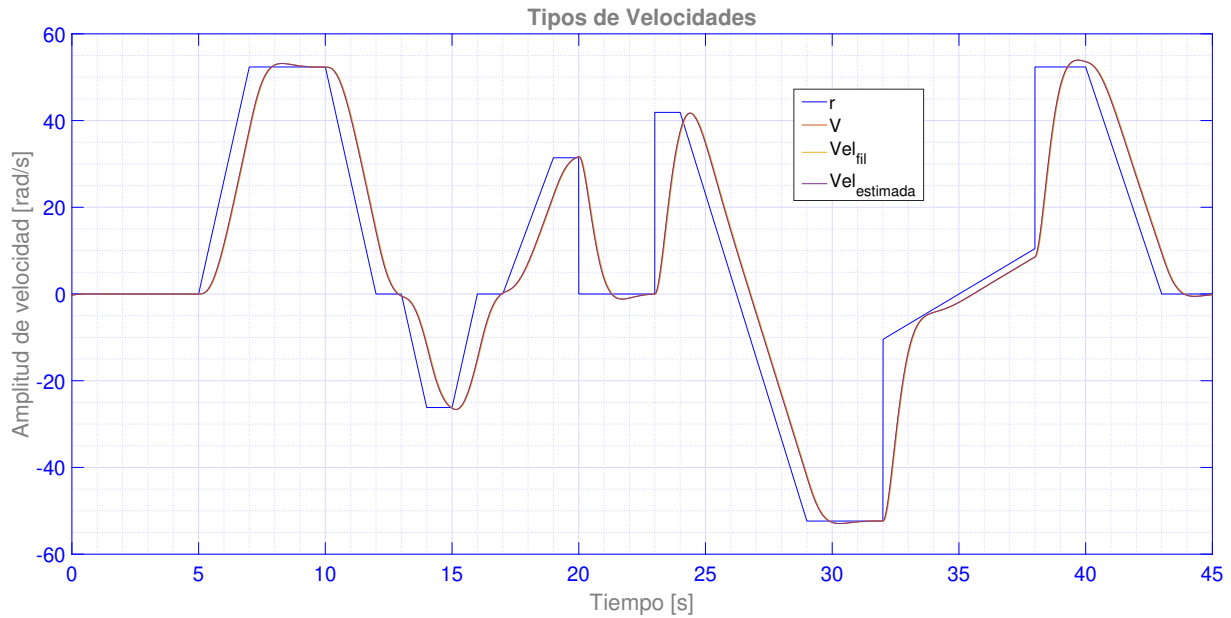


Figura 4.5: conjunto trayectorias de velocidades, las cuales son: velocidad de referencia a la entrada del sistema ( $r$ ), velocidad verdadera del motor de CD ( $V$ ), velocidad filtrada ( $Vel_{fil}$ ) y velocidad estimada ( $Vel_{estimada}$ ).

En la Figura 4.5, se muestra la trayectoria de las velocidades en las cuales se puede ver un error de seguimiento entre las trayectorias de velocidad de referencia y filtrada, en los puntos donde la velocidad es constante como en los intervalos de 7 a 10 [s] y 29 a 32 [s] se puede observar que ambas velocidades (filtrada y referencia) coinciden en un periodo de tiempo muy corto, éste mismo comportamiento se puede observar cuando la señal de referencia está en cero como es el caso de 0 a 5 [s] y 43 a 45 [s], para el resto de la función existe un error de regulación de velocidad.

Los errores de acuerdo a las trayectorias de velocidades mostradas en la Figura 4.5 son mostradas en la Figura 4.6 y la Figura 4.7.

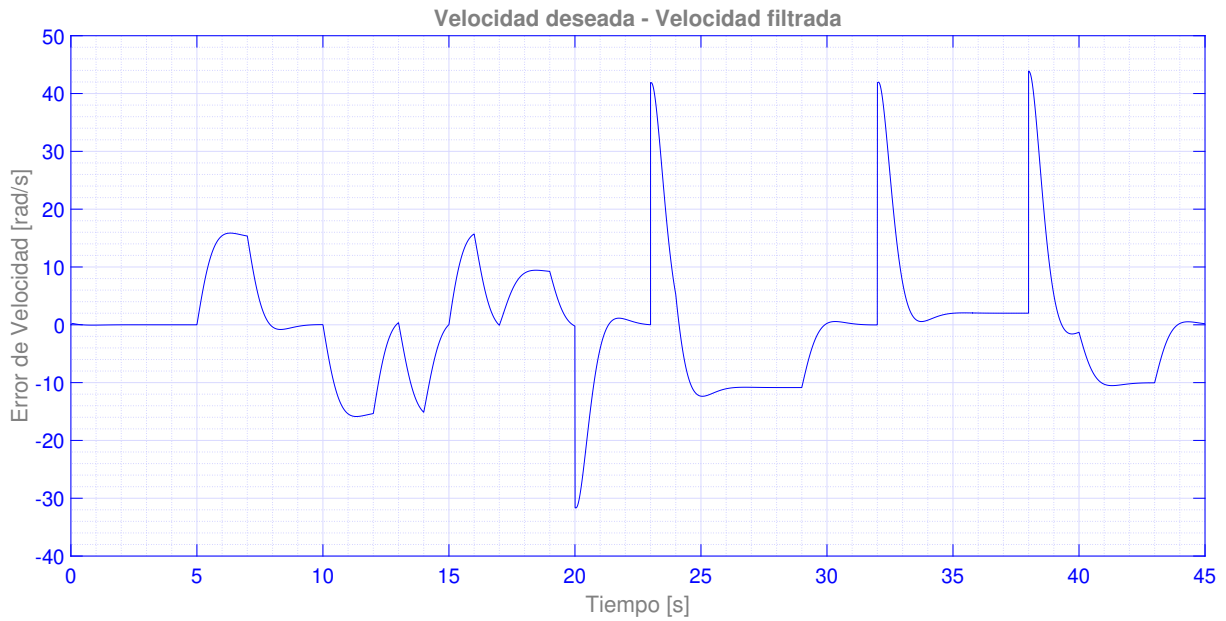


Figura 4.6: Error de velocidad, Diferencia entre velocidad deseada - velocidad filtrada.

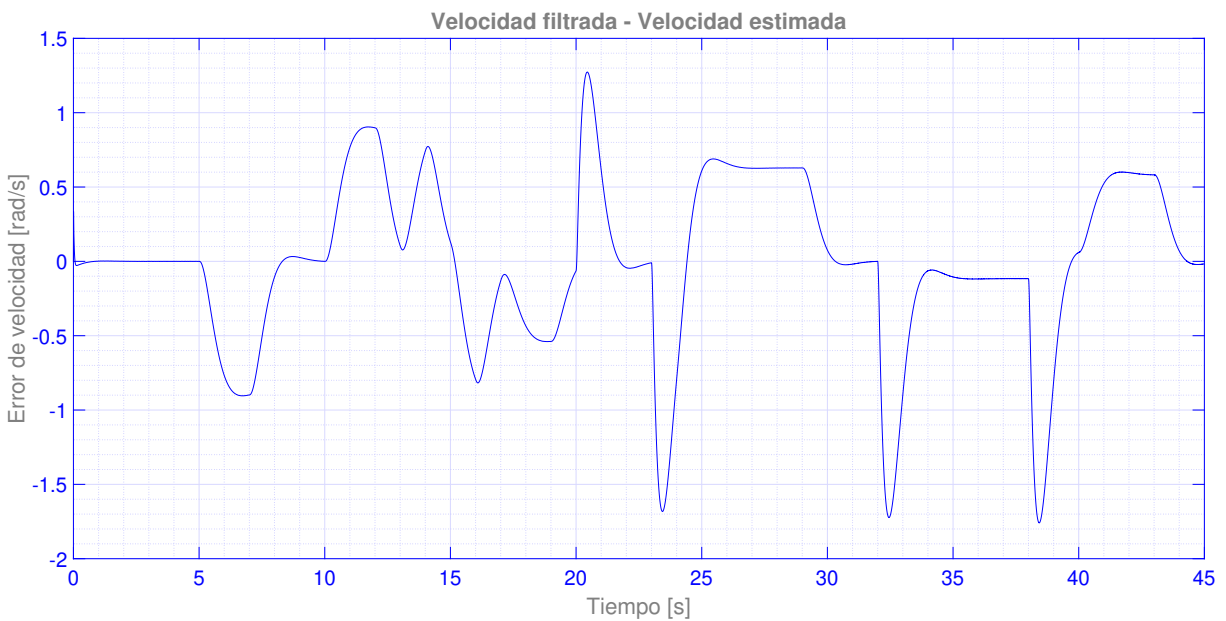


Figura 4.7: Error de velocidad. Diferencia entre velocidad filtrada - velocidad estimada.

Claramente se puede observar que en la Figura 4.5 la trayectoria entre las velocidades graficadas que son la filtrada, la verdadera y la estimada tiene una trayectoria muy similar, sin embargo la Figura 4.6 y la Figura 4.7, muestran cierta diferencia y en éstas, se puede observar el error de seguimiento que existe entre ellas. El margen de diferencia entre la velocidad filtrada y la estimada dadas en la Figura 4.7 es muy pequeña en comparación a la que existe en la velocidad

deseada y filtrada, por lo que es posible señalar que el margen de error entre las velocidades graficadas que son la filtrada, la verdadera y la estimada es muy pequeño en comparación a la referencia.

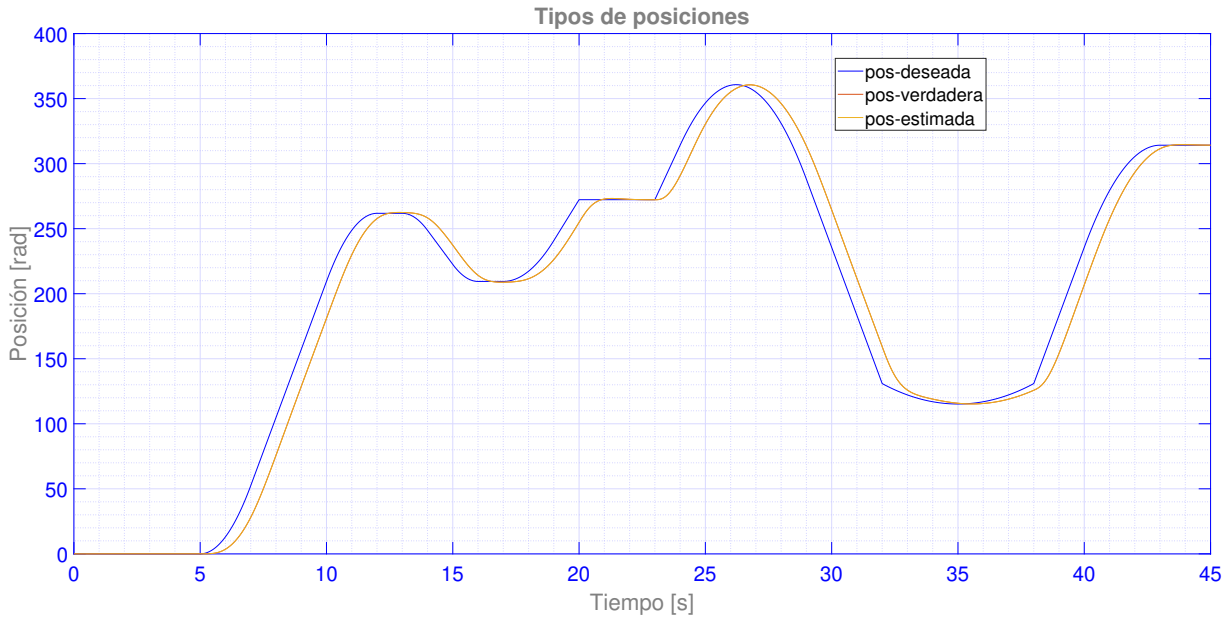


Figura 4.8: Conjunto de gráficas que contienen las trayectorias de posición las cuales son la deseada, la verdadera y la estimada.

El conjunto de posiciones mostradas en la Figura 4.8, también tiene error de seguimiento, puesto que la trayectoria de la posición regulada no tiene seguimiento a la trayectoria deseada. Al igual que en la regulación de velocidad, se muestran los errores de posición entre las trayectorias de la Figura 4.8.

En la Figura 4.9 se puede mostrar la diferencia entre la posición verdadera y la posición deseada, la cual muestra el margen de error de seguimiento.

En la Figura 4.10 se puede observar que el margen que existe entre la posición verdadera y la posición estimada es muy pequeño, por esta razón se puede decir que existe mucha similitud en ambas trayectorias, por lo que tiene un error de posición similar a la Figura 4.8.

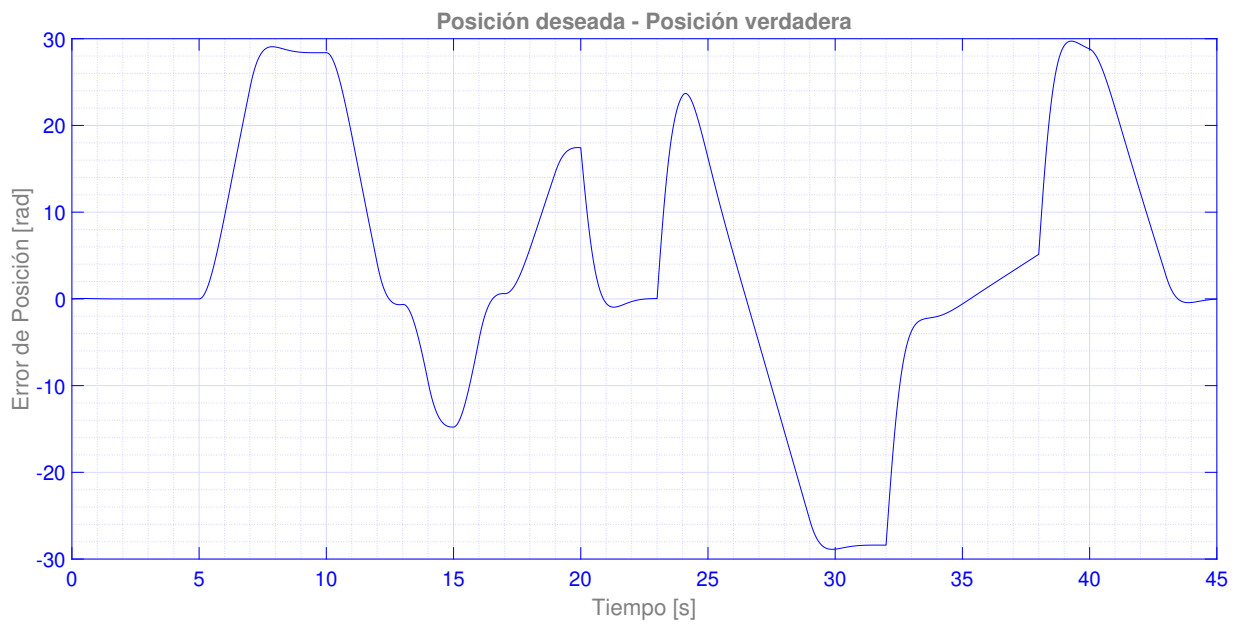


Figura 4.9: Error de posición. Diferencia entre la posición deseada y la posición verdadera.

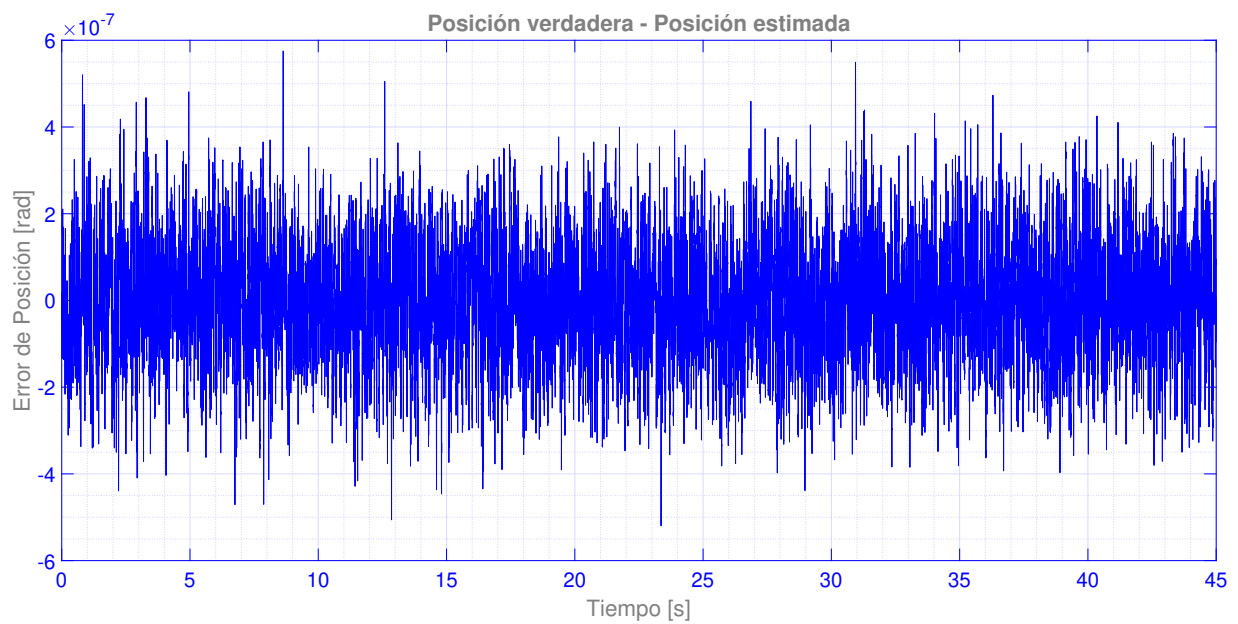


Figura 4.10: Error de posición. Diferencia entre la posición verdadera y la posición estimada.

En las Figura 4.11 y Figura 4.12 se muestra el voltaje y la corriente que demanda el esquema de ontrol para el motor de CD.

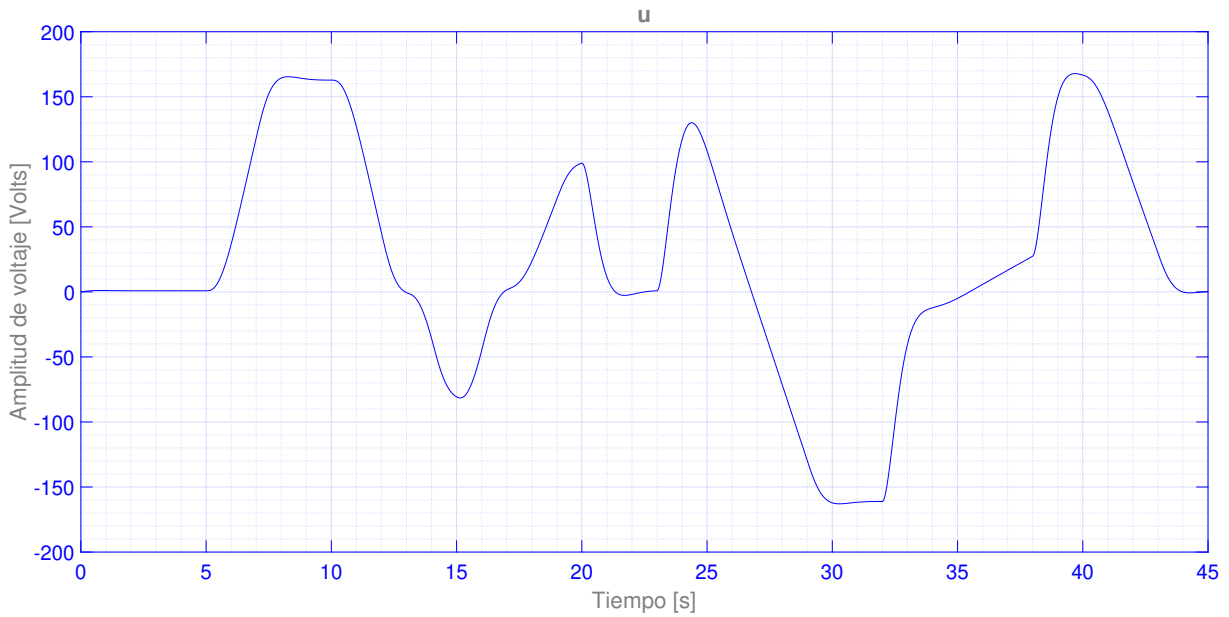


Figura 4.11: Voltaje  $u$  que demanda el bloque de control.

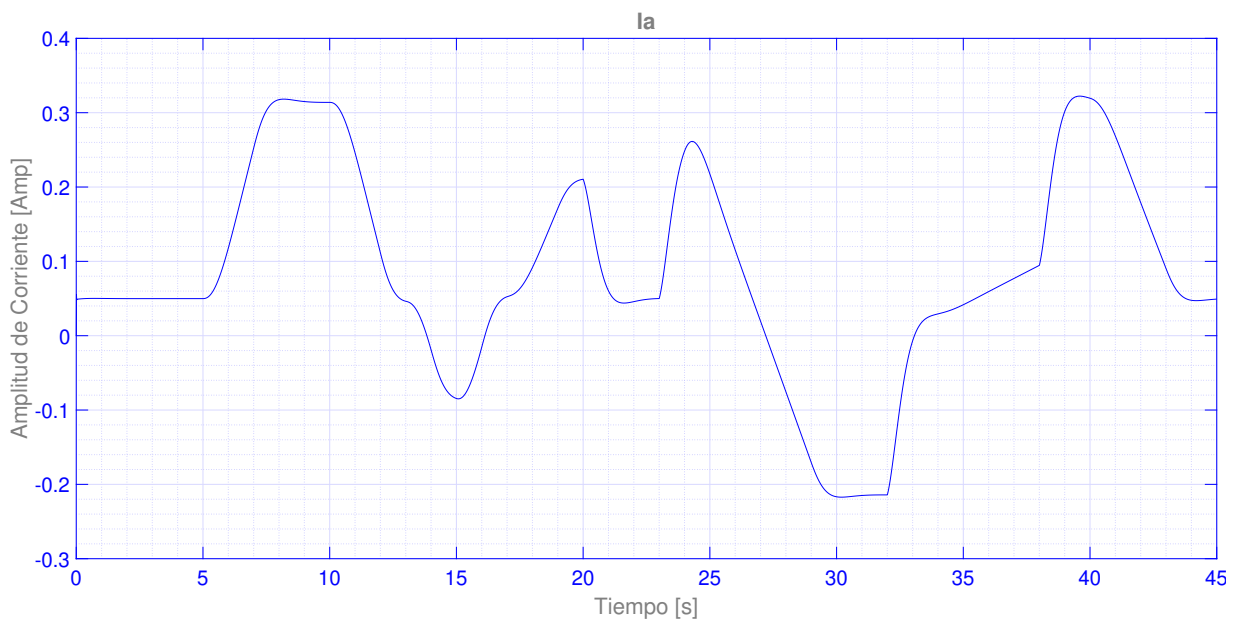


Figura 4.12: Corriente que demanda el bloque de control a la salida del sistema de control.

En esta simulación es posible señalar que bajo las características y diseño del control LQR, el voltaje y la corriente no tienen demandas fuertes en periodos muy cortos por lo que se puede considerar una fuente de alimentación que cumpla con estas características, también se considera que no rebasan los valores nominales del motor de CD los cuales están descritos en la placa de manera física y se muestran en la Tabla A.2 del Apéndice A.

#### 4.5.4. Estabilidad del motor de CD ante cambios de valor en sus parámetros bajo el esquema de control óptimo

Dado que el sistema del motor de CD (3.32) es controlado por la técnica LQR, el cual tiene como estimador el filtro de Kalman cuyo modelo en espacio de estados del sistema en lazo cerrado está dado en (4.6), y si suponemos que el motor de CD tiene cambios en sus parámetros, tal que se encuentran dentro del rango propuesto en la Tabla 3.3, se dice que el sistema tendrá estabilidad robusta si cumple con la **Propiedad 14**. La función característica obtenida del modelo (4.6) es

$$P_{LQR} = \alpha_0 s^6 + \alpha_1 s^5 + \alpha_2 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^2 + \alpha_5 s + \alpha_6 \quad (4.65)$$

donde los valores de  $\alpha_n$  están dados como

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= 2\lambda_d + \frac{B}{J} + \frac{1}{L_a} (R_a + k_1) \\ \alpha_2 &= \lambda_d^2 + 2 \left[ \frac{B}{J} + \frac{(R_a + k_1)}{L_a} \right] \lambda_d + \frac{1}{JL_a} [K_b^2 + BR_a + Bk_1 + K_b k_2] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{JL_a} \left[ 2 (K_b^2 + BR_a + Bk_1 + K_b k_2) \lambda_d + K_b k_3 \right] + \frac{B}{J} \lambda_d^2 + \frac{R_a + k_1}{L_a} \lambda_d^2 \\ \alpha_4 &= \frac{1}{JL_a} \left[ (2k_3 \lambda_d + k_2 \lambda_d^2 + k_5 \lambda_d^2 - k_i) K_b + [K_b^2 + BR_a + Bk_1] \lambda_d^2 \right] \\ \alpha_5 &= \frac{K_b \lambda_d}{JL_a} [(k_3 + k_4 - k_{ii}) \lambda_d - 2k_i] \\ \alpha_6 &= -\frac{K_b k_i \lambda_d^2}{JL_a} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Tomando en consideración para (4.66) los intervalos propuestos en la Tabla 3.3 para cada parámetro del motor de CD, suponiendo el valor de  $\lambda_d = 200$  y tomando las ganancias del controlador LQR  $[\mathbf{K}, k_i \text{ y } k_{ii}]$  de (4.62), los intervalos de valores para (4.65) son

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\in [1] \\ \alpha_1 &\in [922.1030, 871.7267] \\ \alpha_2 &\in [3503392.2626, 543910.2442] \\ \alpha_3 &\in [62111960.3487, 145843789.6371] \\ \alpha_4 &\in [4312551407.7656, 12965207610.5236] \\ \alpha_5 &\in [25614406888.5805, 36138340872.3319] \\ \alpha_6 &\in [46355212564.8047, 65400712972.3219] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Para cada intervalo de  $\alpha_n$  de (4.67) donde  $n = 0, 1, \dots, 5, 6$  existe un valor máximo y un mínimo decrito como  $[q_n^+, q_n^-]$ , en relación a esto, el polinomio de Kharitonov está determinado

del la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 K_{1LQR}(s) &= q_6^- + q_5^- s + q_4^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_2^- s^4 + q_1^- s^5 + q_0^+ s^6 \\
 K_{2LQR}(s) &= q_6^+ + q_5^+ s + q_4^- s^2 + q_3^- s^3 + q_2^+ s^4 + q_1^+ s^5 + q_0^- s^6 \\
 K_{3LQR}(s) &= q_6^+ + q_5^- s + q_4^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_2^+ s^4 + q_1^- s^5 + q_0^- s^6 \\
 K_{4LQR}(s) &= q_6^- + q_5^+ s + q_4^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_2^- s^4 + q_1^+ s^5 + q_0^+ s^6
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Dada la familia de polinomios (4.68), la construcción de las matrices  $\mathbf{H}_k$  están determinados de la siguiente manera

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} q_1^- & q_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3^+ & q_2^- & q_1^- & q_0^+ & 0 & 0 \\ q_5^- & q_4^+ & q_3^+ & q_2^- & q_1^- & q_0^+ \\ 0 & q_6^- & q_5^- & q_4^+ & q_3^+ & q_2^- \\ 0 & 0 & 0 & q_6^- & q_5^- & q_4^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6^- \end{bmatrix} \tag{4.69a}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} q_1^+ & q_0^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3^- & q_2^+ & q_1^+ & q_0^- & 0 & 0 \\ q_5^+ & q_4^- & q_3^- & q_2^+ & q_1^+ & q_0^- \\ 0 & q_6^+ & q_5^+ & q_4^- & q_3^- & q_2^+ \\ 0 & 0 & 0 & q_6^+ & q_5^+ & q_4^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6^+ \end{bmatrix} \tag{4.69b}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} q_1^- & q_0^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3^+ & q_2^+ & q_1^- & q_0^- & 0 & 0 \\ q_5^- & q_4^- & q_3^+ & q_2^+ & q_1^- & q_0^- \\ 0 & q_6^+ & q_5^- & q_4^- & q_3^+ & q_2^+ \\ 0 & 0 & 0 & q_6^+ & q_5^- & q_4^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6^+ \end{bmatrix} \tag{4.69c}$$

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} q_1^+ & q_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3^- & q_2^- & q_1^+ & q_0^+ & 0 & 0 \\ q_5^+ & q_4^+ & q_3^- & q_2^- & q_1^+ & q_0^+ \\ 0 & q_6^- & q_5^+ & q_4^- & q_3^- & q_2^- \\ 0 & 0 & 0 & q_6^- & q_5^+ & q_4^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6^- \end{bmatrix} \tag{4.69d}$$

Dado el conjunto de matrices  $\mathbf{H}_k$  (4.69), la transformación de cada una de estas a las matrices  $\mathbf{H}_{nl}$  son

$$\mathbf{H}_{n1} = \begin{bmatrix} 922 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 192174 & 922 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 111718989 & 313331 & 922 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12903677857 & 145681841 & 350163 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25092963648 & 12963955023 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46355212564 \end{bmatrix} \tag{4.70a}$$

$$\mathbf{H}_{n2} = \begin{bmatrix} 871 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 472658 & 871 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5520022 & 535981 & 871 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3996090396 & 61604767 & 543328 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3519640045 & 4304302899 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 65400712972 \end{bmatrix} \quad (4.70b)$$

$$\mathbf{H}_{n3} = \begin{bmatrix} 922 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 385745 & 922 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 138532626 & 535981 & 922 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4217024965 & 145681841 & 543734 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23402656367 & 4304302899 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 65400712972 \end{bmatrix} \quad (4.70c)$$

$$\mathbf{H}_{n4} = \begin{bmatrix} 871 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 279087 & 871 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29851466 & 313331 & 871 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12761371189 & 61694767 & 349757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35916268599 & 12963955023 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46355212564 \end{bmatrix} \quad (4.70d)$$

Por otra parte los raíces de la familia de polinomios de Kharitonov (4.68) se expresan como

$$r_{lqr1} = [-0.2706 \pm 0.4475i, -0.0004 \pm 0.0024i, -0.0092, -0.0015] \quad (4.71a)$$

$$r_{lqr2} = [-0.0067 \pm 0.0085i, -0.0008 \pm 0.0012i, -0.3893, -0.1481] \quad (4.71b)$$

$$r_{lqr3} = [-0.1745 \pm 0.1429i, -0.0008 \pm 0.0016i, -0.0387, -0.0025] \quad (4.71c)$$

$$r_{lqr4} = [-0.3874 \pm 0.3548i, -0.0007 \pm 0.0042i, -0.0017, \pm 0.0012i] \quad (4.71d)$$

Tomando en cuenta que no existe algún cambio de signo en la construcción de las matrices  $\mathbf{H}_{nl}$  (4.70) se dice que el sistema (4.6) es robustamente estable para el motor de CD, esta conclusión también se puede mostrar en el grupo de ecuaciones (4.71), donde, existen raíces reales negativas las cuales se encuentran del lado izquierdo del plano complejo  $s$ .

Suponiendo que hay un cambio de valor en algunos de los parámetros del motor de CD, según el rango de la Tabla 3.3 de incertidumbre cuyo valores nuevos elegidos para efectos graficos son donde el resto de los valores se han tomado como los valores nominales de la Tabla A.1 en

.	Valor – nominal	Variacion $\pm$ (%)	Nuevo valor	Unidades
$R_a$	17.352	- 5 %	16.4844	$[\Omega]$
$L_a$	0.036274	- 10 %	0.0326466	$[H]$
$B$	0.015170	+ 10 %	0.016687	$[N\ m/rad/s]$

Tabla 4.1: Propuesta de cambio de la valor en los parámetros del motor de CD BALDOR-RELIANCE® Mo.D5505P.

el Apéndice A, para lo cual se muestra las siguientes Figuras

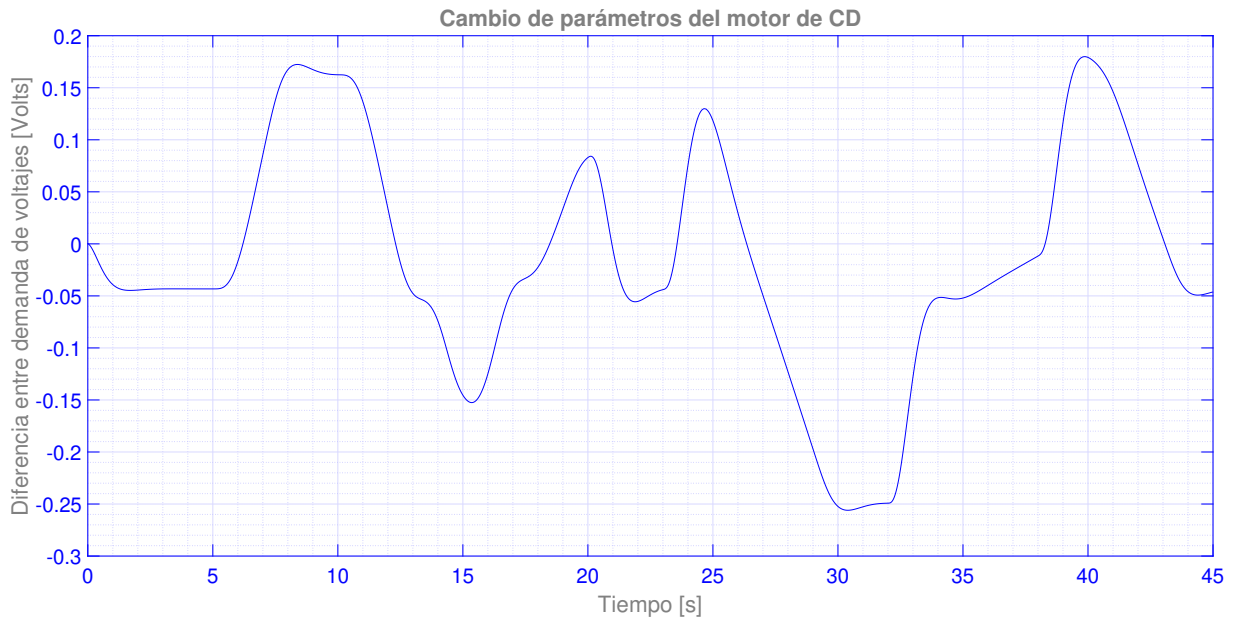


Figura 4.13: Diferencia de demanda entre el sistema del motor de CD con y sin cambio de parámetros.

En la Figura 4.13 se muestra la diferencia entre el voltaje del sistema sin hacer cambio de parámetros y el sistema que tiene cambios de parámetros, es posible señalar que el sistema es estable y además la demanda de voltaje entre ambos sistemas es muy similar.

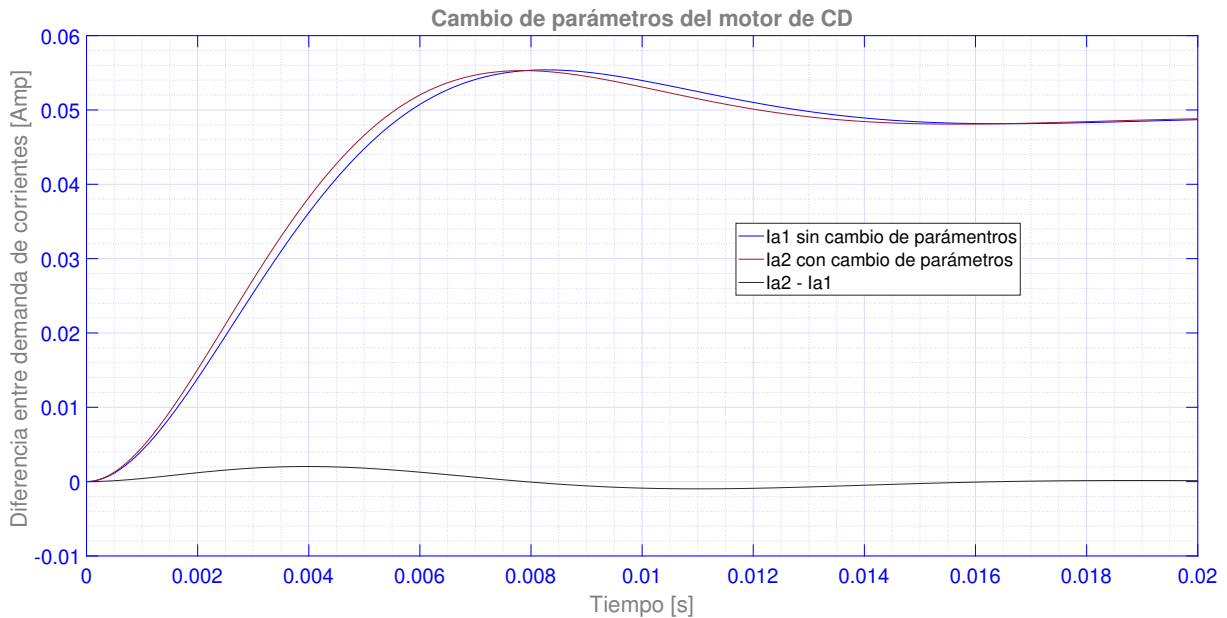


Figura 4.14: Corriente frente a un cambio de parámetros en el motor de CD, con tiempo de simulación de 0.02 [s].

Al igual que en el caso del voltaje, la corriente es muy similar en ambos casos, por lo que se puede observar el consumo de corriente que tiene el sistema que no tiene cambios de parámetros y el sistema que tiene estos cambios es similar y gráficamente se puede decir que el sistema es estable.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este escrito se presenta un esquema de control lineal óptimo del control de la velocidad angular del motor de corriente directa, considerando que se dispone de la medición de la posición angular de la flecha así como de la corriente de armadura. Para realizar tal fin, se incluyó, en conjunto al modelo del motor de CD, una representación en espacio de estados de un filtro de segundo orden con un cero en el origen de grado relativo 1. Esto provoca que el sistema completo pierda la observabilidad de un estado, la posición angular, por lo que fue necesario realizar una transformación de espacios observables y no observables para poder realizar el diseño del observador de estados. Cabe hacer mención que, el controlador de estados fue con una acción integral del error para obtener una regulación de la velocidad angular. Las ganancias tanto el controlador como el observador se obtienen utilizando técnicas de control óptimo. Previo a diseñar el esquema de control óptimo, se realiza el análisis al modelo en espacio de estados y a la función de transferencia, cuyo resultados son asociados como parte de las propiedades del sistema.

El análisis realizado comienza partiendo del modelo en espacio de estados, donde, se supone que el motor de CD cuenta con la medición de velocidad angular y la corriente en la armadura, estas mismas variables son los estados del sistema, por lo cual, el modelo es de segundo orden. El modelo en espacio de estados, tiene un punto de equilibrio en el origen cuando sus entradas son cero, i.e., cuando no se tiene perturbación externa y no se tiene alimentación de voltaje en la armadura, por esta razón, el sistema permanece en reposo. Por otro lado también se comprueba que el sistema del motor de CD es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov, además se verifica que el sistema es totalmente controlable y observable.

Considerando el modelo matemático en espacio de estados del motor de CD en un sistema de tercer orden, donde se mide la posición angular y la corriente de armadura, el análisis realizado para este sistema se comprueba que tiene punto de equilibrio en cualquier posición que tenga el eje, por lo tanto, este permanecerá en reposo cuando el voltaje de armadura sea cero y no exista perturbación externa. También se verifica que el sistema es marginalmente estable dado que tiene un polo en el origen en el plano complejo  $s$ , además se comprueba que el sistema es totalmente controlable y observable. Es importante señalar que como parte de las propiedades de esta máquina, el teorema de Kharitonov empleado al modelo en función de transferencia del motor de CD, establece que el sistema es estable bajo una tolerancia de incertidumbre en los parámetros.

Dada las propiedades del motor de CD en un sistema en espacio de estados de tercer orden, donde una de las salidas es la posición angular a la cual se asocia el filtro de segundo orden

para obtener a la salida la posición y la velocidad angular filtrada respectivamente. La unión de estos dos modelos se convierte en un sistema de quinto orden y es la pieza fundamental del presente trabajo, sin embargo se comprueba que existe una anulación de un polo del sistema del motor de CD con un cero del filtro de segundo orden. El asociar estos dos sistemas, se pierde observabilidad desde los estados motor de CD para la salida en el filtro de segundo orden, por lo que es necesario realizar la transformación de similitud, lo cual provoca la reducción de los estados, convirtiendo al modelo en un sistema de cuarto orden ya que después de la transformación se selecciona la parte observable del sistema.

Al emplear el principio de separación para el sistema de quinto orden, se determina que el diseño del controlador es independiente al diseño del observador por lo cual se emplea el sistema de quinto orden para el controlador óptimo por la técnica de LQR, y el sistema de cuarto orden para fines del diseño de estimador (observador) óptimo con la técnica del filtro de Kalman, para que finalmente se pueda unir ambos diseño en un único esquema.

La estructura del control óptimo implementado al modelo del motor de CD, ofrece una ángulo diferente como caso de estudio. El control óptimo es una técnica de control novedosa casi no vista en clase durante de la formación académica, ofreciendo un valor agregado a temas relevantes de control.

El esquema de control que se diseñó es robusto ante variaciones de algunos de los parámetros del motor de corriente directa. Esto se comprueba utilizando el método de los polinomios de Karitonov en la estructura del sistema completo en lazo cerrado, i.e., motor de CD, filtro de segundo orden, controlador y observador.

Cabe hacer mención que, a lo largo del presente trabajo se aplicaron los conocimientos adquiridos en la carrera y en algunos momentos se tuvo la necesidad de buscar información en publicaciones que normalmente no se abarcan con las asignaturas. Por ejemplo, para la demostración de la estabilidad asintótica del motor de CD por medio del método de Lyapunov, se leyeron temas de algunos libros de control no lineal y no lineal, y para esto se requirió recordar temas vistos en álgebra lineal, cálculo, modelado de sistemas físicos, análisis de sistemas dinámicos, por mencionar algunos. Asimismo, para el diseño del controlador y observador óptimo, se estudiaron varios libros de control lineal, teniendo las bases de las asignaturas de diseño de controladores y técnicas avanzadas de control.

## 5.1. Trabajos futuros

En el transcurso del diseño e implementación del presente trabajo, son alentadas nuevas ideas como caso de estudio, de las cuales se hacen tres propuestas para trabajos futuros conformados de la siguiente manera:

- I. Diseño e implementación del control óptimo para el sistema no lineal del motor de CD, con el objetivo de realizar una comparativa entre las respuestas lineales y no lineales de la misma máquina electromecánica, destacando así sus propiedades para su diseño.
- II. Diseño e implementar la técnica de control óptimo para el modelo lineal del motor de CD, teniendo como entrada la corriente de armadura y como salida la velocidad angular.
- III. Realizar la implementación el control óptimo del presente trabajo de manera física, i.e., en tiempo real, tomando en cuenta que el circuito electrónico tenga como propiedad el giro del motor de CD tanto en el sentido de las manecillas del reloj como el sentido contrario.

Estas propuestas tiene afinidad con el presente trabajo, con la perspectiva de realizar comparativas en metodología y diseño.



# Apéndice A

## Valor de parámetros y datos nominales del motor de CD D5505P

Los valores de la Tabla A.1, son los parámetros del motor de CD BALDOR-RELIANCE<sup>®</sup> modelo Mo.D5505P, obtenidos de manera experimental por [Marquez, 2019, Capítulo 4], las técnicas de experimentación están expuestas en [Krishnan, 2001, Capítulo 2].

Constante	Valor	Parametro	Unidades
$R_a$	17.352	Resistencia de armadura.	$[\Omega]$
$L_a$	$36.274e^{-3}$	Inductancia de armadura.	$[H]$
$B$	$15.170e^{-3}$	Constante de fricción.	$[N\ m/rad/s]$
$K_b$	3.007	Constante electromotriz.	$[V\ s/rad]$
$J$	$1.2547e^{-3}$	Momento de inercia.	$[Kg\ m^2]$

Tabla A.1: Parámetros del Motor de CD BALDOR-RELIANCE<sup>®</sup> Mo.D5505P.

Los datos de la Tabla A.2 son propuestos por el fabricante para el motor de CD BALDOR-RELIANCE<sup>®</sup> modelo Mo.D5505P.

Parametro.	Valor.	Parametro.	Valor.
Potencia nominal	5 Hp. / 3.7296 kW	R. P. M.	1750 / 2300.
Marco	1810AT.	Clase de aislamiento	F.
Vol. Comp.	300 Volts.	Vol. Arm.	500 Volts.
Corriente de Camp.	.38 / .19 Amp.	Corriente de Arma	8.30 Amp.
Temperatura Máx ambiente	40 C	Factor de servicio	1
Suministro de energía	Continua	Código de potencia	D
Escobillas	18044-9		
O.D.E BRG	6205	D.E. BRG	6206

Tabla A.2: Datos nominales o de placa del Motor de CD BALDOR-RELIANCE<sup>®</sup> Mo.D5505P.

## Apéndice B

# Eliminación Gaussiana por derivación de la descomposición LU

Siguiendo el procedimiento según [Ford, 2015, Capítulo 11], se muestra que la reducción de la columna de una matriz triangular superior comenzando con la columna 1, multiplicando el renglón 1 por  $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ , y restando al renglón 2. Esto elimina al elemento del renglón 2 de la columna 1:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow R2 = R2 - \left( \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) R1 \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Recordar que  $a_{11}$  es llamado como el *elemento pivote*. Ahora, multiplicar el renglón 1 por  $\frac{a_{31}}{a_{11}}$  y restar al renglón 3 eliminando el elemento del renglón 3 de la columna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow R3 = R3 - \left( \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) R1 \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Continuando de esta manera hasta restar el múltiple  $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$  del renglón 1 de la fila  $n$ . Esta acción corresponde a la multiplicación a la izquierda de esta serie de matrices primarias.

$$E_{n1} \left( \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) \cdots E_{31} \left( \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) E_{21} \left( \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \quad (\text{B.3})$$

Como resultado de la reducción de la matriz.

$$E_{n1} \left( \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) \cdots E_{31} \left( \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) E_{21} \left( \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) H_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Continuando con este mismo proceso tal y como se muestra en el arreglo (B.1) y (B.2) pero para la columna 2, con el elemento pivote  $a_{22}$  se obtiene.

$$\left[ E_{n2} \left( \frac{a_{n2}}{a_{22}} \right) \cdots E_{42} \left( \frac{a_{42}}{a_{22}} \right) E_{32} \left( \frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \right] \left[ E_{n1} \left( \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) \cdots E_{31} \left( \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) E_{21} \left( \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \right] H_n \quad (\text{B.5})$$

donde se muestra así la matriz resultante del proceso.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

En general, la eliminación en la columna  $i$  corresponde al producto de la matriz primaria.

$$E_{ni} \left( \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right) \cdots E_{i+2,i} \left( \frac{a_{i+2,i}}{a_{ii}} \right) E_{i+1,i} \left( \frac{a_{i+1,i}}{a_{ii}} \right). \quad (\text{B.7})$$

Expresando la unión de la expresión anterior se tiene.

$$\begin{aligned} & E_{n,n-1} \left( \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} \right) \\ & \times \cdots \times E_{ni} \left( \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right) \cdots E_{i+2,i} \left( \frac{a_{i+2,i}}{a_{ii}} \right) E_{i+1,i} \left( \frac{a_{i+1,i}}{a_{ii}} \right) \\ & \times \cdots \times E_{n2} \left( \frac{a_{n2}}{a_{22}} \right) \cdots E_{42} \left( \frac{a_{42}}{a_{22}} \right) E_{32} \left( \frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \\ & \times E_{n1} \left( \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) \cdots E_{31} \left( \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) E_{21} \left( \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) H = U \end{aligned}$$

Al simplificar esta expresión de combinación de factores, el producto de los renglones de la matriz primaria se puede expresar como.

$$E_i = E_{ni} \left( \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right) \cdots E_{i+2,i} \left( \frac{a_{i+2,i}}{a_{ii}} \right) E_{i+1,i} \left( \frac{a_{i+1,i}}{a_{ii}} \right) \quad (\text{B.8})$$

En términos matriciales tenemos  $E_{n-1}E_{n-2} \cdots E_2E_1H = U$  y  $H = (E_{n-1}E_{n-2} \cdots E_2E_1)^{-1}U = (E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} \cdots E_{n-2}^{-1}E_{n-1}^{-1})U$ , en general.

$$E_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{a_{i+1,i}}{a_{ii}} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{a_{i+2,i}}{a_{ii}} & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{ni}}{a_{ii}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Para un problema de  $n \times n$   $L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \dots E_{n-2}^{-1} E_{n-1}^{-1}$  donde  $L$  es una matriz diagonal inferior con unos en la diagonal. Abajo de cada 1 se encuentra el resultado de los multiplicadores utilizados para realizar la eliminación de los renglones. El producto de las matrices  $L$  y  $U$  es la matriz principal  $H$ .

$$H = LU \quad (\text{B.10})$$

Por parte del proceso anterior  $a_{ii}$  es diferente de cero, si durante la eliminación  $a_{ii} = 0$  requiere se requerirá intercambiar el renglón para la descomposición de  $LU$ .

## A. Resumen de pasos

Comenzando con el renglón 1:

- I. Multiplicando el renglón 1 por  $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$  y restarlo al renglón  $j$ , donde  $2 \leq j \leq n$ , para eliminar todos los elementos en la columna 1 bajo  $a_{11}$ . Por cada  $j$ , fracción de  $\frac{a_{j1}}{11}$  localizado en  $(j,1)$ .
  - II. Multiplicando el renglón 2 por  $\frac{a_{j2}}{a_{22}}$  y restarlo al renglón  $j$ , donde  $3 \leq j \leq n$ , para eliminar todos los elementos en la columna 2 bajo  $a_{22}$ . Por cada  $j$ , fracción de  $\frac{a_{j2}}{22}$  localizado en  $(j,2)$ .
- • •
- III. Multiplicando el renglón  $n-1$  por  $\frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}}$  y restarlo al renglón  $n$ , para eliminar el elemento del renglón  $n$  columna  $n-1$ , fracción de  $\frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}}$  localizado en  $(n, n-1)$ .

**Algoritmo B.1:** Eliminación Gaussiana por derivación de la descomposición LU.

```

1
2 function H = GAUSSK LU(R)
3     [n n]=size(R);
4     A = R;
5     %x=zeros(n,n);
6     for j = 2:1:n % Renglon
7         for i = 1:1:n % Columna
8             if (j < 2)
9                 R(j-1,i)=A(j-1,i);
10                elseif (i < j)
11                    PP=(A(j,i)./A(i,i));
12                    R(j,i)=A(j,i)-PP*A(i,i);
13                else
14                    R(j,i)=A(j,i)-PP*A(j-1,i);
15                end
16            end
17        end
18    %Hn = R;
19    G = det(R);
20    if (G>0)
21        fprintf('El sistema SI es estable...');
22    else
23        fprintf('El sistema NO es estable...');
24    end
25    %Hn = vpa(R,2)
26    Hn = fix(R)
27 end

```

# Apéndice C

## Algunos organismos de certificación

El motor de CD es utilizado en una amplia gama de sistemas, resolviendo tareas que requieran la mínima participación de la mano humana. Los fabricantes autorizados, conocen las responsabilidades de poner a la venta esta clase de productos, donde no solo tienen que garantizar el correcto funcionamiento; también tienen que resguardar la seguridad humana al operar el motor de CD.

Respetando los requerimientos que el mundo demanda, las normas *National Electric Manufacturers Association* **NEMA** con sede en Virginia, Estados Unidos y junto con la norma NEMA MG1, dicta los estándares necesarios desarrollados por esta misma asociación para la producción y correcto funcionamiento de motores y generadores eléctricos [NEMA, 2019].

Las normas de la *International Electrotechnical Commission* (**IEC**) con sede en Ginebra, Suiza son encargadas de garantizar la calidad de los procesos de fabricación de los motores en el continente europeo. Del mismo modo que en el párrafo anterior, el cumplimiento de estos estándares en las máquinas, ofrecen confianza al adquirir un producto, ya que se espera que el comportamiento sea el mismo en un motor de las mismas características aparte resguardar la seguridad e integridad humana, se pueden verificar algunos manuales o guías de instalación en [Guía del motor-ABB<sup>®</sup>, 2014, Capítulo NORMAS]. Como algo adicional para protección de los operadores y su entorno, también existen certificaciones “especiales” para fabricación de máquinas eléctricas especiales, como un ejemplo se cita las certificaciones que expiden para motores NEMA de CA y de CD a prueba de explosión como se especifica de manera textual en [ABB<sup>®</sup>, 2019, Capítulo Especificaciones y Características].

“En el mercado norteamericano, Underwriters Laboratories (U.L.) y la Asociación Canadiense de Normas (CSA) son las entidades de certificación que aprueban y rotulan los motores eléctricos para usar en ubicaciones peligrosas basadas en las divisiones según el Código Eléctrico Nacional (NEC) NFPA70 y C22,1, el Código Eléctrico Canadiense. Los motores a prueba de explosión se pueden marcar con uno o más de lo siguiente:

- I. Marca de certificación de UL para usar en Estados Unidos. Los productos con esta marca han sido evaluados según los requisitos de seguridad de EE. UU.
- II. Marca de certificación de CSA para usar en Canadá y en Estados Unidos. El producto está certificado según las normas estadounidenses y canadienses correspondientes.

III. Marca de certificación de CSA para usar en Canadá. El producto está certificado según las normas estadounidenses y canadienses correspondientes”

Siendo las normas anteriores como las más usadas en el mundo, son compartidas para motores de CD y CA, sin embargo, predominan más para motores de CA, siendo una minoría para los motores de CD. Con los datos anteriores se puede concluir que los motores de CA son más explotados en nuestra sociedad que los motores de CD, esta comparación también se puede ver con la tabla de fabricación mostrada por [[Motores WEG<sup>®</sup>, 2019](#), Capítulo 1].

Para el territorio Mexicano se tiene otro catálogo de normas que cumplen con la misma función que las normas anteriores, estas se llaman *Normas Oficiales Mexicanas* (NOM) expuestas en la Secretaría de Economía [[Secretaría de Economía, 2019](#)].

El conjunto de normas anteriores, están basadas en un consenso de especificaciones de seguridad y trabajo para el buen funcionamiento del motor y obtener el mismo resultado (buscando siempre estar en lo favorable) al aplicarlas en los sistemas, sin embargo el uso de estas o cualquier otra, son de uso voluntario (los resultados pueden variar en el funcionamiento del equipo en el sistema).

# Apéndice D

## Separación de parte controlable de la no controlable

En [Hendricks et. al., 2008, Capítulo 3] describe, que un sistema de ecuaciones en espacio de estados no es único y es posible realizar una transformación de la forma  $\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ , muy similar a (3.51), cuyo propósito es encontrar un nuevo sistema con las mismas características que el sistema original.

Para un sistema no controlable de la forma (2.6), donde se puede despreciar la perturbación externa y las matrices que lo componen son  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ . Dada la matriz de controlabilidad (2.26), cuyo arreglo depende de el par de matrices  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ , al construir tal arreglo tiene nombre y espacio de  $\mathbf{S}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , que cuyo rango  $(\mathbf{S}_c) = p < n$ .

Las matrices de transformación son

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{nc} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1a})$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1b})$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{C}_{nc} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1c})$$

La parte controlable del sistema pertenece a las matrices  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  y  $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{r \times p}$ , donde

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c = \mathbf{G}(s) \quad (\text{D.2})$$

La matriz de transformación  $\mathbf{M}$  puede ser generada a través de la matriz  $\mathbf{S}_c$ , tal que se, empleando los primeros  $p$  vectores columna linealmente independientes, e.i.,  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_p$  eligiendo los vectores columna complementarios de  $n - p$ , i.e.,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{(n-p)}$  cuyo arreglo es  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de la forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_p & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_{(n-p)} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

## Apéndice E

# Algoritmo propuesto para control óptimo LQR con filtro de Kalman

Dadas las condiciones del presente trabajo, es posible encontrar múltiples alternativas para resolver los objetivos de este, sin embargo en este pequeño apartado se propone el algoritmo desarrollado para alcanzar las ganancias del controlador óptimo LQR y las ganancias del filtro de Kalman, a través del software de MatLab®.

Dado el modelo en espacio de estados del motor de CD en cascada con el filtro de segundo orden, se expresa el arreglo matricial y el valor de sus parámetros de la siguiente manera

---

**Algoritmo E.1:** Modelo en espacio de estados del motor de CD en cascada con el filtro de 2do orden.

---

```
1
2  %% Parametros del motor de CD
3  clear
4  clc
5
6  Ra = 17.352;           %Valor de la resistencia en el debanado de la armadura
7  La = 36.274e-3;      %Valor de la inductancia en el debanado de la armadura
8  Kb = 3.007;         %Valor de la constante electromotriz
9  J  = 0.0012547;     %Valor del momento de inercia
10 BB = 0.015170;      %Valor de la constante de friccion
11
12 %% Modelo en espacio de estados de 5to orden
13 A5 = [-Ra/La -Kb/La 0 0 0;           % Matriz A del sistema
14       Kb/J  -BB/J  0 0 0;
15       0 1 0 0 0;
16       0 0 0 0 1;
17       0 0 lamb^2 -lamb^2 -2*lamb];
18 B5 = [1/La; 0; 0; 0; 0];           % Matriz B del sistema
19 G5 = [0; -1/J; 0; 0; 0];          % Matriz G del sistema
20 C5 = [1 0 0 0 0; 0 0 0 0 1];      % Matriz C del sistema
21 D5 = [0; 0];                       % Matriz D del sistema
22 end
```

---

El algoritmo desarrollado para la técnica de control óptimo basado en el comando LQR en Matlab es

**Algoritmo E.2:** Diseño de ganancias del control óptimo LQR

```

1
1  Cc = [ 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1];           % Matriz C para realimentacion
2  Ac = [A5 zeros(5,2);-Cc zeros(2)];     % Matriz A para realimentacion
3  Bc = [B5;0;0];                         % Matriz B para realimentacion
4  % Matriz QQ de ponderacion sugerida para la funcion de costos
5  QQ = diag([0.0000001 0.00001 30 0.0001 0.0001 4000 30]);
6  % Matriz RR de ponderacion sugerida para la funcion de costos
7  RR = 8;
8  % Ganancias para la matriz de realimentacion con los valores de la accion
   integral del error
9  K = lqr(Ac,Bc,QQ,RR);

```

El algoritmo para el observador óptimo con la técnica del filtro de Kalman en Matlab es

**Algoritmo E.3:** Diseño de ganancias del filtro de Kalman

```

1
1  V = [C5; C5*A5;C5*A5^2;C5*A5^3;C5*A5^4]; % Matriz de observabilidad
2  P = [V(1:4,:);1 1 1 1];                 % Matriz de transformacion P
3  Pi = inv(P);                             % Inversa de la Matriz P
4  At = P*A5*Pi;                           % Matriz A transformada
5  Bt = P*B5;                               % Matriz B transformada
6  Ct = C5*Pi;                              % Matriz C transformada
7  Gt = P*B5;                               % Matriz G transformada
8  Ao = At(1:4,1:4);                       % Matriz A para sistema totalmente observable
9  Bo = Bt(1:4,1);                         % Matriz B para sistema totalmente observable
10 Co = Ct(:,1:4);                         % Matriz C para sistema totalmente observable
11 Go = Gt(1:4,1);                         % Matriz G para sistema totalmente observable
12 planta = ss(Ao,[Bo Go],Co,0);
13 % Matriz Qn de ponderacion sugerida para la funcion de costos
14 W = 0.15^2;
15 % Matriz Rn de ponderacion sugerida para la funcion de costos
16 V = diag([0.00009 0.00005]);
17 [ke,Lt,Pv] = kalman(planta,W,V);
18 L = Pi*[Lt;[1 1]];                       % Matriz para ganancias de Kalman

```

---

Software empleados para la elaboración de este trabajo.

---

Nombre	Descripción	Versión
MatLab <sup>®</sup>	Sistema de orden numérico de entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio.	R2018b (9.5.0.944444) - 64-bit
Simulink <sup>®</sup>	Entorno de programación con lenguaje gráfico que depende del entorno de programación de MatLab.	R2018b (9.2) - 64-bit
EdrawMax <sup>®</sup>	Desarrollo de ambiente gráfico en 2D con plantillas de imágenes preestablecidas.	v.10.0.4 - 64-bit
WinEdt	Entorno de procesador de texto para documentos tipo TEX/LaTeX	v.10.3 - 64-bit
MiKTeX	Paquetería para desarrollo de archivos tipo TEX/LaTeX	v 20.10 - 64-bit
LyX	Editor de texto, especialmente empleado para archivos TEX/LaTeX	v.2.3.4.4 - 64-bit
Texmaker	Editor de texto para documentos tipo TEX/LaTeX	v 5.0.4 - 64-bit

---

# Bibliografía

## [1] LIBROS.

- [Antsaklis/Michel, 2000] Antsaklis, P. J., & Michel, A. N. (2000). *A linear Systems Primer*. Birkhäuser Boston Basel Berlin.
- [Alok, 2007] Alok, S. (2007). *Linear Systems Optimal and Robust Control*. CRC Press.
- [Ashish, 2002] Ashish, T. (2002). *Modern Control Design, With MATLAB and SIMULINK*. John Wiley & Sons, LTD.
- [Aström / Murray, 2012] Aström, K. J., Murray, R. M. (2012). *Feedback Systems An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University press & Princeton and Oxford.
- [Barmish, 1994] Barmish, B. R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Mcmillan Publishing Company.
- [Bay, 1999] Bay, J. S. (1999). *Fundamentals of Linear State Space Systems*. McGraw-Hill.
- [Bell, 2003] Bell, F. W. (2003). *Magneto-resistive current sensor for peak currents*. uu to 150a.
- [Campoy et. al., 2006] Campoy, P., JIMENEZ, S., SEBASTIAN, A., & Dominguez, J. M. (2006). *Control en el Espacio de Estado* Person Pentice Hall, Madrid, España.
- [Cerdá, 2017] Cerdá, F. L. M. (2017). *Electricidad y Automatismos Eléctricos*. Paraninfo.
- [Chapman, 2005] Chapman, S. J. (2005). *Máquinas Eléctricas*. Mc Graw Hill Máxico.
- [Chiasson, 2005] Chiasso, J. (2005). *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. IEEE Press Series on Power Engineering.
- [Colmenar/Hernández, 2012] Colmenar A. S., Hernández J. L. M. (2012). *Instalaciones Eléctricas en Baja Tensión Diseño: Cálculo, Dirección, Seguridad y Montaje*. Ra-Ma.
- [Devore, 2008] Devore, J. L. (2008). *Probabilidad y estadística para Ingeniería y Ciencias*. CENGAGE Learning.
- [Fabián, 2015] Fabián, P. J. C. (2015). *Evaluación experimental de esquemas de control de velocidad del motor de corriente directa de excitación separada*. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM).
- [Ford, 2015] Ford, W. (2015). *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB*, ELSEVIER.

- [Fortuna / Frasca] Fortuna, L. & Frasca, M. (2012). *Optimal and Robust Control Advanced Topics with MatLab®*. CRC Press.
- [Franklin et. al., 1991] Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (1991). *Control de Sistemas Dinámicos con Retroalimentación*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [Gilbert Strang, 2007] Gilbert, S. (2007). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Thomson.
- [Goodwin et. al., 2000] Goodwin, G. C., Graebe, S. F. & Salgado, M. E. (2000). *Control System Design*. Valparaíso Chile.
- [Haddad / Chellaboina, 2008] Haddad, W. M. & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear Dynamical Systems and Control A Lyapunov-Based Approach*. Princeton University press & Princeton and Oxford.
- [Hendricks et. al., 2008] Hendricks, E., Jannerup, O. & Sorensen, P. H. (2008). *Linear Systems Control, Deterministic and Stochastic Methods*. Spring.
- [Joao, 2009] Hespanha, J. P. (2009). *Linear Systems Theory*. Princenton University Press & Princenton and Oxford.
- [Julián et. al., 2015] Julián, J., Llobregat, S., Lacruz, Á. C., Calvo, V. C., & Salvador, A. C. (2015). *Control Automático Tiempo Continuo y Tiempo Discreto*, Editorial Reverté.
- [Kenjo / Nagamori, 1985] Kenjo, T. & Nagamori, S. (1985.) *Permanent-Magnet and Brushless DC Motors*. Clarendon Press & Oxford.
- [Kolman/Hill] Kolman, B. & Hill, D. R. (2005). *Álgebra Lineal*. Pearson Orentice Hall.
- [Kraus, 2000] Kraus, F. (2000). *Electromagnetismo con Aplicaciones*. Mc Graw Hill.
- [Krishnan, 2001] Krishnan, R. (2001). *Electric Motor Drives: Modeling, Analysis and Control*. Prentice Hall, Inc.
- [Kuo, 1996] Kuo, B. C. (1996). *Sistemas De Control Automático*. Pentice Hall.
- [Kuo / Golnaraghi] Kuo, B. C. & Golnaraghi, F. (2017). *Automatic Control Systems*. Mc Graw Hill.
- [Maloney, 2006] Maloney, T. J. (2006). *Electrónica industrial Moderna*. Pearson Educación, México
- [Marquez, 2019] Marquez, V. R. (2019). *Control de velocidad basado en pasividad del motor de corriente directa de excitación separada*. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM).
- [Mohan et. al., 2009] Mohan, N., Undeland, T. M. & Robbins, W. P. (2009). *Electrónica de Potencia, Convertidores, aplicaciones y diseño*. Mc Graw Hill.
- [Mora, 2003] Mora, F. J. (2003). *Máquinas eléctricas*. Mc Graw Hill.
- [Naidu, 2000] Naidu, D. S. (2000). *Optimal Control System*. CRC Press.

- [Ogata, 1998] Ogata, K. (1998). *Ingeniería de Control Moderno*. Prentice Hall.
- [Ogata, 2010] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderno*. Prentice Hall.
- [Petko et. al, 2019] Petkov, P. H., Králev, J. K., & Slavov, T. N. (2019). *Design of Embedded Robust Control Systems Using MATLAB®/Simulink®*, The institution of Engineering & Technology (IET)
- [Poole, 2011] Poole D. (2011). *Álgebra Lineal Una introducción moderna*. CENGAGE Learning.
- [Rashid, 2004] Rashid, M. H. (2004). *Electrónica de Potencia Circuitos, dispositivos y Palicaciones*. Pearson Prentice Hall.
- [Roldan, 2014] Roldán V. J. (2014). *Motores de Corriente Continua*. Paraninfo España.
- [Slemon, 1992] Slemon, G. R. (1992). *Electric Machines and Drives*. Addison-Wesley Publishing Company, INC.
- [Williams II / Lawrence, 2007] Williams II, R. L. & Lawrence, D. A. (2007). *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc.

## [2] ARTÍCULOS.

- [Bhattacharyya & Kell 1995] Bhattacharyya, S. P., & Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*. In Advances in control education 1994 (pp. 49-52). Pergamon.
- [Guerrero et. al., 2020] Guerrero, C. et. al., (2020) *Control of Velocity of DC Motors by Classical and Passivity Methods Measuring Only Position: Theory and Experimental Comparison*. In IEEE Latin America Transactions, 18(05), 962-970.
- [Mujica et. al., 2014] Mujica, H., Espinosa-Pérez, G., & Moreno, J. (2014). *Seguimiento del Velocidad y Flujo Magnético con Alto Desempeño en Motores de Inducción*. In XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, Cancun, Quintana Roo, México (pp. 636-641).
- [Panneerselvam / Ayyagari, 2013] Panneerselvam, K. & Ayyagari, R. (2013) *Computational Complexity of Kharitonov's Robust Stability Test*. In International Journal of Control Science and Engineering, 3(3), 81-85.
- [Peña, 2004] Peña, J. M. (2004) *Characterizations and stable tests for the Routh-Hurwitz Conditions and for Total Positivity*. In Linear algebra and its applications, 393, 319-332.
- [Shin et. al., 2003] Shin, E. C., Park, T. S., Oh, W. H., & Yoo, J. Y. (2003) *A Design Method of PI Controller for an Induction Motor With Parameter Variation*. In IECON'03. 29th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IEEE Cat. No. 03CH37468) (Vol. 1, pp. 408-413). IEEE.

## [3] GUÍAS.

- [ABB®, 2019] Power and Productivity for a better world (TM) ABB®. (2019) *Motores NEMA de CA y de CC a prueba de explosión*. ABB®.

- [BALDOR<sup>®</sup>-ABB<sup>®</sup>, 2019] Group Baldor<sup>®</sup>-ABB<sup>®</sup> (2019). *Direct Current Motors and Drives*. Baldor a Member of the ABB<sup>®</sup> Group.
- [Baldor-ABB<sup>®</sup>, 2019] Group Baldor-ABB<sup>®</sup>. (2019). *RMP III IEC Integral HP DC Motors Rating Guide IEC 112-280 Frame Sizes*. Baldor a Member of the ABB<sup>®</sup> Group.
- [Guía del motor-ABB<sup>®</sup>, 2014] Power and Productivity for a better world (TM) ABB<sup>®</sup>. (2014) *Motores de baja tensión La guía del motor*. ABB.
- [Motores WEG<sup>®</sup>, 2019] Group WEG<sup>®</sup>. (2019). *Motores Eléctricos Guía de Especificaciones*. WEG<sup>®</sup>.
- [Schneider<sup>®</sup>, 2019] Schneider<sup>®</sup> Electric. (2019). *Guía Para Selección de Productos*. Make the most of your energy.
- [SCHNEIDER<sup>®</sup>, 2008] Rolando T. (2008). *Guía de Diseño de Instalaciones Eléctricas Según Normas Internacionales IEC*. Schneider<sup>®</sup> Electric, España.
- [WEG<sup>®</sup>, 2019] Grupo WEG<sup>®</sup> (2019). *Motores de corriente continua Línea D, Manual de instalación, operación y mantenimiento*. WEG<sup>®</sup>.
- [WEG<sup>®</sup>, 2019] Catalogo. (2019). *Motores de Corriente Continua*. WEG<sup>®</sup>.
- [4] **CITIOS WEB.**
- [ABB BALDOR, 2019] (2019). *Motores electricos de CD* [en línea]. Recuperado de <https://www.baldor.com> el 12 de Octubre de 2019.
- [Aleksandr Lyapunov, 2020] (2020). *Aleksandr Lyapunov, the man who created the modern theory of stability*. Recuperado de <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/EJQTDE/p7568.pdf> el 22 de Agosto de 2020.
- [Cifpn1, 2019] (2019). *Reguladores de tensión en una FA de cc lineal* [en línea]. Recuperado de <http://www.cifpn1.com/electronica/?p=3101> el 22 de Agosto de 2019.
- [CLR, 2019] (2019). *Motores de corriente continua y alterna: estudio y selección*. Recuperado de <https://clr.es/blog/es/motores-corriente-continua-alterna-seleccion/> el 22 de Octubre de 2019.
- [Dynapar, 2019] (2019). *HS35R Heavy Duty Optical Encoder*. Recuperado de <https://ecatalog.dynapar.com/ecatalog/incremental-encoders/en/HS35R> el 22 de Septiembre de 2019.
- [Farnell, 2019] (2019). *BG2B – Universal Gate Drive Prototype Board*. Recuperado de [http://www.farnell.com/datasheets/1812184.pdf?\\_ga=2.78587668.1884733613.1570667068199577014.1570667068](http://www.farnell.com/datasheets/1812184.pdf?_ga=2.78587668.1884733613.1570667068199577014.1570667068) el 18 de Septiembre de 2019.
- [Fyodorovich Minorsky, 2020] (2020). *MATHEMATICA TUTORIAL for the Second Course. Part III: Pendulum Equations*. Recuperado de <http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch3/pendulum.html> el 28 Agosto 2020.

- [Harold Locke Hazen, 2020] (2020). *Harold Hazen and the theory and design of servomechanisms*. Recuperado de <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207178508933409> el 22 de Agosto de 2020.
- [Harry Theodor Nyquist, 2020] (2020). *Harry Nyquist American physicist*. Recuperado de <https://www.britannica.com/technology/electrical-and-electronics-engineering> el 03 de Octubre de 2020.
- [IEC, 2019] (2019). *International Electrotechnical Commission*. Recuperado de <https://www.iec.ch/> el 05 de Noviembre de 2019.
- [MatLab, 2020] (2020). *System Requirements for MATLAB R2020a*. Recuperado de <https://la.mathworks.com/support/requirements/matlab-system-requirements.html> 14 de Enero de 2020.
- [National Instrument, 2019] (2019). *Adquisición de Datos (DAQ)*. Recuperado de [https://www.ni.com/data-acquisition/what-is/esa/#targetText=La %20adquisici %C3 %B3n %20de %20datos %20\(DAQ,una %20PC %20con %20software %20programable](https://www.ni.com/data-acquisition/what-is/esa/#targetText=La%20adquisici%C3%B3n%20de%20datos%20(DAQ,una%20PC%20con%20software%20programable) el 22 de Octubre de 2019.
- [NEMA, 2019] (2019). *NEMA Advances Electroindustry Growth*. Recuperado de <https://www.nema.org/pages/default.aspx> el 05 de Noviembre de 2019.
- [Optimal control, 2020] (2020). *The maximum principle of optimal control: A history of ingenious ideas and missed opportunities*. Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/265362813\\_The\\_maximum\\_principle\\_of\\_optimal\\_control\\_A\\_history\\_of\\_ingenious\\_ideas\\_and\\_missed\\_opportunities](https://www.researchgate.net/publication/265362813_The_maximum_principle_of_optimal_control_A_history_of_ingenious_ideas_and_missed_opportunities) el 28 de Agosto de 2020.
- [Rudolf E. Kalman , 2020] (2020). *Rudolf E. Kalman and His Students* . Recuperado de [https://www.researchgate.net/profile/Eduardo\\_Sontag/publication/305394903\\_Rudolf\\_E\\_Kalman\\_and\\_his\\_students/links/578ce7d908ae254b1de866be/Rudolf-E-Kalman-and-his-students.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Eduardo_Sontag/publication/305394903_Rudolf_E_Kalman_and_his_students/links/578ce7d908ae254b1de866be/Rudolf-E-Kalman-and-his-students.pdf) 22 de Agosto de 2020.
- [ScienceDirect, 2019] (2019). *Gaussian Elimination*. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/gaussian-elimination> el 17 de Diciembre de 2019.
- [ScienceDirect, 2019] William Ford (2019). *Algebra Lineal con aplicaciones*. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/journal/applied-mathematics-and-computation/vol/185/issue/1> el 17 de Diciembre de 2019.
- [SCorriente, 2019] (2019). *FW Bell NT-25*. Recuperado de <https://mx-es.alliedelec.com/product/fw-bell/nt-25/70103867/> el 03 de Septiembre de 2019.
- [Secretaría de Economía, 2019] (2019). *Secretaría de economía*. Recuperado de <https://www.gob.mx/se/> el 05 de Noviembre de 2019.
- [SIEMENS, 2019] (2019). *Insutry mall*. Recuperado de <https://mall.industry.siemens.com/spice/jom/jom/> el 22 de Octubre de 2019.

- [SIEMENS MOTOR, 2019] (2019). *SIMOTICS electric motors for industry*. Recuperado de <https://new.siemens.com/global/en/products/drives/electric-motors.html> el 20 de Octubre de 2019.
- [Thomas Newcomen, 2020] (2020). *Breve historia de la máquina de vapor*. Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/316461075\\_Breve\\_historia\\_de\\_la\\_maquina\\_de\\_vapor](https://www.researchgate.net/publication/316461075_Breve_historia_de_la_maquina_de_vapor) el 20 de Agosto de 2020.
- [UACM, 2019] (2019). *El modelo educativo de la UACM*. Recuperado de <https://www.uacm.edu.mx/UACM/ModeloEducativo> el 18 de Agosto de 2019.
- [UACM ISEI, 2019] (2019). *Colegio de Ciencia y Tecnología*. Recuperado de <https://www.uacm.edu.mx/Oferta-academica/CCyT/SistemasElectronicosIndustriales> el 18 de Agosto de 2019.
- [UNAM, 2019] (2019). *Eliminación Gaussiana*. Recuperado de <http://lya.ciencias.unam.mx/gfgf/pa20081/data/lecturas/eliminag/> el 18 de Agosto de 2019.