

UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

**Estudio del tráfico vehicular mediante redes complejas
y cadenas de Markov discretas**

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA :

JESSICA PEREDA MÉNDEZ

DIRECTOR

Dr. Luis Agustín Olivares Quiroz

Ciudad de México, agosto de 2019

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO COORDINACIÓN ACADÉMICA

RESTRICCIONES DE USO PARA LAS TESIS DIGITALES

DERECHOS RESERVADOS[©]

La presente obra y cada uno de sus elementos está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor; por la Ley de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, así como lo dispuesto por el Estatuto General Orgánico de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México; del mismo modo por lo establecido en el Acuerdo por el cual se aprueba la Norma mediante la que se Modifican, Adicionan y Derogan Diversas Disposiciones del Estatuto Orgánico de la Universidad de la Ciudad de México, aprobado por el Consejo de Gobierno el 29 de enero de 2002, con el objeto de definir las atribuciones de las diferentes unidades que forman la estructura de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México como organismo público autónomo y lo establecido en el Reglamento de Titulación de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Por lo que el uso de su contenido, así como cada una de las partes que lo integran y que están bajo la tutela de la Ley Federal de Derecho de Autor, obliga a quien haga uso de la presente obra a considerar que solo lo realizará si es para fines educativos, académicos, de investigación o informativos y se compromete a citar esta fuente, así como a su autor ó autores. Por lo tanto, queda prohibida su reproducción total o parcial y cualquier uso diferente a los ya mencionados, los cuales serán reclamados por el titular de los derechos y sancionados conforme a la legislación aplicable.

Coordinación de Certificación y Registro

F6 AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Ciudad de México, a 12 de agosto de 2019

JESSICA PEREDA MÉNDEZ

Estudiante de la Licenciatura en

Modelación Matemática

P r e s e n t e

En virtud, de que cuentan con los cuatro votos aprobatorios necesarios para presentar la defensa de su tesis/trabajo recepcional titulado/a **Estudio del tráfico vehicular mediante redes complejas y cadenas de Markov discretas**, esta Coordinación le autoriza la impresión de su trabajo final.

Por lo que deberá reproducir 7 ejemplares, de los cuales deberá **entregar 8 días hábiles antes del examen** uno al Director/a, uno cada Lector/a y **a esta Coordinación 3 ejemplares, así como 2 discos compactos** con la versión electrónica en formato PDF.

No omito recordarle que no hay prórroga en la entrega de materiales, ya que de ello depende la reconfirmación de fecha de examen.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e

COORDINACIÓN DE CERTIFICACIÓN Y REGISTRO

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que hicieron posible esta investigación y que de alguna manera estuvieron conmigo en los momentos difíciles, alegres, y tristes. A mis padres y a mi tía por todo su amor, comprensión y apoyo, pero sobre todo gracias infinitas por la paciencia que me han tenido, no tengo palabras para agradecerles las incontables veces que me brindaron su apoyo en todas las decisiones que he tomado a lo largo de mi vida, unas buenas, otras malas, otras locas. Gracias por darme la libertad de desenvolverme como ser humano.

A mi hermana y su familia por llenarme de alegría día tras día en vacaciones, por todos los consejos brindados, por compartir horas y horas de películas, por las peleas, gritos y herir mi cuerpo de puro amor. No puedo dejar de agradecer a Misael por estar siempre presente, por acompañarme y por el apoyo moral que me brinda a lo largo de esta etapa de mi vida, agradezco el apoyo de la maestra Fabiola, por motivarme aún en la distancia.

De manera especial agradezco a mi director de tesis Dr. Luis A. Olivares Quiroz quien con su experiencia, conocimiento y motivación me orientó en la investigación. Agradezco a los todos profesores que con su sabiduría, conocimiento y apoyo, motivaron a desarrollarme como persona y profesional en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Mi agradecimiento a todos, mi familia, mis amigos que de una u otra manera me brindaron su colaboración y se involucraron en esta investigación.

*A mis padres
Josefina y Federico
por darme la oportunidad de cumplir un sueño*

1. Objetivo general

Proponer un modelo matemático basado en redes complejas y Cadenas de Markov para estudiar el tráfico vehicular en la ciudad de México, que permita analizar en forma cuantitativa variables como densidad de tráfico.

2. Objetivos específicos

- a)* Utilizar un mapa de la ciudad de México para estudiar el tráfico vehicular mediante Cadenas de Markov Discretas.
- b)* Construir una matriz de probabilidad de transición para describir el mapa de la CDMX.
- c)* Realizar cálculos con la matriz de probabilidades de transición para estudiar e interpretar los resultados.

Introducción

El problema del tráfico vehicular ha sido estudiado desde el siglo XX a causa del incremento de número de autos que transitan por las carreteras. Los primeros estudios sobre el tráfico vehicular se remontan al año de 1935. Históricamente, el estudio y modelado del tránsito vehicular tiene su origen en los años 30 cuando el investigador norteamericano Bruce Douglas Greenshield's aplicó por primera vez métodos fotográficos y matemáticos para la medición de diferentes variables relacionadas con el flujo de tránsito vehicular y la descripción de su comportamiento [7]. Fue el mismo Greenshield's quien, posteriormente, postuló la existencia de una relación lineal entre la velocidad y la densidad del tránsito.

Años más tarde surgieron los primeros planteamientos en la teoría del flujo de tránsito vehicular, en los cuales se confirmaron las postulaciones de Greenshield's y la existencia de una estrecha relación entre las variables fundamentales del flujo de tránsito vehicular, la velocidad, la densidad y el flujo [8].

Esto ha dado lugar a una amplia gama de modelos que describen diferentes aspectos de las operaciones de flujo de tráfico, ya sea considerando el comportamiento espacio-temporal de los conductores individuales bajo la influencia de los vehículos en su proximidad (modelos microscópicos), el comportamiento de los conductores sin distinguir explícitamente su comportamiento espacio-temporal (modelos mesoscópicos), o desde el punto de vista del flujo vehicular colectivo (modelos macroscópicos). Además de la controversia entre estos flujos de modelado microscópico, mesoscópico y macroscópico, varios investigadores se han unido al debate sobre el enfoque de modelado macroscópico más adecuado para una descripción correcta del flujo de tráfico, pues los modelos macroscópicos consideran que el flujo de vehículos en la carretera se comporta de forma similar al que presenta un fluido compresible, este viene descrito por variables de carácter macroscópico asociadas al comportamiento colectivo del sistema. Para ello se necesita un número grande de vehículos circulando en la carretera, de manera que hablar de variables como la densidad, velocidad

promedio y, algunas otras proporcionan una medida significativa del comportamiento en el flujo. Existen diferentes tipos de modelos dependiendo del número de variables que se usan para la descripción del comportamiento del fluido.

Estos modelos son capaces de representar fenómenos colectivos debido a que los automóviles se consideran como partículas que fluyen a través de una red de conductos. Dichos fenómenos pueden ser la evolución de las regiones donde se presentan los congestionamientos viales, la velocidad de propagación de las ondas de tránsito, la evolución de la velocidad promedio, entre otras. El primer modelo macroscópico para describir tráfico vehicular aparece en 1955, basado en la dinámica de fluidos es conocido como modelo de Lighthill y Whitham, aunque Richards lo desarrolla también de manera independiente en 1956 [6]. Éste es un modelo unidimensional, donde se considera que ningún vehículo entra o sale de la vía, de manera que se conserva el número de vehículos.

El tráfico vehicular es uno de los problemas que enfrentan actualmente las grandes ciudades, debido al número creciente de vehículos. Los efectos de la congestión del tráfico van más allá de los impactos económicos y sociales para llegar a muchas otras áreas, como lo es el medio ambiente y la calidad de vida de los habitantes de las ciudades. Por otro lado es de importancia si tomamos en cuenta que cada usuario busca minimizar su tiempo de viaje, eligiendo rutas de acuerdo a las condiciones del tráfico. Las autoridades de transporte normalmente emplean diversas evaluaciones de red y técnicas de diseño para analizar y proponer posibles soluciones a este problema. El incremento desmedido de la cantidad de autos que circulan en las carreteras agravan cada vez más este problema y la falta de soluciones ha provocado una serie de diferentes estudios.

Una de las tecnologías que permite la clave en el desarrollo de estrategias de regulación de flujo de tráfico en redes urbanas es el desarrollo de modelos matemáticos para la predicción y análisis del flujo de tráfico vehicular. También existen otras maneras de estudiar el tráfico vehicular, los investigadores del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) desarrollaron un modelo basado en datos de sistema de posicionamiento global (GPS) que recomienda decisiones de conducción que ayuden a todos [24], pues en las ciudades, los

atascos son cada vez mayores y difíciles de gestionar. Para superar este problema, los conductores actualmente se basan en decisiones tomadas de manera individual, en base a los datos de sus GPS. Este modelo tiene en cuenta diferentes parámetros, que representan, entre otros, el coste de tiempo en cada ruta, la capacidad de las rutas de cada ciudad, la infraestructura de la ciudad, la demanda de tráfico o la velocidad sin tráfico, que serán diferentes en cada ciudad. Con ellos se crea una medida que permite dar cuenta de la ruta óptima de viaje en cada ciudad de forma global, en base no a un sólo coche, sino a todo el flujo de coches y la forma de distribuirlo. En menor medida hay que tener en cuenta, de manera añadida, la densidad de población y su distribución espacial. Esto también ayuda a entender por qué algunas ciudades se congestionan más que otras (relacionado con la distribución espacial de la densidad de población). Existen aplicaciones como Waze y Google Maps, Waze es una aplicación social de tránsito automotor en tiempo real y navegación asistida por GPS desarrollada por Waze Mobile, este es mantenido por los usuarios y aprende de las rutas recorridas por sus usuarios para proveer información de enrutamiento y actualizaciones de tráfico en tiempo real, Google Maps es un servidor de aplicaciones de mapas en la web que pertenece a Alphabet Inc [25]. Ofrece imágenes de mapas desplazables, así como fotografías por satélite del mundo e incluso la ruta entre diferentes ubicaciones o imágenes a pie de calle con Google Street View, condiciones de tráfico en tiempo real (Google Traffic) y un calculador de rutas a pie, en coche, bicicleta (beta) y transporte público y un navegador GPS. Los modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales se describen en el próximo capítulo.

Un objetivo importante en el desarrollo de dichos modelos matemáticos es mejorar el comportamiento del tráfico, reduciendo la congestión al proporcionar condiciones de tráfico uniforme y proveer a países en vías de desarrollo una metodología para diseñar y evaluar estrategias de control y planeación de rutas de transporte.

En el presente trabajo se propone una idea novedosa e interesante para modelar el flujo de tráfico que surge de las redes de transporte basado en el formalismo de las Cadenas de Markov Discretas y las Redes Complejas (Complex Networks, por su nombre estándar en inglés). El modelo físico matemático propuesto en este trabajo utiliza la Teoría de las Cadenas de Markov Discretas(TCMD) para estimar las probabilidades futuras de que una

ruta o carretera en particular tenga una densidad específica de tráfico. En la TCMD el objeto central de estudio es la matriz de probabilidades de transición M entre los distintos estados del sistema, su evolución, la distribución de probabilidad estacionaria, constante de Kemeny, etc., los cuales nos dan mucha información de interés como se verá en los próximos capítulos.

Hacemos uso de un modelo estocástico de asignación de tráfico que necesita como entrada una matriz origen-destino e información de los vehículos como se mencionó anteriormente, además de que las cadenas de Markov se pueden utilizar para informar el diseño de estrategias de control que son adecuadas para regular la carga en las redes de transporte, ya que permiten a los usuarios obtener información estructural que generalmente es difícil de obtener usando otras técnicas de modelado.

Este trabajo se ha dividido en cuatro capítulos que son descritos a continuación:

En el primer capítulo se hace un breve análisis del tráfico vehicular en las grandes ciudades, se mencionan algunas políticas y propuestas para la mejora de éste y se describen algunos modelos matemáticos que han tratado de analizar el tráfico vehicular, que se plantean como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales.

En el segundo capítulo se introduce una descripción general del marco matemático de las cadenas de Markov desde los antecedentes de estas cadenas, definiciones y propiedades las cuales son de interés analizar, como es la construcción de la matriz de probabilidad de transición que es la base para poder llevar a cabo el estudio.

En el tercer capítulo se describe la relación del modelo de cadenas de Markov aplicado al tráfico vehicular, por una parte se hace una pequeña descripción de la representación de las redes a estudiar, transformaciones y finalmente se propone un modelo con el cual se estudiarán las redes de interés. Después se pone un ejemplo de una red pequeña para aplicar el enfoque teórico para después desarrollar el modelo propuesto a la red de la ciudad de México. En el capítulo se muestran algunas figuras que son resultados de experimentos

para poner en evidencia los resultados teóricos.

En el cuarto capítulo se expone y describe el modelo propuesto anteriormente mediante cadenas de Markov con el cual se puede modelar la red de la ciudad de México, formada por los 32 principales ejes viales. Mostramos los resultados graficamente y se analizan e interpretan los resultados obtenidos.

Para cerrar este trabajo se exponen algunas conclusiones y el trabajo a futuro.

Índice general

Agradecimientos	I
	III
	V
Introducción	VII
Capítulo 1. Tráfico vehicular	1
1.1 Tráfico en las grandes ciudades	1
1.2 Modelos matemáticos	4
1.3 Políticas de mejora del tráfico	8
Capítulo 2. Cadenas de Markov Discretas	11
2.1 Antecedentes	11
2.2 Propiedad de Markov	12
2.3 Definición	12
2.4 Matriz de probabilidad de transición	14
2.5 Cadenas de Markov ergódicas	16
2.6 Matriz fundamental	17
2.7 Tiempo promedio de la primer visita (MFPT)	18
2.8 Constante de Kemeny	19
Capítulo 3. Tráfico Vehicular y Cadenas de Markov	21
3.1 Red de carreteras modelado con cadenas de Markov	21
3.2 Red primaria	22
3.3 Red dual	23
3.4 Ejemplo de red vehicular	24
Capítulo 4. Aplicaciones a redes de transporte y resultados para la CDMX	37
4.1 Estudio de la red de carreteras de la CDMX	37

4.2 Construcción de la matriz de probabilidades de transición de la CDMX	38
4.3 Probabilidad de ocupación de avenidas	39
4.4 Identificación de carreteras importantes	44
Conclusiones	55
Índice de figuras	57
Índice de tablas	59
Bibliografía	61

Tráfico vehicular

1.1 Tráfico en las grandes ciudades

Conducir, además de caminar, hablar y comer, es la habilidad más ampliamente ejecutada en el mundo de hoy y posiblemente la más desafiante. Esto afirmaba Richard Rothery, uno de los pioneros dentro de la investigación en cuestiones de transporte, ya en el año 1968 [9].

El tráfico vehicular es el fenómeno causado por el flujo de vehículos en una vía, calle o autopista. Hay muchas aproximaciones matemáticas que intentan modelar el flujo de tránsito vehicular en términos de alguna de sus características. Todas ellas responden con cierto grado de apego a la realidad, midiendo alguna o algunas características del flujo vehicular. La historia del transporte es la historia de la humanidad. Todas y cada una de las sociedades han tenido la necesidad de trasladar objetos y mercancías. Es así como la necesidad de cargar objetos y distribuirlos entre distintos territorios se sitúa en el origen del transporte terrestre pero también del transporte marítimo y del transporte aéreo. La importancia de la actividad transportista radica en que desplaza productos y personas a lo largo del espacio de manera temporal o definitiva. Al igual que en la mayoría de los países, los transportes en México han sido de gran importancia pues la diversidad de sus suelos y de sus producciones ha hecho necesario el desplazamiento de productos entre regiones. Con esto se han satisfecho las necesidades de la población, se han dado intercambios mercantiles y se ha crecido económicamente. La historia del automóvil empieza con los vehículos autopropulsados por vapor del siglo XVIII. En 1885 se crea el primer vehículo automóvil por motor de combustión interna con gasolina. El francés Nicolas-Joseph Cugnot (1725-1804) construyó un automóvil de vapor que circuló por París en 1769 y que perfeccionó en otros dos modelos. En 1784 William Murdoch construyó un modelo de carro a vapor y en 1801 Richard Trevithick condujo un vehículo en el Reino Unido. En ambos se desarrollaron el freno de mano, las velocidades y el volante. En 1815 Josef Bozek, construyó un auto con motor propulsado con aceite. El belga Etienne Lenoir hizo funcionar un coche con motor de combustión interna (1860), propulsado por gas de carbón, y en 1870, en la

ciudad de Viena, Siegfried Marcus, uno a base de gasolina. Es aceptado que los primeros autos con gasolina fueron desarrollados por los alemanes Karl Benz en 1885 y que empezó a producir en 1888 y en el 1889, Gottlieb Daimler y Wilhelm Maybach diseñaron su coche [3].

Hoy en día nos encontramos con grandes problemas en términos de congestión, seguridad e impacto ambiental, así como con la ambición del ser humano de tener cada vez una vida más fácil, intentando que las máquinas sean el catalizador para mejorar la calidad de vida en todos los sentidos. Esto lleva a una superación tecnológica cada vez más incipiente y por supuesto esta onda expansiva está muy presente en todo lo relacionado con el transporte vehicular. En los últimos años, hemos sido testigos de un gran aumento en la investigación y el desarrollo en el ámbito de las redes vehiculares. La inversión en la gestión de actividades integradas para un mejor desarrollo comunitario determina el progreso de una ciudad. Una de esas actividades es la concerniente al tráfico vehicular, que es uno de los factores más trascendentales en la calidad de vida de una ciudad moderna. Así, una buena planificación vial es de vital importancia para el desarrollo de las mismas. Para ello, se deben realizar estudios que nos permitan tener un diagnóstico de la realidad y así tomar decisiones que ayuden a minimizar o evitar problemas que se están presentando o que pudieran aparecer en el futuro. Sin embargo, realizar un estudio de este tipo cada vez que se requiera es costoso en términos de tiempo y recursos.

El tráfico vehicular en la Ciudad de México (CDMX) presenta niveles elevados que, sin duda es necesario disminuir. El alto costo social y económico que tienen los hechos de tráfico vehicular, ha obligado a las autoridades y a la sociedad en su conjunto a implementar diversas medidas, generalmente aisladas y de éxito limitado. Los hechos de tránsito es la parte de la criminalística que investiga la causa o el origen de los hechos de tránsito terrestre, utilizando una metodología científica aplicada a los mismos, así mismo se aplican las leyes de la física, principalmente las de Isaac Newton para reconstrucción de un hecho que se apegue a la verdad histórica. Así mismo en esta área se realiza la valoración de daños que presentan dichas unidades, complementando toda investigación de un vehículo como una huella de reparación reciente o huella de choque. Los dictámenes que se elaboran en el área son: causalidad vial: tiene como objetivo reconstruir el hecho de tránsito y determinar las causas viales. Valoración de daños: tiene como objeto describir los daños en los

vehículos y determinar el valor de reparación de los mismos. Revisión técnica de vehículos (huellas de choque), determinación, ubicación y características de indicios criminalísticos que presenten los vehículos, entre otros: revisión de reparación de reciente, detectar si presenta huellas de haber participado en algún atropello, intensidad de sus daños, así como trayectoria de las mismas.

La elaboración de modelos matemáticos que ayuden a predecir y simular el tráfico y determinar posibles alternativas de solución a los problemas que se presentan en el flujo vehicular en una ciudad resulta de gran utilidad para ayudarnos en la toma de decisiones pertinentes, ya que al momento de estar dentro de un congestionamiento vial, no percibimos los costos reales que provoca estar ahí, como lo es el tiempo, el estrés y la contaminación que se causa en ese momento, y mientras la sociedad no realce estos costos, la población vehicular seguirá sin darse cuenta de la realidad de la problemática. Este trabajo propone un modelo matemático que permita realizar predicciones a corto plazo de los flujos de tráfico en distintas secciones relevantes de una ciudad y, en consecuencia, predecir cuestiones como la saturación de tráfico en las mismas, determinando así las posibles soluciones a la congestión vial que se pueda presentar en un momento dado. Ilustramos el modelo con datos pertenecientes a la ciudad de México.

En la última década, numerosos esfuerzos han tratado de mitigar los problemas derivados del tráfico y algunas de las soluciones encontradas son las últimas novedades tecnológicas en computación móvil, comunicaciones inalámbricas, y la teledetección están impulsando los Sistemas de Transporte Inteligentes(ITS) a que den un paso más allá. Los vehículos se consideran como sistemas altamente sofisticados ya que constan de varias computadoras y sensores a bordo, cada uno dedicado a una parte de la operación del automóvil. Por otra parte los autos inteligentes están evolucionando y ahora tenemos algunos modelos de autos que realmente hacen todo, solo tienes que entrar al auto, sentarte y disfrutar del viaje hasta tu destino final [25]. Algunas de las características más populares hasta ahora son: los vehículos inteligentes saben cómo evitar los atascos, saben dónde estacionarse, abren la puerta a los pasajeros, eligen la velocidad óptima , conducen con seguridad, etc.

1.2 Modelos matemáticos

La movilidad urbana y el congestionamiento vehicular de las principales ciudades de México se han vuelto uno de los principales problemas para la ciudadanía. La pérdida de tiempo en movilidad urbana no es únicamente un tema que refleja la calidad de vida del ciudadano mexicano, sino también un tema económico. El estudio del Instituto de Transporte y Desarrollo de Política Pública en México (ITDP) estima que el país pierde alrededor de 200 mil millones de pesos cada año en costos relacionados con el congestionamiento del tráfico [24].

El impacto que tiene la gran cantidad de carga vehicular se encuentra también en la emisión de gases contaminantes. El impacto real que tienen los autos nuevos y los viejos en la emisión de gases al medio ambiente, es un tema prioritario, pues la Ciudad de México se ha convertido en la segunda ciudad con el peor tráfico del mundo. Los primeros intentos de modelar el flujo vehicular utilizando datos reales, ajustes empíricos fueron desarrollados a lo largo de casi una década.

En este trabajo se aborda el problema del tráfico vehicular mediante un modelo basado en Cadenas de Markov Discretas y Redes complejas. Aunque existen otros modelos que se han usado para analizar el tráfico vehicular, que se plantean como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales en su forma conservativa y se resuelven numéricamente. En las primeras teorías de flujo vehicular se buscaban relaciones independientes del tiempo, entre las variables fundamentales. Se reconoció rápidamente la importancia de la relación flujo–densidad (relación fundamental) y todas la teorías se contrastaron con el tipo de predicción de la relación fundamental. Los primeros estudios sobre el flujo vehicular se remontan al año de 1935. Bruce D. Greenshields, ingeniero civil, fue de las primeras personas en recopilar datos para medir el flujo vehicular ($Q [Veh/Hr]$). Debido al estudio que realizó en una autopista, descubrió que a cierta cantidad de autos por kilómetro, que se define como densidad vehicular promedio ($p [Veh/Km]$), la velocidad promedio ($V [Km/Hr]$) empieza a disminuir formándose una congestión vehicular. La cantidad de autos mínima para desencadenar un congestionamiento vehicular se le llama punto crítico y se le denomina como la capacidad de trabajo de la autopista. De los datos que obtuvo, Greenshields formuló la velocidad promedio de los automóviles en función de la densidad promedio

$$V_e(p) = V_{max}(1 - p/p_{max}),$$

en donde p_{max} es la densidad máxima que es aproximadamente de $140 [Veh/Km]$ y $V_{max} [Km/Hr]$ está delimitado por el límite de velocidad de cada autopista. Por otro lado, físicamente el flujo se expresa como $Q = pV$ y entonces,

$$(1) \quad Q_p(p) = V_{max}p(1 - p/p_{max})$$

Esta relación, flujo-densidad, se le conoce como relación fundamental de Greenshields. En este primer modelo heurístico se observa que el flujo es cero siempre y cuando la densidad sea $p = 0$ ó $p = p_{max}$.

El trabajo de Greenshields ha influido en ingenieros de tráfico e investigadores en todo el mundo [14]. Estas relaciones han sido las más utilizadas en modelos de flujo vehicular. El modelo da una visión básica de las interacciones entre flujo, velocidad y densidad, sin agregar la complejidad de relaciones no lineales entre densidad y velocidad. Sin embargo, otros estudios muestran que estas relaciones tienden a no ser lineales. Dado que no siempre existe una buena correlación lineal entre la velocidad y la densidad [3], otros modelos logran un mejor ajuste mediante relaciones no lineales.

Modelo de Lighthill-Whitham

El modelo macroscópico más popular, a pesar de ser el más viejo, fue propuesto por Lighthill y Whitham (1955). Su modelo está basado en un escenario donde la cantidad de autos en un circuito homogéneo se conserva. Dada la ecuación de continuidad:

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Lighthill y Whitham cierran el sistema proponiendo la relación fundamental de Greenshields, que aún se sigue utilizando para investigaciones analíticas.

Modelo de Payne

El modelo introducido por Payne (1971) complementa la ecuación de conservación por medio de una dinámica de velocidades basada en un modelo de “car following (seguimiento de coche)” propuesto por Newell G.F. (1961).

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\Delta t} \left(V_e(p) - \frac{D(p)}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - V \right)$$

en el cual el término difusivo es dependiente de la densidad.

$$(4) \quad D(p) = \frac{0.5dV_e(p)}{\partial p}$$

Este modelo introduce un término de relajación $\frac{(V_e(p) - V)}{\Delta t}$ que describe un ajuste en la velocidad de los conductores gobernado por la relación fundamental lo que provoca un aumento o disminución en su velocidad promedio dependiendo de la densidad local. También se introduce un término de advección $\frac{V\partial V}{\partial x}$ que describe la propagación del perfil de velocidad con respecto al gradiente de la velocidad de los autos. Este modelo a pesar de poder describir varios de los patrones del congestionamiento vehicular desafortunadamente es inestable para un cierto rango de densidades .

Modelo de Prigogine y Phillips

Como alternativa al modelo de Payne, Phillips (1979) propone el suyo, derivado del modelo de tráfico vehicular de Prigogine, el cual se compone por la ecuación de continuidad y la siguiente ecuación que describe la dinámica de la velocidad para los autos.

$$(5) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\tau(p)} (V_e(p) - V)$$

donde $\tau(p)$ es un término de relajación y $P(x, t) = p(x, t) \theta(x, t)$ es un término análogo a la presión en la teoría cinética de los gases donde $\theta(x, t)$ es la varianza de la velocidad de los autos en movimiento.

Este modelo es capaz de modelar algunos patrones del congestionamiento vehicular como son los cúmulos de densidad que se detienen y avanzan de forma intermitente. Sin embargo no es numéricamente robusto y presenta inestabilidades como el modelo de Payne, además, en regiones de alta densidad, la presión del tráfico que disminuye con respecto a p provocando que los vehículos aceleren hacia regiones congestionadas lo cual no es realista.

La importancia de la relación fundamental es evidente y en la actualidad, con instrumentos de mayor precisión para obtener datos del flujo vehicular en autopistas, se han hecho mediciones a mucha mayor escala.

La ventaja de utilizar modelos de segundo orden es que éstos no presentan soluciones del tipo de onda de choque debido a que se introduce un término difusivo, además de ser capaces de modelar situaciones de embotellamientos en el flujo vehicular como otros patrones que existen en el tráfico congestionado. De las diferentes maneras de abordar problemas de este tipo, la modelación por medio del uso de ecuaciones diferenciales parciales resulta una herramienta útil por su capacidad de describir cualitativamente fenómenos junto con la facilidad para ajustar términos necesarios en las ecuaciones y mejorar el desempeño de un modelo.

En nuestro caso, el tráfico en una red urbana es una dinámica altamente complicada, ya que es un sistema que solamente se puede modelar con precisión mediante el uso de modelos igualmente complicados. Creemos que hemos encontrado una manera de utilizar

un modelo de cadena de Markov muy simple, que nos permite calcular y analizar propiedades ocultas importantes de dicha red con alta precisión y muy alta velocidad. Esto se describió por primera vez en (Crisostomi et al., 2011) y se discutió que un marco Markoviano es particularmente atractivo, ya que hace que la información importante sobre la red de carreteras sea disponible de forma conveniente para el diseñador de la red de carreteras (congestión, promedio tiempos de viaje, carreteras con mayor ocupación en la red de carreteras) y partiendo de la teoría de la cadena de Markov se analizan algunas redes. El modelo de cadena de Markov a diferencia de otros modelos, puede describir sistemas que sean muy complejos. Puede ser usado para experimentar con sistemas que todavía no existan, o para experimentar con sistemas existentes sin que éstos se alteren (esto también los pueden hacer los métodos analíticos siempre y cuando el sistema no sea muy complejo). Sin embargo, cada cambio en las variables de entrada requiere una solución separada o conjunto de ejecuciones, los modelos de simulación complejos pueden requerir mucho tiempo para construirlos y ejecutarlos, puede resultar dificultoso establecer la validez del modelo (es decir, la correspondencia con el sistema real).

1.3 Políticas de mejora del tráfico

La Ciudad de México (CDMX) es una de las urbes más congestionadas del planeta y tiene el peor tráfico del mundo, de acuerdo con el Índice Tom Tom Traffic 2017 [10]. De acuerdo con este índice, las personas que circulan en CDMX pasan el 66 % de tiempo extra más por cada viaje, lo que significó un aumento de 7 % con respecto del año pasado. “Las personas pasan un total de 227 horas al año atorados en una gran urbe como es la CDMX, la cual tiene el peor tráfico en todo el mundo”, dice el Índice.

En México los automóviles son la principal fuente de contaminación que contribuye a la formación de ozono, asociado con graves enfermedades cardiopulmonares, por lo que el gobierno no puede seguir retrasando la actualización de las normas que regulan las emisiones a escala nacional [27]. Así lo señalaron representantes del Centro Mexicano de Derecho Ambiental AC (Cemda), del CTS EMBARQ México, que es una ONG que cataliza y apoya la implementación de proyectos y políticas públicas en materia de movilidad, transporte público, desarrollo urbano, cambio climático y calidad del aire, así como del Instituto Internacional de Transporte Limpio (ICCT, por su sigla en inglés), quienes destacaron

que México tiene actualmente estándares para controlar las emisiones de contaminantes que son precursores de ozono. Añadió que el sector transporte es uno de los principales emisores de contaminantes a escala nacional en México, siendo responsable de 90.03 % de las emisiones de monóxido de carbono (CO) y de 45.67 % de óxidos de nitrógeno (NOx), en todo el país [24]. Dentro del sector transporte los vehículos de pasajeros denominados ligeros emiten 74.41 % de CO, 52.55 % de NOx, 73.55 % de Compuestos Orgánicos Volátiles (COV) y 94.50 % de amoniaco (NH₃). Estos contaminantes contribuyen a la formación de ozono en la atmósfera.

Siete millones de autos saturan las calles cada día, la tendencia aumenta: en siete años más, podrían ser cerca de 15 millones de autos congestionando la ciudad, y hay poca imaginación para resolver el problema del tráfico en la CDMX. Lo que se ha hecho, ha sido construir autopistas urbanas. Todos estos esfuerzos no han contenido el tráfico que aumenta, sin remedio, cada año. En las últimas décadas, se han planteado otras soluciones para la congestión actual.

Algunas de las políticas que están por aplicarse en la CDMX para mejorar el tráfico vehicular son:

- Modificar los horarios de trabajo.
- Construcción de un teleférico
- Uso y ampliación del Metro, diecisiete líneas de Metro y 10 de tren ligero.
- Aprovechar mejor cada auto, que es el caso de los conductores solitarios. La mayor parte de los autos que circulan por las calles son ocupados por una sola persona. En la Ciudad de México, la ocupación promedio es de 1.2 personas por vehículo, esto puede cambiar si se generan carriles de alta ocupación, donde se dé prioridad a autos con más de dos pasajeros.
- Tecnología para controlar el tráfico en la CDMX, los semáforos de otras ciudades están interconectados entre sí y son operados a distancia, con cámaras. Hacer esto para aliviar el tráfico en la CDMX no es imposible: actualmente esto ya es una realidad en 860 cruces de 3070, algo que tendría que extenderse a toda la zona

metropolitana. Así podríamos dejar de enviar policías a los cruceros congestionados para jugar con el tiempo de los que transitan en dichos puntos, ya que las intersecciones conflictivas en los puntos de cruce, que se acentúan en las horas de máxima demanda como son las de las primeras horas de la mañana donde coinciden trabajadores, amas de casa y estudiantes, y aún y cuando las vialidades primarias de la ciudad presentan un esquema adecuado de sentidos de tránsito, en los cruces se alteran los movimientos direccionales. Este comportamiento está asociado con la programación deficiente de los semáforos de manera especial con las vueltas a la izquierda.

- Integrar el transporte público, metro, tren suburbano, metrobús, mexibús y trolebús. Deberían actuar como un sistema integrado, no como medios en competencia.
- Impulsar el uso de la bicicleta puede evitar que la gente se suba al auto para recorrer distancias inferiores a los cinco kilómetros podría aminorar el tráfico en la CDMX. El problema es que no hay infraestructura suficiente.

Cadenas de Markov Discretas

2.1 Antecedentes

“El volumen de tráfico vehicular en los últimos años ha superado de manera desbordante las capacidades de las carreteras en las distintas naciones, es por esto que debe entenderse la dinámica del flujo de tráfico y obtener una descripción matemática del proceso, esto se ha convertido cada vez más en una necesidad de primer orden”, estas palabras corresponden a un artículo clásico publicado en 1959 por Greenberg. Proponemos emplear Cadenas de Markov Discretas para modelar la congestión de una manera análoga a como Google emplea estas herramientas para modelar la congestión en Internet (Langville y Meyer 2006). Las CMD ofrecen ventajas considerables y se pueden construir fácilmente a partir de datos reales. Antes de abordar el tema de las Cadenas de Markov Discretas (CMD), debemos tener en cuenta que existen modelos de probabilidad para procesos que evolucionan en el tiempo, tales procesos se llaman procesos estocásticos. Un proceso o sucesión de eventos que se desarrolla en el tiempo en el cual el resultado en cualquier etapa contiene algún elemento que depende del azar se denomina proceso aleatorio o proceso estocástico. Por ejemplo, la sucesión podría consistir en los precios de las acciones que cotizan en la bolsa en donde otra vez interviene cierto grado de aleatoriedad.

El ejemplo más simple de un proceso estocástico ocurre cuando el resultado en cada etapa sólo depende del resultado de la etapa anterior y no de los resultados previos, matemáticamente esto se expresa como $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$. Tal proceso se denomina proceso de Markov o cadena de Markov discreto. Estas cadenas reciben su nombre del matemático ruso Andrei Andrey Markov (1856-1922). Su intención era crear un modelo probabilístico para analizar la frecuencia con la que aparecen las vocales en poemas y textos literarios [2] [16].

El éxito del modelo propuesto por Markov radica en que es lo suficientemente complejo como para describir ciertas características no triviales de algunos sistemas, pero al mismo

tiempo es lo suficientemente sencillo para ser analizado matemáticamente.

Las cadenas de Markov pueden aplicarse a una amplia gama de fenómenos científicos y sociales, y se cuenta con una teoría matemática extensa al respecto. Además, las cadenas de Markov se pueden utilizar para informar el diseño de estrategias de control que son adecuadas para regular el tráfico en las redes de transporte. En este capítulo se presenta una introducción a algunos aspectos básicos de este modelo.

2.2 Propiedad de Markov

Considérense procesos estocásticos a tiempo discreto, en particular cadenas de Markov discretas como una sucesión de observaciones X_1, X_2, \dots, X_N , en donde X_j representa una variable aleatoria que define el estado del proceso en el instante de tiempo j . Si la distribución de probabilidad condicional de X_{n+1} en estados pasados es una función de X_n por sí sola, entonces se cumple que:

$$(6) \quad \begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_2 = x_2, X_1 = x_1) \\ = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \end{aligned}$$

Donde x_i es el estado del proceso en el instante i , cuando un sistema estocástico satisface esta condición se dice que cumple la propiedad de Markov.

Esta identidad es la denominada propiedad de Markov: El estado en $t + 1$ sólo depende del estado en t y no de la evolución anterior del sistema [21].

2.3 Definición

A continuación definimos una cadena de Markov discreta (CMD) como un proceso estocástico a tiempo discreto, el cual está definido por un conjunto de estados X los cuales tienen una probabilidad de transición p_{ij} de pasar del estado x_i al estado x_j , que cumple la propiedad de Markov en el que si el estado actual X_n y el espacio de estados discretos previos X_1, \dots, X_{n-1} son conocidos, la probabilidad del estado futuro X_{n+1} no depende de

los estados anteriores X_1, \dots, X_{n-1} , sino solamente depende del estado actual X_n .

Es decir, para $n = 1, 2, \dots$ y para cualquier sucesión de estados x_1, \dots, x_{n+1} , tenemos que:

$$(7) \quad \begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad tomaremos como espacio de estados de una cadena de Markov al conjunto discreto $X_j = \{0, 1, 2, \dots\}$, o cualquier subconjunto finito que conste de los primeros elementos de este conjunto como se muestra en la Figura (1). Cuando el espacio de estados de una cadena de Markov es un conjunto finito se dice que la cadena es finita.

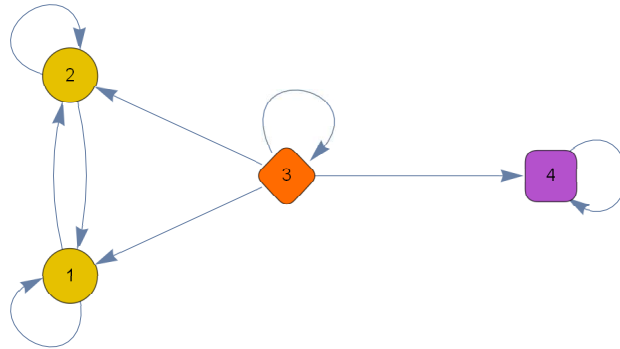


FIGURA 1. Cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4\}$.

Una cadena de Markov es llamada homogénea si la probabilidad de ir del estado i al estado j en un paso depende del paso anterior, es decir:

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

Para todo n y para cualquier i, j . Si para alguna pareja de estados y para determinado tiempo n , la probabilidad antes mencionada no se cumple se puede decir que la cadena de Markov no es homogénea [23].

Probabilidades de transición

Sean i y j dos estados de una cadena. A la probabilidad condicional:

$$(8) \quad P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

se le denota por $p_{ij}(n, n + 1)$, y representa la probabilidad de transición del estado i en el tiempo n , al estado j en el tiempo $n + 1$. Estas probabilidades se conocen como las probabilidades de transición en un paso. Cuando los números $p_{ij}(n, n + 1)$ no dependen de n se dice que la cadena es estacionaria u homogénea en el tiempo. Por simplicidad se asume tal situación de modo que en adelante las probabilidades de transición en un paso se escribirán como p_{ij} . Variando los índices i y j , sobre el conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$, se obtiene la matriz de probabilidades de transición en un paso [19].

2.4 Matriz de probabilidad de transición

Una matriz estocástica, es una matriz cuadrada cuyos elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1 .

La matriz de transición $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$ de cualquier Cadena de Markov finita con probabilidades de transición estacionarias resulta ser una matriz estocástica. La entrada (i, j) de esta matriz es la probabilidad de transición p_{ij} , es decir, la probabilidad de pasar del estado i al estado j en una unidad de tiempo. En general, al escribir estas matrices omitiremos escribir la identificación de los estados en los renglones y columnas como aparece en la matriz, tal identificación será evidente a partir de conocer el espacio de estados del proceso. El índice i se refiere al renglón de la matriz, y el índice j a la columna.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La matriz de probabilidades de transición $\mathbb{P} = p_{ij}$ cumple las siguientes dos propiedades.

1. $p_{ij} \geq 0$.
2. $\sum_j p_{ij} = 1$.

En general toda matriz cuadrada que cumpla estas dos propiedades se dice que es una matriz estocástica [4]. Debido a la propiedad de Markov, esta matriz captura la esencia del proceso y determina el comportamiento de la cadena en cualquier tiempo futuro.

Probabilidades de transición en n pasos

La probabilidad $P(X_{n+m} = j | X_m = i)$ corresponde a la probabilidad de pasar del estado i al tiempo m , al estado j al tiempo $n + m$. Dado que hemos supuesto la condición de homogeneidad en el tiempo, esta probabilidad no depende realmente de m , por lo tanto coincide con $P(X_n = j | X_0 = i)$, y se le denota por $p_{ij}(n)$. A esta probabilidad también se le denota por p_{ij}^n , en donde el número de pasos n se escribe entre paréntesis para distinguirlo de algún posible exponente, y se le llama probabilidad de transición en n pasos. Usaremos ambas notaciones a conveniencia. Haciendo variar i y j se obtiene la matriz de probabilidades de transición en n pasos que denotaremos por $P(n)$ o P^n :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & \dots \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Cuando el número de pasos n es uno, simplemente se omite su escritura en estas probabilidades de transición, a menos que se quiera hacer énfasis en ello.

Vector de probabilidades estacionaria

Una distribución de probabilidad $\pi_j = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N\}$ es estacionaria o invariante para una Cadena de Markov con matriz de probabilidades de transición $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$ si cumple que:

$$(9) \quad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} \quad \text{con} \quad \pi_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, k \quad \forall_j$$

$$(10) \quad \sum_{j=1}^k \pi_j = 1.$$

La distribución de probabilidad $\vec{\pi}$ es estacionaria si $\vec{\pi} = \vec{\pi} \mathbb{P}$, como se mencionó anteriormente. Esta identidad tiene como consecuencia de que para cualquier número natural n se cumple que $\vec{\pi} = \vec{\pi} P^n$, es decir, $\vec{\pi}$ es también una distribución estacionaria para la matriz \mathbb{P}^n . Esto tiene como consecuencia que si la variable aleatoria inicial X_0 tiene esa distribución $\vec{\pi}$, entonces la distribución de X_n también es $\vec{\pi}$, es decir, esta distribución no

cambia con el paso del tiempo y por ello es nombrada *estacionaria o invariante*. Aunque el vector de ceros cumple la condición $\vec{\pi} = \vec{\pi}P$, este no corresponde a una distribución de probabilidad.

Entonces para encontrar una posible distribución estacionaria de una cadena de Markov con matriz de transición \mathbb{P} , basta con resolver el sistema de ecuaciones $\vec{\pi} = \vec{\pi}\mathbb{P}$, sujeto a la condición anterior que $\sum_j \pi_j = 1$, y aunque existen otros métodos para encontrar la distribución estacionaria, este se ajusta a la condición antes mencionada.

Teorema de Perron-Frobenius

- * El radio espectral de \mathbb{P} es 1.
- * 1 también pertenece al espectro de \mathbb{P} , y se llama raíz de Perron.
- * La raíz de Perron tiene una multiplicidad algebraica de 1.
- * El vector propio izquierdo de Perron π es el único vector definido por $\pi^T\mathbb{P} = \pi^T$, tal que $\pi > 0$, $\|\pi\|_1 = 1$. Excepto los múltiplos positivos de π , no hay otros vectores propios izquierdos no negativos para \mathbb{P} .

2.5 Cadenas de Markov ergódicas

Sea X una Cadena de Markov finita, diremos que X es ergódica si es irreducible, recurrente (un estado es recurrente si con probabilidad uno la cadena es capaz de regresar eventualmente a ese estado, y cuando ello ocurre en algún momento finito, por la propiedad de Markov, se puede regresar a él una y otra vez con probabilidad uno) y aperiódica, es decir una cadena de Markov es llamada cadena ergódica si es posible moverse de un estado a otro cualquiera, no necesariamente en un movimiento, sino en un número finito de pasos. En otras palabras, para cualquier estado n , es posible ir de cualquier estado a cualquier otro en exactamente n pasos.

También es llamada cadena de *Markov regular*, si existe alguna potencia positiva de la matriz de transición cuyas entradas sean estrictamente mayores que cero.

Cuando el espacio de estados es finito, si \mathbb{P} denota la matriz de transición de la cadena se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}^n = W$$

Donde W es una matriz con todos sus renglones iguales a un mismo vector de probabilidad $\vec{\pi}$, que resulta ser el vector de probabilidad invariante de la cadena. En el caso de cadenas regulares, este vector invariante es único.

Las cadenas de Markov regulares son cadenas finitas que cumplen la propiedad de que a partir de un cierto momento, con probabilidad positiva se puede pasar de un estado a otro cualquiera en un paso, para este tipo de cadenas siempre existe la distribución límite.

2.6 Matriz fundamental

La matrix fundamental para cadenas ergódicas desempeña un papel muy importante, pues puede usarse para detectar una serie de cantidades interesantes que involucran cadenas ergódicas, como los tiempos promedios de primer visita [17]. Usando esta matriz, daremos un método para calcular los tiempos promedios de primeras visitas para las cadenas ergódicas, que es una de las herramientas principales que se utilizarán en este trabajo para alcanzar los objetivos planteados.

Sea \mathbb{P} la matriz de transición de una cadena ergódica, y sea W la matriz cuyas filas son el vector de probabilidad estacionario para \mathbb{P} . Entonces se puede ver que la matriz

$$(11) \quad I - P + W$$

tiene un inverso.

Llamaremos matriz fundamental a la inversa de la matriz $I - P + W$, esto para la cadena ergódica y usaremos Z para denotar esta matriz fundamental [1]. Es decir

$$(12) \quad Z = (I - P + W)^{-1}$$

si c es un vector columna con todas sus entradas iguales a uno, entonces se cumple que

$$Zc = c,$$

$$wZ = w,$$

y

$$Z(I - P) = I - W.$$

La matriz fundamental es importante en el estudio del tiempo promedio en el que una cadena de Markov visita a un estado en particular o un conjunto de estados por primera vez. A continuación definiremos este tiempo promedio y después una fórmula útil que lo relaciona con las probabilidades de transición.

2.7 Tiempo promedio de la primer visita (MFPT)

En ocasiones interesa estudiar el primer momento en el que una cadena de Markov visita un estado particular o un conjunto de estados. La matriz de tiempo promedio de primer visita, en inglés (MFPT) denotada como M_{ij} , es el número promedio de pasos para llegar al estado s_j partiendo de s_i por primera vez. Si denotamos como Z_{ij} a los elementos de la matriz fundamental y el vector de probabilidad estacionaria π_j de una cadena de Markov ergódica, entonces los tiempos promedios de primer paso se pueden calcular fácilmente de acuerdo con la siguiente expresión:

$$(13) \quad M_{ij} = \frac{Z_{jj} - Z_{ij}}{\pi_j}, \quad i \neq j$$

y apartir de esto

$$Z(I - P)M = ZC - ZD$$

$$Z(I - P)M = C - ZD$$

$$M - WM = C - ZD$$

$$M = C - ZD + WM$$

donde se pretende que la matriz de primeros tiempos de paso $M_{ii} = 0$ con $i = 1, \dots, n$ [1].

2.8 Constante de Kemeny

Recordemos que una Cadena de Markov representa un proceso estocástico mediante el cual la transición de un estado a otro depende solo del estado actual en que se encuentre el proceso, las probabilidades de una cadena de Markov se describe utilizando una matriz de transición, que es una matriz estocástica y no negativa. Las Cadenas de Markov se utilizan para modelar una gran cantidad de fenómenos y han sido ampliamente estudiados en la literatura estadística.

Sea X una matriz estocástica irreducible de orden n , y sea $\vec{\pi}$. Fije un índice i entre 1 y n , la constante de Kemeny para X está dada por:

$$(14) \quad K = \sum_{j=1}^n M_{ij} \pi_j$$

donde para cada $i, j = 1, \dots, n$, m_{ij} denota el tiempo promedio de la primer visita del estado i al estado j (aquí tomamos por convención que $m_{ii} = 0$). Resulta que, notablemente, K es independiente de la elección de i .

La constante de Kemeny proporciona una cantidad interesante para las cadenas finitas de Markov ergódicas, que es independiente del estado inicial de la cadena de Markov como se puede ver en [15].

Por lo tanto, la constante de Kemeny es una medida intrínseca de una cadena de Markov, y si la matriz de transición \mathbb{P} tiene valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, entonces otra forma de calcular la constante de Kemeny es:

$$(15) \quad K = \sum_{j=2}^n \frac{1}{1 - \lambda_j}$$

La ecuación (15) enfatiza el hecho de que K solo está relacionado con la matriz particular \mathbb{P} y que aumenta si uno o más valores propios de \mathbb{P} son reales y cercanos a 1 [12]. También se puede ver que K está relacionado con los nodos de la matriz \mathbb{P} .

Y de (15) se deduce que

$$(16) \quad |K| \leq \frac{n-1}{1-\hat{\lambda}}$$

dónde $\hat{\lambda}$ denota un valor propio de \mathbb{P} más cercano a 1 [11].

El modelo de Cadenas de Markov se basa principalmente en la matriz de transición, a partir de \mathbb{P} se capturan propiedades relevantes que son de nuestro interés y que más adelante serán de gran utilidad. Como veremos en los próximos capítulos, nuestros ejemplos parecen dar confianza a nuestra intuición, sin embargo queda mucho trabajo teórico por hacer, y claramente nuestros modelos solo tienen justificación para grandes agregados de vehículos.

Es importante tener en cuenta que las mismas ideas pueden aplicarse no solo al modelado de congestión de una red pequeña, sino también para modelar la congestión de una red más grande [18]. Esto abre la posibilidad de usar técnicas de mapeo para apoyar el despliegue de vehículos híbridos eléctricos y enchufables, y en el control de la contaminación. Dado que las cadenas de Markov son notablemente capaces de modelar redes complejas, dinámicas y de gran escala, aprovechamos su teoría y proponemos un modelo matemático basado en la asignación de tráfico de Cadena de Markov Discreta (MCD) para optimizar el tráfico y aliviar la congestión mediante estudios de su distribución. El enfoque ofrece un sistema de diseño, que puede analizar una red compleja existente y sugerir soluciones teniendo en cuenta las interdependencias de toda la red. El enfoque se aplica al entorno de una ciudad y se informan los resultados experimentales.

Tráfico Vehicular y Cadenas de Markov

3.1 Red de carreteras modelado con cadenas de Markov

Para este trabajo utilizaremos principalmente el modelo de Cadenas de Markov Discretas que se mostró en el capítulo anterior. A continuación se explicará detalladamente el modelado de una red de carreteras a través de CMD.

El estudio de fenómenos a través de modelos matemáticos puede ser abordado de diferentes formas resaltando propiedades o características del sistema de interés. En particular el estudio del flujo vehicular puede abordarse desde un enfoque macroscópico basado en procesos estocásticos como ya hemos visto.

El uso de las cadenas de Markov en el modelado de sistemas de transporte es amplio y numeroso, sin embargo, su aplicación a la evaluación y análisis de tráfico y problemas de diseño de la red vial está comenzando a llamar la atención debido a su aplicación para modelar redes complejas, dinámicas y de gran escala. Esta línea de investigación se puede remontar a estudios anteriores, por ejemplo, (Akamatsu et al., 1996; Bell et al., 2002; Kurauchi et al., 2003) [13] [22], sin embargo, fue novedosa y de aplicación limitada hasta que los investigadores comenzaron a tomar inspiraciones de Google Algoritmo de PageRank.

Crisostomi et al. (2011) propuso un nuevo paradigma para el modelado de redes viales mediante el uso de herramientas de análisis basado en Cadenas de Markov para el modelado del tráfico urbano. Utilizando la información de la red, como la topología de red, velocidades promedio de los vehículos y datos recopilados sobre la dirección tomada por los vehículos en las intersecciones de las carreteras, construyeron un modelo de tráfico macroscópico de tipo CMD que representaba patrones de movilidad vehicular a gran escala en un entorno urbano [5].

La conexión entre una red de carreteras y una cadena de Markov es directa si un mapa de la ciudad se interpreta como un grafo dirigido, donde los nodos corresponden a lugares y los enlaces a las carreteras de conexión. En la literatura relacionada con redes urbanas, esta representación a veces se denomina *red primaria* en contraste con la *representación dual* donde el papel de las carreteras y lugares se invierte como se mencionó anteriormente. El uso de la Teoría de Grafos para analizar las redes urbanas fue propuesto en el trabajo pionero de Hillier y Hanson (1984) en la década de 1980, y desarrollado más tarde en trabajos posteriores.

Es así como relacionamos la representación dual a una matriz de transición \mathbb{P} , la cual esta compuesta por entradas p_{ij} que representan las transiciones de origen - destino de la red de carreteras, y con esto analizar propiedades ocultas de estas redes, y aunque los diferentes enfoques para estudiar el tráfico vehicular explotan herramientas matemáticas bien establecidas tomadas de la teoría de grafos, nuestro punto de partida es un simple mapa urbano.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este trabajo es proponer un modelo basado en datos con una base sólida matemática de la teoría de las Cadenas de Markov Discretas, que también tenga en cuenta todos los parámetros cuantitativos anteriores, que claramente afectan los flujos de tráfico.

3.2 Red primaria

A continuación describiremos cómo pasar de una red de carreteras que se extrae de un mapa cartográfico o geográfico a una cadena de Markov, y como las cadenas de Markov se utilizan con frecuencia para describir redes, también es habitual utilizar la Teoría de Grafos para describir las mismas redes.

Dentro de la teoría de la cadena de Markov, hay una estrecha relación entre la matriz de transición \mathbb{P} y un grafo correspondiente [12]. Un grafo G está representado por un conjunto de nodos que están conectados a través de enlaces como se muestra en la Figura (2). En donde los nodos representan los lugares y los enlaces las carreteras. Esta representación es nombrada *red primaria* o mapa primario. Por lo tanto, el grafo asociado con la matriz

de probabilidades de transición \mathbb{P} es un gráfico dirigido, cuyos nodos están representados por los estados $x_i, i = 1, \dots, n$ y hay un enlace que conecta a x_i con x_j , esto sucede si p_{ij} es diferente de 0.



FIGURA 2. Grafo dirigido etiquetado con 2 nodos y 1 enlace.

Las redes de carreteras también se pueden representar como grafos dirigidos con nodos que representan caminos y aristas que representan transiciones permitidas (giros) entre rutas como se va a mostrar más adelante. Las cadenas de Markov se pueden utilizar para informar el diseño de estrategias de control que son adecuadas para regular la carga en las redes de transporte, el diseño de estrategias de equilibrio de carga que utilizan la infraestructura para dar forma a las probabilidades de transición.

3.3 Red dual

Con la terminología descrita en la red primaria, una red de carreteras puede describirse eficientemente como un grafo de red dirigida y modelarse utilizando una cadena de Markov para analizar su rendimiento y para obtener información acerca de la red en general. Para obtener información de las carreteras críticas y con mayor ocupación, un primer paso muy importante es transformar el mapa primario de la red de carreteras en un mapa dual, donde ahora los nodos del gráfico están representados por carreteras y los enlaces por lugares. Los nodos de la red dual se han llamado XY con el significado de que XY es la carretera que conecta los lugares X e Y, donde X e Y eran nodos en la red primaria.

3.4 Ejemplo de red vehicular

Utilizaremos a continuación un ejemplo para ilustrar el uso de las Cadenas de Markov Discretas para el diseño de redes de carreteras y análisis de tráfico. Consideremos la siguiente matriz de transición \mathbb{P} que corresponde a una red primaria:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0.45 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.45 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

El gráfico asociado a la matriz de transición se muestra en la Figura (2), donde los nodos se enumeran de A a G. En este caso $p_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow p_{ji} \neq 0$ y todos los links son bidireccionales como en la matriz.

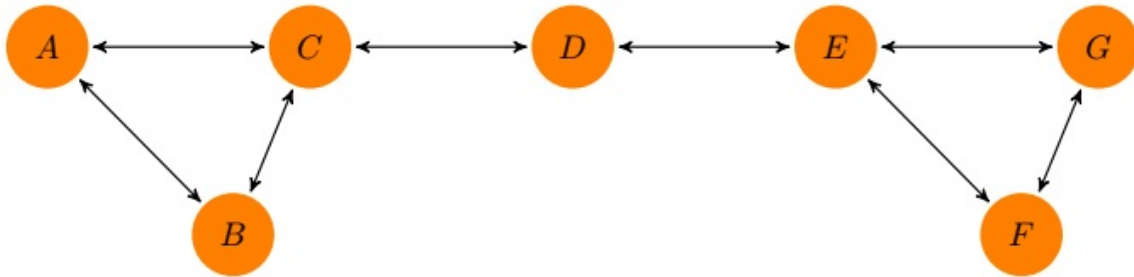


FIGURA 3. Ejemplo del gráfico asociado a una matriz de transición. Este gráfico tiene N nodos con M enlaces, cada nodo n_j representa un lugar y cada enlace m_i representa una carretera.

Un grafo está fuertemente conectado si para cada par de nodos hay una secuencia de enlaces dirigidos que van del primer nodo al segundo. La matriz \mathbb{P} es irreducible si y solo si su gráfica dirigida está fuertemente conectada. Algunas propiedades de matrices de transición irreducibles se describen brevemente, y la mayoría de ellas se derivan del conocido teorema de Perron-Frobenius [5].

En términos matriciales, un vector $\vec{\pi}$ es una distribución de probabilidad estacionaria si cumple que $\vec{\pi}\mathbb{P} = \vec{\pi}$. Se puede interpretar como la fracción de tiempo a largo plazo que los automóviles pasan a lo largo de una carretera en particular, es decir, la probabilidad de ocupación de cada una de las carreteras dentro de la red.

Realizando los cálculos para la matriz de transición anterior y de acuerdo a la ecuación (9) tenemos que la distribución estacionaria es:

$$\pi_j = \left[0.1551 \quad 0.1551 \quad 0.1724 \quad 0.03448 \quad 0.1724 \quad 0.1551 \quad 0.1551 \right]$$

Ahora es simple calcular la matriz de tiempos promedios de primer visita (MFPT) de la matriz de transición \mathbb{P} , de acuerdo con la ecuación (11) del capítulo anterior en donde $M_{ij} = \frac{Z_{jj} - Z_{ij}}{\pi_j}$ con $i \neq j$ y para esto es necesario conocer el vector de probabilidades estacionaria $\vec{\pi}$ y la matriz fundamental \mathbb{Z} que se calcula como $Z = (I - P + W)^{-1}$, donde W es la matriz que tiene por filas a $\vec{\pi}$. Realizando los cálculos correspondientes para obtener la matriz de primeras visitas de nuestro ejemplo, tenemos como resultado la siguiente matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4.2962 & 2.2222 & 6.6666 & 66.6666 & 66.5925 & 66.5925 \\ 4.2962 & 0 & 2.2222 & 6.6666 & 66.6666 & 66.5925 & 66.5925 \\ 6.5925 & 6.5925 & 0 & 6.2222 & 64.4444 & 64.5925 & 64.5925 \\ 36.5925 & 36.5925 & 33.3333 & 0 & 33.3333 & 36.5925 & 36.5925 \\ 64.5925 & 64.5925 & 64.4444 & 6.2222 & 0 & 6.5925 & 6.5925 \\ 66.5925 & 66.5925 & 66.6666 & 6.6666 & 2.2222 & 0 & 4.2962 \\ 66.5925 & 66.5925 & 66.6666 & 6.6666 & 2.2222 & 4.2962 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se observa que la matriz de tiempos promedios de primer visita MFPT tiene ceros en la diagonal, es decir $M_{ii} = 0$ con $i = 1, \dots, n$, esto sucede porque el estado s_i no se mueve a otro estado, sino vuelve a llegar al mismo por primera vez, entonces el tiempo promedio es cero porque se mantiene en el mismo lugar.

De la misma forma obtenemos la constante de Kemeny, y de acuerdo a la ecuación (12) obtenemos que:

$$K = 33.4406$$

Una interpretación de este resultado es que la constante de Kemeny calcula el tiempo promedio para pasar de un estado inicial (ruta de origen) s_i a un estado de destino s_j dentro de la red, y no depende del punto de inicio s_i [11].

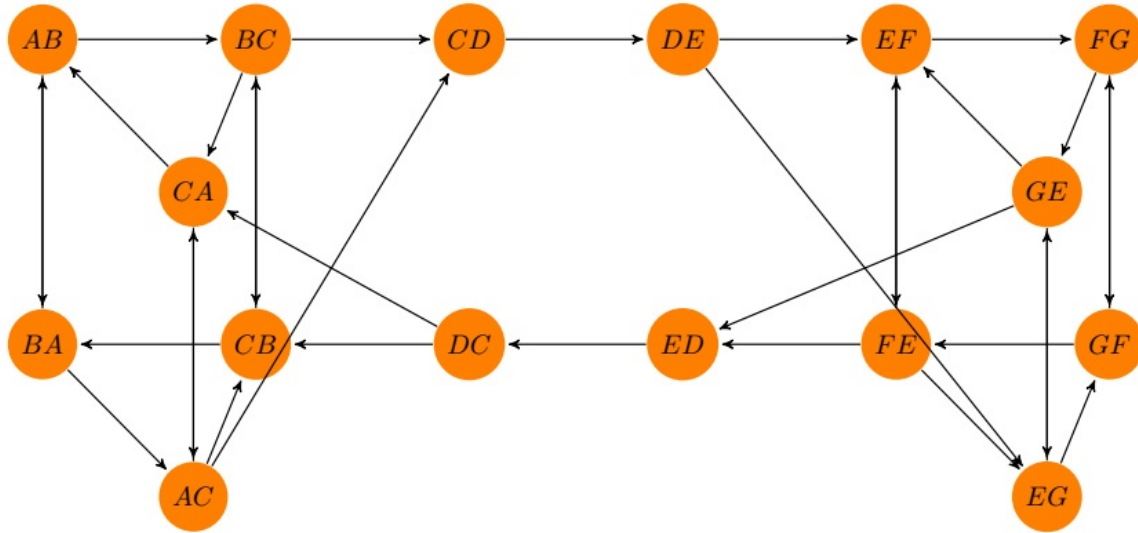


FIGURA 4. Ejemplo de red dual asociada al mapa urbano de la Figura (3), donde los nodos representan las carreteras y los enlaces corresponden a los lugares.

Esto constituye el primer paso para pasar de una red de carreteras real a una representación de una cadena de Markov, que es transformar el mapa primario en un mapa dual, donde los nodos del gráfico están representados por carreteras, como se muestra en la Figura (4). Por ejemplo, de la Figura (3) parece posible ir desde el nodo C a D y luego regresar, mientras que la red dual más detallada de la Figura (4) muestra que al final del segmento de ruta no se permite el cambio de CD, y una ruta más larga debe planificarse para ingresar a la carretera DC.

Una forma usual de crear flujos de tráfico es aprovechar las probabilidades de dar vuelta, la probabilidad de elegir una carretera en un cruce depende claramente del segmento de origen del camino. Esta información se pierde en la red primaria, para representar el flujo de tráfico, suponemos que las probabilidades de dar vuelta en cada cruce están disponibles. Desde un punto de vista práctico, esto implica que, en cada intersección hay un sensor que

cuenta el número de vehículos que giran hacia la derecha, que continúan recto o giran hacia la izquierda. Los datos recopilados se promedian para estimar las probabilidades promedio.

De la misma forma, se puede obtener el mismo resultado si cada automóvil almacena su propia ruta y luego comunica sus datos a una entidad central que recopila y analiza datos de tipo geoespacial. Al final del proceso, asumimos que las probabilidades p_{ij} de dar vuelta están disponibles para cada camino. Por ejemplo, si consideramos el segmento de camino AC de la Figura (4), suponemos que están disponibles las probabilidades de ir de AC de carretera a CA, CB y CD, tal como se resume en la Figura (5).

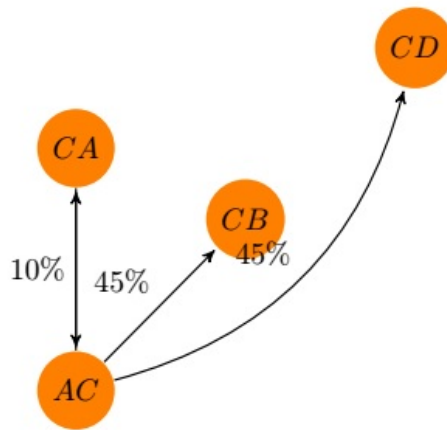


FIGURA 5. Probabilidad p_{ij} de dar vuelta del segmento de carretera AC.

Los automóviles provenientes de la carretera AC elegirán sucesivamente las carreteras CB o CD con menor probabilidad, mientras que es más improbable que cambie para tomar el camino CA.

En el marco de la cadena de Markov, las transiciones de un nodo (carretera) tienen lugar en un paso de tiempo. Independientemente de la unidad de tiempo y aún despreciando el tráfico, el tiempo para cubrir carreteras individuales no es constante y generalmente dependerá de la longitud de la carretera, los límites de velocidad, las condiciones de la superficie de la carretera, etc.

Por ejemplo en la Figura (6) suponemos que el tiempo para cubrir la carretera $A'C'$ es cuatro veces el tiempo requerido para el camino AC. Una forma simple de tener en cuenta

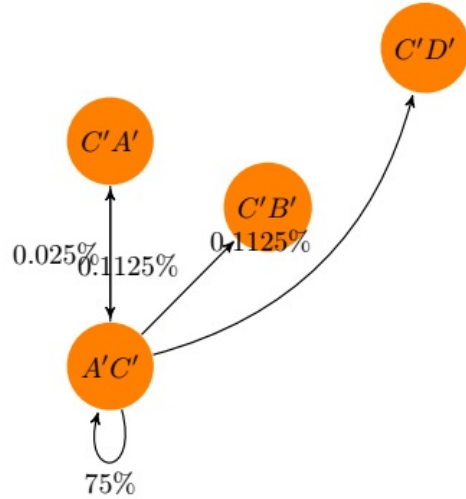


FIGURA 6. Consideremos una unión casi idéntica a la de la Figura (3) con la única diferencia de que la carretera AC se sustituye por la carretera A'C' que tiene el doble de la longitud de CA y tiene la mitad del límite de velocidad.

el tiempo de viaje adicional es incluir un auto-enlace en la carretera A'C' y ajustar las otras probabilidades en consecuencia, de modo que todavía sumen 1, en la Figura (6), donde se considera una unión similar a la de la Figura (5), con la diferencia de que para poder recorrer el camino A'C' se necesita cuatro veces el tiempo requerido para cubrir el camino AC (porque la longitud se duplica y el límite de velocidad se reduce).

En principio, no es fácil calcular el tiempo promedio requerido para cubrir una carretera, ya que se relaciona a través de funciones desconocidas de cantidades físicas como las condiciones de las superficies de la carretera y otras variables relevantes (por ejemplo, la presencia de pasos de peatones, paradas de autobuses y así sucesivamente).

Consideramos una red vial simple como un ejemplo ilustrativo para apoyar y aclarar el enfoque teórico. Se trata de una red de carreteras que consta de 16 carreteras que se muestra en la Figura (4), que en este caso es la representación dual de la Figura (3). Se permite que todas las carreteras compartan la misma velocidad promedio de 60 km/hr , y el ancho de 2 carriles a excepción de las carreteras 7, 8, 9 y 10 (CD, DC, DE y ED) que son caminos de carril único. Además, se permite que todas las carreteras tengan la misma longitud de 1 Km , excepto las carreteras 7 y 8, que tienen una longitud de 1.5 Km .

Suponemos que la siguiente matriz de transición \mathbb{P} es resultado de convertir el mapa primario de la Figura (3) a un mapa dual como se muestra en la Figura (4), donde los nodos representan las carreteras y los enlaces los lugares. Esta nueva matriz tiene entradas que son cero, esto significa que no es posible ir del estado i al estado j , por lo tanto tiene probabilidad cero.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los nodos denotan las 16 carreteras representadas en la Figura (4) tomados en orden numérico. Las entradas de la matriz de transición revelan que los cambios de dirección son poco probables y que la mayoría de los automóviles tienden a viajar dentro de los dos conjuntos de uniones 1-2-3-4-5-6 y 11-12-13-14-15-16 y rara vez pasan de un conjunto a otro; en este primer ejemplo también notamos que los tiempos de viaje se consideran constantes ya que los elementos diagonales son todos cero, esto porque el tiempo de viaje es dentro de la misma carretera y no hay desplazamiento hacia otra.

La Figura (7) muestra la distribución estacionaria $\vec{\pi}$ correspondiente a la matriz de probabilidades de transición de 16 estados. Realizamos los cálculos correspondientes para hallar el vector de probabilidades estacionarias π_j de la matriz anterior y obtenemos que:

$$\pi_j = [0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078 \ 0.078]$$

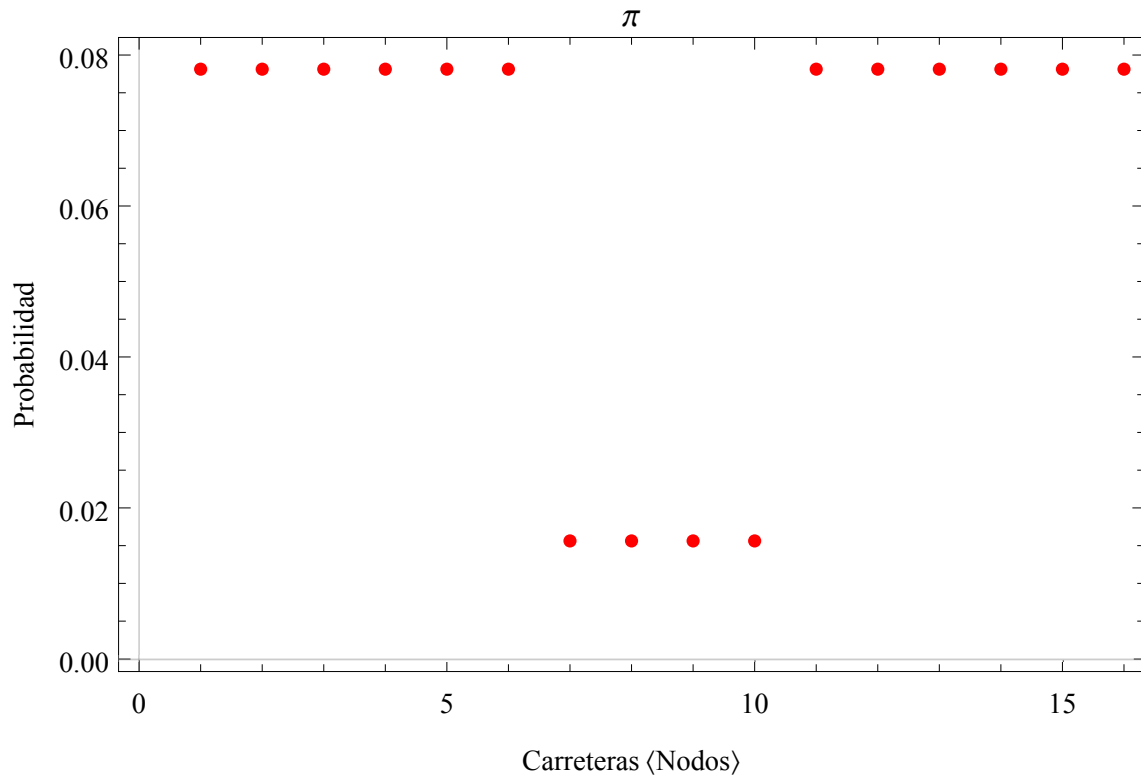


FIGURA 7. Distribución estacionaria de los automóviles estimada por Cadenas de Markov calculada mediante la ecuación $\pi = \pi P$.

El segundo eigenvector propio de la matriz de la red dual contiene información muy interesante, pues separa claramente las primeras seis carreteras pertenecientes al primer grupo 1-2-3-4-5-6, las últimas seis carreteras del grupo 11-12-13-14-15-16 y las cuatro carreteras que conectan los dos grupos (7-8 9-10).

En el ejemplo dado, los automóviles tienden a viajar dentro de los conjuntos A-B-C y E-F-G de la Figura (3). Por lo tanto, es interesante evaluar los signos de las entradas en el vector propio asociado al segundo autovalor más grande, siempre que sea real. Como era de esperar, el segundo valor propio está cerca de 1 (0,9216), las entradas del vector propio asociado se muestran en la Figura (8), y claramente separa en conjuntos los caminos de la

red. No es sencillo extraer la misma información del simulador, sin embargo, esta información es muy valiosa porque se puede utilizar para encontrar comunidades ocultas dentro de una red urbana más complicada que la de la Figura (4), donde las subcomunidades se pueden identificar a partir de la inspección visual.

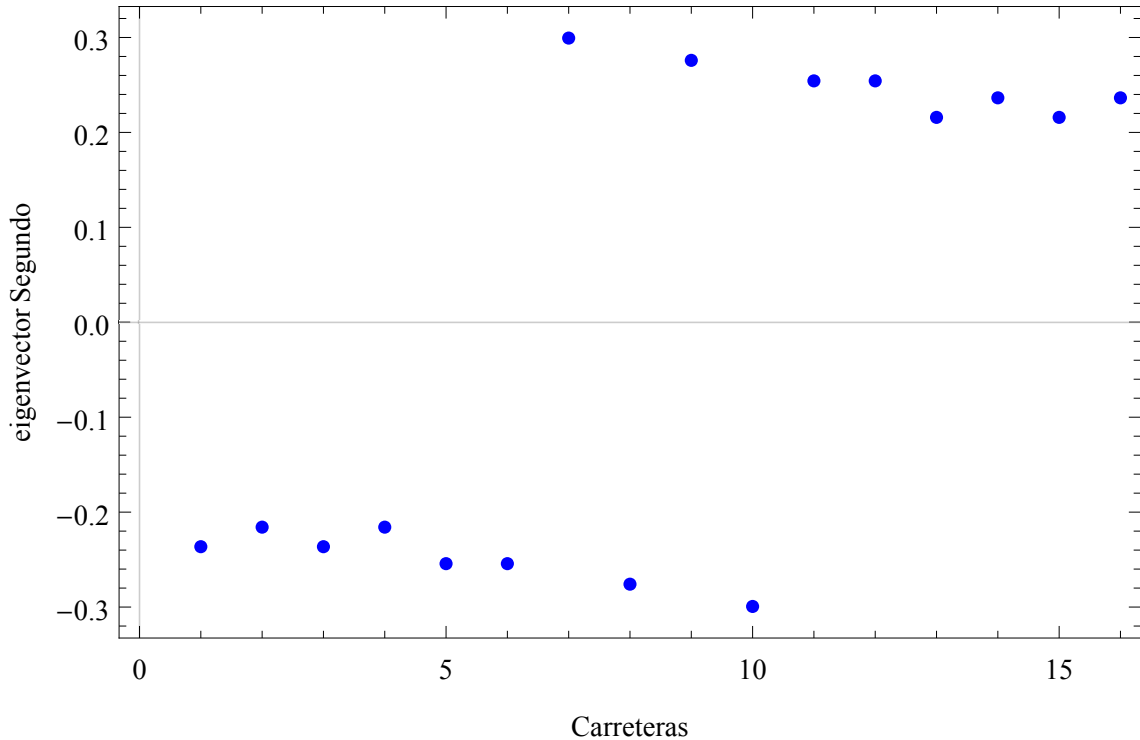


FIGURA 8. Segundo eigenvector propio.

La matriz de tiempos promedios de primer visita son los números esperados de pasos para alcanzar algún destino elegido al azar por primera vez y se calculan a partir de la matriz de transición \mathbb{P} , la matriz fundamental y el vector de probabilidades estacionaria $\vec{\pi}$, de acuerdo con la ecuación (11) donde $M_{ij} = \frac{Z_{jj} - Z_{ij}}{\pi_j}$ con $i \neq j$; sustituimos nuestros resultados anteriores a la ecuación y tenemos como resultado la siguiente matriz MFPT.

La matriz de tiempos promedios de primer visita (MFPT) tiene la característica de tener ceros en la diagonal, esto significa que el tiempo promedio para ir del estado s_i al estado s_i por primera vez es cero porque se encuentra en el mismo lugar, en la Figura (9) se muestra el gráfico correspondiente en 3D de MFPT.

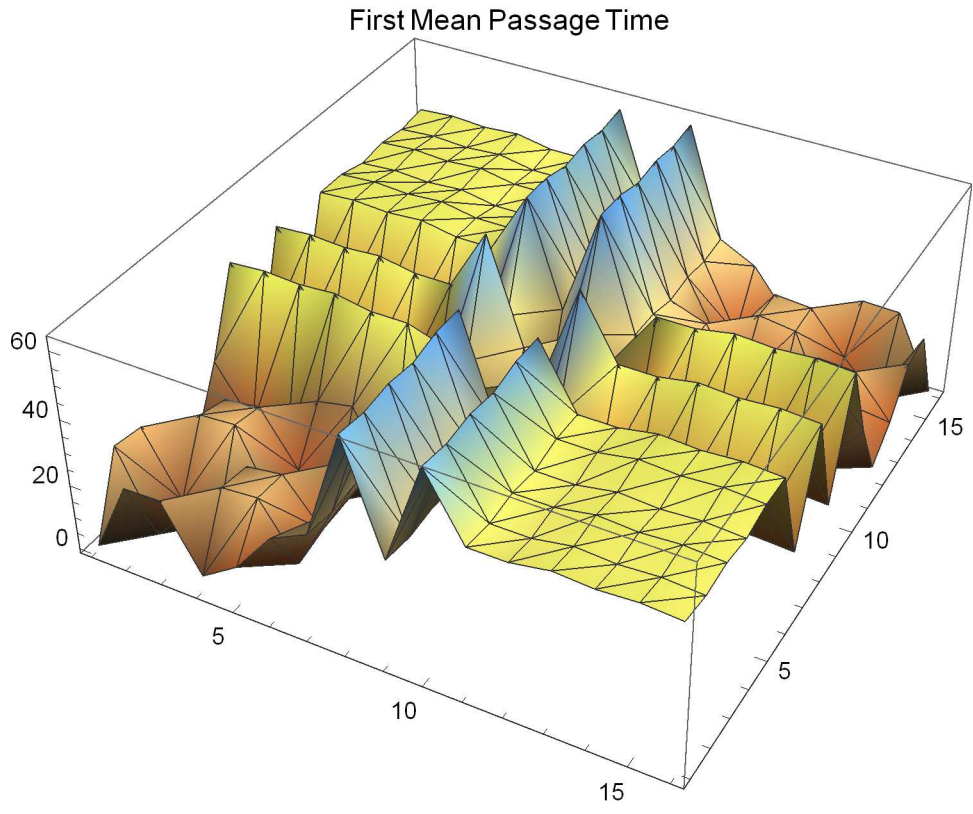
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 22.09 & 22.45 & 3.20 & 10.44 & 23.66 & 29 & 62 & 30 & 61 & 42.65 & 42.65 & 44.65 & 43.93 & 44.65 & 43.93 \\ 23.83 & 0 & 10.61 & 23.08 & 24.01 & 7.86 & 28 & 61 & 29 & 60 & 41.54 & 41.54 & 43.54 & 42.82 & 43.54 & 42.82 \\ 22.45 & 3.20 & 0 & 22.09 & 23.66 & 10.44 & 29 & 62 & 30 & 61 & 42.65 & 42.65 & 44.65 & 43.93 & 44.65 & 43.93 \\ 10.61 & 23.08 & 23.83 & 0 & 7.86 & 24.01 & 28 & 61 & 29 & 60 & 41.54 & 41.54 & 43.54 & 42.82 & 43.54 & 42.82 \\ 3.38 & 20.88 & 22.26 & 6.19 & 0 & 23.08 & 30 & 63 & 31 & 62 & 43.54 & 43.54 & 45.54 & 44.82 & 45.54 & 44.82 \\ 22.26 & 6.19 & 3.38 & 20.88 & 23.08 & 0 & 30 & 63 & 31 & 62 & 43.54 & 43.54 & 45.54 & 44.82 & 45.54 & 44.82 \\ 46.82 & 47.54 & 46.82 & 47.54 & 45.54 & 45.54 & 0 & 33 & 1 & 32 & 13.54 & 13.54 & 15.54 & 14.82 & 15.54 & 14.82 \\ 13.82 & 14.54 & 13.82 & 14.54 & 12.54 & 12.54 & 31 & 0 & 32 & 63 & 44.54 & 44.54 & 46.54 & 45.82 & 46.54 & 45.82 \\ 45.82 & 46.54 & 45.82 & 46.54 & 44.54 & 44.54 & 63 & 32 & 0 & 31 & 12.54 & 12.54 & 14.54 & 13.82 & 14.54 & 13.82 \\ 14.82 & 15.54 & 14.82 & 15.54 & 13.54 & 13.54 & 32 & 1 & 33 & 0 & 45.54 & 45.54 & 47.54 & 46.82 & 47.54 & 46.82 \\ 44.82 & 45.54 & 44.82 & 45.54 & 43.54 & 43.54 & 62 & 31 & 63 & 30 & 0 & 23.08 & 20.88 & 3.38 & 6.19 & 22.26 \\ 44.82 & 45.54 & 44.82 & 45.54 & 43.54 & 43.54 & 62 & 31 & 63 & 30 & 23.08 & 0 & 6.19 & 22.26 & 20.88 & 3.38 \\ 42.82 & 43.54 & 42.82 & 43.54 & 41.54 & 41.54 & 60 & 29 & 61 & 28 & 24.01 & 7.86 & 0 & 23.83 & 23.08 & 10.61 \\ 43.93 & 44.65 & 43.93 & 44.65 & 42.65 & 42.65 & 61 & 30 & 62 & 29 & 10.44 & 23.66 & 22.09 & 0 & 3.20 & 22.45 \\ 42.82 & 43.54 & 42.82 & 43.54 & 41.54 & 41.54 & 60 & 29 & 61 & 28 & 7.86 & 24.01 & 23.08 & 10.61 & 0 & 23.83 \\ 43.93 & 44.65 & 43.93 & 44.65 & 42.65 & 42.65 & 61 & 30 & 62 & 29 & 23.66 & 10.44 & 3.20 & 22.45 & 22.09 & 0 \end{pmatrix}$$


FIGURA 9. Matriz de tiempos promedios de primer visita extraídos a través de calculos a partir de la matriz de la cadena de Markov \mathbb{P} . Los ejes x-y contienen las carreteras de origen y destino, mientras que el eje z contiene el tiempo promedio de recorrido de la primer visita.

Ahora calculamos la constante de Kemeny correspondiente a este caso:

$$K = 29.7526$$

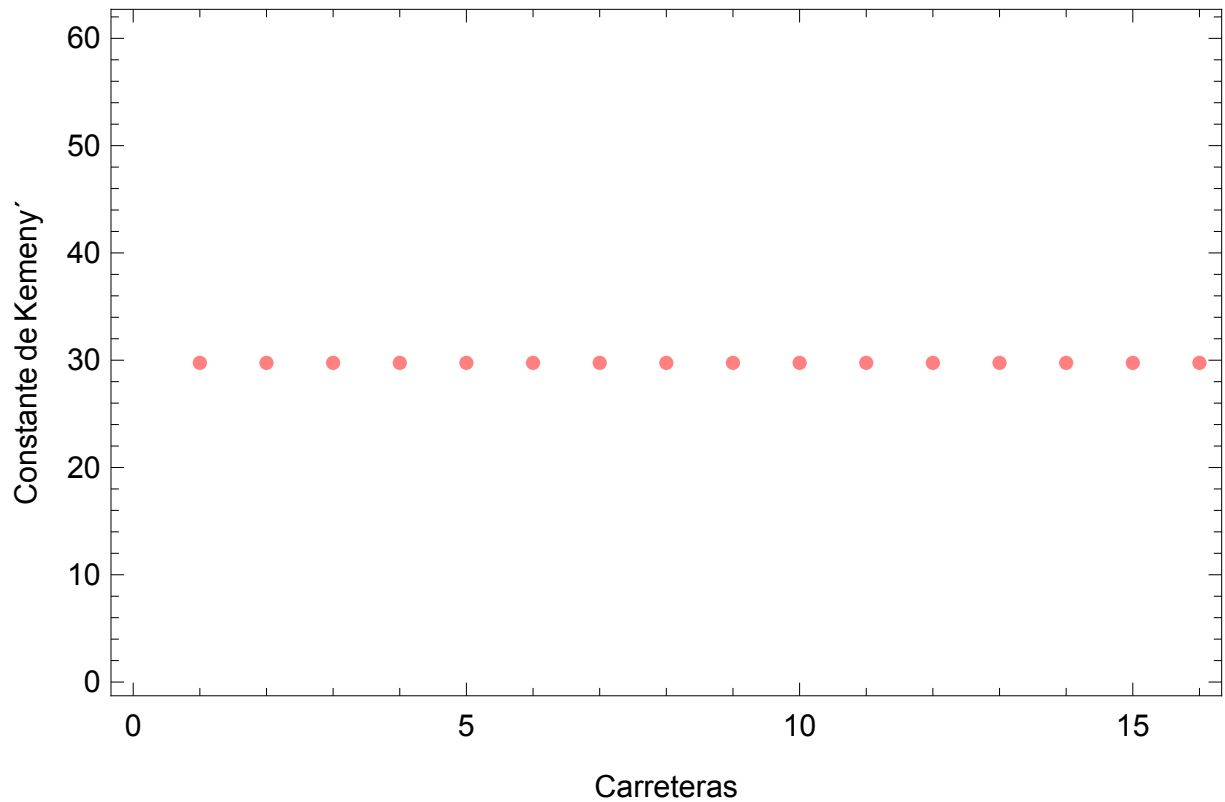


FIGURA 10. Constante de Kemeny de la red dual calculada mediante la fórmula $K = \sum_{j=1}^n M_{ij}\pi_j$.

La constante de Kemeny calcula el tiempo promedio global requerido para pasar de una ruta de origen a un destino aleatorio dentro de la red, en este caso se observa que el tiempo promedio para pasar de una carretera a otra es el mismo tiempo para todas como se muestra en la Figura (10). Sorprendentemente, esta cantidad no depende de la ruta de partida, y es un parámetro global de la red de carreteras [5]. Las constantes de Kemeny son bastantes cercanas a ser independientes de la carretera de partida, representada en el eje horizontal.

Por otra parte es importante analizar la densidad vehicular, que se presenta como un indicador de rendimiento de la red. Su uso soluciona los problemas anteriores al medir la congestión directamente y proporcionar un medio para incorporar la capacidad vial en el modelo indirectamente a través de valores de densidad de referencia [20]. Además,

la densidad de vehículos de carretera permite una evaluación granular de las condiciones del tránsito a nivel de carretera individual y muestra el comportamiento apropiado de empeoramiento de la congestión con reducción del tamaño de la red, al contrario del comportamiento del tiempo de viaje esperado, es decir, el comportamiento de la constante de Kemeny. La densidad de vehículos de carretera (vehículos / km / carril) puede calcularse utilizando la ecuación (17), donde V es la velocidad promedio en la que los vehículos circulan en la red de carreteras, L_i es la longitud de cada una de las carreteras en Km y N_i es el número de carriles que tiene cada carretera. Sin embargo, la constante de Kemeny puede ser útil como un indicador de rendimiento secundario que mide el nivel de servicio de la red para sus usuarios, es decir, puede diferenciar entre dos redes de carreteras que funcionan igualmente de acuerdo con sus valores de densidad máxima del vehículo.

$$(17) \quad D_i = \frac{V\pi_i}{L_i N_i}$$

En este caso la densidad vehicular se calcula a partir de datos como la velocidad promedio, la longitud de cada una de las carreteras y el número de carriles de cada una de ellas .

Como mencionamos anteriormente el ejemplo que estudiamos es de una red que consta de 16 carreteras, se permite que todas las carreteras compartan la misma velocidad promedio de 60 km/hr , y el ancho de 2 carriles a excepción de las carreteras 7, 8, 9 y 10 que son caminos de carril único. Además que todas las carreteras tengan la misma longitud de 1 Km , excepto las carreteras 7 y 8, que tienen una longitud de 1.5 Km , a continuación sustituimos los datos a la ecuación (15) y observamos en la Figura (11) que la densidad vehicular varía dependiendo de cada carretera.

Recordemos que en este capítulo trabajamos la transformación de la red original a su representación dual, para facilitar la construcción de la matriz de transición \mathbb{P} y continuar con los siguientes pasos para analizar el rendimiento de la red de carreteras, y para esto se pone como ejemplo una red que consta de 16 carreteras en donde se muestra la distribución estacionaria de los automóviles, la matriz de tiempos promedios de primer visita, la constante de Kemeny que calcula el tiempo promedio para pasar de una carretera a otra dentro de la red y finalmente se analiza la densidad vehicular que pretende analizar

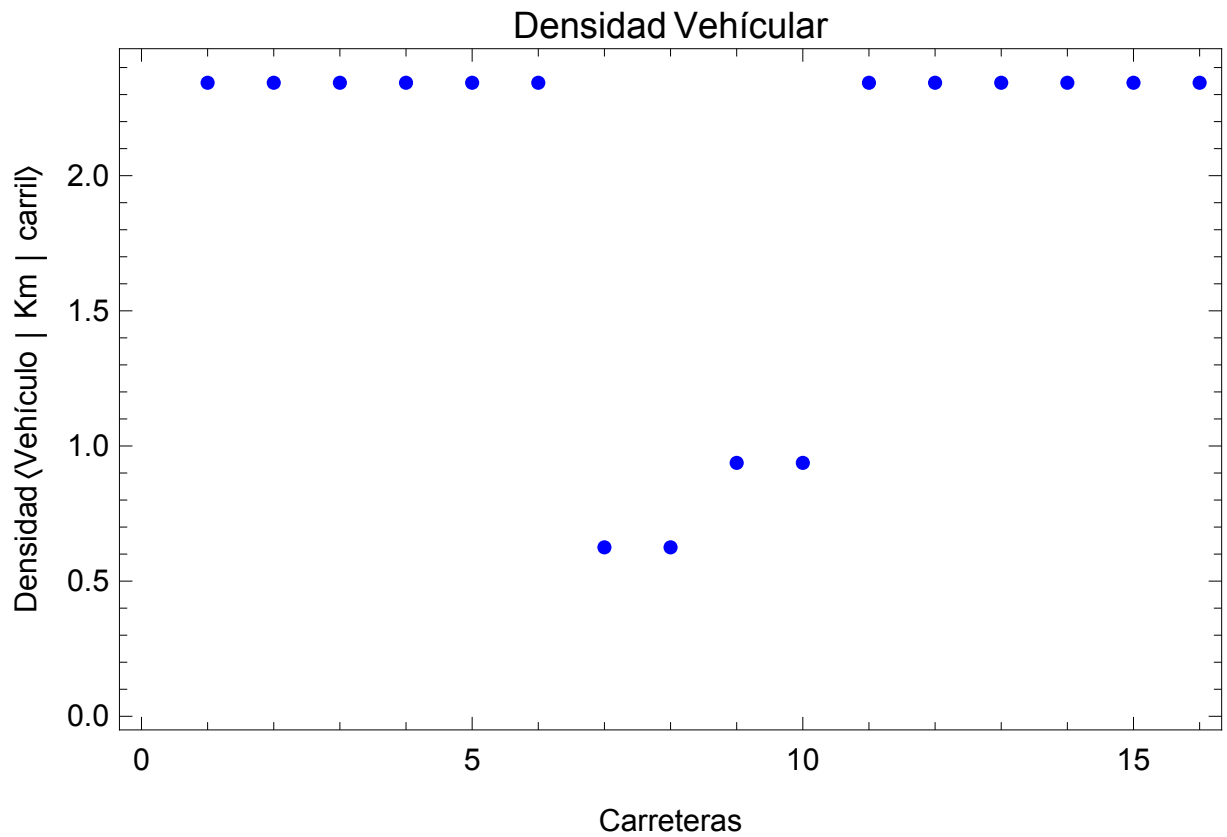


FIGURA 11. Densidad vehicular

el rendimiento de la red.

Es importante tener en cuenta que la principal contribución de este capítulo es el análisis de redes de carreteras mediante CMD, en el siguiente capítulo se estudiará la red de carreteras de la CDMX apartir de información obtenida del INEGI.

Aplicaciones a redes de transporte y resultados para la CDMX

4.1 Estudio de la red de carreteras de la CDMX

La red de carreteras de una ciudad entera puede describirse eficientemente como un grafo dirigido, que en este caso es la representación dual y modelarse así utilizando una CMD para analizar su rendimiento y eficiencia. En particular nos interesa determinar cuál es la conectividad promedio de la red e identificar qué avenidas son cruciales y para esto necesitamos analizar la red vial de la CDMX; en la Figura (12) se muestra la red vial dual de la Ciudad de México, como un ejemplo real para analizar el tráfico vehicular. La red de avenidas consta de los 32 principales ejes viales de la Ciudad de México, como se muestra en la Figura (12) en donde se pretende analizar algunas propiedades ocultas de esta red [28].

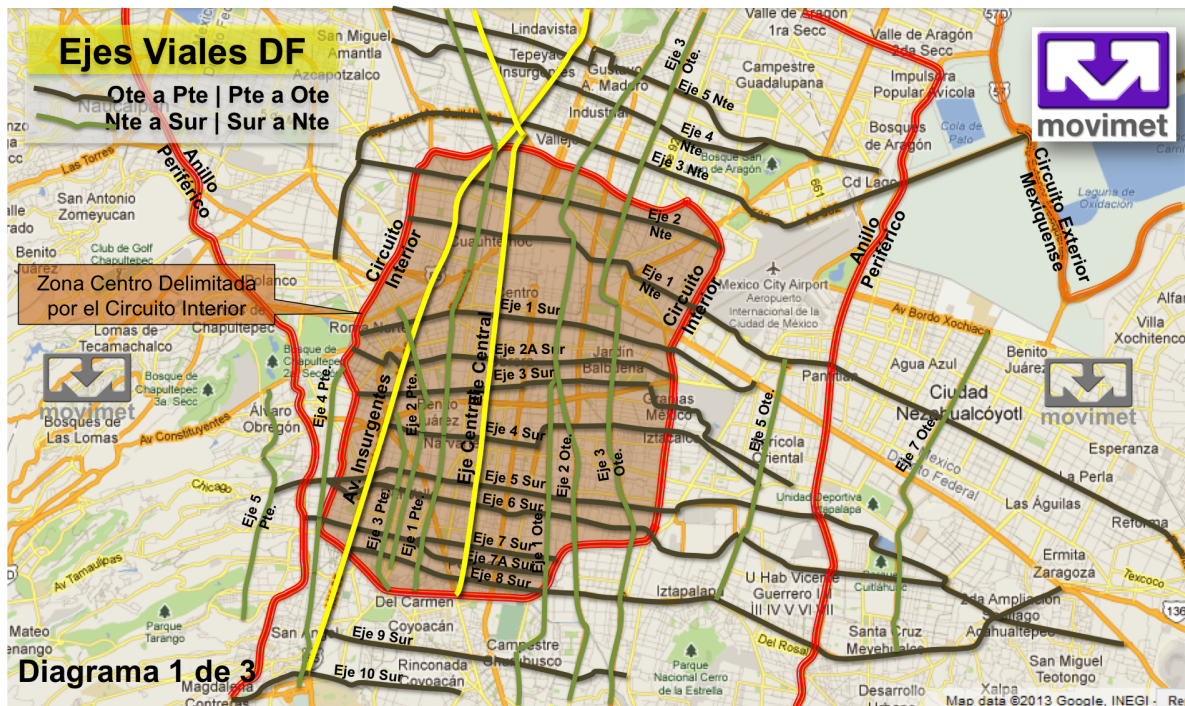


FIGURA 12. Mapa vial de la Ciudad de México en donde se muestra los 32 principales ejes viales de la ciudad. Fuente: INEGI. Encuesta Origen - Destino en Hogares de la Zona Metropolitana del Valle de México (EOD) 2017

4.2 Construcción de la matriz de probabilidades de transición de la CDMX

Recordemos que para estudiar una red de carreteras que se extrae de un mapa geográfico a una cadena de Markov un primer paso es construir el mapa dual a partir del mapa original o primario, en nuestro caso el mapa de la CDMX que estudiaremos ya está en su representación dual, en donde los nodos representan las avenidas y los enlaces los lugares, entonces podemos continuar con el siguiente paso que es construir la matriz de probabilidades de transición.

Los ejemplos mostrados hasta ahora representan redes urbanas de pequeña escala con solo unas pocas avenidas. En este trabajo, se aplica la teoría de la cadena de Markov a la red urbanística más realista con 32 avenidas descritas en la Figura (12). La información del número de vehículos en cada uno de los principales ejes viales de la CDMX es muy difícil de conseguir, sin embargo es posible obtener datos estadísticos; consideramos al Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) como fuente de información, que es un organismo público con autonomía técnica y de gestión, para obtener información necesaria de la cantidad de viajes que se realizan en cada uno de los ejes viales. Obviamente, esta no es la forma en que se comportan las redes de carreteras, ya que de manera predecible realizan la transición a través de diferentes condiciones de tráfico a lo largo del día, entre semana y los fines de semana. En este trabajo consideramos las condiciones de tráfico para un día entre semana cualquiera en un horario de 9 a 11 de la mañana y compararlo con otros horarios como se verá más adelante.

En la Figura (13) se muestra una captura de pantalla de la página del INEGI que muestra datos reales acerca de la cantidad de viajes para cada uno de los ejes viales de la CDMX para un día y horario cualquiera, esta información es esencial para poder construir la matriz de probabiidades de transición [26].

Para construir la matriz de probabilidades de transición \mathbb{P} es necesario conocer el total de viajes que salen de cada una de las avenidas, la cantidad de viajes que parten de cierta avenida y se dirigen a otras, para calcular la probabilidad p_{ij} de la matriz \mathbb{P} , por ejemplo suponemos que tenemos 3 avenidas, A, B y C, entonces la probabilidad de ir de la avenida A a la avenida B, es la siguiente:

$$p_{A \rightarrow B} = \frac{V_{A \rightarrow B}}{V_{A \rightarrow A} + V_{A \rightarrow B} + V_{A \rightarrow C}}$$

en general

$$p_{i \rightarrow j} = \frac{V_{i \rightarrow j}}{\sum_{j=1}^n V_{i \rightarrow j}}$$

De esta forma hallamos la probabilidad p_{ij} para construir la matriz \mathbb{P} de tamaño 32×32 y continuar con el siguiente paso.

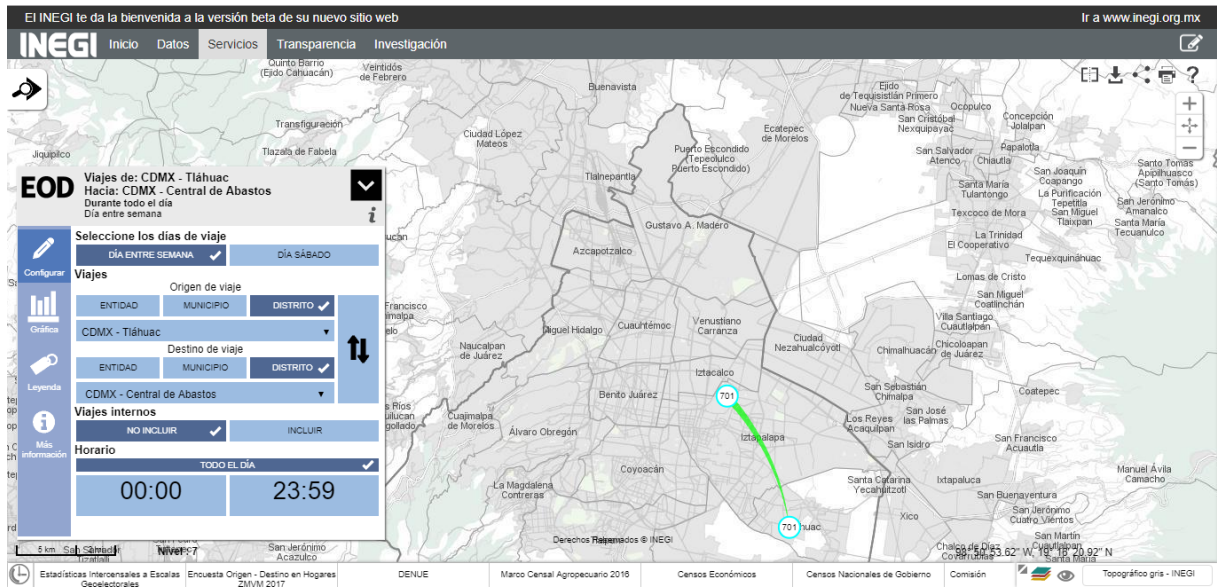


FIGURA 13. Información Origen - Destino de la Ciudad de México. Fuente: INEGI. Mapa digital de México V6.3

4.3 Probabilidad de ocupación de avenidas

Como se mencionó anteriormente, para el estudio de la red vial de la ciudad de México se consideran 32 ejes viales principales, se propone el enfoque con cadenas de Markov para inferir propiedades no evidentes de la red, y para esto empleamos datos reales recopilados dentro de un periodo determinado de la red de carreteras, registrando las transiciones de los vehículos entre cada una de las diferentes carreteras, haciendo que estos datos sean precisos y oportunos para construir la matriz Origen - Destino, en este caso la matriz de probabilidades de transición, y de la misma forma estudiar las condiciones del tráfico durante las horas pico, no pico u otras condiciones de tráfico predefinidas, así como la probabilidad de ocupación de las mismas al cerrar alguno de los ejes viales.

Dada la matriz de probabilidades de transición P_{ij} de tamaño 32 x 32 calculada en el capítulo anterior para la red de carreteras de la CDMX, nos interesa calcular el vector de probabilidades estacionaria, es de importancia estudiar y analizar las condiciones del tráfico en ciertas horas pico, es decir, qué ocurre con la red, cómo varían las ocupaciones de las carreteras como se muestra en la Figura (14).

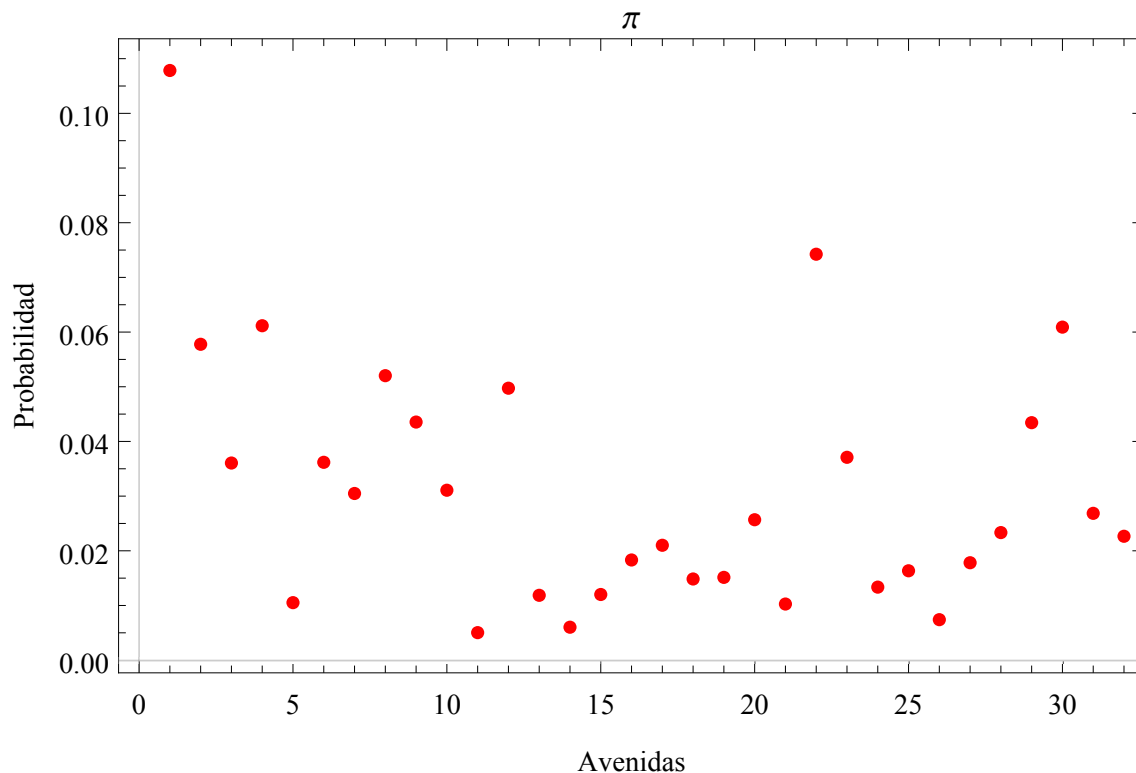


FIGURA 14. Probabilidad de ocupación de cada carretera estimada por Wolfram Mathematica calculada mediante la ecuación $\pi = \pi P$

En este caso, se observa la distribución de probabilidad estacionaria para cada una de las carreteras de la red, en este caso se ilustran los resultados de las carreteras con mayor probabilidad de ocupación para un día entre semana, en un horario de 9 a 11 horas de la mañana, que son las correspondientes a las carreteras 1, 22, 4, 30 y 3 (eje central, eje 2 sur, eje 3 oriente, eje 8 sur y eje 2 oriente), que tienen probabilidad de 0.05 a 0.1 a estar ocupadas.

Por otra parte, es de interés analizar los tiempos promedios de los primeros pasos para cada una de las carreteras, pues muestra el tiempo promedio que se tarda en llegar dada una carretera de origen a un destino cualquiera, en este caso son calculados a partir de la matriz de probabilidad de transición de la cadena de Markov, la matriz fundamental y el

vector de probabilidad estacionaria como se mostró anteriormente. Los ejes x-y contienen las carreteras de origen y destino, mientras que el eje z contiene el tiempo promedio de primer visita como se muestra en la Figura (15). Los tiempos de viaje son más largos debido a la congestión del tráfico.

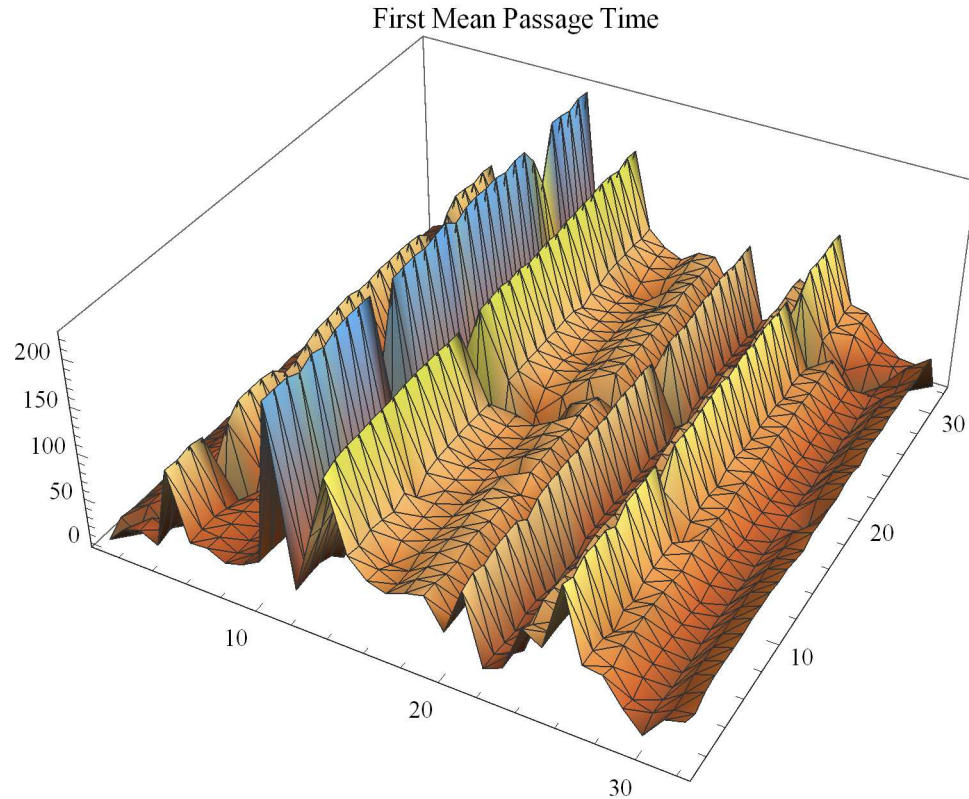


FIGURA 15. Representación de la matriz de tiempo promedio de primer visita

Dentro de la teoría de la cadena de Markov, la constante de Kemeny representa el tiempo promedio de viaje requerido para alcanzar una carretera de origen, a un destino aleatorio dentro de la red de carreteras, es decir el tiempo de viaje promedio entre dos puntos cualquiera de la red, considerando todos los caminos posibles que los conectan, no depende del inicio o puntos finales, sino que depende de las características de flujo de la red. En la literatura se ha utilizado como una medida de la eficacia de la red, pues redes caracterizadas por pequeñas constantes de Kemeny deberían ser más eficientes en términos de flujo de tráfico, esto se explica más a detalle en la siguiente parte. En la Figura (16) se muestran las constantes de Kemeny para cada una de las carreteras, es un indicador de desempeño vial individual ya que todas las carreteras comparten el mismo valor y en promedio es la misma para la red en general.

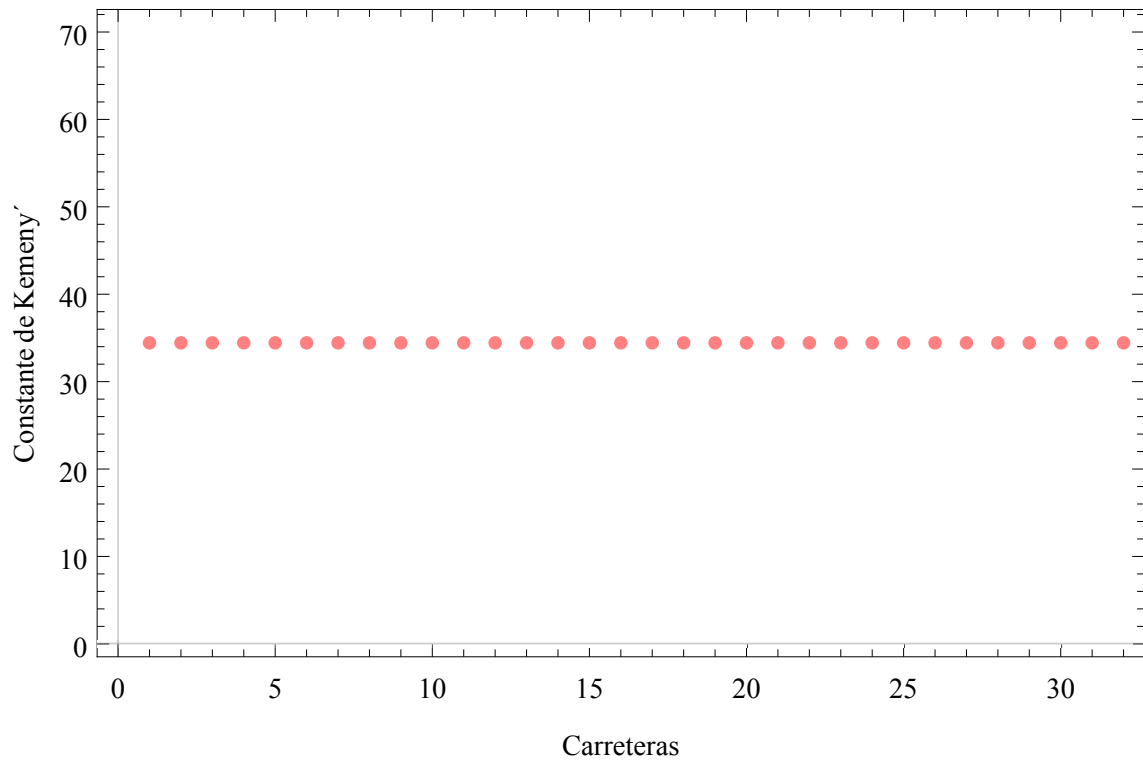


FIGURA 16. Constante de Kemeny

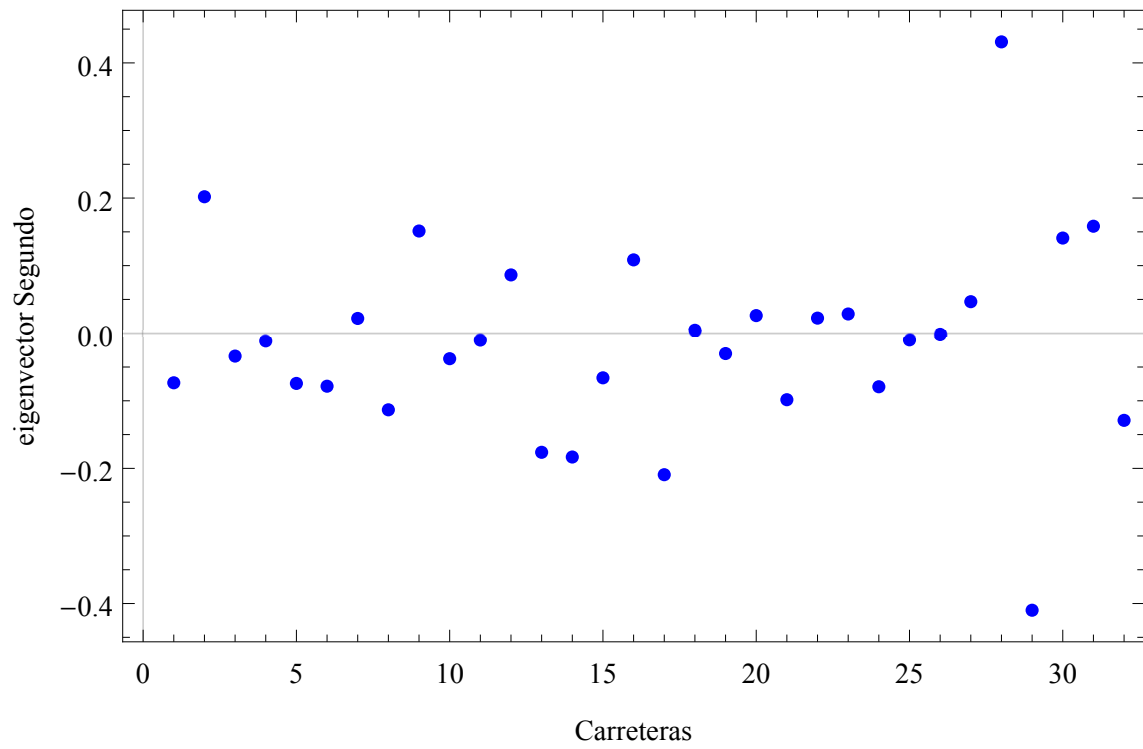


FIGURA 17. Segundo eigenvector para la matriz de transición

Imagine un conductor al azar que sigue los links de acuerdo con las probabilidades de transición. En algún momento, nuestro conductor está perdido y no sabe el estado(carretera)en que se encuentra y hacia dónde se dirige. En este contexto, la constante de Kemeny puede interpretarse como el número promedio de links que sigue el conductor al azar antes de llegar a su destino.

Recordemos que el segundo eigenvector propio de la matriz de la red dual contiene información muy interesante, pues separa claramente las carreteras, en este caso, los automóviles tienden a viajar dentro de los conjuntos 1-5, 6-10, 11-15, 16-20, 21-25, 26-32 como se observa en la Figura (17). Por lo tanto, es interesante evaluar los signos de las entradas en el vector propio asociado al segundo autovalor más grande, siempre que sea real.

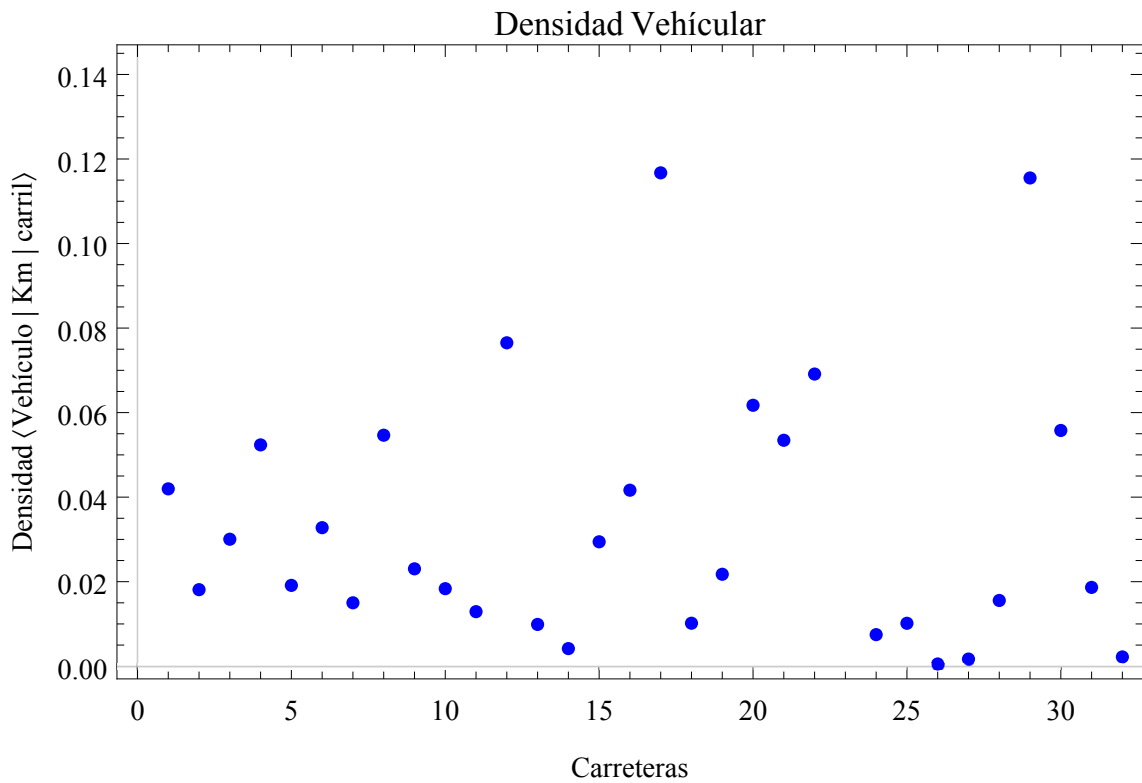


FIGURA 18. Densidad vehicular

De la misma forma es importante analizar la densidad vehicular para esta red de carreteras, como se mencionó anteriormente, representa un indicador de rendimiento de la red. Su uso soluciona los problemas anteriores al medir la congestión directamente y proporcionar un medio para incorporar la capacidad vial en el modelo indirectamente a través de valores

de densidad de referencia, las carreteras con mayor densidad son las correspondientes a la número 17, 29, 12, 8 y 30 (eje 4A norte, eje 7A sur, eje 1 norte, eje 2 poniente y eje 8 sur) como se muestra en la Figura (18).

La densidad de vehículos de carretera permite una evaluación particular de las condiciones del tránsito a nivel de carretera individual y muestra el comportamiento apropiado de empeoramiento de la congestión con reducción del tamaño de la red, al contrario del comportamiento del tiempo de viaje esperado, es decir, el comportamiento de la constante de Kemeny.

4.4 Identificación de carreteras importantes

Una pregunta interesante en el diseño de redes de carreteras es, qué le sucede a la red con respecto a las ocupaciones de las carreteras y el tiempo promedio dentro de ella, si una de las carreteras se cierra o bloquea debido a un accidente, obras viales, eventos especiales, desastre natural, manifestación, etc. que es lo que comúnmente ocurre; esta información es importante, es más fácil de extraer del modelo de cadenas de Markov, pero es difícil de obtener, y para discutir cómo se puede lograr esto, recordamos al lector un concepto básico de la teoría de las cadenas de Markov que es precisamente el vector de probabilidad estacionaria, la cual trata de interpretar la probabilidad de ocupación de cada una de las carreteras.

Esta información se captura convenientemente de la distribución de probabilidad. Para identificar carreteras con la mayor ocupación, y cuáles son las más afectadas dado el cierre de alguna de ellas hacemos lo siguiente:

(a) Para cada red de carreteras, eliminamos la carretera a cerrarse (es decir, sustituir por ceros la columna i de la matriz de transición, lo cual indica que la carretera i no está disponible para poder circular y así para cada una de las diferentes matrices correspondientes a las redes).

(b) luego calculamos el vector de probabilidad estacionaria para cada una de las redes. Un aumento significativo en las probabilidades según lo capturado, implica que al cerrar

dicha carretera, aumenta o disminuye la ocupación de las demás.

En nuestro caso es calcular el vector de probabilidad de la red con todas las carreteras disponibles, más aparte calcular el vector de probabilidad de las demás 32 redes con la característica de que cada una de ellas tendrá cerrada una carretera en específico, esto para poder comparar los cambios en la ocupación de las carreteras a medida que se cierra una de ellas, y como se mencionó anteriormente en algunos casos aumenta o disminuye la ocupación. Para ilustrar esta idea, veamos la Figura (19).

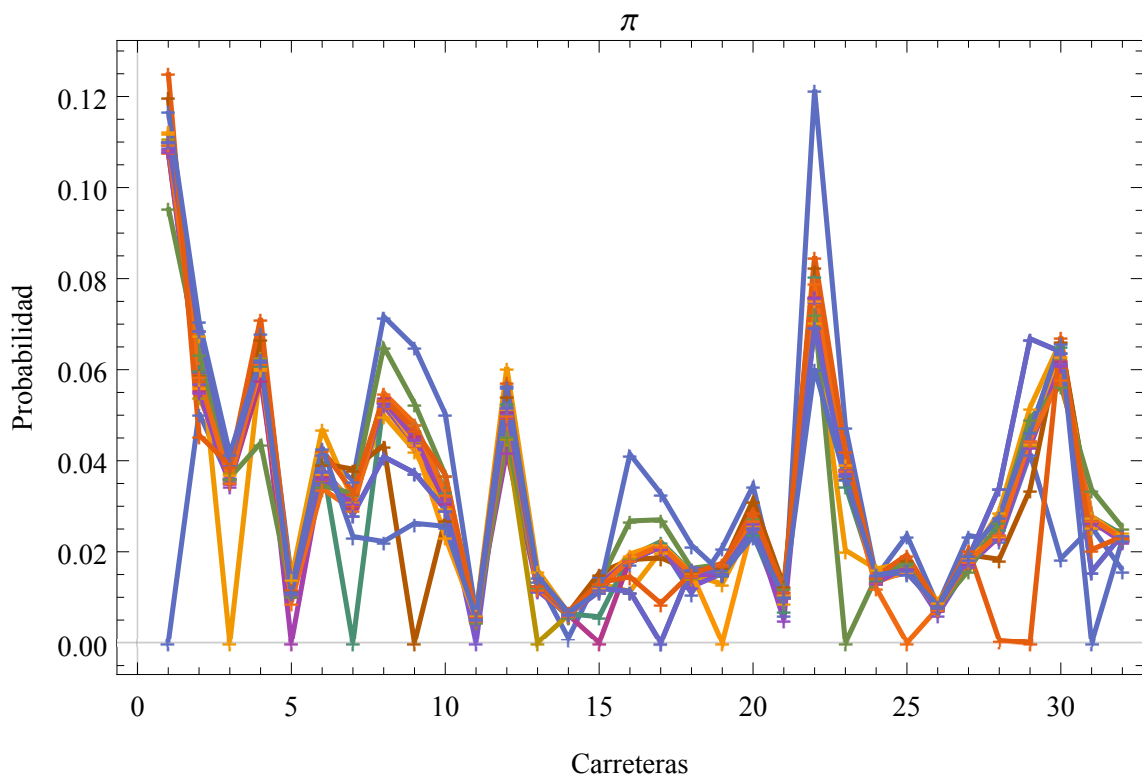


FIGURA 19. Distribución de probabilidad estacionaria para cada una de las diferentes redes, considerando en cada uno el cierre de una carretera en específico

Donde se observa la línea de color amarillo que pertenece al cierre de la carretera correspondiente a la número 1, vemos que como consecuencia son afectadas otras carreteras en cuanto al aumento de su ocupación, esto a comparación de la red original que es la de color azul.

De la misma forma es de interés analizar qué ocurre con el tiempo promedio dentro de la red si alguna de las carreteras permanece cerrada y para tener idea de cómo se puede lograr esto, recordamos al lector un concepto de la teoría de grafos, lo cual es la criticidad de nodos. La criticidad de una carretera se puede definir de acuerdo con diferentes puntos de vista, pero en específico consideramos que una carretera es crítica si los tiempos de viaje promedio en toda la red aumentan cuando se cierra alguna de las carreteras. Esta información se captura directamente de la constante de Kemeny.

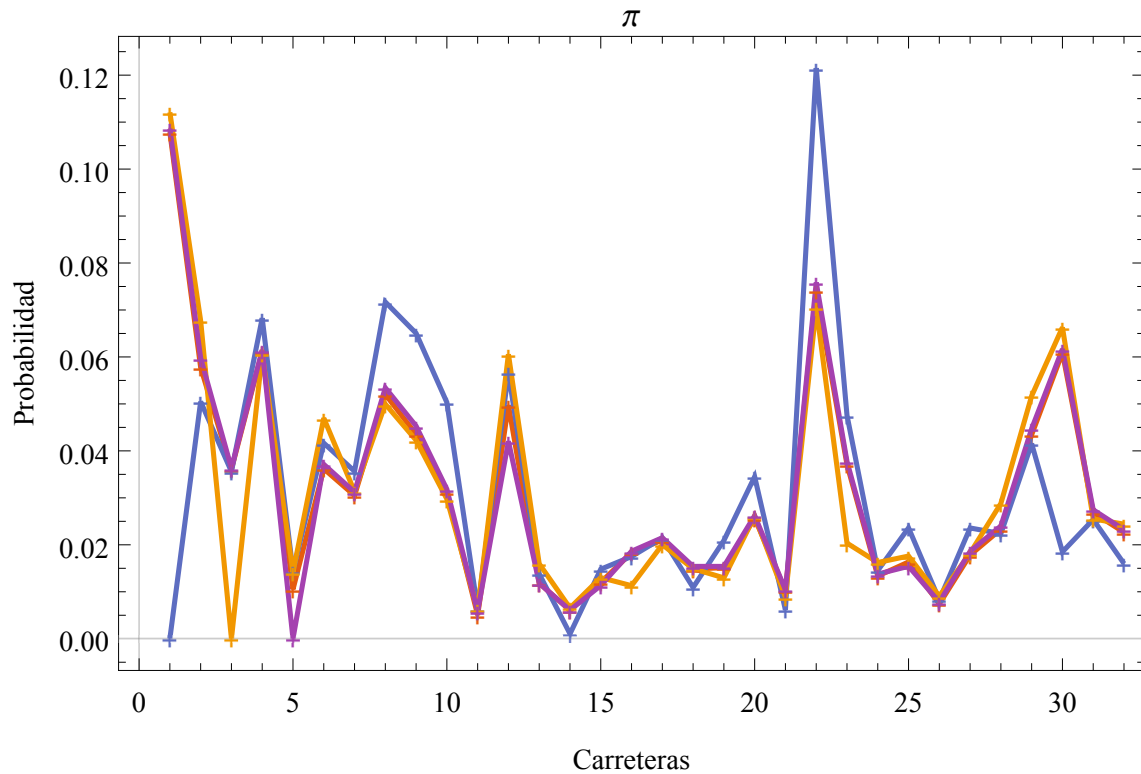


FIGURA 20. Distribución de probabilidad estacionaria para tres redes diferentes, considerando en cada uno el cierre de una carretera en específico

Para identificar las carreteras críticas se siguen los incisos a y b que anteriormente se describieron, se aplica para cada carretera en la red, cerramos la carretera, luego calculamos la constante de Kemeny de la red restante y así para cada una de ellas. Un aumento significativo en los tiempos de viaje con respecto a la red original, según lo capturado por la constante de Kemeny, implica que este camino es crítico, como se muestra en la Figura (21), los valores de la constante de kemeny a medida que se cierra una carretera.

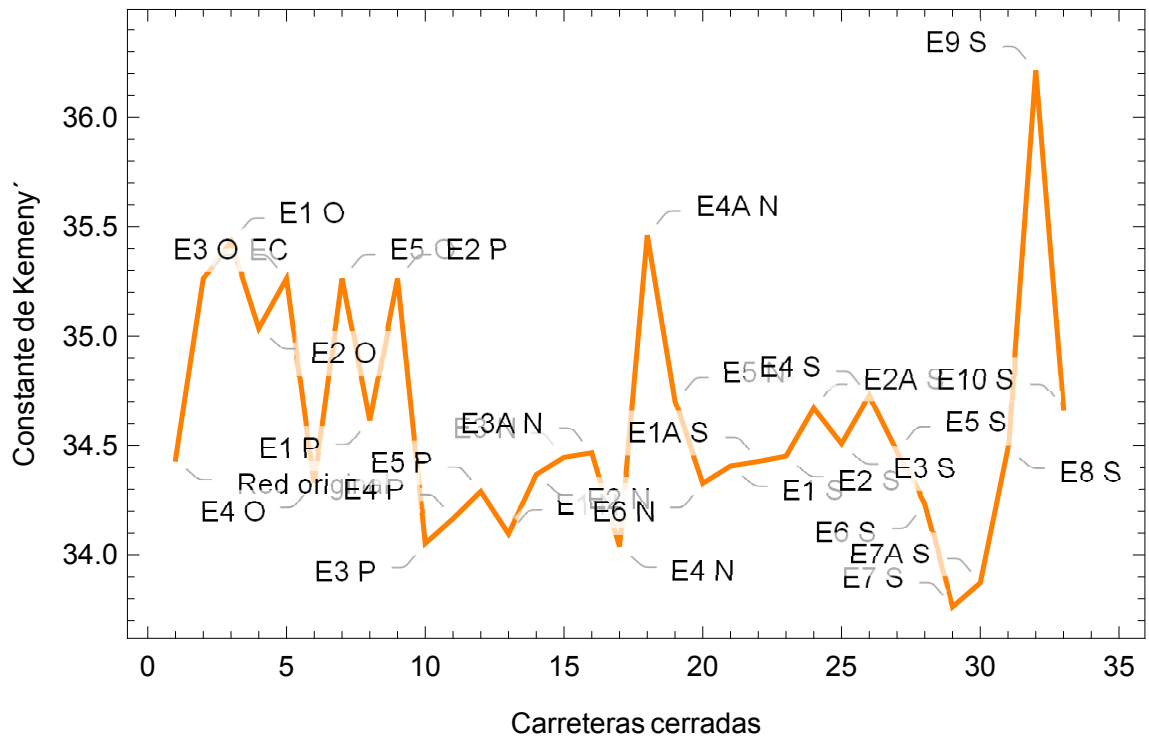


FIGURA 21. Constantes de Kemeny

La constante de Kemeny se calcula para toda la red en el caso de que cada carretera permanezca cerrada (de modo que se obtengan 33 constantes de Kemeny), en este ejemplo los valores más grandes de las constantes de Kemeny se obtienen si se cierran las carreteras eje 9 sur, eje 4A norte, eje 1 oriente, eje central y eje 3 oriente; estas carreteras pueden considerarse las más críticas de la red, y las menos críticas son el eje 7 sur, eje 3 poniente y eje 1 norte como se muestra en la Figura (21), en donde a medida que se cierra alguna carretera, las demás son afectadas o beneficiadas.

Nuestro enfoque específico es novedoso para esta aplicación, los modelos de movilidad estocástica se han utilizado para la simulación de redes viales en el pasado gracias a su simplicidad inherente.

Para el estudio de la red vehicular en un horario de 2 a 4 horas de la tarde, se realizan los mismos cálculos, y también interesa calcular el vector de probabilidades estacionaria, para analizar las condiciones del tráfico en este lapso de tiempo, variaciones de las ocupaciones de las carreteras como se muestra en la Figura (22).

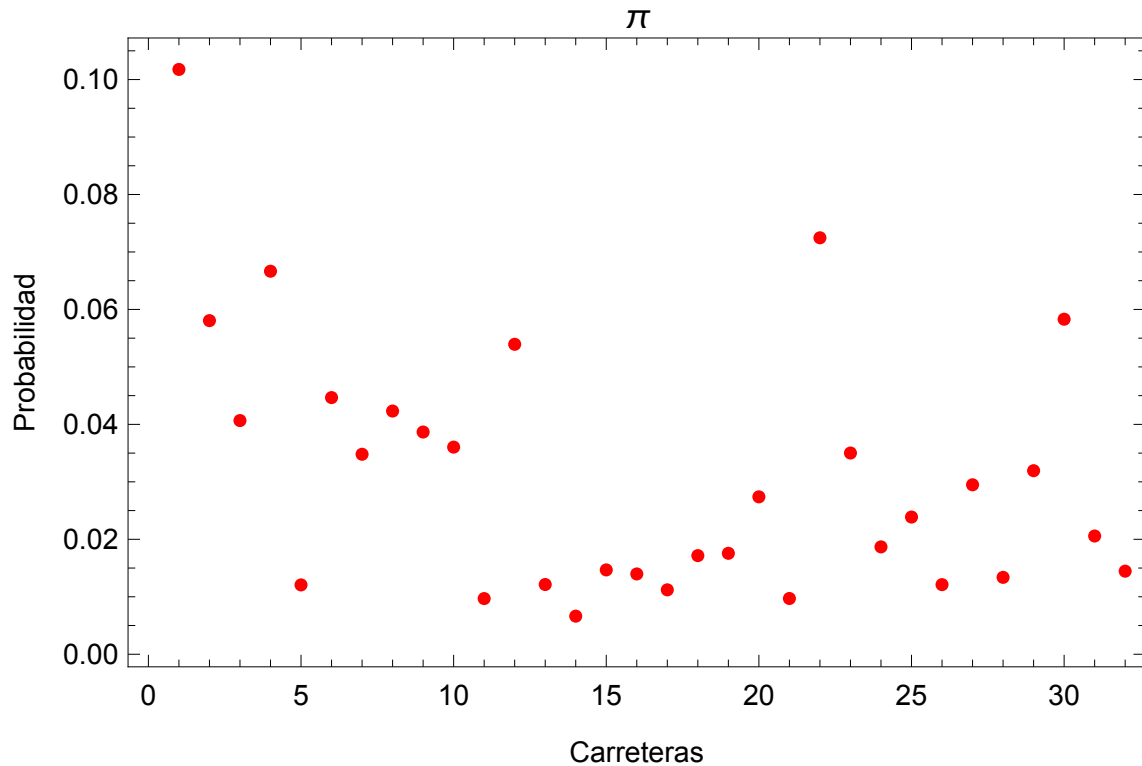


FIGURA 22. Probabilidad de ocupación de cada carretera en un horario de 2 a 4 horas de la tarde

Se muestran los resultados de las carreteras con mayor probabilidad de ocupación para un día entre semana, en un horario de 2 a 4 horas de la tarde, que son las correspondientes a las carreteras 1, 22, 30, 4 y 2 (Eje central, eje 2 sur, eje 8 sur, eje 3 oriente y eje 1 oriente), que tienen probabilidad de 0.05 a 0.1 a estar ocupadas. Aunque no contiene información sobre la carga de tráfico (es decir, el número de automóviles), contiene información valiosa, ya que es posible evaluar si el tráfico está equilibrado, qué carreteras están particularmente ocupadas y finalmente cruciales.

En la Figura (23) se muestra el tiempo promedio de primer visita de las diferentes carreteras en el horario de 2 a 4 horas de la tarde, donde se observa que para cada una de ellas esta cantidad es distinta. Explotando las características y facilidades de los vehículos modernos y la información que podemos obtener de ellos, también podemos darnos cuenta del tiempo promedio recorrido. Debemos tener en cuenta que el enrutamiento basado en Mean-First-Passage-Time considera la posibilidad de que el controlador tome una ruta diferente de la programada, por ejemplo, debido a un error, y por cuánto tiempo se desperdicia debido a esta elección incorrecta.

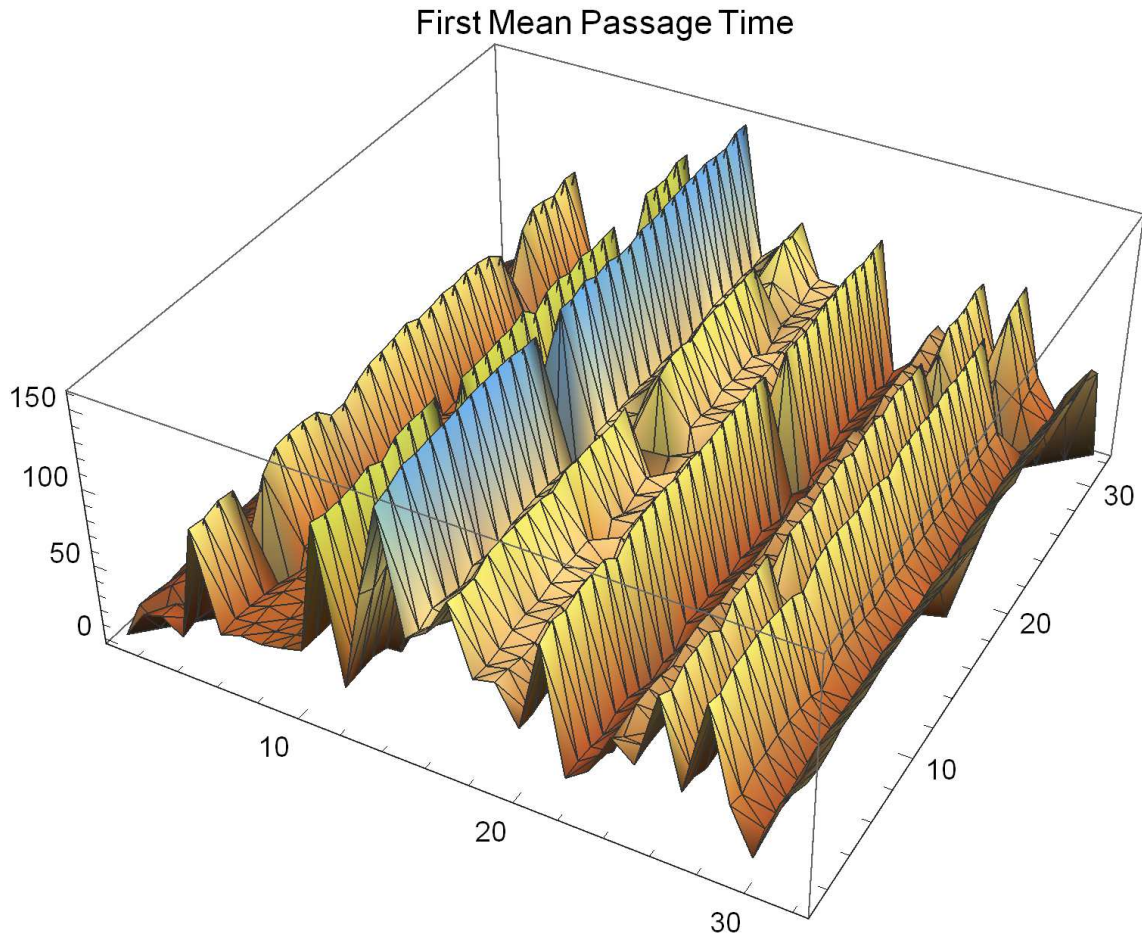


FIGURA 23. MFPT para la red en un horario de 2 a 4 horas de la tarde

En la Figura (24) se muestra que el seguimiento de los valores constantes de Kemeny muestran las mejores soluciones de densidad de vehículos en cada generación, pues revela una tendencia a que la constante de Kemeny aumente a medida que se reduce al mínimo la densidad del vehículo, en este caso es constante. Esto puede parecer contra intuitivo al principio, pero es lógico si consideramos los siguientes argumentos. En primer lugar, a medida que la congestión del tráfico se minimiza a través de reversiones del flujo de la carretera, se eliminan las opciones de giro del vehículo en las intersecciones, lo que a su vez podría eliminar opciones más cortas de la red, aumentando el tiempo de viaje de la ruta. En segundo lugar, la constante de Kemeny es un término estocástico, que a diferencia de los enfoques deterministas incorpora todos los caminos posibles entre dos puntos cualquiera de la red. Como tal, la eliminación de opciones de ruta más cortas aumentará el tiempo medio de primer paso para toda la red.

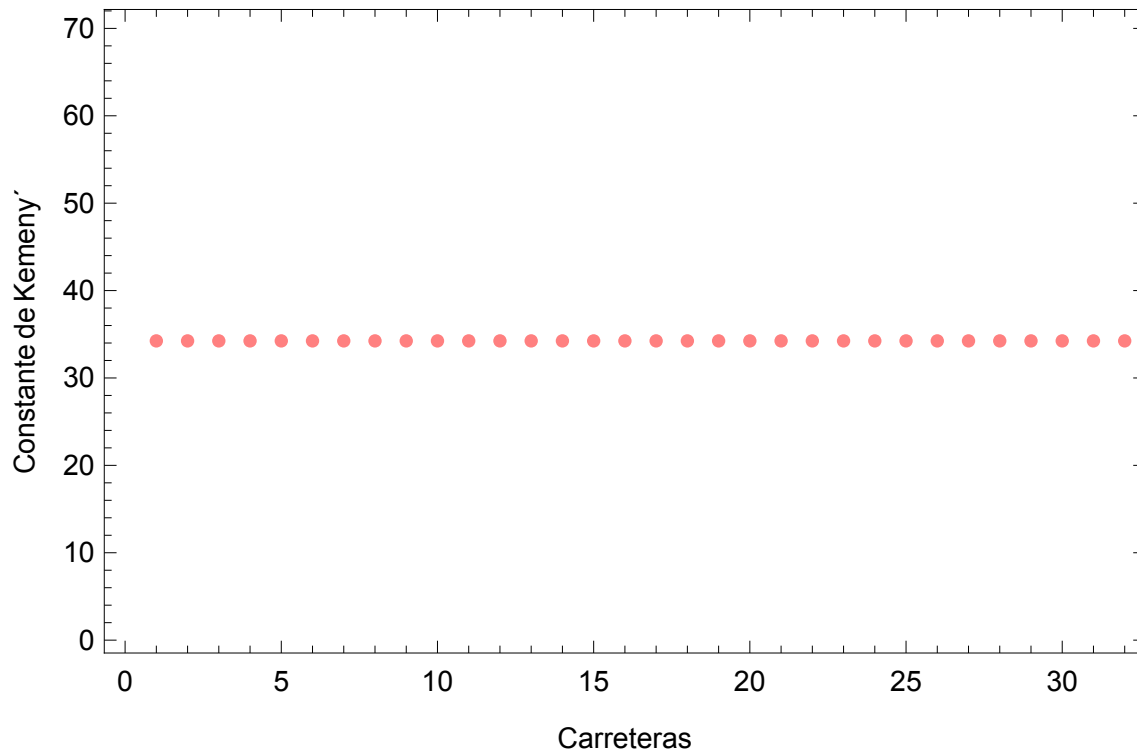


FIGURA 24. Constantes de Kemeny para cada carretera en un horario de 2 a 4 horas de la tarde

Por lo tanto, aunque algunos usuarios de la carretera pueden experimentar distancias adicionales en sus rutas, los usuarios de la red experimentarán colectivamente menos congestión a medida que utilizan la red de carreteras optimizada. Se debe tener en cuenta que la constante de Kemeny se mide en pasos, es decir, el número medio de pasos en la cadena de Markov para pasar de una carretera arbitraria a cualquier otra carretera, y se puede convertir en medida de tiempo utilizando el menor tiempo de viaje.

Para el estudio de la red vehicular en un horario de 8 a 10 horas de la noche, se realizan los mismos cálculos, interesa calcular el vector de probabilidades estacionaria, para analizar las condiciones del tráfico en este lapso de tiempo, variaciones de las ocupaciones de las carreteras como se muestra en la Figura (25).

Se muestran los resultados de las carreteras con mayor probabilidad de ocupación para un día entre semana, en un horario de 8 a 10 horas de la noche, que son las correspondientes a las carreteras 1, 22, 30, 4 y 8 (eje central, eje 2 sur, eje 8 sur, eje 3 oriente y eje 2 poniente), que tienen probabilidad de 0.05 a 0.1 a estar ocupadas. Aunque no contiene información sobre la carga de tráfico (es decir, el número de automóviles), contiene información valiosa,

ya que es posible evaluar si el tráfico está equilibrado y qué carreteras están particularmente ocupadas y, finalmente, cruciales.

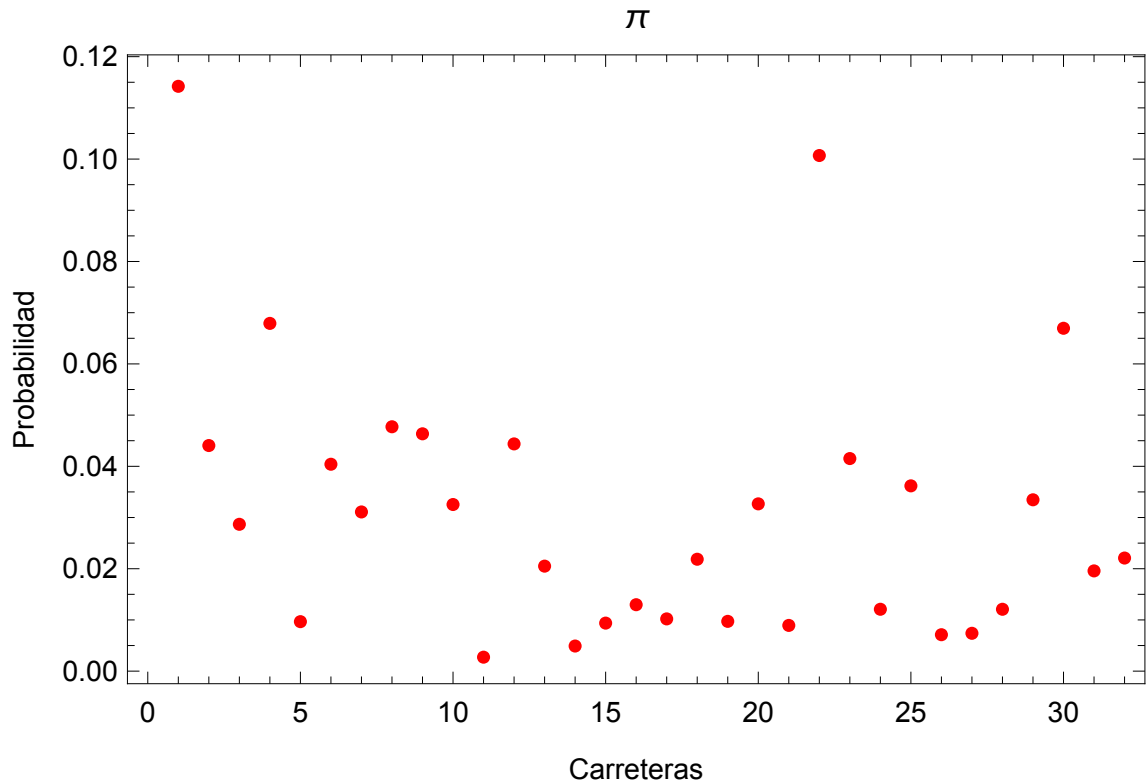


FIGURA 25. Probabilidad de ocupación de cada carretera en un horario de 8 a 10 horas de la noche

En la Figura (26) se muestra el tiempo promedio de primer visita de las diferentes carreteras en el horario de 8 a 10 horas de la noche, donde se observa que para cada una de ellas esta cantidad es distinta. Actualmente, en la práctica, dado un par de carreteras de origen - destino, se calcula la ruta óptima, generalmente en términos de tiempo mínimo o distancia mínima según la información del mapa o información de congestión. La matriz de transición de la cadena de Markov se construye a partir de datos de tráfico real, incluidos los tiempos medios de viaje esperados de cada carretera individual, y contiene otra información, como los puntos de congestión esperados en la forma del vector Perron, que se pueden usar para calcular rutas óptimas.

La constante de Kemeny se calcula para el horario de 8 a 10 horas de la noche, la cual es la misma para cada una de las carreteras como se muestra en la Figura (27).

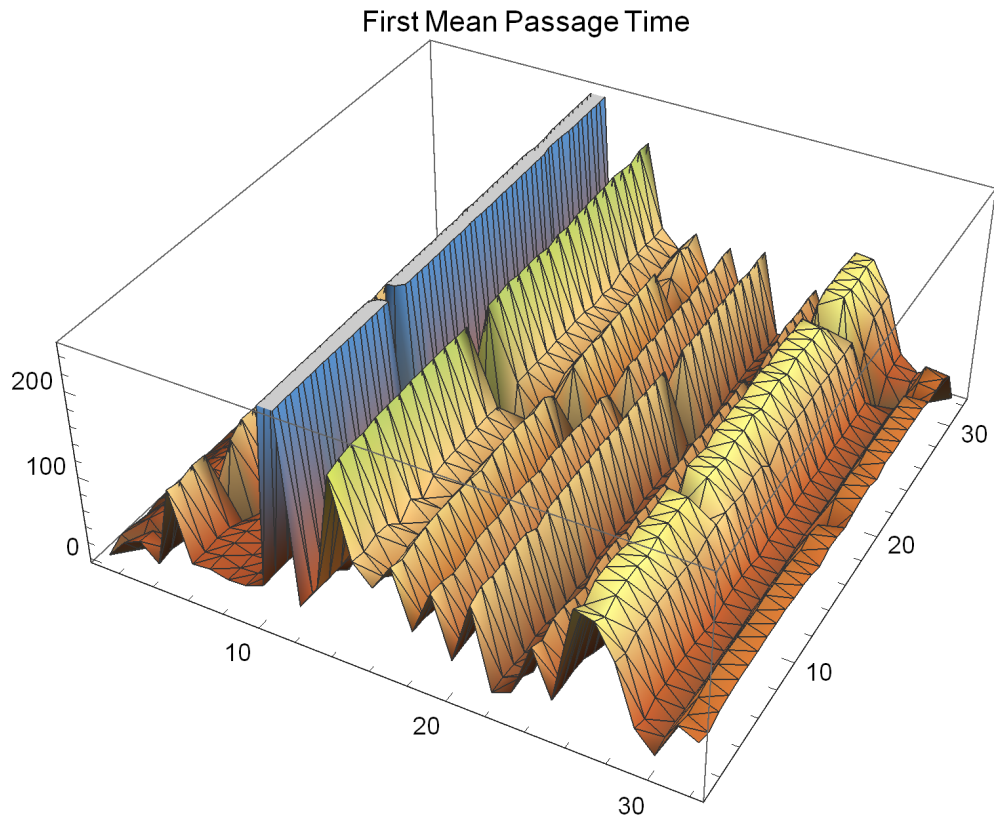


FIGURA 26. MFPT para la red en un horario de 8 a 10 horas de la noche

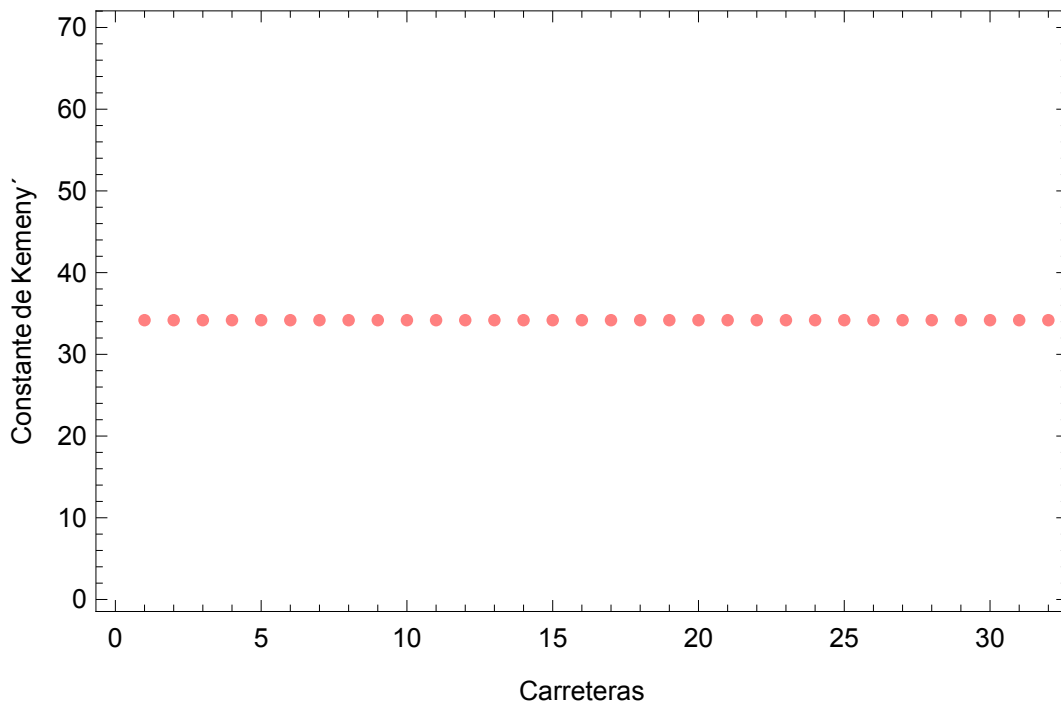


FIGURA 27. Constantes de Kemeny para cada carretera en un horario de 8 a 10 horas de la noche

En la Figura (28) se muestran las comparaciones de los vectores de distribución estacionaria correspondientes a 3 diferentes horarios para un día entre semana, de 8 a 10 hrs. de la mañana, 2 a 4 hrs. de la tarde y 8 a 10 hrs. de la noche; se muestran los resultados de las carreteras con mayor probabilidad de ocupación, que son las correspondientes a las carreteras 1, 22, 4, 30 y 12 (eje central, eje 2 sur, eje 3 oriente, eje 8 sur y eje 1 norte), que tienen probabilidad de 0.05 a 0.1 a estar ocupadas.

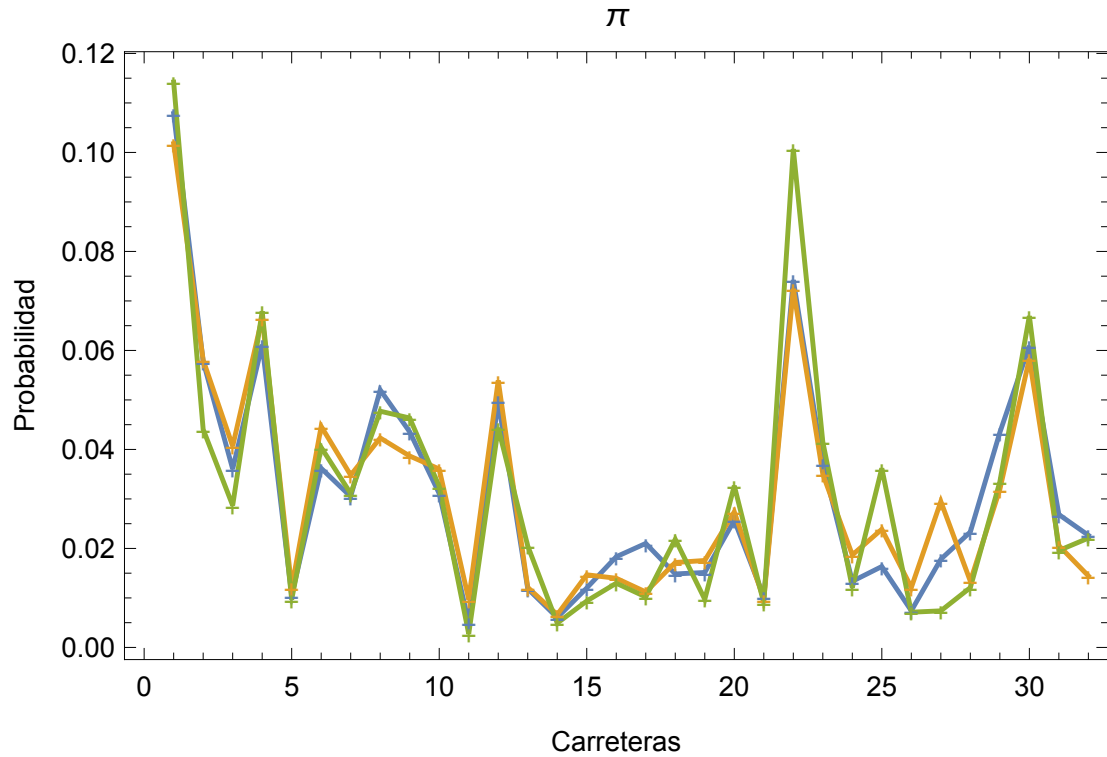


FIGURA 28. Variaciones de probabilidad de ocupación de cada carretera en 3 diferentes horarios, de 8 a 10 de la mañana(azul), 2 a 4 horas de la tarde(naranja) y de 8 a 10 de la noche(verde)

La constante de Kemeny se calcula para la red en los 3 diferentes horarios, de 8 a 10 hrs. de la mañana, de 2 a 4 hrs. de la tarde y de 8 a 10 hrs. de la noche, realizamos las comparaciones y en este ejemplo el valor más grande de las constantes de Kemeny se obtiene en el horario de la mañana como se muestra en la Figura (29). Entonces podemos decir que en la mañana tardamos mucho más tiempo transitar en la red de la ciudad de México.

La evaluación de carreteras críticas es igual de complicado. Como se mostró anteriormente uno debe construir un conjunto de diferentes redes, cada vez quitando un enlace diferente,

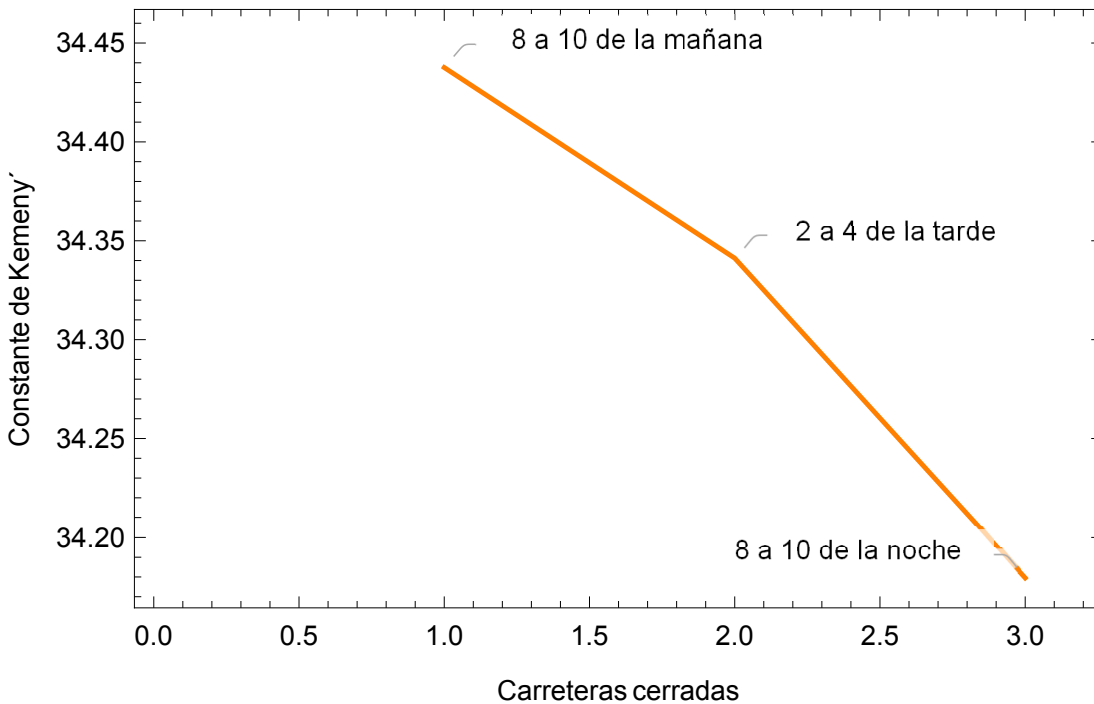


FIGURA 29. Variaciones de tiempo promedio dentro de la red en 3 diferentes horarios, de 8 a 10 de la mañana, 2 a 4 horas de la tarde y de 8 a 10 de la noche

y ejecutar nuevas simulaciones para cada caso. Además, hay algunas características, como las posibilidades de agrupamiento ofrecido por el patrón de signos del segundo vector propio, que son imposibles de obtener de las simulaciones. La disponibilidad de estas cantidades ofrece muchas formas nuevas de diseñar redes de carreteras, algunas de las cuales mencionamos.

Como hemos mencionado, también la constante Kemeny es un buen sustituto de la bondad de una red de carreteras. Esto se desprende del hecho de que la constante de Kemeny corresponde al tiempo promedio para viajar desde un camino arbitrario a un destino elegido al azar. Por lo tanto, redes caracterizadas por pequeños valores de la constante Kemeny debería ser más eficiente en términos de flujo de tráfico.

Este trabajo ofrece un sistema de diseño de patrones de tráfico inteligente, que se puede utilizar para analizar redes viales existentes complejas y sugerir soluciones de congestión reducidas, teniendo en cuenta las interdependencias de gran alcance en toda la red.

Conclusiones

A través de los cuatro capítulos de este trabajo se han abarcado diversas ramas, todas procedentes de un mismo tema troncal: las herramientas para el estudio del tráfico vehicular. Si bien merece la pena detenerse en cada una de ellas para impregnarnos de las ideas y las conclusiones obtenidas por separado. La simulación juega un papel más que principal en hacer que estos trabajos funcionen, en este caso recurrimos al software Wolfram Mathematica para realizar una serie de simulaciones y obtener algunos resultados gráficos.

Es evidente la importancia del uso de datos experimentales para el estudio del flujo vehicular. Desafortunadamente este tipo de datos no siempre pueden ser inferidos solamente bajo hipótesis y formulaciones matemáticas, pero el uso de ajustes numéricos es amplio para comenzar a desarrollar modelos y entender los diversos patrones emergentes del flujo vehicular.

Se propuso un enfoque de cadena de Markov para modelo de dinámica de red de carreteras. La gran diferencia con los modelos convencionales de tráfico por carretera es que toda la información de red se concentra dentro de la matriz de transición que se construye a partir de datos recopilados, específicamente los tiempos de viaje por carretera y probabilidades de giro de las carreteras. El enfoque propuesto evita el requisito de modelar dinámicas de carreteras complejas e interacciones del automóvil y al mismo tiempo todavía proporciona una representación precisa y realista de la carretera dinámica de red.

Una característica muy atractiva del enfoque de Markov es que muchas propiedades de las redes viales son instantáneamente disponibles desde la matriz de transición. Esto incluye caminos que están en promedio más congestionados, el tiempo promedio tomado desde cualquier punto de partida hasta cualquier destino, las carreteras más importantes en una red y el efecto de eliminar caminos particulares y uniones en la red de carreteras.

Es importante tener en cuenta que las propiedades de una red de carreteras están disponibles al instante de la matriz de transición, pero sólo se puede obtener con alguna dificultad de simuladores de redes convencionales. En particular, se requiere mucho tiempo para construir la red, ejecutar la simulación en el software Mathematica y examinar los archivos de salida, este proceso se vuelve particularmente largo si uno necesita calcular los tiempos promedios de primer paso varias veces, lo que implica que se deben ejecutar diferentes simulaciones para cada combinación de pares origen-destino. La evaluación de carreteras críticas es igual de complicado. En este caso, se debe construir un conjunto de diferentes redes, cada vez borrando un enlace diferente, y ejecutar nuevas simulaciones para cada caso.

Aunque solo se informan los resultados iniciales, son muy prometedores por dos razones principales, el primero es que los automóviles pueden equiparse fácilmente para comenzar a recopilar datos reales para construir la matriz de transición de Markov. La segunda ventaja es que desde la matemática, con el análisis de la cadena de Markov es posible inferir propiedades ocultas de la red de carreteras subyacente que son difíciles de determinar incluso corriendo varias simulaciones. Además, es posible predecir la dinámica de la carretera, por ejemplo, la propagación de densidad de tráfico derivada de diferentes tiempos, o desde el cierre de una carretera por trabajos. El modelo de cadena de Markov aparentemente identifica correctamente enlaces críticos. El análisis de la media primeros tiempos de paso y el uso de la constante de Kemeny sirven para cuantificar la eficiencia de la red de carreteras. De las diferentes maneras de abordar problemas de este tipo, la modelación por medio del uso de cadenas de Markov resulta una herramienta útil por su capacidad de describir cualitativamente fenómenos junto con la facilidad para ajustar términos necesarios para mejorar el desempeño del modelo.

Finalmente, es importante tener en cuenta que la principal contribución de este trabajo es el paradigma de modelado. Las mismas ideas pueden aplicarse no solo al modelado de congestión, sino también para modelar la contaminación y el consumo de energía en redes urbanas. Esto abre la posibilidad de técnicas de mapeo para apoyar el despliegue de vehículos híbridos eléctricos y en el control de la contaminación.

Índice de figuras

1. Cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4\}$.	13
2. Grafo dirigido etiquetado con 2 nodos y 1 enlace.	23
3. Ejemplo del gráfico asociado a una matriz de transición. Este gráfico tiene N nodos con M enlaces, cada nodo n_j representa un lugar y cada enlace m_i respresenta una carretera.	24
4. Ejemplo de red dual asociada al mapa urbano de la Figura (3), donde los nodos representan las carreteras y los enlaces corresponden a los lugares.	26
5. Probabilidad p_{ij} de dar vuelta del segmento de carretera AC.	27
6. Consideremos una unión casi idéntica a la de la Figura (3) con la única diferencia de que la carretera AC se sustituye por la carretera A'C' que tiene el doble de la longitud de CA y tiene la mitad del límite de velocidad.	28
7. Distribución estacionaria de los automóviles estimada por Cadenas de Markov calculada mediante la ecuación $\pi = \pi P$.	30
8. Segundo eigenvector propio.	31
9. Matriz de tiempos promedios de primer visita extraídos a través de calculos a partir de la matriz de la cadena de Markov \mathbb{P} . Los ejes x-y contienen las carreteras de origen y destino, mientras que el eje z contiene el tiempo promedio de recorrido de la primer visita.	32
10. Constante de Kemeny de la red dual calculada mediante la fórmula $K = \sum_{j=1}^n M_{ij}\pi_j$.	33
11. Densidad vehicular	35
12. Mapa vial de la Ciudad de México en donde se muestra los 32 principales ejes viales de la ciudad. Fuente: INEGI. Encuesta Origen - Destino en Hogares de la Zona Metropolitana del Valle de México (EOD) 2017	37

13. Información Origen - Destino de la Ciudad de México. Fuente: INEGI. Mapa digital de México V6.3	39
14. Probabilidad de ocupación de cada carretera estimada por Wolfram Mathematica calculada mediante la ecuación $\pi = \pi P$	40
15. Representación de la matriz de tiempo promedio de primer visita	41
16. Constante de Kemeny	42
17. Segundo eigenvector para la matriz de transición	42
18. Densidad vehicular	43
19. Distribución de probabilidad estacionaria para cada una de las diferentes redes, considerando en cada uno el cierre de una carretera en específico	45
20. Distribución de probabilidad estacionaria para tres redes diferentes, considerando en cada uno el cierre de una carretera en específico	46
21. Constantes de Kemeny	47
22. Probabilidad de ocupación de cada carretera en un horario de 2 a 4 horas de la tarde	48
23. MFPT para la red en un horario de 2 a 4 horas de la tarde	49
24. Constantes de Kemeny para cada carretera en un horario de 2 a 4 horas de la tarde	50
25. Probabilidad de ocupación de cada carretera en un horario de 8 a 10 horas de la noche	51
26. MFPT para la red en un horario de 8 a 10 horas de la noche	52
27. Constantes de Kemeny para cada carretera en un horario de 8 a 10 horas de la noche	52
28. Variaciones de probabilidad de ocupación de cada carretera en 3 diferentes horarios, de 8 a 10 de la mañana(azul), 2 a 4 horas de la tarde(naranja) y de 8 a 10 de la noche(verde)	53
29. Variaciones de tiempo promedio dentro de la red en 3 diferentes horarios, de 8 a 10 de la mañana, 2 a 4 horas de la tarde y de 8 a 10 de la noche	54

Índice de tablas

Núm. de carretera	Nombre	Núm. de carretera	Nombre
1	Eje central	17	Eje 4A norte
2	Eje 1 oriente	18	Eje 5 norte
3	Eje 2 oriente	19	Eje 6 norte
4	Eje 3 oriente	20	Eje 1 sur
5	Eje 4 oriente	21	Eje 1A sur
6	Eje 5 oriente	22	Eje 2 sur
7	Eje 1 poniente	23	Eje 2A sur
8	Eje 2 poniente	24	Eje 3 sur
9	Eje 3 poniente	25	Eje 4 sur
10	Eje 4 poniente	26	Eje 5 sur
11	Eje 5 poniente	27	Eje 6 sur
12	Eje 1 norte	28	Eje 7 sur
13	Eje 2 norte	29	Eje 7A sur
14	Eje 3 norte	30	Eje 8 sur
15	Eje 3A norte	31	Eje 9 sur
16	Eje 4 norte	32	Eje 10 sur

Bibliografía

- [1] A. A. MARKOV, *An Example of Statistical Analysis of the Text of Eugene Onegin Illustrating the Association of Trials into a Chain*, Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersburg, serie 6, vol. 7, págs. 153–162, 1913.
- [2] CABALLERO M. E., *Cadenas de Markov: un enfoque elemental*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 29, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [3] CAL y MAYOR, R., *Ingeniería de Tránsito Fundamentos y aplicaciones*, 8ª Edición, Alfa Omega Grupo Editor, S.A. de CV., México D.F., 2007.
- [4] CHO GE, MEYER CD, *Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain*, Linear Algebra and its Applications, págs. 137–150, 2001.
- [5] CRISOSTOMI E, KIRKLAND S, SHORTEN R, *A Google-like model of road network dynamics and its application to regulation and control*, International Journal of Control, accepted for publication, 2011.
- [6] DOIG, A , *A bibliography on the theory of queues*, Biometrika, págs. 490–514, 1957.
- [7] GREENSHIELDS, B., CHANNING, W., MILLER, H., *A study of traffic capacity. In Highway research board proceedings*, volume 1935, National Research Council (USA), Highway Research Board, 1935a.
- [8] GREENSHIELDS, B., CHANNING, W., MILLER, H., *A study of traffic capacity. In Highway research board proceedings*, volume 1935, National Research Council (USA), Highway Research Board, 1935b.
- [9] JEROME HARRI, FETHI FILALI y CHRISTIAN BONNET, *Mobility Models for Vehicular Ad Hoc Networks: A Survey and Taxonomy*, IEEE COMMUNICATIONS SURVEYS AND TUTORIALS, FOURTH QUARTER , Vol. 11, 2009.
- [10] J. DELGADO, P. SAAVEDRA, R.M. VELASCO, *Modelación matemática del flujo vehicular*, Publicaciones C.B.I. UAM., 2012.
- [11] KEMENY, J.G. y SNELL, J.L., *Finite Markov Chains*, Princeton: Van Nostrand, 1960.

- [12] KIRKLAND, S. *Fastest Expected Time to Mixing for a Markov Chain on a Directed Graph*, Linear Algebra and its Applications , pág.433, 1988–1996.
- [13] KRAJZEWICZ, DANIEL, HERTKORN, GEORG, RÖSSEL, C. y WAGNER, PETER, *SUMO (Simulation of Urban Mobility) - an open-source traffic simulation*, . In: Proceedings of the 4th Middle East Symposium on Simulation and Modelling (MESM20002) 4th Middle East Symposium on Simulation and Modelling, Sharjah (United Arab Emirates), págs. 183–187, 2002.
- [14] KÜHNE, R. D., *Greenshields' legacy: Highway traffic*, Transportation Research E-Circular, págs. E-C149, 2011.
- [15] LEVENE, MARK y LOIZOU, G., *Kemeny Constant and the Random Surfer*, American Mathematical Monthly 109, págs.741–745, 2002.
- [16] MAGNANTI, T.L., WONG, R.T., *Network design and transportation planning: Models and algorithms*, Transportation science 18, págs. 1–55, 1984.
- [17] NORRIS J., *Markov chains*, Cambridge University Press, 1997.
- [18] REITER, J.G., *Application of a Markov Chain Traffic Model to the Greater Philadelphia Region*, pág. 38, 2015.
- [19] RINCÓN, LUIS, *Introducción a los procesos estocásticos*, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, México DF, págs. 27–93, 2012.
- [20] SALMAN, S., ALASWAD, S., *Urban Road Network Crisis Response Management: Time-Sensitive Decision Optimization*, Proceedings of the 2017 Industrial and Systems Engineering Conference. Presented at the 2017 Institute of Industrial and Systems Engineers Conference and Expo, 2017.
- [21] S.M. ROSS, *Stochastic Processes*, John Wiley y Sons, New York, NY, 2nd edition, 1996.
- [22] SERDAR ÇOLAK, ANTONIO LIMA, MARTA C. GONZA, *Understanding congested travel in urban areas*, Nature Communications, 2016.
- [23] TAYLOR H. M. y KARLIN S., *An introduction to stochastic modeling*, Academic Press, 1994.
- [24] En línea. https://www.tendencias21.net/Lo-mejor-para-reducir-el-trafico-es-la-cooperacion-demuestran-las-matematica_a42730.html
- [25] En línea. <https://es.wikipedia.org/wiki/Waze#C%C3%ADsticas>
- [26] En línea. <http://gaia.inegi.org.mx/mdm6/?v>

[27] En línea. <http://www.traffic-simulation.de/ger>

[28] En línea. <http://maps.google.com/>