UACM

Universidad Autónoma
de la Ciudad de México

Nada humano me es ajeno

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MAESTRÍA EN DINÁMICA NO LINEAL Y SISTEMAS COMPLEJOS

"*Invariantes Topológicos en Sistemas Dinámicos Bidimensionales*"

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN DINÁMICA NO LINEAL Y SISTEMAS COMPLEJOS

PRESENTA

MIGUEL GARCÍA ALVARADO

Director de tesis

Mtro. Juan Luis Martínez Ledesma

México, D.F. Mayo de 2014.

Dónde está mi corazón está mi tesoro.

En memoria de la mujer más maravillosa y sabia en mi vida Julia Alvarado Ávila.

A tu paciencia y comprensión, por tu bondad y sacrificio me inspiraste a ser mejor para ti, ahora puedo decir que el encanto también tiene fin, el amor siempre está en nosotros, gracias por estar siempre a mi lado, **Irma**.

MIGUEL y **Eduardo**, hay tiempo de dar tiempo y hay tiempo de pedir tiempo,

al final disfrutemos nuestro tiempo,

que aún no se nos ha acabado el tiempo.

Mirad hijos cuan bueno y bello es estar juntos en armonía.

"Del hablador he aprendido a callar; del intolerante, a ser indulgente, y del malévolo a tratar a los demás con amabilidad. Y por curioso que parezca, no siento ninguna gratitud hacia esos maestros." – Khalil Gibrán

INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN SISTEMAS BIDIMENSIONALES

Tesis que presenta para obtener el grado de Maestro :

MIGUEL GARCÍA ALVARADO

Bajo la dirección del **M.C. JUAN LUIS MARTÍNEZ LEDESMA**

17 de mayo de 2014

Índice

Parte I

Introducción.

Nuestro universo está compuesto de sistemas, por ejemplo galaxias, sistemas solares, sistemas planetarios, la tierra, continentes, océanos, fauna, flora, sociedades, comunidades, familias, hogares, personas, sistema linfático, sistema digestivo, pulmón, corazón, células, moléculas, átomos, sistemas económicos, ambientales, de salud, de gobierno.

Estudiar estos sistemas como modelos matemáticos implica la búsqueda de la esencia de las cosas a través de relaciones entre los componentes que conforman el sistema y en ocasiones con componentes de otros sistemas que interaccionan directa o indirectamente con él. Estas relaciones las podemos ver como ecuaciones que buscan las causas y los efectos o viceversa, con un formalismo matemático.

Se pueden estudiar estos sistemas considerando el tiempo o no, cuando se considera el tiempo en el sistema este se denomina sistema dinámico. Los sistemas dinámicos se pueden estudiar desde el enfoque de tiempo continuo o discreto, se busca explicar de forma determinista el comportamiento de este para cualquier tiempo bajo cualquier condición inicial.

El estudio de los sistemas dinámicos es la parte modular de la ciencia en general, surge de forma natural el problema de representar, analizar e interpretar sistemas físicos, sociales, económicos, biológicos, entre muchos más, estos presentan variaciones de las magnitudes que los definen en el tiempo. Es en una vecindad de puntos de equilibrio del sistema donde las variables de este presentan una variación nula en ausencia de perturbaciones, por lo que es necesario el estudio cerca de los puntos de equilibrio.

Como dice Pablo Padilla Longoría el movimiento implica cambio y a nuestro alrededor todo parece cambiar. Heráclito resume esta percepción cuando afirma que nadie se baña dos veces en el mismo rio . Se puede resumir la actividad científica como la descripción y comprensión, del cómo y por qué, las cosas cambian. Si coincidimos con Galileo cuando afirma que el libro del Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas, entonces esta disciplina debe de tener mucho que decir sobre el movimiento. De hecho lo tiene y a lo largo de ya varios siglos se ha conformado el campo de los sistemas dinámicos como un esfuerzo por entender matemáticamente el movimiento.

Que mejor descripción de movimiento en palabras de Don Juan de Oyorzábal. [2]

Las cosas se mueven.

Se mueve el agua de un río, se mueve la piedra lanzada por la resortera de un niño, el pájaro que cruza veloz ante nuestra vista. Las casas, los edificios que nos parecen fijos a la tierra, se mueven junto con ella alrededor del Sol.

Y también éste se mueve. Y las estrellas. Y las galaxias...

Las cosas se mueven.

Pero, ¿cómo se mueven? y ¿por qué se mueven las cosas?

El corredor, en línea recta; las piedras de la honda, en círculo; la lenteja de un péndulo, en un continuo y monótono vaivén oscilatorio...

El caracol se mueve lentamente; el avión con rapidez. La rueda de la noria, monótona, uniformemente, siempre igual. La piedra que cae al suelo, aceleradamente, cada vez más aprisa, con deseos de llegar a la tierra.

Movimientos rectos, curvos, lentos, rápidos, uniformes, apresurados.

Los cuerpos al moverse describen un camino, una trayectoria, a lo largo de la cual recorren una cierta distancia en un tiempo dado. Y así podemos hablar de velocidad de un cuerpo, la cual puede ser la misma o aumentar progresivamente con el transcurrir del tiempo, dando así lugar a una aceleración, un cambio de velocidad.

Trayectoria, distancia recorrida, velocidad, aceleración... Conocer en todo tiempo *estas magnitudes es saber cómo se mueven los cuerpos.*

Pero hay otras preguntas ¿por qué se mueven los cuerpos?

Porque los empujamos, los jalamos, los impulsamos de alguna manera: El puntapié del niño mueve la pelota; el empujón del obrero, la carretilla; el viento, las ramas de los arboles... Observando el moverse de los objetos que nos rodea, podemos encontrar siempre una causa del movimiento.

Y, a estas causas, a esta acción, la llamamos fuerza. La fuerza –fuerza del puntapié, del empujón, del viento- es la causa del movimiento.

Y la relación entre estos dos conceptos –las fuerzas y el movimiento-... es el objeto de la mecánica.

Fue el físico inglés Isaac Newton el que logró encontrar que, cualesquiera que fuesen las fuerzas y el movimiento, existían unas relaciones únicas entre ambos conceptos, y pudo así expresar el movimiento, ¡todos los movimientos!, en unas solas leyes, y las leyes de la mecánica, que son las mismas para todos los cuerpos, para todas las fuerzas, para todos los movimientos.

Y se llegó así a la simplificación, a la unidad, a la síntesis.

Es decir, al conocimiento.

En este trabajo se estudian los invariantes topológicos en sistemas dinámicos bidimensionales (planos). Los invariantes topológicos nos permiten analizar los sitemas dinámicos en forma cualitativa. Un ejemplo clásico lo constituye el teorema de Hartman-Grobsman, que nos ayuda a clasificar los puntos críticos de un sistema no lineal.

En el capítulo 1 presentamos los resultados básicos de los sistemas dinámicos planos que se usarán a lo largo de la tesis así como los conceptos básicos de topología que se requieren para estudiar la equivalencia de sistemas dinámicos bidimensionales.

Estos conceptoss no están expuestos en forma exhaustiva ni se presentan demostraciones muy rigurosas. El objetivo es proporcionar al lector las ideas y conceptos básicos para que pueda leer el resto de la tesis. En este capítulo se menciona la bibliografía básica de cada tema para aquellos lectores que deseen profundizar sobre alguno de los temas tratados.

En el capítulo 2 se presentan los resultados básicos de la tesis. Se ofrece una generalización de las leyes de Kepler como un ejercicio donde se supone que los sistemas planetarios se comportan como sistemas dinámicos planos autónomos que satisfacen unas condiciones ideales.

El capítulo 3 está destinado al desarrollo de ejemplos originales que muestran cómo se cumplen los teoremas de equivalencia del capítulo 2. Estos ejemplos se desarrollan con cierto detalle y se ilustran gráficamente para apreciar los homeomorfismos o equivalencia dadas.

Aprovecho este espacio para externar un profundo agradecimiento a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México-UACM en cuyas instalaciones del Plantel del Valle tuve la oportunidad de estudiar gratuitamente la maestría. Además, reconocer a esas grandes personas que me perdieron entre el cristal y el humo, que me dieron una visión humanista de mi entorno, pero más que nada su experiencia: Pedro Miramontes, Faustino Sánchez, José Luis Gutiérrez, Maruxa Armijo y el entrañable Germinal Cocho, así como a su hermano Flavio Cocho† , al pie de un limonero.

Un especial agradecimiento y reconocimiento a mi director de tesis el M.C. Juan Luis Martínez Ledesma quien con paciencia y sabiduría dedico parte de su tiempo a la creación de este trabajo. Igualmente un agradecimiento muy especial a mis sinodales Dr. Juan Antonio Nido Valencia, Dr. José Enrique Torres Cabral, Dr. Armando Mata Romero y Dr. Carlos Islas Moreno por sus valiosas observaciones.

1. Sistemas Dinámicos.

En este capítulo vamos a estudiar conceptos básicos de sistemas dinámicos, sin embargo debemos aclarar que no es un compendio exhaustivo ni completo, solo nos sirve para orientar este trabajo, el lector puede verificar la bibliografía para extender con más profundidad los temas y conceptos aquí vertidos.

1.1. Conceptos Básicos de Sistemas Dinámicos.

Un sistema dinámico da una descripción funcional de la solución de un problema físico o del modelo matemático que describe el sistema físico. Es un sistema cuyas variables de estado siguen una serie de reglas temporales. Está descrito por un *sistema* de ecuaciones y una *dinámica* en la que sus parámetros varían con respecto al tiempo.

Una forma de estudiar un sistema dinámico es a través de la matemática de su dinámica, enfocandose en el análisis cualitativo del sistema.

Según como se considere el tiempo un sistema dinámicos puede ser discreto o continuo.

- Un sistema dinámico discreto es aquel en el que el tiempo transcurre en forma discreta y se describen por medio de ecuaciones en diferencias o mapas iterados.

- Un sistema dinámico continuo es aquel en el que el tiempo varía de forma continua y se expresa con ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones diferenciales con retraso.

Nustro interés principal en este trabajo es tratar sistemas dinámicos bidimensionales autónomos provenientes de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Para definir formalmente un sistema dinámico[1] se define primero una función de clase C^1.

[1]Muchos de los conceptos vertidos en esta sección están tomados de notas de clase del curso

Definición 1 *Decimos que una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^k si la función tiene derivada continua hasta de orden k para todo $x \in \mathbb{R}$. Una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^k si la función tiene todas sus derivadas parciales hasta orden k continuas.*

Formalmente definimos a un Sistema Dinámico de la siguiente manera:

Definición 2 *(Sistema Dinámico). Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$, un sistema dinámico en U de clase C^k es la terna (U, I, ϕ), donde ϕ es una función de clase C^k, con $k > 0$, $\phi : I \times U \to U$. Donde $\phi(t,x) = \phi(x(t))$, entonces $\dot{x}(t) = \phi(x(t))$, $x(t_o) = x_o$.*

Teniendo las siguientes propiedades:

$\phi(0, x_o) = x_o$

$\phi(t+s, x_o) = \phi(t, \phi(s, x_o))$ *para todo* $t, s \in I$

$\phi(t, x_o)$ *es una función de clase C^1 para cada t y tiene una inversa de clase C^1 dada por $\phi(-t, x_o)$.*

Definición 3 (Punto Crítico) *Un punto $x_0 \in U$ es llamado punto de equilibrio o punto crítico*[2] *de $\dot{x} = \phi(x)$, si $\phi(x_0) = 0$. Un punto que no es un punto crítico es un punto regular.*

Definición 4 *La solución del sistema dinámico ϕ a través de x_0 es $\{(t, \phi(t, x_0)) : t \in I_{x_0}\}$.*

Un sistema dinámico continuo n-dimensional se puede considerar por el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = F(\vec{x}) \tag{1}$$

donde el punto sobre x denota derivada respecto al tiempo t

Dinámica No Lineal 1, impartido por el Dr. Faustino Sánchez Garduño, en la Maestría en Dinámica No Lineal y Sistemas Complejas.

[2]En estos puntos el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo.

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left[x_1, ..., x_n\right]^T \in \mathbb{R}^n,$$

$\overrightarrow{x}$ es un vector columna

$$\overrightarrow{x} = \left[x_1, ..., x_n\right]^T \in \mathbb{R}^n,$$

F es un campo vectorial cuyas componentes f_i con $i = 1, ..., n$ son funciones que en general no son lineales

$$F = \left[f_1(x), ..., f_n(x)\right]^T : \Omega \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Supondremos en el resto de este trabajo que el campo vectorial F es suficientemente suave en Ω, de manera que el teorema de existencia y unicidad se cumpla.

El sistema (1) define un conjunto de direcciones en la región Ω, que no cambian con el tiempo t: sólo cambian de punto a punto. La imagen de una solución φ[3] de (1) en el espacio fase es una curva orientada a la que llamaremos *trayectoria* del sistema (1), cuyo vector tangente, para cada t, es $\dot{\varphi} = F(\varphi(t))$.

Al conjunto de trayectorias de un sistema autónomo en una región del espacio fase, se le denomina *retrato fase* del sistema, en esa región. El retrato fase contiene toda la información de la dinámica del sistema, por lo que determinarlo es la tarea del análisis cualitativo.

El que F no dependa explícitamente del tiempo t, desde un punto de vista interpretativo, la dinámica de un sistema autónomo es invariante ante traslaciones temporales, por lo que no importa donde se ponga el origen para medir el tiempo, las propiedades cualitativas de las variables de estado son las mismas.

[3]Por solución del sistema (1) en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se entiende a una función $\overrightarrow{\varphi} : I \to \Omega$ con primera derivada continua en I tal que, para todo t en I, se satisface la igualdad $\dot{\varphi} = F(\overrightarrow{\varphi})$.

Definición 5 *Si existe $\overrightarrow{x}^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F(\overrightarrow{x}^*) = \overrightarrow{0}$, a tal punto lo llamaremos punto crítico del sistema (1).*

1.1.1. Clasificación de Sistemas Dinámicos.

Sistemas Dinámicos Autónomos y No Autónomos.

1. Un sistema dinámico autónomo está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada de la forma $\dot{x} = F(\vec{x})$.

2. Un sistema dinámico no autónomo está modelado por una ecuación diferencial ordinaria no autónoma o forzada de la forma $\dot{x} = F(\vec{x}, t)$.

La diferencia entre sistemas dinámicos autónomos y no autónomos radica en que el primero no contiene ningún estímulo externo al sistema que force el comportamiento natural de la dinámica del sistema, mientras que el segundo si.

Sistemas Dinámicos Lineales y No Lineales.

1. Sistema Dinámico Lineal. Cuando el sistema cumple con el principio de superposición en la relación de la tasa de incremento de las variables de estado con sus valores actuales: $\dot{x} = F(ax + by) = aF(x) + bF(y)$.

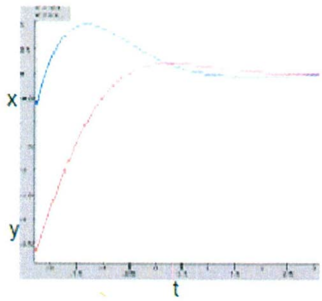
2. Sistema Dinámico No Lineal. Si el sistema no cumple con el principio de superposición, por lo que su análisis es mucho mas complejo y la representación de la dinámica del sistema se auxilia de técnicas geométricas de visualización y análisis.

1.1.2. Preliminares Geometricos de los Sistemas Dinámicos.

Hay dos formas que nos permiten visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico: En series de tiempo o en forma de espacio fase.

El espacio fase de un sistema n-dimensional $\dot{x} = F(\vec{x})$ es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables del sistema, el tiempo se vuelve una parámetro implícito.

Como ejemplo se muestra en la figura 1 una serie de tiempo y un plano fase de un sistema dinámico.



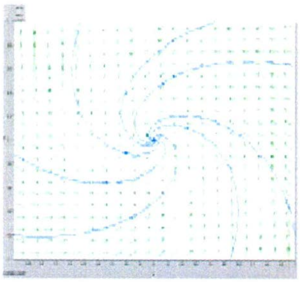


Figura 1. Comportamiento de las variables de estado: a) serie de tiempo. b) Plano fase.

1.2. Sistemas Dinámicos Bidimensionales o Planos.

Sea el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en la variable t, que generalmente representa el tiempo.

Sean también $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \to f_i(x_1, x_2)$; $i = 1, 2$ funciones en dos variables.

Definimos como un sistema dinámico bidimensional autónomo al par de ecuaciones diferenciales simúltaneas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

En notación vectorial, definimos a $x = (x_1, x_2)$; $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ y a $F = [f_1, , f_2]$ con lo que el sistema (2) se puede representar en una forma más compacta

$$\dot{x} = F(x) \qquad (3)$$

El espacio fase del sistema dinámico anterior está descrito por el campo vectorial F que rige el recorrido de las variables del sistema $\dot{x}(t)$ en el tiempo, al recorrido de estas variables se les denomina trayectorias, y a las singularidades $\overrightarrow{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ para las cuales $\dot{x} = F(\overrightarrow{x}^*) = 0$ se denominan puntos críticos o puntos fijos del sistema.

La figura 2 muestra el espacio fase de un sistema dinámico bidimensional autónomo en él que se pueden apreciar singularidades que atraen a las trayectorias que pasan cerca de ellas y otras que las repelen.

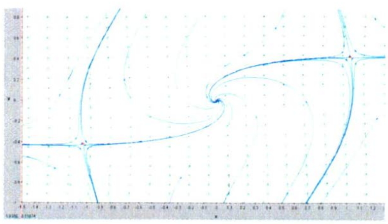


Figura 2. Espacio fase de un sistema dinámico bidimensional autónomo.

1.2.1. Trayectorias Cerradas en Sistemas dinámicos Bidimensionales.

La órbita cerrada de un sistema dinámico es la imagen de una solución periódica no trivial, y la existencia de soluciones periodicas es de suma importancia, especialmente cuando éstas son aisladas, es decir cuando son *ciclos límite*. Recordemos que una solución $\varphi(t)$ es periódica con periodo τ si $\varphi(t+\tau)=\varphi(t)$.

Un ciclo límite es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de este y por lo tanto sus trayectorias vecinas se mueven en espiral acercándose o alejándose a él. Los ciclos límites solo pueden existir en sistemas no lineales.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x+2y-(-x+y)(1-x^2-(-x+y)^2)\\ \dot{y} &= -x+y\end{aligned}$$

tiene un ciclo límite, como se puede ver en su retrato fase

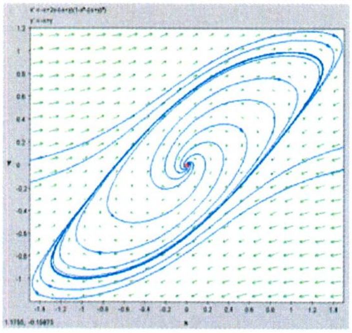


Figura 3. Sistema no lineal con un ciclo límite y punto de crítico en el origen.

Una propiedad global de interés es la que determina si un sistema bidimensional autónomo de ecuaciones diferenciales no lineal tiene (y en su caso cuántos y dónde) ciclos límite[4].

[4]El M.C. Juan Luis Martínez Ledesma tiene grandes adelantos sobre este problema 16 de Hilbert.

La siguiente proposición establece la relación entre soluciones periódicas y trayectorias cerradas.

Proposición 6 *Si* $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$ *es una solución periódica no trivial del sistema (2) de periodo fundamental* $P > 0$*, entonces la trayectoria de (2) correspondiente a* φ *es simple cerrada. Recíprocamente, si* C *es una trayectoria simple cerrada del sistema (2) entonces ésta corrresponde a una solución periódica de dicho sistema.*

La existencia de este tipo de soluciones cerradas se fundamenta en el teorema de Poincaré-Bendixson, en el cual el teorema de existencia y unicidad se cumple, pues nos dice el tipo de trayectorias posibles en sistemas planos o bidimensionales. Hay distintas formas de formularlo pero su contenido conceptual es el mismo, aqui se ofrece una versión desprovista de tecnicismos, pero más transparente.

Teorema 7 (De Poincaré-Bendixson) *Sea* $\Re$ *una región cerrada y acotada que no consista de puntos de equilibrio de un sistema de* 2×2 *tal que alguna trayectoria* α *del sistema, está completamente contenida en* $\Re$*. Entonces, o bien es ella misma una trayectoria cerrada, o tiende a una trayectoria cerrada o termina en un punto crítico.*

La teoría cualitativa consiste en deducir propiedades de las soluciones de un sistema dinámico sin necesidad de calcularlas explícitamente. Una propiedad que le pediremos a los sistemas dinámicos en los que trabajaremos será la existencia de una y soló una solución en cada punto del dominio del sistema, lo cual se garantiza por el teorema de existencia y unicidad.

1.2.2. Sistemas Dinámicos Conservativos.

En los sistemas dinámicos reales hay una disipación de la energía. Esta dispersión de energía se da comúnmente por algún tipo de rozamiento o fricción, el cual se desprecia en ocasiones que es muy lento en un tiempo muy prolongado. En este caso se puede asumir que se cumple la ley de la conservación de la energía, es decir, la suma de las energías cinética y potencial es constante.

A los sistemas que cumplen esta propiedad se les denomina sistemas conservativos [5].

Definición 8 (Sistemas Conservativos) *Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama Sistema Hamiltoniano o Sistema Conservativo si existe una función $H(x,y)$ que para toda x y y, cumple que:*

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$$

A $H(x,y)$ se le denomina Función de Hamilton, la cual es constante en cualquier solución del sistema.

1.2.3. Teoría de índices.

Supongamos que tenemos un campo vectorial definido en alguna región simplemente conexa, $\Re$, del plano. Sea Γ cualquier curva cerrada en $\Re$ que no contiene puntos críticos del campo vectorial. [12]

Definición 9 *(Índice de una curva). El índice de un punto crítico se define como el índice de una curva cerrada que contiene solamente un punto crítico, y donde no hay puntos críticos sobre la curva cerrada.*

Teorema 10 *1. El índice de un sumidero, una fuente o un centro es $+1$.*

2. El índice de un punto silla hiperbólico es -1.

3. El índice de una órbita periódica es $+1$.

4. El índice de una curva cerrada que no contiene puntos críticos es 0.

5. El índice de una curva cerrada es igual a la suma de los índices de los puntos críticos dentro de ella.

Corolario 11 *Dentro de cualquier órbita periódica* Y *debe haber al menos un punto crítico. Si solo hay uno, entonces debe ser sumidero, fuente o centro. Si todos los puntos críticos dentro de* Y *son hiperbólicos, entonces debe haber un número impar de estos puntos, de los cuales* n *son puntos silla y* $n+1$ *ya sea sumideros, fuentes o centros.*

La teoría de índices nos proporciona información global acerca del retrato de fases de un sistema plano no lineal, ya que nos indica si se tiene órbitas cerradas. Por ejemplo en la figura 4 se muestra el espacio fase de un sistema con 25 puntos críticos, de los cuales 13 son centros y 12 puntos silla, si observamos podemos ver que cada trayectoria cerrada tiene índice $+1$.

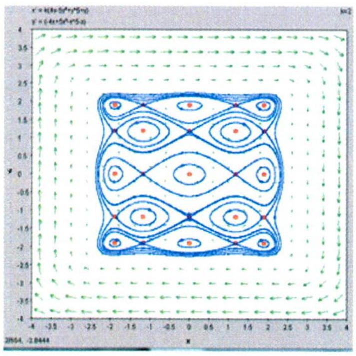


Figura 4. Graficamente en el espacio fase se ve que hay 13 centros con índice $+1$, y, 12 puntos silla con índice -1.

1.2.4. Conceptos y resultados del Cálculo Vectorial.

Definición 12 *Un arco o contorno continuo en* $\mathbb{R}^2$ *es un mapeo continuo* $\Upsilon : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. *Un arco es simple o un arco de Jordan, si* $\Upsilon(t_1) = \Upsilon(t_1)$ *solo para* $t_1 = t_2$. *Un arco es una curva cerrada o curva de Jordan si los puntos iniciales y finales coinciden, es decir* $\Upsilon(a) = \Upsilon(b)$ *y* $\Upsilon(t_1) \neq \Upsilon(t_2)$, *para todo* $t_1, t_2 \in (a,b)$ *con* $t_1 \neq t_2$.

Para un campo de fuerzas gradiente $F = \nabla f$, las integrales de línea F:

$$\int_c F \cdot ds = f[c(b)] - f[c(a)]$$

solo dependen de $c(a)$ y $c(b)$.

El área de una región acotada por una curva cerrada simple C que acota una región para la cual se aplica el teorema de Green, está dada por [6]:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

que es el área de la región D acotada por $C = \partial D$.

1.3. Preliminares Topológicos.

1.3.1. Espacio topológico.

La mayoría de los siguientes conceptos se pueden encontrar detalladamente en [1] y se pueden profundizar en [10] y [3].

Un *espacio topológico* es una estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencias, conectividad y continuidad. Sus elementos suelen llamarse puntos, cuando estos puntos son funciones se llama un espacio funcional.

Definición 13 *1. Una topología en un conjunto* X *es una familia* $\Im$ *de subconjuntos de* X *que satisface las siguientes condiciones*

a) *El conjunto vacío* ϕ *y* X *pertenecen a* $\Im$,

b) *Si* A, $B \in \Im$, *entonces* $A \cap B \in \Im$, *y*

c) *Si* $\underset{\sim}{A} \subseteq \Im$, *entonces,* $\cup \underset{\sim}{A} \in \Im$.

2. *Si* $\Im$ *es una topología en* X, *a la pareja* $(X, \Im)$ *le llamaremos* espacio topológico, *y los elementos que pertenecen a* $\Im$ *reciben el nombre de subconjuntos abiertos de* X.

Proposición 14 *Un subconjunto* A *de un espacio* $(X, \Im)$ *es abierto si y sólo si para cada* $\varkappa \in A$ *existe una vecindad* $V \in \mathcal{L}(\varkappa)$ *tal que* $V \subseteq A$. *donde* $\mathcal{L}(\varkappa)$ *es el sistema de vecindades de un punto* $\varkappa$.

Uno de los conceptos más importantes en topología es el de función continua. Intuitivamente, una función f definida sobre un espacio topológico X y con valores en otro espacio Y, es continua en un punto $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$.

Definición 15 *Sea* f *una función cuyo dominio* X *e imagen* Y *son espacios topológicos*

- *Diremos que* f *es continua en el punto* $x_0 \in X$ *si para cualquier subconjunto abierto* A *de* Y *que contiene a* $f(x_0)$, *existe un subconjunto abierto* B *de* X *que contiene a* x_0 *y que satisface* $f[B] \subseteq A$.

- *En el caso en que* f *sea continua en todos los puntos de* X, *se dirá simplemente que* f *es continua.*

Dos conceptos fundamentales en topología son el de *homeomorfismo* y *espacios homeomorfos o topológicamente equivalentes*, los cuales se refieren a los objetos topológicos que se consideran equivalentes.

Definición 16 (Homeomorfismo y Espacios Homeomorfos) *1. Una función biyectiva h definida sobre el espacio topológico X y con valores en el espacio Y será llamada* homeomorfismo *si tanto ella como su inversa son continuas.*

2. Los espacios topológicos X y Y serán llamados homeomorfos o topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo entre X y Y.

Es inmediato, de la definición, que si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} tambien lo es.

Cuando dos espacios X y Y son homeomorfos, los consideramos como objetos equivalentes en la clase de espacios topológicos, y podemos intercambiar uno por el otro en nuestro discurso y argumentaciones sin que las conclusiones se alteren. Como hemos mencionado ellos son el mismo objeto topológico.

Definición 17 *Una propiedad **P** es topológica si cada vez que un espacio X tiene la propiedad **P**, también la posee cualquier espacio topológico homeomorfo a X.*

Definición 18 *Se puede decir que la topología es el estudio de las propiedades que se preservan bajo homeomorfismos, en otras palabras, es el estudio de las propiedades topológicas o* invariantes topológicos.

Por ejemplo, sabemos de los cursos básicos de Álgebra Lineal, que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobreyectiva es tambien inyectiva, y por lo tanto biyectiva. En consecuencia, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal sobreyectiva, tanto T como su función inversa T^{-1} son funciones continuas[5]. Es decir, toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobreyectiva es un homeomorfismo cuando en $\mathbb{R}^2$ se considera a la topología euclidiana.

Dos sistemas equivalentes topológicamente son los siguientes:

[5] Recordemos que la inversa de una transformación lineal también es una transformación lineal.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y & \qquad \dot{r} &= -\frac{12}{5}r + \frac{13}{5}s \\
\dot{y} &= -x & \qquad \dot{s} &= -\frac{13}{5}r + \frac{12}{5}s
\end{aligned}
$$

con su matriz de transformación $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y su matriz de transformación inversa $T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ambos sistemas tienen como punto crítico a $(0, 0)$.

La transformación preserva la trayectoria cerrada como se observa en la figura 5, algunos puntos (x, y) de la trayectoria cerrada del primer sistema son $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ y $(0, -1)$ cuya transformación lineal manda sus respectivas imagenes (r, s) en la trayectoria cerrada del segundo sistema $(3, 2), (2, 3), (-3, -2)$ y $(-2, -3)$.

Se preserva la propiedad del sentido de las trayectorias, la propiedad de mandar punto crítico a punto crítico y punto a punto.

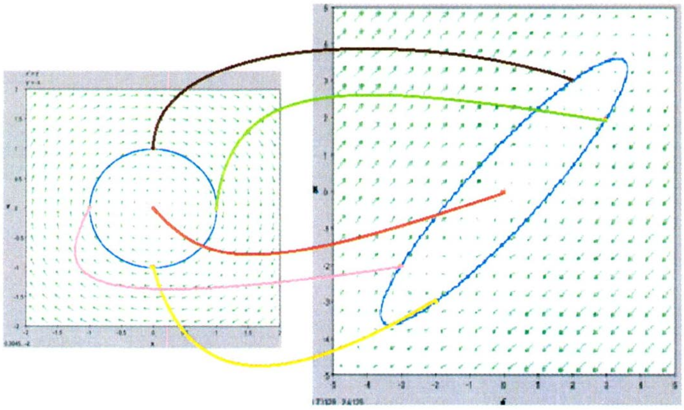


Figura 5. Sistemas equivalentes con la transformación

lineal $\begin{array}{l} r = 3x + 2y \\ s = 2x + 3y \end{array}$, y transformación lineal inversa

$$\begin{array}{l} x = \frac{3}{5}r - \frac{2}{5}s \\ y = -\frac{2}{5}r + \frac{3}{5}s \end{array}.$$

Definición 19 (Sistemas Equivalentes) *Supongamos que $f \in C^1(E_1)$ y $g \in C^1(E_2)$ donde E_1 y E_2 son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$. Entonces los dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(\vec{x})$ **(i)** y $\dot{x} = g(\vec{x})$ **(ii)** se dice que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo que preserve la orientación $H : E_1 \to E_2$, que mapea trayectorias de **(i)** sobre trayectorias de **(ii)**. En este caso, los campos vectoriales f y g también son topológicamente equivalentes. Si $E_1 = E = E_2$ entonces los sitemas **(i)** y **(ii)** se dice que son topológicamente equivalentes en E y los campos vectoriales f y g se dice que son topológicamente equivalentes en E.*

Podemos notar que mientras el homeomorfismo H en esta definición preserva la orientación en $\mathbb{R}^2$ y nos da una deformación continua del retrato fase de **(i)** en el espacio fase de E_1 sobre el retrato fase de **(ii)** en el espacio fase de E_2, no necesita preservar la parametrización por el tiempo a lo largo de las trayectorias.

En general, dos sistemas autónomos son topológicamente equivalentes en E si y sólo si son topológicamente equivalentes a un cierto sistema autónomo de ecuaciones diferenciales que definen a un sistema dinámico. [8]

Podemos cerrar este capítulo, diciendo que si los sistemas **(i)** y **(ii)** son topológicamente equivalentes, entonces los campos vectoriales f y g son topológicamente equivalentes.

2. Invariantes Topológicos en Sistemas Dinámicos Bidimensionales.

Se sabe que la teoria cualitativa de ecuaciones diferenciales provee una visión general de la dinámica de un sistema dinámico, fundamentada en la topología de su espacio fase, lo que nos permite deducir propiedades de las soluciones del sistema dinámico y más aun para nosotros soluciones u órbitas cerradas, sin necesidad de calcularlas cuantitativamente.

En este capítulo se mostraran tres resultados básicos, el teorema de los índices, el teorema de la velocidad aerolar y el teorema de la velocidad aerolar para transformaciones lineales. Además se presenta, como aplicación, una posible generalización de las leyes de Kepler para sistemas planetarios de n estrellas que satisfagan condiciones ideales como, por ejemplo, que las estrellas permanezcan fijas y que los planetas recorran órbitas planas.

Necesitamos los siguientes conceptos.

2.0.2. Momento Angular.

La representación del momento angular $L(t)$ se definirá de la siguiente manera:

Dado un sistema dinámico plano y autónomo S representado por el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

definido en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, el cual tiene al menos una trayectoria cerrada simple.

El momento angular $L(t)$ de la trayectoria cerrada se puede representar por la relación entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares, por la siguiente ecuación:

$$L(t) = r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

Demostración.

El cambio de coordenadas de rectangulares a polares, está dado por las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x &= r\cos x \\ y &= r\sin x \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{y}{x}\right] \\ \dot{\theta} &= \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})}{r^2} \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned}$$

Lo que queda probado.

2.0.3. Leyes de Kepler.

Las tres leyes de Kepler expresan sus conclusiones sobre la primacía de las observaciones de Tycho Brahe, lo que dio una nueva perspectiva al heliocentrismo desarrollado por Copérnico. Describen el movimiento de un planeta alrededor del Sol, con lo que se simplifica la forma de la órbita. Esto permitió a Kepler medir de forma precisa la trayectoria de Marte.

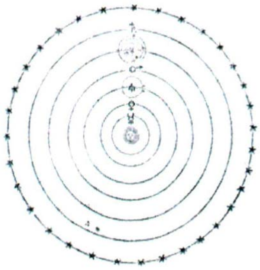
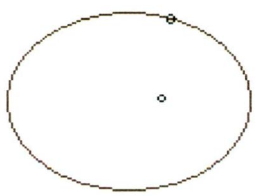


Figura 5. Sistema Copernicano. El sol ocupa el lugar central.

Las tres leyes de Kepler se enuncian a continuación.

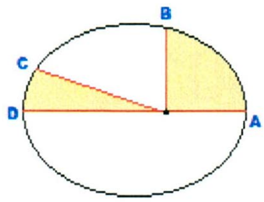
Primer Ley. Las órbitas de los planetas son elipses, y el sol se encuentra en uno de sus focos.

(Los planetas recorren órbitas planas, elípticas)



Segunda Ley. La línea que va del Sol al planeta "barre" áreas iguales en tiempos iguales.

(Un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.)



Tercer Ley. Los cubos de los semiejes mayores de las órbitas planetarias son proporcionales a los cuadrados de los períodos de los respectivos planetas.

(La razón entre el cuadrado del periodo de rotación y el cubo del semieje mayor es idéntica para todos los planetas del sistema solar.)

Es decir

$$\frac{T^2}{R^3} = k = constante,$$

$$T = per\acute{\imath}odo,$$

$$R = semieje\ mayor.$$

2.0.4. Velocidad Areolar.

La velocidad areolar es el área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo, es la velocidad con que un objeto o masa, recorre cierta área en el tiempo que se traslada de un punto a a un punto b.

Sabemos que los planetas se mueven con velocidad areolar constante, así, durante un tiempo cualquiera, el área barrida por el radio vector, por unidad de tiempo, es siempre la misma, cualesquiera que sea la posición del planeta en su trayectoria elíptica.

2.1. Teorema de los Índices.

Ante una equivalencia topológica entre los espacios fase de sistemas dinámicos bidimensionales y autónomos, la suma de los índices que contiene cualquier órbita cerrada se preserva y es igual a $+1$.

Demostración.

Sean S_1 y S_2 sistemas dinámicos bidimensionales autónomos, donde S_1 esta descrito por el campo vectorial $\dot{x} = F(\overrightarrow{x})$ con su espacio fase Ω_1 definido en $\mathbb{R}^2$, con al menos una órbita cerrada (órbita periódica), y S_2 descrito por el campo vectorial $\dot{y} = G(\overrightarrow{y})$ con su espacio fase Ω_2 definido en $\mathbb{R}^2$.

Se dice que S_1 y S_1 son sistemas dinámicos topológicamente equivalentes, si existe T, homeomorfismo $T : \Omega_1 \to \Omega_2$, tal que $T(\varphi(x)) = \psi(T(x))$.

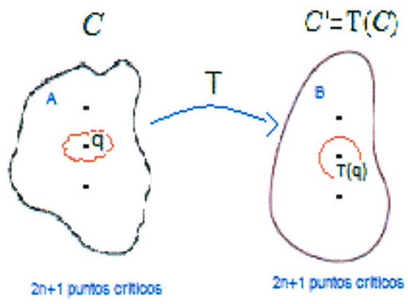
Por hipótesis, T es una equivalencia topológica, entonces, T lleva puntos críticos de S_1 en puntos críticos de S_2 y órbitas cerradas de S_1 en órbitas cerradas de S_2.

Queremos demostrar que la equivalencia topológica T preserva la suma de los índices que contiene cualquier órbita cerrada y además es igual a $+1$.

Para la demostración, recordemos el *teorema 11* de la *sección 2*, que dice en su *apartado 5* que el índice de una curva cerrada es igual a la suma de los índices de los puntos críticos dentro de ella. Además, el *corolario 12* de la misma sección, garantiza que dentro de cualquier órbita cerrada debe haber un número m impar[6] de puntos críticos dentro de ella, de los cuales n con índice -1 y $n+1$ con índice $+1$.

[6] $m = 2n + 1$ con $n = 0, 1, ...$

Por lo anterior, la suma de los índices de los puntos críticos de una órbita cerrada siempre es $+1$. Además, si C es una órbita cerrada en el espacio fase Ω_1 que contiene m puntos críticos, al aplicar T a C se tiene la órbita cerrada $C' = T(C)$ con m puntos críticos en su interior en el espacio fase Ω_2. Quedando probado que ante una equivalencia topológica como T entre los espacios fase de sistemas dinámicos bidimensionales autónomos, se preserva la suma de los índices que contiene cualquier órbita cerrada y siempre es $+1$.



■

Notemos que los planetas orbitan alrededor de las estrellas y que podemos considerarlo como un sistema dinámico bidimensional.

Se sabe que los planetas describen órbitas cerradas planas en su movimiento alrededor de una o más estrellas, al igual que las lunas en su movimiento alrededor de un planeta.

La primera ley de Kepler afirma que nuestro sistema planetario describe una órbita cerrada alrededor de una estrella (el Sol), sin embargo hay sistemas estelares que describen órbitas cerradas alrededor de dos estrellas como, por ejemplo, la de Sirio. Tambien hay sistemas planetarios con tres estrellas, por ejemplo Alfa Centauro, y en genral sistemas estelares multiples.

Sistema con dos estrellas.

http://www.sinapsit.com/wp-content/uploads/2012/08/zrclip_001p3bedebdd.png

Los sistemas estelares descritos se pueden considerar como sistemas dinámicos bidimensionales autonomos en los que las estrellas y los planetas son equivalentes a puntos en los que no se toma en cuenta su masa, por lo que se considera como una unidad de se medida. El siguiente corolario se desprende de forma natural del teorema de los índices, el cual refleja el invariante topológico de que la suma de los índices de puntos críticos se preservan en sistemas equivalentes topológicamente.

2.1.1. Corolario (Primera Ley de Kepler).

Sistemas planetarios con n estrellas y que sean topológicamente equivalentes cuentan con órbitas planetarias cerradas alrededor de 1 o hasta n estrellas.

Por otra parte, es bien conocido en mecánica clásica que cuando un objeto se mueve en una órbita cerrada plana sujeto a una fuerza central su vector momento angular L permanece constante. Esto significa, suponiendo que la masa m del objeto es constante, que su velocidad areolar[7] es constante.

$$\frac{A}{\tau} = \frac{L}{m}.$$

[7]Velocidad areolar: rápidez con la que el vector de posición barre un área.

Donde A es el área barrida por el vector de posición del objeto y τ es el periodo de la órbita cerrada de dicho objeto.

Además, como las unidades del momento angular son de distancia al cuadrado por masa sobre tiempo, entonces, si suponemos que la masa es constante y es igual a una unidad de su medida podemos decir que cuantitativamente la velocidad areolar es igual al momento angular. Bajo estos supuestos, de aquí en adelante usaremos indistintamente los nombres de momento angular y velocidad areolar para referirnos a la misma variable dinámica.

Notemos que cuando usamos la formula integral para determinar el área que contiene una curva cerrada, integramos la velocidad areolar (momento angular) con respecto al tiempo, pero, muy importante, se trata de la velocidad areolar con la que se recorre la curva cerrada.

Considerando lo anterior, podemos mostrar el siguiente resultado.

2.2. Teorema de la Velocidad Areolar.

Ante una equivalencia topológica T entre dos sistemas dinámicos planos y autónomos S_1 y S_2, y que preserve las áreas entre los espacios fase de dichos sistemas, se cumple que la velocidad areolar (el momento angular) media es un invariante.

Demostración.

Sean S_1 y S_2 sistemas dinámicos bidimensionales autónomos con sus respectivos espacios fase Ω_1, Ω_2 definidos en $\mathbb{R}^2$.

Como por hipótesis T es una equivalencia topológica que preserva las áreas entre Ω_1 y Ω_2, entonces para una órbita cerrada C en Ω_1 su correspondiente órbita cerrada $\tilde{C}$ en Ω_2 es $T(C)$.

Sea $P(t)$ un punto de C al tiempo t, entonces la imagen $T(P(t)) = \widetilde{P}(t)$ es un punto de $\tilde{C}$.

Si τ es el periodo de la curva C entonces se cumple que $P(t) = P(t+\tau)$.

Por otra parte se conoce que el área A encerrada por C esta dada por la integral:

$A = \frac{1}{2}\int_0^{\tau}(x\dot{y} - y\dot{x})dt = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} L(t)dt$

donde $L(t)$ es la velocidad areolar de C.

Y el área $\tilde{A}$ encerrada por $\tilde{C}$ esta dada por la integral:

$\tilde{A} = \frac{1}{2}\int_0^{\tau}(r\dot{s} - s\dot{r})dt = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \tilde{L}(t)dt$

donde $\tilde{L}(t)$ es la velocidad areolar de $\tilde{C}$.

Ante la equivalencia topológica se cumple que:

$T(P(t+\tau)) = \tilde{P}(t+\tau)$

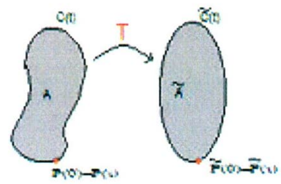
lo que significa que el periodo τ de C y su imagen $\tilde{C}$ es el mismo.

Como T es una equivalencia topológica que preserva las áreas, es decir $A = \tilde{A}$, entonces, por el teorema del valor medio[8]:

$$\overline{L}\cdot\tau = \int_0^{\tau} L(t)dt = \int_0^{\tau} \tilde{L}(t)dt = \overline{L}\cdot\tau$$
$$\therefore \frac{A}{\tau} = \overline{L} = \overline{L} = \frac{\tilde{A}}{\tau}$$

Ahora, como los periodos son los mismos, se sigue que las velocidades areolares medias de S_1 y S_2 son iguales $\overline{L} = \overline{\tilde{L}}$.

[8] *Teorema del Valor Medio para integrales.* Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, existe un número c en este intervalo tal que $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$.



■

Es sabido por la segunda ley de Kepler que, los planetas se mueven con velocidad areolar constante. Es decir, el vector de posición v de cada planeta con respecto a el Sol barre áreas iguales a tiempos iguales.

2.2.1. Corolario A (Segunda Ley de Kepler).

Para sistemas planetarios que sean topológicamente equivalentes y en los que las órbitas planetarias cerradas que satisfagan la condición $(\ddot{x}, \ddot{y}) = \alpha(x, y)$, *se cumple que, siempre que la equivalencia preserve áreas, los momentos angulares son invariantes para las órbitas topológicamente equivalentes.*

Demostración.

Sean SP y SQ dos sistemas planetarios topológicamente equivalentes, con L y $\widetilde{L}$ sus respectivas velocidades areolares. Como $\dot{L} = 0 = \dot{\widetilde{L}}$ en ambos sistemas porque se cumple la condición de que el vector de aceleración es paralelo al vector de posición, entonces por el teorema de la velocidad areolar, el valor del momento angular es el mismo para ambos sistemas.

■

Para todos los planetas alrededor de una estrella, se cumple que la razón entre el periódo de revolución al cuadrado y el radio orbital al cubo se mantiene constante.

Corolario B (Tercera Ley de Kepler). *En la órbita cerrada de un planeta la razón entre el cuadrado de su periódo de revolución y el cubo de su radio orbital es constante y esta razón es invariante ante equivalencias que preserven el área encerrada por la órbita.*

Demostración.

Sea R el radio orbital promedio de la órbita cerrada C del planeta y sea τ su periodo de revolución.

Sea R' el radio orbital promedio de la órbita cerrada $\widetilde{C}$ de un sistema dinámico bidimensional autónomo equivalente a la trayectoría del planeta y sea τ su periodo de revolución.

Sabemos que el área de una curva cerrada está dada por $A = \pi R^2$.

Por el Teorema de la Velocidad Areolar: $A = \overline{L} \cdot \tau = \overline{\widetilde{L}} \cdot \tau = \widetilde{A}$. Donde A =área de C y $\widetilde{A}$ =área de $\widetilde{C}$.

Por lo tanto

$\pi R^2 = \overline{L} \cdot \tau = \overline{\widetilde{L}} \cdot \tau$

$\frac{\pi R^2}{\tau} = \overline{L} = \overline{\widetilde{L}}$

Invirtiendo y elevando al cuadrado

$\frac{\tau}{\pi R^2} = \frac{1}{\overline{L}} = \frac{1}{\overline{\widetilde{L}}}$

$\frac{\tau^2}{\pi^2 R^3 R} = \frac{1}{\overline{L}^2} = \frac{1}{\overline{\widetilde{L}}^2}$

Entonces se tiene que

$$\frac{\tau^2}{R^3} = \frac{\pi^2 R}{\overline{L}^2} = \frac{\pi^2 R}{\overline{\widetilde{L}}^2}$$
$$\frac{\tau^2}{R^3} = k$$

Donde k es constante.

■

Si se impone la restricción de que la equivalencia topológica entre dos sistemas dinámicos planos y autónomos sea una transformación lineal que preserve las áreas, se garantiza que no solo la velocidad areolar media es la misma para ambos sistemas, si no que las velocidades areolares son las mismas. Lo anterior se presenta en el siguiente teorema.

2.3. Teorema de la Velocidad Areolar para Transformaciones Lineales.

Si dos sistemas dinámicos planos y autónomos son equivalentes topológicamente mediante una transformación lineal que preserve las áreas entre sus espacios fase, entonces la velocidad areolar de cada órbita cerrada es una cantidad invariante.

Demostración.

Sea S_1 un sistema dinámico plano y autónomo, descrito por el campo vectorial definido sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = F_1(x, y) \tag{2.1}$$

$$\dot{y} = F_2(x, y) \tag{2.2}$$

entonces el momento angular para cualquiera de sus órbitas cerradas es $L_1(t) = x\dot{y} - y\dot{x}$.

Sea S_2 el sistema dinámico equivalente a S_1 a través de una transformación lineal que preserve áreas de la forma siguiente:

$$s = ax + by$$

$$r = cx + dy$$

donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz de transformación cuyo determinate $(ad - bc)$ debe ser igual a 1.

De esto se sigue que las derivadas de 3.1 y 3.2 son

$\dot{s} = a\dot{x} + b\dot{y}$

$\dot{r} = c\dot{x} + d\dot{y}$

Si ahora calculamos el momento angular de una órbita cerrada de S_2, esto es, $L_2(t) = s\dot{r} - r\dot{s}$, resulta que

$$s\dot{r} - r\dot{s} = acx\dot{x} + adx\dot{y} + bcy\dot{x} + bdy\dot{y} - (acx\dot{x} + bcx\dot{y} + ady\dot{x} + bdy\dot{y}) = (ad - bc)(x\dot{y} - y\dot{x})$$

pero como $ad - bc = 1$ entonces

$$L_1(t) = L_2(t).$$

Por lo tanto, bajo equivalencias topológicas lineales la velocidad areolar de cada órbita cerrada es una cantidad invariante.

■

Lo anterior nos inspira para expresar que los movimientos planetarios y lunares satisfacen el siguiente corolario.

2.3.1. Corolario C (Segunda Ley de Kepler).

Para sistemas planetarios topológicamente equivalentes y en los que dicha equivalencia sea lineal y preserva las áreas, los momentos angulares que sean constantes para las órbitas planetarias son cantidades invariantes.

Demostración.

Por hipótesis, el momento angular es constante para sistemas planetarios topológicamente equivalentes, este valor es invariante de acuerdo con el Teorema de la Velocidad Areolar para una equivalencia topológica que preserva el área y es lineal.

■

2.3.2. Corolario D (Tercera Ley de Kepler).

Siempre en la órbita cerrada de un planeta la razón entre el cuadrado de su periodo de revolución y el cubo de su radio orbital es constante y esta es una cantidad dinámica invariante ante equivalencias topológicas que son transformaciones lineales que preservan el área encerrada por la órbita.

La demostración es la misma que el Corolario B, ya que por hipótesis solo se requiere la condición de transformación lineal en la equivalencia topológica.

3. Ejemplos de Sistemas Dinámicos Bidimensionales con Invariantes Topológicos.

En este capítulo se presentan ejemplos en los que se muestra la aplicación de los teoremas del capítulo anterior, los cuales pueden ayudar a ilustrar más claramente los conceptos dados.

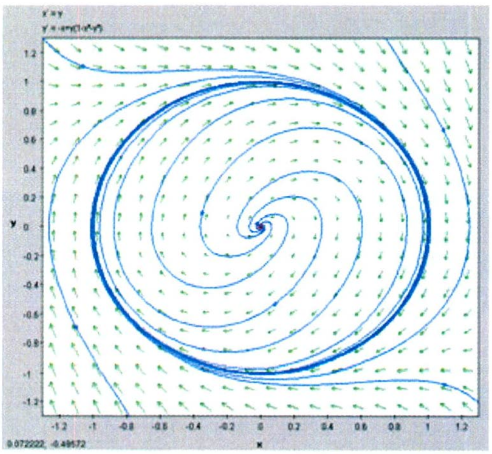
Ejemplo 1.

Dado el siguiente sistema dinámico bidimensional autónomo

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

El sistema dinámico cuenta con una órbita cerrada que es un ciclo límite, como se puede ver en su espacio fase, de hecho es una circunferencia con radio 1. El sistema dinámico tiene índice $+1$.

El área del sistema es π. Ya que el área de una circunferencia es πr^2.



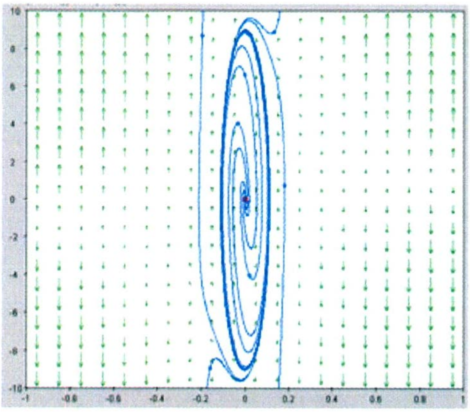
Aplicando la siguiente transformación lineal que preserva las áreas (el determinante de su matriz de transformación o matriz de coeficientes es 1)

$$p = \frac{1}{9}x$$
$$q = 9y$$

con determinante de $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ es 1, se obtiene el sistema equivalente

$$\dot{p} = \frac{1}{81}q$$
$$\dot{q} = -81p - q(1 - 81p^2 - \frac{1}{81}q^2)$$

El sistema dinámico equivalente cuenta con una órbita cerrada que es un ciclo límite, como se puede ver en su espacio fase, de hecho es una elipse. Por el teorema de los índices el sistema equivalente tiene índice +1.



El área del sistema equivalente es π. Ya que el área de una elipse es πab. En este caso $a = 9$ y $b = \frac{1}{9}$.

Por lo tanto las respectivas trayectorias cerradas de los sistemas equivalentes tienen la misma área y el mismo periódo, por lo que se concluye que se cumple el teorema de la velocidad areolar para transformaciones lineales y el teorema de los índices.

Ejemplo 2.

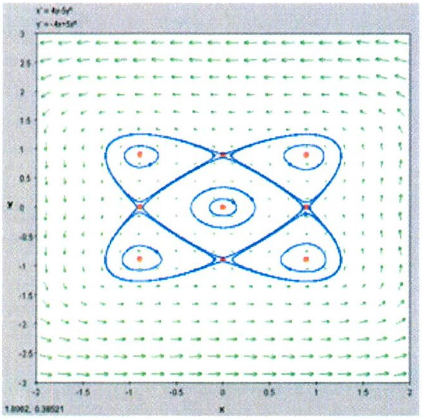
Dado el sistema dinámico representado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} = 4y - 5y^3$$
$$\dot{y} = -4x + 5x^3$$

Es fácil encontrar el índice del sistema observando su espacio fase. El sistema tiene 9 puntos críticos, de los cuales 5 son centro con índice +1 y 4 son puntos silla con índice -1:

Centros	(-0.89,-0.89)	(0.89,0.89)	(0.0)	(-0.89,0.89)	(0.89,-0.89)
Puntos Silla	(-0.89,0)	(0.89,0)	(0,0.89)	(0,-0.89)	

El índice del sistema dinámico es +1. Lo podemos verificar en el espacio fase del sistema, en el que se observan claramente los nueve puntos críticos:



Espacio fase para el sistema

dinámico

$$\dot{x} = 4y - 5y^3$$

$$\dot{y} = -4x + 5x^3$$

Para encontrar un sistema equivalente al sistema dado, apliquemos la siguiente transformación lineal

$$p = x + y$$

$$q = -x + y$$

Su representación matricial es: $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y la transformación lineal es $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, que en forma de sistema de ecuaciones se tiene

$$x = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q$$
$$y = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$$

Derivando el sistema de transformación

$\dot{p} = \dot{x} + \dot{y}$

$\dot{q} = -\dot{x} + \dot{y}$

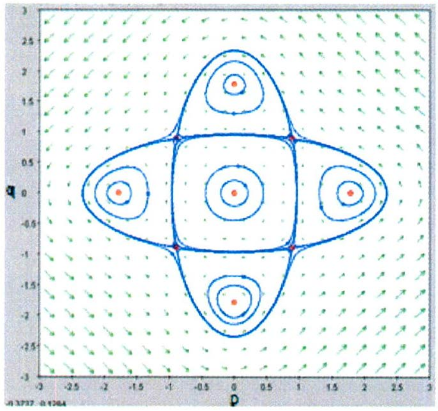
Realizando las sustituciones adecuadas, se obtiene el sistema equivalente

$$\dot{p} = 4q - 5(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q)^3 + 5(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)^3$$
$$\dot{q} = -4p + 5(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q)^3 + 5(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q)^3$$

El sistema equivalente tiene 9 puntos críticos, de los cuales 5 son centros con índice +1, y, 4 son punto silla con índice -1:

Centros	(-1.78,0)	(1.78,0)	(0.0)	(0,1.78)	(0,-1.78)
Puntos Silla	(-0.89,0.89)	(-0.89,-0.89)	(0.89,0.89)	(0.89,-0.89)	

El índice del sistema equivalente dinámico es +1. Lo podemos verificar en el espacio fase del sistema equivalente, en el que se observan claramente los nueve puntos críticos.



Plano fase del sistema equivalente

$(\dot{p}, \dot{q})$.

El teorema de los índices se cumple. Sin embargo como el determinante de la matriz A es 2, la transformación no preserva áreas y no se cumple el teorema de la velocidad areolar para transformaciones lineales.

Como el determinate de la matriz de transformación lineal debe ser 1, para que la equivalencia topológica preserve áreas y se verifique el teorema de la velocidad areolar para transformaciones lineales en sistemas equivalentes, proponemos la transformación

$$r = y$$

$$s = -x + y$$

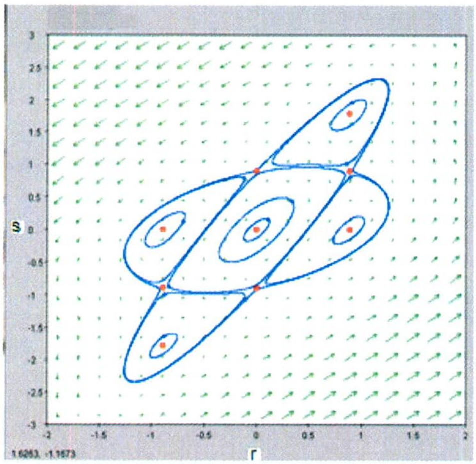
la cual es lineal y preserva áreas pues cumple con que el determinante de su matriz de transformación es 1:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$$

Para encontrar un nuevo sistema equivalente al sistema $(\dot{x} \;\; \dot{y})^T$, se sigue el procedimiento anteriormente descrito, con el cual se obtiene el sistema

$$\dot{r} = -4r + 4s + 5\left(r - s\right)^3$$
$$\dot{s} = -8r + 4s + 5\left(r - s\right)^3 + 5r^3$$

su espacio fase se muestra en la figura siguiente



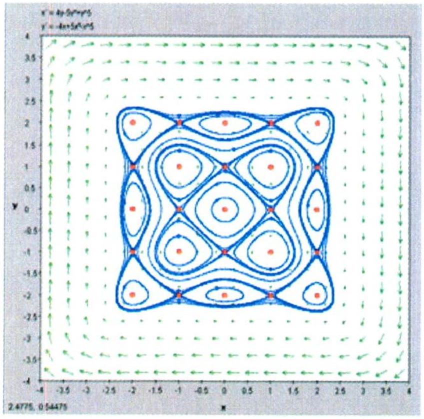
Por el teorema de la velocidad areolar para transformaciones lineales, se concluye que la velocidad areolar de ambos sistemas equivalentes es igual.

Ejemplo 3.

Sea el sistema dinámico plano $P = (\dot{x} \;\; \dot{y})^T$ el cual está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} = 4y - 5y^3 + y^5$$
$$\dot{y} = -4x + 5x^3 - x^5$$

El sistema P cuenta con 25 puntos críticos, de los cuales 13 son centro y 12 son punto silla, por lo que el sistema dinámico P tiene *índice +1*, se puede verificar claramente en su plano fase.



Plano fase del sistema P, con 25 puntos críticos.

Sea $O(x, y)$ el sistema dinámico del oscilador armónico simple:

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = -x$

Escribiendo todo en término de las variables x y y, por ejemplo podemos aplicar la equivalencia topológica $T(x, y) = kP + kO$, para obtener el sistema equivalente a P, que denominaremos Q, el cual está descrito por:

$\dot{x} = k(4y - 5y^3 + y^5 + y)$

$\dot{y} = k(-4x + 5x^3 - x^5 - x)$

Para que la velocidad areolar media sea un invariante topológica para los sistemas equivalentes P y Q, T debe de preservar las áreas, por lo que es necesario saber quien es k.

Veamos, si $\overline{L}_P$ es la velocidad areolar promedio (momento angular promedio) del sistema dinámico P, y $\overline{L}_O$ la velocidad areolar promedio del sistema dinámico O, entonces resulta que la velocidad areolar promedio de Q es $k\overline{L}_Q$.

Si una equivalencia topológica preserva las áreas se cumple que sus velocidades areolares son iguales, esto por el teorema de la velocidad areolar para transformaciones lineales, por lo que Igualando la velocidad areolar promedio del sistema dinámico P con la velocidad areolar promedio del sistema dinámico Q se obtiene:

$$\overline{L}_P = k\overline{L}_Q$$

Para que se preserven las áreas en la equivalencia topológica debe cumplirse que

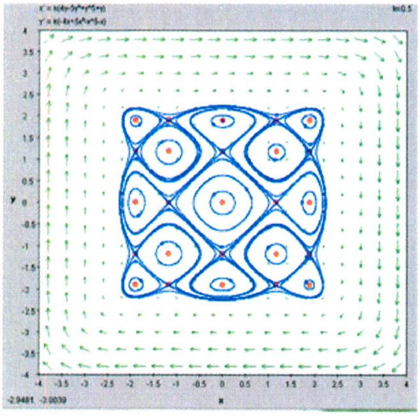
$$k = \frac{\overline{L}_P}{\overline{L}_Q}.$$

Por lo tanto el sistema equivalente a P es

$$\dot{x} = \frac{\overline{L}_P}{\overline{L}_Q}(4y - 5y^3 + y^5 + y)$$
$$\dot{y} = \frac{\overline{L}_P}{\overline{L}_Q}(-4x + 5x^3 - x^5 - x)$$

Por ser sistemas equivalentes y por el teorema de la velocidad areolar, cuando $k = \frac{\overline{L}_P}{\overline{L}_Q}$ sus respectivas velocidades areolares medias son iguales y además el sistema Q tiene 25 puntos críticos, de los cuales 13 son centro y 12 son punto silla, por lo que el sistema dinámico equivalente tiene *índice +1.*

El plano fase de Q que se muestra a continuación tiene un valor de $k = 0{,}5$ que genera un sistema equivalente sin garantizar que la propiedad de preservar el área se cumpla para la equivalencia topológica.



Plano fase para k=0.5, preserva puntos críticos y trayectorias, sin embargo no se podría afirmar que áreas.

Ejemplo 4.

Generalizando el procedimiento que se siguio en el ejemplo 3, donde P y Q son sistemás dinámicos planos autónomos equivalentes topológicamente, en el que se aplica la equivalencia topológica $T(x, y) = KP + KO$, donde K es cualquier constante. Definimos el sistema dinámico O de la siguiente forma:

$$\dot{x} = ay$$

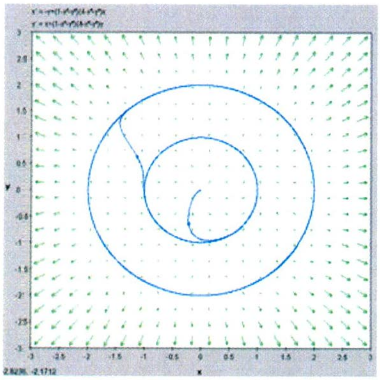
$$\dot{y} = -bx$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, sea el sistema dinámico P descrito por el sistema

$$\dot{x} = -y + (1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)x$$
$$\dot{y} = x + (1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)y$$

el cual tiene dos ciclos límite, uno contiene al otro y tiene un punto crítico en (0,0) como muestra su espacio fase



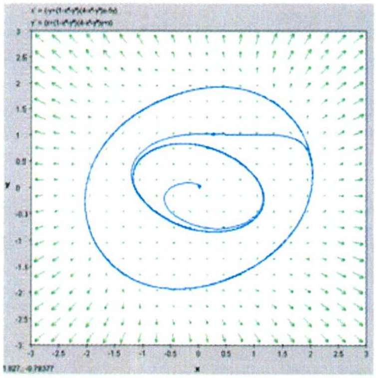
Sea Lp el momento angular de P, el cual está dado por: $x\dot{y} - y\dot{x}$, sustituyendo sus respectivos valores, se obtiene

$$Lp = x^2 + y^2$$

Proponemos el siguiente sistema equivalente representado por Q, con valores $a = -5$ y $b = -1$

$$\dot{s} = K(-t + (1 - s^2 - t^2)(4 - s^2 - t^2)s - 5t)$$
$$\dot{t} = K(s + (1 - s^2 - t^2)(4 - s^2 - t^2)t + s)$$

Para el caso en que $K = 1$, se tiene el espacio fase del sistema Q, el cual preserva los cilcos límite y su punto crítico.



Sabemos que el momento angular de Q, está dado por

$$KLq = s\dot{t} - t\dot{s}$$

haciendo las sustituciones correspondientes, se tiene que $KLq = K(2s^2 + 6t^2)$.

Para que se cumpla la equivalencia topológica que preserve áreas, debemos conocer el valor que debe de tomar K.

Sea A y $\widetilde{A}$ las áreas de los sistemas equivalentes P y Q respectivamente. Igualando las áreas de los dos sistemas equivalentes se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \widetilde{A} \\ K\overline{L}q &= \overline{L}p \\ K &= \frac{\overline{L}p}{\overline{L}q} \end{aligned}$$

Por lo que la equivalencia topológica que preserve las áreas es de la forma siguiente

$$T(x,y) = \frac{\overline{L}p}{\overline{L}q}P + \frac{\overline{L}p}{\overline{L}q}O$$

Ejemplo 5.

Es sabido que si a un sistema dinámico P descrito por el sistema

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = 4x - x^3 + (3{,}5 - x^2)y$$

le superponemos un adecuado[9] sistema hamiltoniano, el Teorema de Peixoto nos garantiza que el sistema dinámico resultante es topologicamente equivalente a P, la importancia de este teorema para el siguiente ejemplo es que nos garantiza estabilidad estructural del sistema cuando el conjunto solución solo contiene puntos fijos y órbitas cerradas, no existen órbitas conectando puntos silla y el número de puntos fijos y órbitas cerradas es finito y cada uno de ellos es hiperbólico.

Por ejemplo consideremos el sistema dinámico Q que es equivalente topológicamente a P

$$\dot{r} = ks + 0{,}01s^3$$
$$\dot{s} = k(4r - r^3 + (3{,}5 - r^2)s)$$

Ahora, falta encontrar el valor de k que nos garantize que la equivalencia topológica preserve áreas.

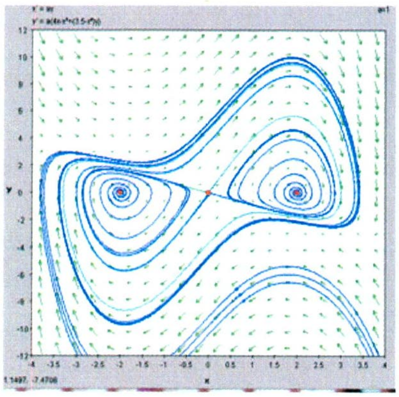
Si $\overline{L}_P$ es la velocidad areolar media del sistema P y definimos la velocidad areolar media del sistema Q por $k\overline{L}_Q$, entonces para que la equivalencia topológica preserve las áreas igualemos las velocidades areolares medias de los dos sistemas equivalentes y encontremos el valor de k.

[9] Adecuado nos indica que preserve la cantidad de puntos críticos y la cantidad de ciclos límite.

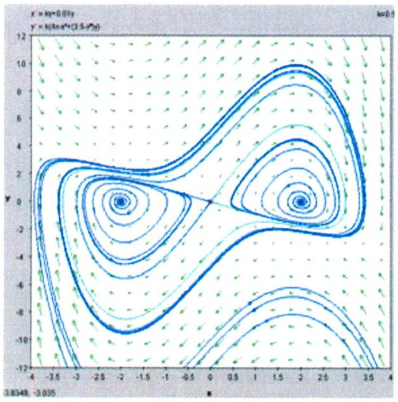
$$\overline{L}_P = k\overline{L}_Q$$

$$k = \frac{\overline{L}_P}{\overline{L}_Q}$$

Por lo tanto los sistemas equivalentes P y Q cumplen con el teorema de la velocidad areolar y el teorema de los índices.



Espacio fase del sistema dinámico P. Con 3 puntos críticos y tres ciclos límite.



Espacio fase del sistema Q para
un valor de $k = 0{,}5$. Con 3
puntos críticos y 3 ciclos límite.

4. Conclusiones

En resumen, en los capítulos 2 y 3 se ha mostrado una serie de resultados que podemos expresar en términos de *invariantes topológicos* y teoremas asociados a los mismos, pues dado que hemos usado equivalencia topológicas entre espacios fase de sistemas dinámicos bidimensionales para investigar que características de los mismos se preservaban, dichos nombres nos parecen los más adecuados para caracterizar nuestros resultados.

Obsérvese que ante las equivalencias topológicas entre sistemas dinámicos los siguientes invariantes jugaron un papel preponderante:

Invariante del comportamiento dinámico equivalente: Ante una equivalencia topológica entre los espacios fase de dos sistemas dinámicos planos y autónomos, las trayectorias de uno corresponden a las trayectorias del otro.

Invariante de los índices: Ante una equivalencia topológica entre los espacios fase de sistemas dinámicos planos y autónomos, los índices de los puntos críticos se preservan.

Invariante dinámico de las órbitas cerradas: Ante una equivalencia topológica entre los espacios fase de sistemas dinámicos planos y autónomos, las órbitas cerradas preservan su carácter dinámico de conservativas.

Invariante del periódo de las órbitas cerradas: Ante una equivalencia topológica entre los espacios fase de sistemas dinámicos planos y autónomos, las órbitas cerradas preservan su carácter dinámico de periódicas y sus respectivos periodos son invariantes.

Agregando algunas restricciones, mostramos la existencia de otros invariantes topológicos que son los resultados principales de esta tesis.

De este modo, hemos podido mostrar en el capítulo 2, que para el caso astronómico, nuestros resultados reproducen las leyes de Kepler.

Cabe señalar que durante el estudio se presentaron algunos ejemplos que se desarrollaron exprofeso y que pueden ser muy ilustrativos de los resultados del capítulo 2.

Nuestra investigación ha mostrado que cuando nos restringimos a sistemas dinámicos que cuenten con órbitas cerradas podemos afirmar que éstas tienen cantidades dinámicas invariantes. Además, nuestros resultados pueden ser de utilidad para el estudio de sistemas dinámicos con ciclos límite.

Referencias

[1] [CT2011] Casarrubias Segura F. y Tamariz Mascarúa A. Elementos de Topología de Conjuntos. Notas fciencias.UNAM, 2011.

[2] [DO1972] De Oyorzábal, Juan. Mecánica. Programa Nacional de Formación de Profesores. ANUIES. México, 1972.

[3] [GR2002] Gustavo N. Rubiano. Topología General. Segunda edición. Universidad Nacional de Colombia. Colombia, 2002.

[4] [HS1974] Hirsch, M. W. - Smale, S. Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal. Alianza Universidad. México, 1974.

[5] [MO2007] Molero, M. Salvador, A. Menorguez, T. Garmendia, L. Análisis Matemático para Ingeniería. Prentice Hall. Madrid, 2007.

[6] [MT1998] Mardsen Jarold E. y Tromba Anthony J. Cálculo Vectorial. Prentice Hall. 4^a Ed. México, 1998.

[7] [PA1991] Palka, B. P. An Introduction to Complex Function Theory. Springer. New York, 1991.

[8] [PE1991] Perko, Lawrence. Differential Equations and Dynamical Systems. Springer-Verlag. New York, 1991.

[9] [SC2000] Silva, Christopher. Introduction to Chaos Communications and Signal Processing. IEEE, 2000.

[10] [SL1970] Seymour-Lipschutz. Topología General. Mc Graw-Hill. México, 1970.

[11] [SS1994] Strogatz, Steven. Nonlinear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley. 1994.

[12] [WS1990] Wiggins, Stephen. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos. Springer. New York, 1990.